Р Е Ц Е Н З И Я

от чл.-кор. Олег Кръстев Мушкаров,
Институт по математика и информатика, БАН

на дисертацията на Иван Минчев Минчев "Геометрия на кватернионно-контактните многообразия и проблем на Ямабе" за придобиване на научната степен "доктор на науките" в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика.

Представям рецензията си като член на Научното жури, назначено със заповед № РД 38-113 от 19. 02. 2020 г. на Ректора на СУ "Св Климент Охридски" проф. дфн Анастас Герджиков и решение на Факултетния съвет на Факултета по математика и информатика от 17. 02. 2020, протокол № 2. Тя е изготвена според изискванията на:

- Закона за развитието на академичния състав в Република България;
- Правилника за прилагане на ЗРАСРБ;
- Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в СУ "Св. Климент Охридски".

1. Дисертацията на Иван Минчев е посветена на актуални въпроси от диференциалната геометрия и геометричния анализ, свързани с изучаването на кватернионно-контактните (QC) структури. Тези структури са въведени от Оливие Бикар през 2000 г. като важно средство за изследване на конформните граници в безкрайността на кватернионно-Келеровите многообразия. Трябва да се отбележи също, че многообразията снабдени с такива структури (QC-многообразия) и строго псевдоизпъкналите CR-многообразия са моделни категории за суб-Риманови многообразия със специални групи от холономии.

Въвеждането на QC-многообразията е мотивирано от факта, че Айнщайновите деформации на стандартните метрики на комплексните, кватернионните и октонионните симетрични пространства са във взаимно-еднозначно съответствие с метрики от типа на Карно-Каратеодори върху конформните им граници в безкрайността. Ще напомня, че ако g е Риманова метрика върху многообразие M с граница N, то един конформен клас $[h]$ от Риманови метрики върху N се нарича *конформна безкрайност* на g ако съществува функция ρ, която е положителна върху M и се анулира върху N до първи ред, и за която метриката $\rho^2 g$ се продължава непрекъснато върху N до метрика от $[h]$. Стандартен пример е хиперболичната метрика върху кълбото $\mathbb{B}^{n+1}$, чиято конформна безкрайност е конформния клас на стандартната метрика върху сферата $\mathbb{S}^n$. В тази насока Бикар поставя общия въпрос за намиране на Айнщайновите метрики, чиито конформни граници в безкрайността са метрики от типа на Карно-Каратеодори. Този въпрос е изследван най-пълно в комплексния случай, като за Келер-Айнщайнови метрики той е решен през 1980 г. от Ченг и Яу. За кълбото(реално хиперболично пространство) горният въпрос е решен от Грахъм и Ли през 1991 г. Общ резултат в размерност 4 е този на Льо Брун, който през 1982 г. доказва с помощта на туисторни методи, че всеки конформен клас върху 3-мерно реално-аналитично многообразие е конформна безкрайност на автодуална Айнщайнова метрика, дефинирана в негова "малка" 4-мерна околност. Естествено обобщение на тази теорема в кватернионния случай е получено от Бикар през 2000г., който доказва, че при $n \geq 2$ всяка реално-аналитична QC-структура върху $(4n+3)$-мерно многообразие е конформна безкрайност на еднозначно определена кватернионно-Келерова метрика, дефинирана в негова "малка" $(4n+4)$-мерна околност. През 2006г. Душмин намира необходими и достатъчни условия за валидността на този резултат в размерносг 7.

Ще напомня, че QC-структура върху $(4n+3)$-мерно многообразие M е разпределение H с коразмерност 3 върху M, което се задава локално като ядро на 1-форма със стойности в $\mathbb{R}^3$, за която рестрикциите върху H на диференциалите на трите координатни 1-форми са фундаменталните форми на кватернионна структура върху H. Тази дефиниция определя и най-общо казано двете основни цели на дисертацията. Първата е изследването на геометричната връзка между кватернионно-Келеровите и 3-Сасакиевите структури с породените от тях QC-структури. Втората цел е използване на аналитични методи от суб-Римановата геометрия за частично решаване на проблема на Ямабе за QC-структури върху кватернионните групи на Хайзенберг от произволна размерност и намиране на най-добрата константа в L^2- неравенството на Фоланд и Щайн върху тези групи.

Сега ще се спра по-подробно на съдържанието и основните приноси на дисертацията, която е разделена на Увод и 5 глави.

Глава 1 има подготвителен характер. В първия параграф се дефинират най-важните диференциално-геометрични понятия, свързани с кватернионно-Келеровите многообразия, конструкцията на техните туисторни пространства и естествените комплексна и холоморфно контактна структури върху тях. Подробно е описана и обратната туисторна конструкция, която дава възможност за строене на кватернионно-Келерови многообразия с помощта на комплексно-алгебрични методи. Туисторните методи са важни за тази тематика, тъй като са в основата на доказателствата на известния резултат на ЛеБрун за съществуване на безкрайномерни фамилии от пълни кватерионно-Келерови метрики върху единичното кълбо B^{4n+4} и на споменатата по-горе теорема на Бикар. В края на този параграф са дадени явни описания на туисторните пространства на кватернионното проективно пространство $\mathbb{HP}^n = Sp(n+1)/Sp(n)Sp(1)$ и на кватернионното хиперболично пространство $\mathbb{HH}^n = Sp(n;1)/Sp(n)Sp(1)$. Вторият параграф на тази глава е посветен на базисните свойства на QC-структурите. Понятието *конформна безкрайност* е обяснено подробно и е илюстрирано с моделния пример на кватернионното хиперболично пространство и подходящи деформации на неговото туисторно пространство, разгледани от ЛеБрун. Друго приложение на туисторните методи е конструкцията на Бикар на интегруеми CR-структури върху туисторните пространства на QC-многообразия. Останалата част на параграфа е посветена на дефиницията и основните свойства на свързаността на Бикар (Теорема 2.4), които се използват съществено по-нататък. В третия параграф на първа глава е дадено подробно описание на кватернионните групи на Хайзенберг $\mathbf{G}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}^n \times Im\mathbb{H}$ и техните ляво-инвариантни QC-структури. Тези групи са основен обект на изследване в дисертацията във връзка с решаването на QC-проблема на Ямабе и намирането на най-добрата константа в известното L^2- неравенство на Фоланд и Щайн върху тях.

Глава 2 е базирана на студията [IMV14] и е основна за дисертацията. В нея е развита диференциално-геометрична и аналитична техника, с помощта на която е решен частично QC-проблема на Ямабе в конформно-плоския случай, който е еквивалентен на този за кватернионните групи на Хайзенберг от произволна размерност.

Ще напомня, че класическият проблем на Ямабе гласи, че ако (M, g) е компактно Риманово многообразие от размерност ≥ 3, то съществува метрика в конформния клас на g, която има постоянна скаларна кривина. Решаването на този проблем, дължащ се на работите на математици като Ямабе, Трудингер, Обен и Шоен, е крайъгълен камък в развитието на теорията на нелинейните частни диференциални уравнения. В комплексния случай аналога на проблема на Ямабе е за строго псевдоизпъкнали CR-многообразия, като в този случай ролята на метрика се изпълнява от формата на Леви, тази на конформна метрика-от контактна форма, която анулира разпределениео на Леви (*псевдоермитова структура*), а ролята на скаларна кривина-от въведената през 1978 г. независимо от Уебстър и Танака скаларна кривина на псевдоермитова структура. В тези термини CR-проблемът на Ямабе е поставен и решен по същество от Джерисън и Ли през 1987 г., а през 2001г. Гамара и Якуб допълват техния резултат в оставащите случаи на 3-мерни и на конформно-плоски CR-многообразия. Проблемът на Ямабе за QC-многообразия е кватернионен аналог на този за CR-многообразия, като в случая става дума за съществуване на конформна смяна на каноничната контактна $\mathbb{R}^3$-значна 1-форма, чиято свързаност на Бикар има постоянна скаларна кривина. Този проблем е решен от Уанг в 2005г. в суб-критичния случай, когато константата на Ямабе на QC-многообразието е строго по-малка от тази на каноничната QC-структура на кватернионната група на Хайзенберг със същата размерност.

Използвайки подходяща конформна смяна може да се покаже, че за произволно QC-многообразие (M^{4n+3}, H) QC-проблемът на Ямабе е еквивалентен на намирането на решения на следното нелинейно частно диференциално уравнение

$$4\frac{n+2}{n+1}\,\triangle u - \,u\,Scal \;=\; -Cu^{\frac{n+2}{n+1}}\;, \tag{1}$$

известно като QC-уравнение на Ямабе. Тук $\triangle$ е хоризонталният суб-Лапласиан на свързаността на Бикар за дадена метрика на H; $Scal$ е нейната QC-скаларна кривина, а C е произволна положителна константа. За случая на $(4n+3)$-мерната кватернионна група на Хайзенберг QC-уравнението на Ямабе приема вида

$$\triangle u = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(T_\alpha^2 u \;+\; X_\alpha^2 u \;+\; Y_\alpha^2 u \;+\; Z_\alpha^2 u\right) \;=\; -\frac{C(n+1)}{4(n+2)}\,u^{\frac{n+2}{n+1}}. \tag{2}$$

С точност до константен множител това е уравнението на Ойлер-Лагранж за екстремалите на L^2-влагането на Фоланд-Щайн.

Основната идея за решаване на уравнението (2) следва подхода от статиите [LP] и [JL3] за решаване на Римановия и CR-проблема на Ямабе. Важна първа стъпка в тази насока е свеждането на това уравнение до подходяща геометрична система. За целта в параграфи 4 и 5 на Глава 2 се изследва подробно свързаността на Бикар, като основните резултати са Теорема 4.13 , в която е доказано, че QC-тензорът на Ричи се изразява чрез нейната торзия, Теорема 5.8, където са получени полезни равенства за хоризонталните дивергенции на кривината и торзията на свързаността на Бикар и Теорема 5.9, в която е доказан важният факт, че QC-Айнщайновите метики имат постоянна скаларна кривина. Тези резултати се използват съществено в доказателството на следната:

Теорема C. Нека (M^{4n+3}, H, g) *е QC- многообразие с положителна QC-скаларна кривина, за която предполагаме допълнително, че е константа, ако* $n = 1$. *Следните условия са еквивалентни:*

a). (M^{4n+3}, H, g) *е QC-Айнщайново многообразие.*

b). M^{4n+3} *е локално 3-Сасакиево многообразие.*

c). *Торзията на свързаността на Бикар се анулира.*

Целта на параграф 6 е да се опишат конформните трансформации, запазващи условието за QC-айнщайновост на свързаността на Бикар. Основният резултат е следната:

Теорема A. Нека $\Theta = \frac{1}{2h}\Theta_0$ *е конформна деформация на стандартната QC-структура* Θ_0 *върху групата на Хайзенберг. Ако* Θ *е също QC-Айнщайнова структура, то с точност до лява транслация*

$$h(q, \omega) \;=\; c\,\Big[\big(1 \;+\; \nu\,|q|^2\big)^2 \;+\; \nu^2\;|\omega|^2\Big],\;\; (q, \omega) \in \mathbb{H}^n \times Im\mathbb{H},$$

където c *и* ν *са положителни константи. Всички функции* h *от този вид имат това свойство.*

В параграф 7 се изследват специални класове от функции, които запазват кватернионната структура на кватернионните пространства, на техните хиперповърхнини и на QC-многообразията. Реалните части на тези функции се наричат кватернионно плюрихармонични и са свързани с конформните деформации, запазващи QC-Айнщайновите тензори. Разглеждат се също и така наречените анти-CRF функции върху хиперермитови контактни многообразия, чиито координатни функции изпълняват хоризонталните уравнения на Коши-Риман-Фютер (Твърдение 7.17). Реалните части на тези функции играят важна роля в по-нататъшните разглеждания в дисертацията. Необходимите за целта аналитични свойства са доказани в Теорема 7.20 .

Целта на параграф 8 е изучаването на QC-векторните полета, които определят инфинитезималните конформни автоморфизми на QC-структурите. В Твърдение 8.8 е показано, че те зависят от три функции удовлетворяващи определени условия за съгласуване, които се опростяват значително в случая на 3-Сасакиеви многообразия. С тяхна помощ се доказва важната Теорема 8.10, която при допълнително геометрично условие характеризира QC-структурите хомотетични на 3-Сасакиевите структури в термините на векторните полета на Рииб.

Получените резултати в параграфи 6-8 се използват в параграф 9 за доказателство на един от главните резултати в дисертацията. Това е Теорема B, която дава частично решение на проблема на Ямабе за групата на Хайзенберг.

Теорема B. Нека $\eta = f\,\eta_0$ е конформна деформация на стандартната контактна форма η_0 върху сферата $\mathbb{S}^{4n+3}$. Да предположим, че η има константна QC-скаларна кривина. Ако съответното на η вертикално допълнение е интегруемо, то с точност до константен множител, η се получава от η_0 чрез конформен QC-автоморфизъм на сферата. В случай, че $n > 1$, същият извод е в сила за функции f, чиито реални части са кватернионнозначни анти-CRF функции.

Глава 3 на дисертацията е основана на статията [IMV16]. В нея продължават изследванията върху геометрията на QC-Айнщайновите структури и тяхната връзка с 3-Сасакиевите структури. Параграф 10 е посветен на 7-мерния случай. Основният резултат е Теорема D, която комбинирана с Теорема 5.9 показва, че QC-скаларната кривина на произволно QC-Айнщайново многообразие е константна. Важно следствие от този факт и Теорема C е, че всяко QC-Айнщайново многообразие с ненулева QC-скаларната кривина е локално QC-хомотетично на 3-Сасакиево многообразие. Доказателството на Теорема D използва въведения от Иванов и Василев [IV1] QC-аналог на конформния тензор на Вайл и разширение на Теорема A за поточково QC-конформния случай. В параграф 11 се въвежда така наречената *вертикална* свързаност на QC-многообразие, която е основно техническо средство за изследване на QC-Айнщайновите многообразия. Това е базирано на Теорема 11.3, която ги характеризира като QC-многообразия с плоска вертикална свързаност. С нейна помощ в параграф 12 са получени структурните уравнения на QC-Айнщайновите многообразия в термините на контактната 1-форма и нейния външен диференциал (Теорема 12.1). Основният резултат в последния параграф на тази глава е Твърдение 13.3, което показва, че в типичния случай QC-Айнщайновите структури с нулева QC-скаларна кривина са разслоения над хипер-Келерови многообразия. Освен това е доказано, че всяко QC-Айнщайново многообразия с ненулева QC-скаларна кривина притежава две различни Айнщайнови Риманови метрики, което обобщава известен резултат на Боер-Галицки-Ман [BGN] за случая на 3-Сасакиеви многообразия.

Целта на Глава 4 е намирането на всички решения на QC-проблема на Ямабе върху 7-мерната сфера $\mathbb{S}^7$, т.е на всички контактни 1-форми на каноничната и QC-структура, които имат постоянна QC-скаларна кривина. Резултатите в тази глава са публикувани в [IMV10].

Да напомним, че поставеният по-горе проблем е решен в Теорема B за произволна размерност, но при допълнителното условие за интегруемост на вертикалното допълнение на контактната форма. В тази глава е доказано, че в размерност 7 това условие може да се премахне. По-точно, в сила е следният резултат:

Теорема E. Нека η е конформна деформация на стандартната контактна 1-форма η_0 върху единичната сфера S^7. Ако η има константна QC-скаларна кривина, то, с точност до мултипликативна константа, η се получава от

η_0 чрез конформен QC-автоморфизъм на сферата. В частност, QC- константата на Ямабе $\lambda(S^7)$ е равна на $48\,(4\pi)^{1/5}$ и се достига само за образите на η_0 при конформни QC-автоморфизми на сферата.

Важна мотивация за изследването на QC-проблема на Ямабе върху сферата е неговата връзка с определянето на най-добрата константа и съответните екстремали в L^2-неравенството на Фоланд и Щайн за кватернионната група на Хайзенберг. С помощта на Теорема E този въпрос е решен напълно в 7-мерния случай.

Теорема F. Най-добрата константа в L^2-неравенството на Фоланд и Щайн върху 7-мерната кватернионна група на Хайзенберг $\mathbb{H} \times Im\mathbb{H}$ е $S_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^{3/5}}$. Всяка неотрицателна екстермала на неравенството се получава чрез транслация и хомотетия от функцията

$$v(q,\omega) \;=\; \frac{2^{11}\sqrt{3}}{\pi^{3/5}}[(1+|q|^2)^2 \;+\; |\omega|^2]^{-2},\;(q,\omega)\in\mathbb{H}\times Im\mathbb{H}.$$

Доказателството на Теорема E използва съществено Теорема 15.4, в която е изведена специална дивергенчна формула за 7-мерно QC-многообразие, чиято структура е конформно еквивалентни на 3-Сасакиева структура. Тя е аналог на подобни формули в Римановата и CR-геометрията.

Изследванията в последната глава на дисертацията са публикувани в статията [IMV12]. Те са посветени на определянето на най-добрата константа в L^2-неравенството на Фоланд и Щайн върху кватернионна група на Хайзенберг от произволна размерност и намирането на неотрицателните екстремали на това неравенство. Трябва да се отбележи, че използваните методи в тази глава са чисто аналитични и са базирани на свойствата на конформния суб-Лапласиан на групата. За разлика от 7-мерния случай, този подход не дава възможност да бъдат определени всички решения на QC-уравнението на Ямабе, а само тези, които минимизират QC-функционала на Ямабе.

Теорема G. a) Най-добрата константа в L^2-неравенството на Фоланд и Щайн за $(4n+3)$-мерната кватернионна група на Хайзенберг е

$$S_2 \;=\; \frac{\left[2^{-2n}\;\omega_{4n+3}\right]^{-1/(4n+6)}}{2\sqrt{n(n+1)}},$$

където $\omega_{4n+3} = 2\pi^{2n+2}/(2n+1)!$ е обемът на единичната сфера $S^{4n+3}\subset\mathbb{R}^{4n+4}$. Неотрицателните екстремали на неравенството са функциите от вида

$$F(q,\omega) \;=\; \gamma\left[(1+|q|^2)^2 \;+\; |\omega|^2\right]^{-(n+1)},\;(q,\omega)\in\mathbb{H}^n\times Im\mathbb{H},\;\gamma=const, \tag{3}$$

и тези, които се получават от F чрез транслация и хомотетия.

b) QC-константата на Ямабе на стандартната QC-сфера е

$$\lambda(S^{4n+3},H^{can}) \;=\; 16\,n(n+2)\;\left[((2n)!)\,\omega_{4n+3}\right]^{1/(2n+3)}. \tag{4}$$

Доказателството на Теорема G използва техники, разработени в статиите [BFM] и [FL] за намиране на точни неравенства от типа на Мозер-Трюдингер за CR-сферата и логаритмични неравенства на Харди-Литълууд-Соболев върху групата на Хайзенберг.

В заключение ще отбележа, че за получаване на резултатите в дисертацията Иван Минчев е преодолял редица трудности от идеен и технически характер и практически използва целия апарат на съвременната диференциална геометрия и геометричния анализ.

2. Най-важните резултати в дисертацията са включени в 1 студия и 3 статии, които са приети за печат в реномираните международни математически списания Memoars of AMS (IF-1.727), Journal of European Mathematical Society(IF-1.353), Math Research Letters(IF-0.716) и Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa(IF-0.683). Студията и 3-те статии са съвместни със С. Иванов и Д. Василев. Считам, че приносът на Иван Минчев в четирите статии е равностоен на останалите автори. Това се потвърждава и от неговата декларация,която ми беше изпратена допълнително. Той е представил информация за 13 цитирания на студията и една от статиите, като всички са в списания с висок импакт-фактор.

3. Имам следните технически бележки:

1. В библиографията на автореферата са пропуснати имената на авторите на статии [CDKR1], [D1], [Sal1], [Va2] . Същото се отнася и за [CDKR1] в дисертацията.

2. В Декларацията за авторство заглавието на дисертацията е изписано непълно.

4. Авторефератът правилно отразява основните резултати и научните приноси на дисертацията.

Заключение. В дисертацията на Иван Минчев са направени редица важни теоретични обобщения и са решени актуални и трудни въпроси от диференциалната геометрия и геометричния анализ на кватернионно-контактните многообразия, които представляват значителен принос в тези съвременни математически области. Това и представените наукометрични данни показват, че дисертационният труд отговар на всички критерии и показатели за придобиване на научната степен "доктор на науките"на ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в СУ "Св. Климент Охридски". Това ми дава основание убедено да препоръчам на членовете на почитаемото Научно Жури да гласуват "за" присъждането на Иван Минчев Минчев на научната степен "доктор на науките"в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика.

05.05.2020 г. Подпис:

(чл.-кор. Олег Мушкаров)