Рецензия на дисертационния труд
Фрагментируемост и функционално-аналитичен подход към необходими условия за оптималност
с автор проф. д-р Надежда Костадинова Рибарска
за научна степен доктор на науките
от доц. д-р Милен Иванов, катедра МА, ФМИ-СУ

1 Увод

Целта на тази рецензия е да покаже по убедителен начин, че настоящият дисертационен труд отговаря на изискванията за научната степен доктор на науките.

2 Съдържателен анализ на научните постижения

2.1 Общ поглед

Дисертацията се състои от две части, които в много отношения са противоположни. Първата се занимава с фрагментируемост и нейните приложения, а втората – с условия за оптималност в теорията на управлението. Свързващата част е функционалният анализ, като първата част е по към топологията, а втората по към приложенията. Също така първата част съдържа приноси на автора, които понастоящем са почти класически, и е завършена, докато втората е рекапитулация на междинен етап на настоящи изследвания.

2.2 Преглед на Първа Глава

Не е лесно да бъде обяснено с няколко думи понятието фрагментируемост, но може би от добре познатите е най-близко до метризуемост. Така например стандартно може да се покаже, че ако дуалното пространство на дадено банахово пространство е сепарабелно, то слабата топология върху единичното кълбо е метризуема. Аналогично за слабата-звезда топология върху дуалното кълбо на сепарабелно банахово пространство. Ако се интересуваме от най-добри норми (т.нар. пренормиране), то в първия случай имаме Фреше диференцуема норма (т.е. обичайната диференцуемост), а във втория Гато (т.е. по посока с линейност). При това и в двата случая нормите най-лесно се построяват през дуалност, т.е. построяват се норми с подходяща строга изпъкналост. В този контекст общата идея може формално да се изкаже като търсене на връзка между това слабата или слабата-звезда топология да е „близка“ до метризуема и изпъкналост и/ли гладкост. Получен е спектър от резултати, които са почти класически понастоящем и в които авторът има основен принос.

Разглежданото понятие за „гладкост“ е по-абстрактно и се състои, грубо казано, в това всяка изпъкнала и непрекъсната функция да бъде диференцуема в съответния смисъл върху множество от втора категория, т.е. свойството на Асплунд. Известно е, че от гладка норма следва асплундовост.

И така някаква метрика фрагментира дадено топологично пространство, ако всяко непразно множество има относително отворено подмножество с малък диаметър в тази метрика. Ако въобще съществува такава метрика, пространството се нарича фрагментируемо. Повечето резултати в работата се отнасят до фрагментируемост на единични кълба със слабата (звезда) топология или на на топологията на поточковата сходимост на единичното кълбо на пространство от непрекъснати функции върху компакт със специални свойства. Авторът – в предишна работа – е дал вътрешна характеризация на фрагментируемостта.

Ако едно пространство е фраментируемо, то е слабо асплундово. Авторът показва, че всички известни условия за слаба асплундоовст фактически влекат по-силното условие фрагментируемост. Особено се отличава резултатът, че диференцуема по Гато норма влече фрагментируемост.

Изследвана е стабилността на фрагментируемостта при стандартни топологични операции като произведение и факторизация. Показано е, че при налагане на геометрични изисквания на участващите разбивания могат да се получат общи условя за пренормиране с локално равномерно изпъкнали норми.

Използваните методи са изключително технични с многобройни дълбоки комбинаторни конструкции и трансфинитни индукции, а дори и специални топлогически игри. В същото време много от тях представляват съществено опростяване (освен че са усилване) на предишни резултати на други автори.

2.3 Преглед на Втора Глава

Най-общата идея на тази глава е теоремата на Ферма: ако дадена функция има екстремум, то производната в тази точка е нула. Най-трудният контекст, в който се среща тази идея, в съвременната математика е оптималното управление, където необходимите условия за оптималност се наричат Принцип на Понтрягин.

Известно е, че Принципът на Понтрягин не може изцяло да се пренесе в безкрайномерни пространства. Всъщност изследванията в безкрайномерни пространства са много малко, така че настоящата част от работата е първооткривателска по характер.

Започвайки с дълбоко нетривиална конкретна задача, включваща разглеждания в неприятното пространство L_∞, авторът в серия от статии прави дълбока ревизия на съществуващата теория от гледна точка на функционалния анализ. Грубо казано, идеята е да се разглеждат абстрактни функционали вместо – да кажем – интегрални оператори и едва след това получените резултати да се сведат към конкретни ситуации. Колкото и естествена да е тази идея, инерцията във вариационното смятане и оптималния контрол е такава, че тя все още се прилага доста повърхностно: функционално-аналитичните означения се използват за краткост, но без дълбочина. Именно добавянето на тази дълбочина е сред основните приноси на настоящата глава.

В модерния оптимален контрол производните са заменени с допирателни конуси към графиката, а за множеството от ограничения естествено отново се използват допирателни конуси. Ясно е, че конкретната дефиниция на тези конуси е от ключово значение и резултатите са различни при различни дефиниции на конусите.

Най-общо казано, идеята е да се дефинират конусите така, че ако допирателните конуси са неотделими, то и множествата да бъдат неотделими.

Ясно е, че ако надграфиката от една страна и всичко под множеството от ограничения, „повдигнато" на съответното ниво, от друга са неотделими, то в точката няма минимум. По този начин се получава локално (производно-подобно) условие за оптималност. При подходяща диференцуемост се получават известните условия, но това често не е тривиална стъпка. В настоящата работа е показано, че при липса на локална компактност е необходимо да се поиска някаква равномерност при дефинирането на конусите, за да върви горната идея. След това получената дефиниция е добре развита.

Тя е тествана върху стандартната задача на вариационното смятане и известните резултати са получени като следствие (с различен по-директен и геометричен метод, неизползващ теоремата на Екланд). Предполага се, че ще бъдат получени съществено по-силни резултати.

Методите отново изобилстват с покрития и трансфинитни индукции, което по странен начин свързва тази глава с предишната.

3 Общо описание на публикациите

Резултатите от дисертацията са публикувани в 10 статии: по 5 за всяка глава. Втора глава съдържа и значителен материал, който все още не е публикуван. 8 от статиите са в списания с импакт-фактор.

4 Отражение на резултатите в научното пространство

Приложеният от проф. Рибарска списък на забелязаните от нея цитати е грижливо изготвен и стои в основата на настоящата справка. Списъкът е вчпечатляващ от всяка гледна точка и съдържа цитирания в изключително авторитетни списания и от много авторитетни световни учени.

Има и многобройни цитирания в дисертации, което показва, че работата е вдъхновила следващото поколение математици, желаещи да работят в областите на дисертацията.

Статистиката е:

Цитирания	Работи от дисертацията	Изобщо на автора
В списания с импакт-фактор	38	141
В монографии	7	49
В дисертации	14	32
Общо трите по-горе	59	222
Цитирания на други места	17	60

5 Бележки по стила

Дисертацията е много добре написана и грижливо шлифована. Не се забелязват лесно дори и граматични грешки.

6 Качества на автореферата

В указанията, публикуван на сайта на ФМИ[1], се изисква авторефератът да е до 32 страници. Това изискване е надхвърлено с около 50% поради факта, че дисертационният труд е написан на английски език, при което е необходимо авторефератът да бъде *разширен автореферат*.

Авторефератът е много добре написан на прекрасен български език и отразява напълно адекватно дисертацията. Добре са обяснени основните идеи.

7 Заключение

От гореизложеното явно следва, че предложеният дисертационен труд покрива и пре-покрива всички изисквания за присъждане на научната степен доктор на науките според ЗРАСРБ, неговия правилник, както и тези на СУ и ФМИ.

Поради това давам положителна оценка на дисертационният труд и убедено подкрепям придобиването на степента доктор на науките от проф. д-р Надежда Костадинова Рибарска.

21.12.2017 г.

[1] https://www.fmi.uni-sofia.bg/sites/default/files/documents/ukazania_fmi_28noe2011.pdf