

# Рецензия

на дисертационен труд  
за придобиване на научна степен "Доктор на науките"

**Област 4.** Природни науки, математика и информатика,

**Научно направление 4.5:** "Математика"(Математически анализ)

**Тема:** "Едновременно приближение с операторите на Бернщайн"

**Автор:** доц. д-р Борислав Радков Драганов

## 1 Тема на дисертационния труд

Представеният от доц. д-р Борислав Радков Драганов дисертационен труд на английски език със заглавие **Simultaneous Approximation by the Bernstein Operator** е с обем от 178 страници, състои се от въведение, 6 глави и списък от цитирани 100 публикации. Както и заглавието показва, предмет на дисертацията е изследването на едновременното приближаване с тегла на функции и техните производни с оператора на Бернщайн и негови модификации (итерирани булеви суми и целочислени варианти).

## 2 Литературен обзор

Прави впечатление, че доц. Драганов познава отлично съвременното състояние на теорията на приближенията с линейни оператори. Направеният литературен обзор и големият брой цитирани източници демонстрират както дълбоко му познаване на областта на изследванията, така и възможностите му творчески да я развива.

## 3 Методика

В изследванията си дисертантът използва основно техники и резултати от класически източници в теорията на апроксимациите, като монографиите на Дициан и Тотик [22], на Де Вор и Лоренц [18] и (за обратните неравенства) фундаменталната статия на Дициан и Иванов [23].

## 4 Съдържание и резултати на дисертационния труд

Във въведението са посочени (прави и обратни) оценки за приближенията без тегло с оператора на Бернщайн в термини на класическите модули на непрекъснатост (гладкост) с равномерна стъпка и с контролирана от базисната теглова функция  $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$  променлива стъпка. Цитира се важният резултат на Вороновская, обосноваващ лимитираната скорост на сходимост на приближенията с оператора на Бернщайн, и се посочва свойството му едновременно да приближава функции и техните производни.

В Глава 1 са изброени основни свойства на  $K$ -функционалите и на модулите на гладкост, дефинират се техни варианти с тегла и се посочва наличието на еквивалентност между модули на гладкост и (подходящи)  $K$ -функционали.

В Глава 2 д-р Драганов доказва някои неравенства за влагане, т.е. оценки за нормите на междинни производни (класически пример е неравенството (2.1) на Ландау-Колмогоров), но тук се разглеждат специфични варианти с тегла на Якоби и диференциални оператори в термините на  $Df(x) = \varphi^2(x)f''(x)$ , където  $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$ . Резултатите, представени в тази глава, са публикувани в статии (2),(3) и (9).

Първите две глави на дисертацията са с подготвителен характер, като по-нататък в доказателствата на основни резултати в дисертацията, с цел избягване повторението на аналогични разсъждения, авторът се позовава на тях. Това е важен стилистичен подход.

В Глава 3 д-р Драганов доказва права оценка за едновременното приближение с полиномите на Бернщайн в равномерна норма с тегла на Якоби (Теорема 3.3). Тази оценка е с  $K$ -функционала

$$K_s^D(f, t)_w = \inf_{g \in C^{s+2}[0,1]} \{ \|w(f - g^{(s)})\| + t \|w(Dg)^{(s)}\| \}.$$

Авторът доказва, че този  $K$ -функционал може да се замени със сума от по-прости характеристики на приближаваната функция (Теорема 3.5). Показано е, че получената оценка от тип на Джаксън е точна, като в Теорема 3.8 доказва съответни силни обратни неравенства. В края на Глава 3, като използва връзката между операторите на Бернщайн и на Канторович, Драганов доказва аналогична хорактеризация за скоростта на приближение на последните. Резултатите, представени в тази глава, са публикувани в статии (3) и (4).

В Глава 4 се изучават едновременните приближения с итерирани булеви суми на операторите на Бернщайн,

$$\mathcal{B}_{r,n} = I - (I - B_n)^r,$$

където  $I$  е идентитетът и  $r \in \mathbb{N}_+$ . За скоростта на едновременните приближения с  $\mathcal{B}_{r,n}$  в равномерна норма с тегла на Якоби в Теорема 4.3 за приближението на  $s$ -та производна Драганов доказва оценка отгоре с  $K$ -функционала

$$K_{r,s}^D(f, t)_w = \inf_{g \in C^{2r+s}[0,1]} \{ \|w(f - g^{(s)})\| + t \|w(D^r g)^{(s)}\| \},$$

като и тук показва, че  $K$ -функционалът може да се замени с еквивалентни по-прости характеристики (Теорема 4.4-4.8). С доказването на силно обратно неравенство в Теорема 4.10 авторът показва точността на правата оценка в Теорема 4.3. Накрая, от резултатите за  $\mathcal{B}_{r,n}$  д-р Драганов извежда аналогични прави и обратни неравенства за едновременните приближения с итерирани булеви суми на оператора на Канторович. Материалът, представен в тази глава, е публикуван в статии (1),(2),(3),(7) и (8).

В Глава 5 се разглеждат едновременните приближения с две модификации на полиномите на Бернщайн, задаващи полиноми с цели коефициенти. Задачата е класическа, поставена е от Бернщайн и целта е да се определи до каква степен изискването коефициентите на алгебричните полиноми да са цели числа влияе на порядъка на най-доброто приближение с алгебрични полиноми в равномерната норма. През 1931г. Канторович решава тази задача с помощта на следната модификация на  $B_n$

$$\tilde{B}_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \left[ f \left( \frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} \right] x^k (1-x)^{n-k},$$

където  $[\alpha]$  е цялата част на реалното число  $\alpha$ .

Следвайки Канторович, Б. Драганов получава оценка отгоре на грешката на  $\tilde{B}_n$  за  $f \in C[0, 1]$ , такава, че  $f(0), f(1) \in \mathbb{Z}$ . Доказва също, че едновременното приближение чрез  $\tilde{B}_n(f)$  удовлетворява подобна оценка.

Драганов предлага и втора целочислена модификация на полиномите на Бернщайн чрез  $\hat{B}_n(f)$ ,

$$\hat{B}_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \left\langle f \left( \frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} \right\rangle x^k (1-x)^{n-k}$$

за  $f \in C[0, 1]$  и  $x \in [0, 1]$ , където  $[\alpha]$  е най-близкото цяло число до реалното число  $\alpha$ .

Доказва се, че апроксимационните процеси, генерирани от  $\tilde{B}_n$  и  $\hat{B}_n$ , в равномерната норма върху  $[0, 1]$  се насищат с порядък на насищане  $1/n$  и ако  $\|\tilde{B}_n(f) - f\| = o(1/n)$  или  $\|\hat{B}_n(f) - f\| = o(1/n)$ , то подобно на операторите на Бернщайн имаме  $\tilde{B}_n(f) = \hat{B}_n(f) = f$  и  $f$  е полином от първа степен с цели коефициенти. В следващите теореми е установено, че целочислените форми на полиномите на Бернщайн  $\tilde{B}_n$  и  $\hat{B}_n$  притежават свойството на едновременното приближение, като е получена оценка отгоре за грешката. Следва да се отбележи, че операторите  $\tilde{B}_n$  и  $\hat{B}_n$  не са линейни и непрекъснати, а операторът  $\tilde{B}_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  дори не е ограничен. Изискването да се апроксимира с полиноми с целочислени коефициенти води до допълнителни ограничения върху множеството на приближаваните функции: някои от тях естествени (да приемат целочислени стойности в краищата на интервала), а други неочаквани (производните да се анулират в краищата на интервала, неравенства за допирателните). При такива предположения д-р Драганов доказва в Теорема 5.1 и 5.4 прави оценки за приближаването с тези оператори, и показва, че наложените допълнителни ограничения върху множеството от приближаваните функции са необходими. В Теорема 5.5 Драганов доказва допълващи Теорема 5.1 и 5.4 слаби обратни съотношения. Както и в предните две глави, Драганов използва връзката между операторите на Бернщайн и Канторович, за да дефинира целочислена версия на последните и да докаже права оценка за едновременните приближения с тях. Резултатите в тази глава са публикувани в статии (5) и (6).

В последната Глава 6 се изследва приближенито на оператора  $\mathcal{D}f(x) = \frac{\varphi^2(x)}{2} f''(x)$ , дефиниран за  $f \in W_\infty^2(\varphi)[0, 1]$  с с наречения на името на Вороновская оператор

$$D_n f(x) = n(B_n f(x) - f(x)).$$

За тези приближения в Теорема 6.1 Драганов доказва прави и слаби обратни неравенства на Вороновская и като следствие установява характеристиката

$$\|D_n f - \mathcal{D}f\| = O(n^{-\alpha}) \iff K_{2,\varphi}(f'', t)_{\varphi^2} = O(t^\alpha).$$

за функции удовлетворяващи  $f \in W_\infty^2(\varphi)[0, 1]$  и  $0 < \alpha < 1$  Резултатите, представени в тази глава, са публикувани в статия (9), написана съвместно с И. Гаджев.

## Приноси на дисертационния труд

Получените в дисертацията резултати са съществен принос в изследваните важни и актуални теми в теорията на апроксимациите, което показва, че представеният труд е подходящ и достатъчен за придобиване на научната степен **доктор на науките**. Конкретната реализация в постановката за едновременни приближения с тегла е далеч нетривиална и изисква, освен познаването на методологията, много технически умения и изобретателност - качества, които д-р Драганов определено показва при установяването на представянията на производните на оператора на Бернщайн и в доказателствата на неравенства за влагане и на различните неравенства от тип на Джексън, Бернщайн и Вороновская. Съгласуваните прави и обратни апроксимационни теореми, доказани от Драганов, подобряват и/или обобщават съвременни резултати на изтъкнати специалисти от теория на апроксимациите като Тотик, Гонска, Жу, Кнуп, Махе и други, и създават впечатление за една завършеност на теорията на едновременните приближения с оператори на Бернщайн в равномерна норма при тегла на Якоби.

## 5 Забележки и коментари по дисертационния труд

Съществени забележки към така представения дисертационен труд няма как да се изкажат. Написан е много стилоно и професионално. Изложението във всяка глава включва описание на известни предходни резултати от други автори, имащи отношение към темата, а доказателствата на отделните твърдения са добре структурирани и подробни или с отправка към друг източник. Дисертационният труд има визията на завършен и самостоятелен (не сглобка на статии) научен продукт и е препоръчително да бъде публикуван като монография в реномирано издателство. Така би бил не само полезен източник за специалистите в теория на приближенията, но и реклама на българската школа в тази област.

## 6 Публикации по дисертационния труд

Дисертационния труд на д-р Борислав Драганов се основава на девет статии, публикувани през последните 10 години. Шест от публикациите са в реномирани научни списания с импакт фактор: (3), (5) и (7) от списъка по-долу са в *J. Approx. Theory*, (2) и (9) в *Results Math*, а (8) в *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math*. Другите три са: (1) е в Годишника на Софийския университет, а (4) и (6) в трудове на международните конференции по Конструктивна теория на функциите. Да отбележим, че дори само с публикации (3) и (5) са удовлетворени минималните национални изисквания за **доктор на науките** по Показател В.

(1) B. R. Draganov, Upper estimates of the approximation rate of combinations of iterates of the Bernstein operator, *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* **101** (2013), 95–104.

(2) B. R. Draganov, On simultaneous approximation by iterated Boolean sums of Bernstein operators, *Results Math.* **66** (2014), 21–41.

(3) B. R. Draganov, Strong estimates of the weighted simultaneous approximation by the Bernstein and Kantorovich operators and their iterated Boolean sums, *J. Approx. Theory* **200** (2015), 92–135.

(4) B. R. Draganov, An exact strong converse inequality for the weighted simultaneous approximation by the Bernstein operator, In: “Constructive Theory of Functions, Sozopol

2016” (K. Ivanov, G. Nikolov, R. Uluchev, Eds.), pp. 75–97, Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2018.

(5) B. R. Draganov, Simultaneous approximation by Bernstein polynomials with integer coefficients, *J. Approx. Theory* **237** (2019), 1–16.

(6) B. R. Draganov, Converse estimates for the simultaneous approximation by Bernstein polynomials with integer coefficients, In: “Constructive Theory of Functions, Sozopol 2019” (B. Draganov, K. Ivanov, G. Nikolov, R. Uluchev, Eds.), pp. 39–51, Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2020.

(7) B. R. Draganov, Corrigendum to “Strong estimates of the weighted simultaneous approximation by the Bernstein and Kantorovich operators and their iterated Boolean sums” [J. Approx. Theory 200 (2015) 92–135], *J. Approx. Theory* **252** (2020), 105321.

(8) B. R. Draganov, A strong converse inequality for the iterated Boolean sums of the Bernstein operator, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* **67** (2022), 591–598.

(9) B. R. Draganov, I. Gadjev, Direct and converse Voronovskaya estimates for the Bernstein operator, *Results Math.* **73**:11 (2018).

## 7 Авторство на получените резултати

Статиите от (1) до (8) са самостоятелни, а за (9) има приложена декларация от авторите за равнопоставеност на резултатите.

## 8 Автореферат и авторска справка

Представеният автореферат се състои от 36 стр. В него ясно и точно са формулирани основните задачи, които са изследвани в дисертационния труд. Преставени са систематично всички получени резултати и накрая е дадена библиографична справка. Справките с публикациите по дисертацията и със съответните цитирания са заложени както в самата дисертация, така и в автореферата.

## 9 Цитирания на публикациите от дисертационния труд

Доц. Борислав Драганов е представил справка с 15 забелязани цитирания на представените от него 9 публикации по дисертацията. Тези числови показатели доказват както актуалността на проблемите, върху които работи, така и важноста на получените резултати. Направената справка показва, че публикациите на д-р Драганов са получили достатъчно (като количество и представителност и въпреки относително малкото време от появата им) цитирания, и той покрива и минималните национални изисквания за **доктор на науките** по Показател Д.

## 10 Заключение

Като вземем предвид високото професионално ниво на научно-изследователската работа на доц. Борислав Драганов и факта, че представеният от него дисертационен труд напълно отговаря на съвкупността от критерии и показатели за придобиването на съответната степен съгласно изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за неговото прилагане, и съответния правилник на СУ относно дисертации за придобиване на научни степени, убедено предлагам на Почитаемото жури *да присъди на доц. д-р Борислав Радков Драганов научната степен Доктор на науките* в областта на висше образование 4.Природни науки, математика и информатика, Професионално направление: 4.5. Математика (Математически анализ).

София, 21.02.2024г.

Рецензент:

(доц. д-р Първан Първанов)