

РЕЦЕНЗИЯ

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:

Едновременно приближение с операторите на Бернщайн

за придобиване на научна степен „доктор на науките“
от

кандидат: доц. д-р Борислав Радков Драганов
Факултет по математика и информатика (ФМИ),
Софийски университет „Св. Климент Охридски“ (СУ),

в Област на висшето образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
в професионално направление 4.5 Математика

Рецензията е изготвена от проф. д-мн Камен Ганчев Иванов, Институт по математика и информатика при БАН – София, в качеството ми на член на научното жури, съгласно Заповед № РД 38-627 / 28.11.2023 г. на Ректора на Софийския университет.

Рецензията е изготвена според изискванията на:

- Закона за развитието на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ);
- Правилника за прилагане на ЗРАСРБ;
- Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в Софийски университет „Св. Климент Охридски“.

1. Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали

Представеният дисертационен труд е написан на английски език, съдържа 178 страници и се състои от увод и 6 глави. Представената библиография от 100 заглавия заема 9 страници.

Представени са и два автореферата на дисертационния труд: на български език (36 страници) и на английски език (35 страници). Всеки от авторефератите е придружен от идентични по съдържание библиографии от по 55 заглавия. Подредбата на заглавията се различава в двата автореферата, защото три от заглавията в автореферата на български език са изписани с кирилица и са сортирани в началото на списъка.

2. Данни и лични впечатления за кандидата

Борислав Радков Драганов завършва средно образование през 1993 г. в Първа английска гимназия - София. През 1998 г. той получава магистърска степен от Факултета по математика и информатика на Софийския университет „Св. Климент Охридски“, а през 2004 г. придобива Образователната и научна степен “доктор” след успешна защита на дисертация на тема “Нов метод за характеризация на K -функционали и приложение в теория на апроксимациите”.

От 2002 г. Борислав Драганов работи като асистент и главен асистент, а от 2011 г. до сега – като доцент в катедра „Математически анализ“, Факултет по математика и информатика, Софийския университет „Св. Климент Охридски“. Същевременно, от 2004 г. той работи в секция „Математическо моделиране“, преобразувана по-късно в секция „Математическо моделиране и числен анализ“, на Институт по математика и информатика при БАН – София.

Познавам Борислав Радков Драганов от следването му във ФМИ на СУ. Бил съм ръководител на дипломната му работа за магистър, както и на дисертацията за получаване на ОНС “доктор”. След това сме извършили съвместно значителни по обем научни изследвания в областта на Теория на апроксимациите, отразени в редица съвместни публикации. През целия период Борислав Драганов се изиявяваше като отдаден на творческия процес учен, устремен към научни открития, а същевременно много работоспособен и изключително коректен колега.

3. Съдържателен анализ на научните и научноприложните постижения на кандидата, съдържащи се в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени по процедурата

Естествената постановка на задачите, свързани с едновременното приближаване на функции f с операторите на Бернщайн $B_n f$, води до из-

ползването на норми от вида $\|w\mathcal{D}f\|_{L^\infty}$, където w е подходящо тегло от тип на Якоби и \mathcal{D} е полиномиален диференциален оператор. Разбира се такъв израз може да бъде оценен отгоре със сума на няколко мономиални диференциални оператори, но това в пореобладаващото количество случаи задебелява оценката и не позволява получаването на обратни твърдения. Една от основните ценности на получените от Борислав Драганов резултати е намирането на точните диференциални оператори \mathcal{D} , които позволяват получаването на съгласувани прави и силни обратни теореми. Нека поясним, че “едновременно приближение” означава приближение на няколко последователни производни на дадена функция със съответните производни на приближаващия оператор.

Глава 1 има помощен характер. В нея са изложени определенията и свойствата на класическите K -функционали и тяхната характеристикация с подходящи модули на гладкост. Под “класически” тук имаме предвид K -функционали, които са дефинирани с помощта на мономиални диференциални оператори и са обстойно изучени в монографията на Дитциан и Тотик. Комбинации от тези характеристики са използвани в твърденията в следващите глави.

Глава 2 също има помощен характер и съдържа разнообразни теореми за влагане между теглови пространства от диференцируеми функции. Част от резултатите са добре известни, а други са нови, като ценността им е породена от възникнали в дисертацията въпроси. Тези резултати са публикувани в статии 26, 27 и 33 от библиографията на дисертацията.

В глава 3 са доказани съгласувани прави и силни обратни оценки на грешката при едновременното приближение с оператора на Бернщайн в L^∞ норма с тегло. Теорема 3.3 съдържа правата оценка

$$\|w(B_n f - f)^{(s)}\| \leq c K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w.$$

Тук редът на производните s е произволно естествено число, теглото w е от тип на Якоби, т.е. $w(x) = x^{\gamma_0}(1-x)^{\gamma_1}$, като ограничението е $0 \leq \gamma_0, \gamma_1 \leq s$. K -функционалът $K_s^D(g, \delta)_w$ съдържа члена $\|w(Dg)^{(s)}\|_{L^\infty}$, т.е. L^∞ норма с тегло w на s -тата производна на оператора Dg , $Dg(x) = x(1-x)g''(x)$.

При условията на Теорема 3.3 в Теорема 3.8 е доказана силната двучленна обратна оценка

$$K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w \leq c (\|w(B_n f - f)^{(s)}\| + \|w(B_{Rn} f - f)^{(s)}\|),$$

където R е подходяща целочислена константа.

Теорема 3.26 съдържа силната едночленна обратна оценка

$$K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w \leq c \|w(B_n f - f)^{(s)}\|.$$

Тук редът на производните s е до 6, а не произволен както в Теорема 3.8. Доказателството на Теорема 3.26 е много по-сложно от доказателството на Теорема 3.8, което води и до ограничението $s \leq 6$.

В случая $s = 0$ тези теореми са получени през 90-те години на 20 век в работите на Дитциан и рецензента, на Тотик и на Кноп и Жу. Резултатите за $s \geq 1$ са оригинално постижение на Борислав Драганов.

Глава 3 също съдържа и характеристика на K -функционала $K_s^D(g, \delta)_w$ с комбинации на по-прости функционали и на подходящи модули, например в Теорема 3.31. Подобни на описаните до тук резултати са получени и за обобщените оператори на Канторович, например в Теорема 3.41.

Резултатите от Глава 3 са публикувани в статии 27, 28 от библиографията на дисертацията.

В глава 4 са разгледани итерирани булеви суми $\mathcal{B}_{r,n}$ на оператора на Бернщайн, $\mathcal{B}_{r,n} = I - (I - B_n)^r$. Такива суми се разглеждат за подобряване на реда на насищане n^{-1} на оператора на Бернщайн – до n^{-r} за $\mathcal{B}_{r,n}$. Резултати, предхождащи разглежданите тук, са тези на Гонска и Жу и на Динг и Као.

Резултатите в Глава 4 обобщават тези от Глава 3 (с изключение на силната едночленна обратна оценка). В Теорема 4.3 е получена правата оценка с подходящия K -функционал, а в Теорема 4.10 – силната двучленна обратна оценка. Глава 4 също съдържа и характеристика на използваните в тези оценки K -функционали, както и съответните резултати за итерирани булеви суми на обобщените оператори на Канторович, например в Теорема 4.25.

Резултатите от Глава 4 са публикувани в статии 25, 26, 27, 31, 32 от библиографията на дисертацията.

В глава 5 са доказани прави и слаби обратни оценки на грешката за едновременното приближение чрез две модификации (на Канторович и на Драганов) на полиномите на Бернщайн, които представляват алгебрични полиноми с *цели коефициенти*. И двете модификации представляват *нелинейни оператори*, като този на Канторович е неограничен и прекъснат, а на Драганов – ограничен и прекъснат. Тези свойства не

позволяват получаването на пълни аналози на резултатите от Глави 3 и 4. Правите оценки са получени в Теорема 5.1 и 5.4, а слабите обратни оценки са получени в Теорема 5.5. Тези оценки са в сила при редица естествени ограничения за приближаваната функция в краищата на интервала, например очевидното изискване $f(0)$ и $f(1)$ да са цели числа.

Резултатите от Глава 5 са публикувани в статии 29, 30 от библиографията на дисертацията.

В глава 6 се изследва скоростта на сходимост към 0 на израза

$$B_n f(x) - f(x) - \frac{1}{2n} Df(x),$$

който представлява остатъка в теоремата на Вороновская. Доказани са права и слаба обратна оценка (Теорема 6.1 и Следствие 6.3).

Продължавайки горното развитие на $B_n f(x) - f(x)$ в ред по степените на n^{-1} Бернщайн получава нови оператори, като в Теорема 6.4 и Следствие 6.5 са получени права и слаба обратна оценка за следващия оператор в тази редица.

Резултатите от Глава 6 са публикувани в статия 33 (в съавторство с И. Гаджев) от библиографията на дисертацията.

Обобщавайки гореизложеното, дисертацията съдържа цялостно изложение на получените досега резултати по едновременно приближаване с операторите на Бернщайн и модификациите им. Авторът е възпроизвел пълно чуждите резултати и много съществено ги е подобрил. Според мен най-голяма трудност представлява доказателството на силната еднотелна обратна оценка в Теорема 3.26. Друг много съществен принос е намирането на подходящите К-функционали (придружени с доказването на съгласувани прави и силни обратни оценки), както и характеризирането им с комбинации на няколко прости модула.

4. Аprobация на резултатите

Новите резултати в представения дисертационен труд са публикувани в девет статии (с номера от 25 до 33 в библиографията). Шест от статиите са в списания с импакт-фактор:

- Три (номера 27, 29, 31) са в *Journal of Approximation Theory* (WoS Q1/Q2), като 31 е допълнение към 27;

- Две (номера 26, 33) са в *Results in Mathematics* (WoS Q2);
- Една (номер 32) е в *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.* (WoS Q4).

Една от останалите три статии е в Годишника на СУ, а две са в трудовете на Международната конференция “Constructive theory of functions”.

Осем от статиите са самостоятелни, а статията с номер 33 е свместна с Иван Гаджев. За последната има декларация за равностоен принос на двамата съавтори.

Борислав Драганов е приложил списък от 15 цитирания (без автоцитирания) на посочените 9 статии.

Моето мнение е, че:

- научните трудове отговарят на минималните национални изисквания (по чл. 2б, ал. 2 и 3 на ЗРАСРБ) и съответно на допълнителните изисквания на СУ „Св. Климент Охридски“ за придобиване на научна степен „доктор на науките“ в област на висшето образование: 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление 4.5 Математика. Само с 2 публикации, например номера 27 и 29 в *Journal of Approximation Theory*, Борислав Драганов надхвърля минималните национални изисквания за показател Г. Списъкът на цитатите показва, че те са достатъчни за покриване на минималните национални изисквания за показател Д.
- представените от кандидата резултати в дисертационния труд и научните трудове към него не повтарят такива от предишни процедури за придобиване на научно звание и академична длъжност;
- в представения дисертационен труд и научните трудове по тази процедура няма плагиатство, като всички резултати на други автори са подходящо и пълно цитирани.

5. Качества на автореферата

Авторефератът (във вариантите на български и английски езици) отговаря на всички изисквания за изготвянето му.

Получените резултатите и съдържанието на дисертационния труд са коректно и пълно представени.

6. Критични бележки и препоръки

Дисертационният труд е написан много добре. Теоремите са добре формулирани, доказателствата им са пълни. Отделните глави започват с известните резултати на други автори, като същевременно съдържат и сравнение на резултатите на автора с чуждите резултати. Авторът е прекрасно осведомен и цитира обстойно всички известни към момента резултати.

Нямам критични бележки към дисертационния труд. Минималното количество печатни грешки не затруднява гладкото изложение на този сложен материал.

7. Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го научни трудове и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащи се в тях научни и научноприложни приноси, потвърждавам, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ „Св. Климент Охридски“ за придобиване от кандидата на научна степен „доктор на науките“ в научната област 4. Природни науки, математика и информатика и професионално направление 4.5 Математика. В частност кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представения дисертационен труд и придружаващите го научни трудове. Въз основа на гореизложеното, **убедено препоръчвам** на научното жури да присъди на

доц. д-р Борислав Радков Драганов

научната степен „доктор на науките“ в научната област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика.

23.02.2024 г.

Изготвил рецензията:

(проф. д-р Камен Ганчев Иванов,
Институт по математика и информатика – БАН)