

СТАНОВИЩЕ

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:
„Едновременно приближение с операторите на Бернщайн“
за придобиване на
научна степен „доктор на науките“

от

кандидат: **доц. д-р Борислав Радков Драганов,**

Област на висше образование: **4. Природни науки, математика и информатика**

Професионално направление: **4.5. Математика,**

катедра: **„Математически анализ“,**

Факултет по математика и информатика (ФМИ),

Софийски университет „Св. Климент Охридски“ (СУ),

Становището е изготвено от: **проф. д-р Гено Петков Николов, ФМИ, СУ**

в качеството ми на член на научното жури, съгласно Заповед № РД 38-627 / 28.11.2023 г.
на Ректора на Софийския университет.

1. Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали

Представеният дисертационен труд е на английски език със заглавие *Simultaneous approximation by the Bernstein operator*, съдържа 178 страници и включва въведение, 6 глави и списък от цитирани 100 публикации. Кандидатът доц. д-р Борислав Драганов е представил всички изискуеми по процедурата документи, в това число: автореферат (на български и на английски език), творческа автобиография, дипломи за висше образование и за придобиване на ОНС „Доктор“, справка за изпълнението на минималните национални изисквания по чл. 2б, ал. 2 и 3 от ЗРАС на РБ, декларация за представения дисертационен труд, декларация от доц. Иван Гаджев за равностоен принос на кандидата в тяхна съвместна статия, справка за цитирания на статиите, чието съдържание е включено в дисертационния труд.

2. Данни и лични впечатления за кандидата

Д-р Борислав Драганов завършва висшето си образование във ФМИ – СУ през 1998г. През периода 1999 - 2002г. е докторант във ФМИ с научен ръководител проф. д-р Камен Иванов, като през 2002г. придобива ОНС „Доктор“ за дисертация озаглавена

„Нов метод за характеризация на K -функционали и приложение в теория на апроксимациите“. От този период датират и личните ми впечатления от д-р Драганов. Научните му интереси са главно в областта на теория на апроксимациите, и по-специално, установяването на точни оценки за скоростта на приближенията с линейни и нелинейни оператори в различни функционални пространства, Фуриеров анализ и приложенията му, приближения на функции по информация от дискретен тип, и др. Интересува се също от история на математиката, философия на науката и физика. Добре познавам научните интереси и публикациите на д-р Драганов и поради това, че бях рецензент по конкурса, с който той бе избран за „доцент“ в катедра „Математически анализ“ на ФМИ – СУ през 2011г. Д-р Драганов е преподавател във ФМИ-СУ от 2002г.: като асистент/гл. асистент (2002-2011), и като доцент от октомври 2011г. досега. Паралелно с това, той работи в ИМИ – БАН като математик (2004-2007), научен сътрудник I ст. (2007-2012), а от юли 2012г. е избран за доцент в секция „Математическо моделиране и числен анализ“.

3. Съдържателен анализ на научните постижения на кандидата в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени по процедурата

През 1912г. Сергей Натанович Бернщайн въвежда оператор, с който дава доказателство на основополагащия за теорията на апроксимациите резултат, че всяка непрекъсната функция върху краен затворен интервал може да се приближи равномерно с произволна отнапред зададена точност с алгебричен полином. Въпреки че от тогава досега са предложени (и продължават да се предлагат) многобройни апроксимационни оператори и се изучават свойствата им, операторът на Бернщайн остава най-популярен и предмет на интензивни изследвания и в наши дни, за което свидетелстват многобройните публикации върху него.

Предмет на дисертационния труд е едновременното приближаване с тегла на функции и техните производни с оператора на Бернщайн и негови модификации (итерирани булеви суми и целочислени варианти). Накратко ще се спра на съдържанието на дисертацията.

Във въведението са посочени (прави и обратни) оценки за приближенията без тегло с оператора на Бернщайн в термини на класическите модули на непрекъснатост (гладкост) с равномерна и с контролирана от функцията $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$

променлива стъпка. Цитира се важният резултат на Вороновская, обосноваващ лимитираната скорост на сходимост на приближенията с оператора на Бернщайн, и се посочва свойството му едновременно да приближава функции и техните производни.

В Глава 1 са изброени основни свойства на модулите на гладкост и на К-функционалите, дефинират се техни варианти с тегла и се посочва наличието на еквивалентност между модули на гладкост и подходящи К-функционали. В Глава 2 д-р Драганов доказва някои неравенства за влагане, т.е. оценки за нормите на междинни производни (класически пример е неравенството (2.1) на Ландау-Колмогоров, но тук се разглеждат специфични варианти с Якобиеви тегла и диференциални оператори в термините на $Df = \varphi^2 f''$). Тези две глави са с подготвителен характер, и по нататък, в доказателствата на основни резултати в дисертацията, с цел избягване повторението на аналогични разсъждения, авторът се позовава на тях.

В Глава 3 д-р Драганов доказва права оценка за едновременното приближение с полиномите на Бернщайн в равномерна норма с Якобиеви тегла (Теорема 3.3). Тази оценка е с К-функционала

$$K_s^D(f, t)_w = \inf_{g \in C^{\sigma+2}[0,1]} \left\{ \|w(f - g^{(s)})\| + t \|w(Dg)^{(s)}\| \right\},$$

като авторът доказва, че той може да се замени със сума от по-прости характеристики на приближаваната функция (Теорема 3.5). Драганов показва, че получената от него оценка от тип на Джаксън е точна, като в Теорема 3.8 доказва съответни силни обратни неравенства. В края на Глава 3, като използва връзката между операторите на Бернщайн и на Канторович, Драганов доказва аналогична характеристика за скоростта на приближение на последните.

В Глава 4 се изучават едновременните приближения с итерирани булеви суми на операторите на Бернщайн $B_{r,n} := I - (I - B_n)^r$, където I е идентитета и $r \in \mathbb{N}$. За скоростта на едновременните приближения с тези оператори в равномерна норма с тегла на Якоби в Теорема 4.3 Драганов доказва оценка отгоре с К-функционала

$$K_{r,s}^D(f, t)_w := \inf_{g \in C^{2r+\sigma}[0,1]} \left\{ \|w(f - g^{(s)})\| + t \|w(D^r g)^{(s)}\| \right\}$$

(за приближението на s -та производна), като и тук показва, че той може да се замени с еквивалентни по-прости характеристики (Теорема 4.4 - 4.8). С доказването на силно обратно неравенство в Теорема 4.10 авторът показва точността на правата оценка в Теорема 4.3. Накрая, от резултатите за итерирани булеви суми на операторите на Бернщайн, д-р Драганов извежда аналогични прави и обратни неравенства за едновременните приближения с итерирани булеви суми на оператора на Канторович.

В Глава 5 се разглеждат едновременните приближения с две модификации на полиномите на Бернщайн, задаващи полиноми с цели коефициенти. Едната от тях, \tilde{B}_n , е въведена от Канторович през 1931 г., а Драганов предлага втора, която означава с \hat{B}_n . Следва да се отбележи, че операторите \tilde{B}_n и \hat{B}_n не са линейни и непрекъснати, а $\tilde{B}_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ не е и ограничен. Изискването да се апроксимира с полиноми с целочислени коефициенти води до допълнителни ограничения върху множеството на приближаваните функции: някои от тях естествени (да приемат целочислени стойности в краищата на интервала), а други неочаквани (производните да се анулират в краищата на интервала, неравенства за „допирателните“). При такива предположения д-р Драганов доказва в Теорема 5.1 и 5.4 прави оценки за приближаването с тези оператори, и показва, че наложените допълнителни ограничения върху множеството от приближаваните функции са *необходими*. В Теорема 5.5 Драганов доказва допълващи Теорема 5.1 и 5.4 слаби обратни съотношения. Както и в предните две глави, Драганов използва връзката между операторите на Бернщайн и Канторович, за да дефинира целочислена версия на последните и докаже права оценка за едновременните приближения с тях.

В Глава 6 се изследва приближението на оператора $\mathcal{D}f(x) = \frac{1}{2}\varphi^2(x)f''(x)$ с оператора на Вороновская $D_n f(x) = n(B_n f(x) - f(x))$.

За тези приближения в Теорема 6.1 Драганов доказва прави и слаби обратни неравенства на Вороновская, и като следствие установява характеризацията

$$\|D_n f - \mathcal{D}f\| = O(n^{-\alpha}) \iff K_{2,\varphi}(f'', t)_{\varphi^2} = O(t^\alpha)$$

при предположение $f \in W_\infty^2(\varphi)[0, 1]$, $0 < \alpha < 1$.

Оценявам високо резултатите, включени в дисертационния труд на доц. д-р Борислав Драганов. Той показва отлична осведоменост за съвременното състояние на теорията на приближенията с линейни оператори. В доказателствата на своите резултати той използва техники и резултати от класически източници като монографиите на Ditzian и Totik [22] и на DeVore и Lorentz [18], както и (за обратните неравенства) на фундаменталната статия на Ditzian и Ivanov [23]. Конкретната реализация в постановката за едновременни приближения с тегла е далеч нетривиална и изисква, освен познаването на методологията, много технически умения и изобретателност, качества, които д-р Драганов определено показва при установяването на представянията на производните на оператора на Бернщайн и в доказателствата на неравенства за влагане и на различните неравенства от тип на Джексън, Бернщайн и Вороновская. Съгласуваните прави и обратни апроксимационни теореми, доказани от Драганов, подобряват и/или обобщават съвременни резултати на изтъкнати специалисти от теория на апроксимациите като Totik, Gonska, Zhou, Knoor, Mache, Ivanov и др, и създават впечатление за една завършеност на теорията на едновременните приближения с оператори на Бернщайн в равномерна норма при тегла на Якоби.

4. Аprobация на резултатите

Дисертационния труд на д-р Драганов се основава на девет статии, публикувани през последните 10 години. Шест от статиите му са в престижни научни списания с импакт фактор: три в *J. Approx. Theory*, две в *Results Math.* и една в *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, останалите са: една в Годишника на Софийския университет и две в трудовете на международни конференции по конструктивна теория на функциите. Само с две от публикациите си ([27] и [29] от списъка в дисертацията) Драганов надхвърля минималните национални изисквания по чл. 2б, ал. 2 и 3 от ЗРАС на РБ за „доктор на науките” за научна област Област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, Показател В (135т. при минимум от 100т.). Седем от тези публикации са самостоятелни, а две са в съавторство съответно с Иван Гаджев и Камен Иванов. Убеден съм, че приносът на д-р Драганов в съвместните статии е равностоеен на този на съавторите му (както впрочем е декларирал И. Гаджев). За статиите с номера от [25] до [33], върху които се основава дисертационния труд, кандидатът е намерил общо 15 цитирания, от които три в монография издадена от Birkhäuser, четири във WoS и една в Scopus,

останалите са в препринти, дисертационни трудове и непубликувани ръкописи. Тези цитирания съгласно методиката за оценяване носят 52 точки по Показател Д. Д-р Драганов е автор на общо 38 научни публикации, от които 24 излезли от печат след хабилитацията му. В приложените документи кандидатът посочва още 6 цитирания (четири във WoS и две в Scopus) на своя публикация в *J. Approx. Theory* от 2010г., получени след хабилитацията му, с което той удовлетворява минималните изисквания за „доктор на науките“ по Показател Д. Бегла справка във Web of Science показва, че дори някои от последните публикации на д-р Драганов са намерили отзвук в работите на други автори, така например, [28] и [36] имат по две цитирания, а [34] има едно цитиране (номерацията е от CV-то на кандидата).

Резултатите, представени в дисертационния му труд и публикациите на които се основава са докладвани от д-р Драганов на престижни международни форуми в Испания, Полша, Франция, Австрия, Унгария, Украйна, Турция, както и на конференциите по конструктивна теория на функциите провеждани в България.

Установявам, че научните трудове на кандидата превишават минималните национални изисквания по чл. 2б, ал. 2 и 3 на ЗРАСРБ и на допълнителните изисквания на СУ „Св. Климент Охридски“ за придобиване на научната степен „доктор на науките“ в научната област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика. Тези резултати не са представяни от кандидата в предишни процедури за придобиване на научно звание и академична длъжност. Няма доказано по законоустановения ред плагиатство в представения дисертационен труд и научни трудове по тази процедура.

5. Качества на автореферата

Авторефератът е на български и на английски език е в обем от 35 /36 страници, в него се цитират 55 заглавия. Той дава пълно описание и коректно представя резултатите и съдържанието на дисертационния труд.

6. Критични бележки и препоръки

Нямам критични бележки към рецензираните дисертационен труд и придружаващи го трудове и документи. Дисертационният труд е написан в много добър стил (подобно на стила в книгата *Теория на мярката* на кандидата, на която имах удоволствието да бъда рецензент). Като препоръка, смятам, че дисертационният

труд може да бъде публикуван като монография от реномирано издателство, бидейки полезен източник за специалистите в теория на приближенията.

7. Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го научни трудове и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащи се в тях научни приноси, **потвърждавам**, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ „Св. Климент Охридски“ за придобиване от доц. д-р Борислав Радков Драганов научна степен „доктор на науките“ в научната област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика. В частност кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

Въз основа на гореизложеното, **препоръчвам на научното жури да присъди на доц. д-р Борислав Радков Драганов научна степен „доктор на науките“ в научната област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика.**

22.02.2024г.

Изготвил становището:

(проф. дмн Гено Николов)