СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ОГНЯН БОРИСОВ ХРИСТОВ

АЛГЕБРИЧНИ, АНАЛИТИЧНИ И ГЕОМЕТРИЧНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ ВЪРХУ НЯКОИ КРАЙНО- И БЕЗКРАЙНОМЕРНИ ХАМИЛТОНОВИ СИСТЕМИ

АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ

за получаване на научната степен Доктор на науките

Научна специалност 01.01.05 Диференциални уравнения

4.5 Математика

СОФИЯ 2016

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на 29.09.2016 г. на разширено заседание на катедра Диференциални уравнения към Факултета по Математика и Информатика при СУ "Св. Климент Охридски" с разширение в състав: проф. дмн Евгени Христов, проф. дмн Стефан Иванов, доц. д-р Йордан Йорданов, доц. д-р Тошко Боев. Разширението на катедра Диференциални уравнения при ФМИ е назначено със заповед No РД 38-559/15.09.2016 на Ректора на Софийски Университет "Св. Климент Охридски".

Дисертационният труд съдържа 206 страници, от които 13 страници литература, включваща 233 заглавия.

Дисертантът работи като доцент във Факултета по Математика и Информатика към СУ "Св. Климент Охридски". Изследванията са извършени във Факултета по Математика и Информатика към СУ "Св. Климент Охридски".

Защитата на дисертацията ще се състои на .... г. от ...... часа в Заседателна зала на Факултета по Математика и Информатика при СУ "Св. Климент Охридски", бул. Дж. Боучер 5, София.

В представената дисертация се изучават важни качествени и аналитични характеристики на няколко крайно- и безкрайномерни Хамилтонови системи. Поради тази причина дисертацията е разделена на две части.

В първа част се изследва интегруемостта в смисъл на Лиувил на няколко крайномерни Хамилтонови системи. Променливите в изследваните системи се предполагат, че са комплексни и методът на изследване е един и същ. Подходът е по-скоро алгебричен. Геометрията на тези системи е засегната частично само в заключението на Глава 2 и в Глава 5. В две наскоро защитени дисертации [50] и [21] е направена историческа справка за развитието на методите за изследване на интегруемостта на Хамилтоновите системи. Пак там има сведения за уравненията със свойството на Пенлеве и за функциите на Майер. Ние няма да ги повтаряме тук. Нужните понятия, факти и резултати за теорията на Моралес-Руиз–Рамис, както и връзката им с Диференциалната теория на Галоа са дадени в Глава 1 и те важат за цялата първа част. За всяка от разглежданите системи е дадена мотивация и е направена справка за текущото състояние на проблема.

Във втора част изследваме важни нелинейни частни диференциални уравнения. Както е известно, няма обща теория за уравнения с частни производни особено нелинейни. Общото между моделите, които изследваме е, че повечето от тях са бихамилтонови и следователно интегруеми като безкрайномерни Хамилтонови системи. Имаме донякъде аналогия с крайномерните интегруеми Хамилтонови системи: първите интеграли стават закони за запазване, понятията скобки на Поасон, спрегнати променливи (променливи действие-ъгъл) се пренасят след съответните модификации. Това дава известно предимство и свобода да пренасяме по аналогия и обобщение някои резултати, установени за едни уравнения към други такива.

* * *

Съдържание и основни резултати

Глава 1 има спомагателен характер. Тя съдържа повечето от необходимите ни за част I понятия, факти и методи за изследване на интегруемостта на Хамилтонови системи с помощта на подходът на Зиглин - Моралес-Руиз - Рамис, основан на Диференциалната теория на Галоа [38].

Традиционно, една Хамилтонова състема се задава с функция H, наричана Хамилтониан и система уравнения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{1}$$

като (q,p) обикновенно се наричат канонични променливи. Дефинираме скобки на Поасон за две функции $H(q,p), F(q,p)$ с формулата

$$\{F,H\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{2}$$

Да припомним, че скобката на Поасон има свойствата билинейност, антисиметричност и удовлетворява тъждеството на Якоби. Веднага следват тъждествата

$$\{p_i,p_j\} = 0, \quad \{q_i,q_j\} = 0, \quad \{q_i,p_j\} = \delta_{ij}. \tag{3}$$

Да означим $x = (q,p)$, тогава Хамилтоновите уравнения (1) могат да бъдат записани като

$$\dot{x} = J\mathrm{gradH} \quad \text{или} \quad \dot{x} = \{x,H\}, \tag{4}$$

където $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, E е единичната матрица с размерност n. В някои обобщения антисиметричната матрица J (или еквивалентно каноничните скобки (3)) могат да зависят от x. Поради (4) можем да запишем една Хамилтонова система по следният начин

$$\dot{x} = X_H(x). \tag{5}$$

Казваме, че една Хамилтонова система е интегруема в смисъл на Лиувил, ако съществуват n първи интеграла $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$ в инволюция: $\{F_i,F_j\} = 0$ за всяко i и j, независими почти навсякъде.

Нека $\Psi(t)$ е неравновесно решение на (5). Можем да напишем уравнението във вариации (VE) в околност на това решение

$$\dot{\xi} = DX_H(\Psi(t))\xi. \tag{6}$$

Използвайки линейния интеграл $dH(\Psi(t))$ на (VE) можем да понижим реда на (VE) и да получим така нареченото уравнение в нормални вариации (NVE)

$$\dot{\eta} = A(t)\eta. \tag{7}$$

За да изследва интегруемостта на Хамилтоновата система (5) Зиглин използва групата на монодромия на (NVE). По-общо, Моралес-Руиз и Рамис използват групата на Галоа на (NVE). Техният резултат е, грубо казано, следният: Ако Хамилтоновата система (5) е интегруема, то е необходимо единичната компонента на диференциалната група на Галоа на (NVE) да е абелева.

Прилагането на горния подход към конкретна Хамилтонова система включва следните стъпки:

1) намиране на частно решение;

2) намиране на (VE) и (NVE);

3) изследване на единичната компонента на групата на Галоа G^0 на (NVE) (или (VE)).

Ако се провери, че G^0 е неабелева, то следва неинтегруемост на Хамилтоновата система. Ако G^0 е абелева, то оригиналната Хамилтонова система не е задължително интегруема. Тогава се налага да се изследват групите на Галоа на уравненията в по-високи вариации. Както се вижда, само стъпка 2) е лесна.

В Глава 2 [6] се изследват за интегруемост нормалните форми (на Биркхоф-Густавсон) на Хамилтоновите резонанси $1:2:\omega$, ограничени до членове от степен 3, $\omega = 1, 3, 4$. Да припомним, че "орязаните" нормални форми $\bar{H}$ допускат още един пръв интеграл – $H_2 = I_1 + 2I_2 + \omega I_3, I_j = q_j^2 + p_j^2$ и $(q_j, p_j), j = 1, 2, 3$ са каноничните променливи, така че за интегруемост е нужен още един пръв интеграл.

Изследването на динамиката (равновесия, периодични решения, устойчивост, интегруемост...) на Хамилтонови системи, допускащи горните резонанси има смисъл, тъй като съществуват реални системи и модели с такива свойства. Да споменем само, че някъде около 1890 астономът Гил открива (почти) $1:2:4$ резонанас в орбиталното движение на вътрешните спътници на Юпитер – Йо, Европа и Ганимед. Този резонанс оказва силно въздействие върху динамиката на цялата система Юпитер-сателити.

В секция 2 Хамилтоновите функции се опростяват и приемат вида съответно:

<u>$1:2:3$ резонанс</u>

$$\bar{H} = a\left[p_2(p_1^2 - q_1^2) + 2p_1q_1q_2\right] + b\left[p_3(p_1p_2 - q_1q_2) + q_3(q_1p_2 + p_1q_2)\right], \quad a, b \geq 0. \tag{8}$$

Очевидните случаи на интегруемост са:
. $b = 0$ с интеграл I_3,
. $a = 0$ с интеграл $lI_1 + mI_2 + (l + m)I_3$.

<u>$1:2:4$ резонанс</u>

$$\bar{H} = a[p_2(p_1^2 - q_1^2) + 2p_1q_1q_2] + b[p_3(p_2^2 - q_2^2) + 2p_2q_2q_3], \quad a, b \geq 0. \tag{9}$$

Очевидните случаи на интегруемост са:
. $b = 0$ с интеграл I_3,
. $a = 0$ с интеграл I_1.

Накрая за случая на <u>$1:1:2$ резонанс</u> вземаме нормалната форма на H_3, получена от Дюистермаат [19]

$$\bar{H} = H_3 = q_3\left[a(q_1^2 - p_1^2) + b(q_2^2 - p_2^2)\right] + 2p_3\left[ap_1q_1 + bp_2q_2\right], \quad a \geq b \geq 0. \tag{10}$$

Тук случаите на интегруемост са повече:
. $b = 0$ с интеграл I_2,
. $a = b$ с интеграл $G = q_1p_2 - q_2p_1$,
. $a = 2b$ с интеграл (Дюистермаат) $G = (q_1p_2 - p_1q_2)^2(p_2^2 + q_2^2) + 2[\frac{1}{2}q_3(q_2^2 - p_2^2) + p_3q_2p_2]^2$.

Дюистермаат [19] доказва, използвайки оригинален подход, че Хамилтоновия резонанс $1:1:2$ не допуска допълнителен аналитичен пръв интеграл освен в случаите, описани по-горе. След това, Ферхулст [52] поставя въпроса за строгото доказателство на неинтегруемостта на резонанси $1:2:3$ и $1:2:4$. Следващата теорема подобрява малко резултата на Дюистермаат и окончателно решава въпроса за интегруемостта на въведените Хамилтонови резонанси.

Теорема 1. *(Теорема 2.2.1) Системите, съответстващи на ограничените до трети ред Хамилтониани (8)-(10), не допускат допълнителен мероморфен интеграл, освен в дадените по-горе случаи, т.е., те са неинтегруеми в смисъл на Лиувил.*

В Глава 3 [8] изследваме интегруемостта на някои уравнения на Пенлеве от по-висок ред. Подобно на класическите уравнения на Пенлеве $\mathrm{P_I}, \ldots, \mathrm{P_{VI}}$, някои от тези уравнения имат Хамилтонова формулировка, фамилии от рационални и трансцендентни решения, Баклунд трансформации. Мотивацията за това изследване е следната: В [39] Моралес-Руиз повдига въпросът за изследване на интегруемостта на класическите уравнения на Пенлеве като Хамилтонови системи (за текущото състояние на проблема виж [51]).

Естествено е да разширим въпроса за интегруемостта и до уравнения със свойството на Пенлеве от по-висок ред. Да отбележим, че класификацията на уравненията от тип на Пенлеве от по-висок ред не е завършена, т.е. те са много повече на брой и малко от тях имат известна Хамилтонова формулировка.

Отначало разглеждаме следното нелинейно уравнение от четвърти ред

$$w^{(4)} = 5w''(w^2 - w') + 5w(w')^2 - w^5 + (\lambda z + \alpha)w + \gamma, \tag{11}$$

където λ, α, γ са комплексни параметри. Преполагаме, че $\lambda \neq 0$. Това уравнение със свойството на Пенлеве е изследвано от различни гледни точки от няколко автори. Ще отбележим Громак [22], на когото дължим Хамилтоновата формулировка, две фамилии от рационални решения и Баклундовите трансформации.

Да означим $q_1(z) := w(z)$, $\varepsilon^2 = 1$. Тогава уравнението (11) може да бъде представено като две еквивалентни Хамилтонови системи с $2 + 1/2$ степени на свобода с Хамилтониан

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{7-9\varepsilon}{12}q_2^3 + p_1q_2 - \frac{1+3\varepsilon}{4}p_1q_1^2 + \frac{3\varepsilon-1}{4}q_2(\lambda z+\alpha) + \left(\gamma + \frac{3\varepsilon-1}{4}\lambda\right)q_1. \tag{12}$$

Свеждаме по естествен начин горната Хамилтонова система до автономна с три степени на свобода и Хамилтониан $\hat{H}(q_1, q_2, z, p_1, p_2, F) := H_\varepsilon + F$

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{ds} &= q_2 - \frac{3\varepsilon+1}{4}q_1^2, & \frac{dp_1}{ds} &= \frac{1+3\varepsilon}{2}p_1q_1 - \gamma - \frac{3\varepsilon-1}{4}\lambda, \\
\frac{dq_2}{ds} &= p_2, & \frac{dp_2}{ds} &= -p_1 - \frac{7-9\varepsilon}{4}q_2^2 - \frac{3\varepsilon-1}{4}(\lambda z + \alpha), \\
\frac{dz}{ds} &= 1, & \frac{dF}{ds} &= -\lambda\frac{3\varepsilon-1}{4}q_2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Нашият пръв резултат е следният

Теорема 2. *(Теорема 3.1.1) Хамилтоновата система (13) е неинтегруема в смисъл на Лиувил чрез рационални първи интеграли при параметри* $\gamma/\lambda = 3k, \gamma/\lambda = 3k-1, k \in \mathbb{Z}$.

Както е отбелязано в Глава 1, основна роля в доказателството на неинтегруемостта играе (NVE) и тук те са частен случай на линейни уравнения

$$\mathrm{D}_{qp}(y) = \left[(-1)^{q-p} x \prod_{j=1}^{p}(\delta+\mu_j) - \prod_{j=1}^{q}(\delta+\nu_j-1)\right] y = 0, \tag{14}$$

които се наричат обобщени конфлуентни хипергеометрични уравнения, $\delta = xd/dx$, $0 \le p \le q, \mu_j, \nu_j \in \mathbb{C}, \mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z}$. За тези уравнения 0 е регулярна сингулярна точка, а ∞ е ирегулярна сингулярна точка при $p < q$. Локалната група на Галоа G_0 е подгрупа на G_∞, така че глобалната група на Галоа е $G = G_\infty$. Кац и Гарбер [27] пресмятат групите на Галоа на няколко класове линейни уравнения използвайки чисто алгебрични аргументи – глобална характеризация на полупрости алгебри.

В този случай (NVE) (след смяна на променливите, която не променя единичната компонента на групата на Галоа) приема вида

$$\delta\left(\delta - \frac{2}{5} - 1\right)\left(\delta + \frac{1}{5} - 1\right)\left(\delta + \frac{2}{5} - 1\right) u - xu = 0, \tag{15}$$

т.е., то е обобщено конфлуентно хипергеометрично уравнение от вида $\mathrm{D}_{40}(y) = 0$. За него теорията на Кац дава $G^0 = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$, която очевидно е неабелева, откъдето следва неинтегруемостта.

В секция 3 ние пресмятаме топологическите генератори на $G = G_\infty$ - формалната монодромия, екпоненциалния тор и матриците на Стокс за уравнение (15) следвайки подходът на Дювал и Митсчи [20] и Рамис [44] и получаваме, че групата на Галоа е изоморфна на $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, което съответства на резултата на Кац.

Възниква въпросът дали появата на обобщени конфлуентни хипергеометрични уравнения в динамиката на уравненията на Пенлеве е инцидентна. Оказва се, че те са свързани и с други уравнения на Пенлеве от по-висок ред.

Да разгледаме $\mathrm{P_{II}}$-йерархията, чиято Хамилтонова структура е намерена от Мазоко и Ю [41]

$$\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(n)} : \left(\frac{d}{dz} + 2w\right) \mathcal{L}_n[w' - w^2] + \sum_{l=1}^{n-1} \beta_l \left(\frac{d}{dz} + 2w\right) \mathcal{L}_l[w' - w^2] = zw + \alpha_n,\ n \ge 1, \tag{16}$$

където $\mathcal{L}_n$ е операторът дефиниран с рекурентната релация (релация на Ленар)

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}_{n+1} = \left[\frac{d^3}{dz^3} + 4(w' - w^2)\frac{d}{dz} + 2(w' - w^2)_z\right]\mathcal{L}_n; \quad \mathcal{L}_0[w' - w^2] = \frac{1}{2} \tag{17}$$

и β_l и α_n са произволни комплексни параметри. Първите три члена на $\mathrm{P_{II}}$-йерархията са:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(1)} &: w'' - 2w^3 = zw + \alpha_1, && (18)\\
\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)} &: w^{(4)} - 10w(ww'' + w'^2) + 6w^5 + \beta_1(w'' - 2w^3) = zw + \alpha_2, && (19)\\
\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)} &: w^{(6)} - 14w^{(4)}w^2 - 56w^{(3)}w'w + 70w''(w^4 - w'^2) + 140w^3w'^2 - 42w(w'')^2\\
&\quad -20w^7 + \beta_1[w'' - 2w^3] + \beta_2[w^{(4)} - 10w(ww'' + w'^2) + 6w^5] = zw + \alpha_3. && (20)
\end{aligned}
$$

Интегруемостта на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(1)}$ е изследвана в [40]. Хамилтонианът за $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ е

$$
H^{(2)} = \frac{q_2}{16} + 2zp_2 - 16p_1^2p_2 + 16p_2^2 + \frac{q_1q_2p_2}{8} + \frac{p_1p_2q_2^2}{16} + \frac{\alpha_2(p_1q_2 - q_1)}{8} + \beta_1(8p_1 - t_1)p_2, \tag{21}
$$

където $q_j, p_j, j = 1, 2$ се изразяват чрез w и нейните производни. Разширяваме, както обикновенно, до една автономна Хамилтонова система с три степени на свобода $\hat{H}_2 = H^{(2)} + F$

$$
\begin{aligned}
q_1' &= -32p_1p_2 + \frac{1}{16}p_2q_2^2 + \frac{1}{8}q_2\alpha_2 + 8\beta_1p_2,\\
q_2' &= 2z - 16p_1^2 + 32p_2 + \frac{1}{8}q_1q_2 + \frac{1}{16}p_1q_2^2 + \beta_1(8p_1 - \beta_1),\\
p_1' &= -\frac{1}{8}p_2q_2 + \frac{1}{8}\alpha_2, && (22)\\
p_2' &= -\frac{1}{16} - \frac{1}{8}p_2q_1 - \frac{1}{8}p_1p_2q_2 - \frac{1}{8}\alpha_2p_1,\\
z' &= 1, \qquad F' = -2p_2.
\end{aligned}
$$

Подобно, Хамилтонианът за $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$ е

$$
\begin{aligned}
H^{(3)} &= 64p_1^4 - 192p_1^2p_2 + 128p_1p_3 + \frac{1}{64}p_3q_3^2 - \frac{1}{64}p_1q_2^2 + 64p_2^2\\
&- \frac{1}{32}q_1q_2 + 2zp_1 + \frac{q_3}{64} - \frac{1}{32}\alpha_3q_3 + 8\beta_1(p_1^2 - p_2) && (23)\\
&+ \beta_2(4p_1^2\beta_2 - 4p_2\beta_2 - 32p_1^3 + 64p_1p_2 - 2p_1\beta_1).
\end{aligned}
$$

Съответната автономна Хамилтонова система с четири степени на свобода $\hat{H}_3 = H^{(3)} + F$ има вида

$$
\begin{aligned}
q_1' &= 256p_1^3 - 384p_1p_2 + 128p_3 - \frac{q_2^2}{64} + 2z + 16p_1\beta_1 + 8p_1\beta_2^2 - 96\beta_2p_1^2 + 64p_2\beta_2 - 2\beta_1\beta_2,\\
q_2' &= -192p_1^2 + 128p_2 - 8\beta_1 - 4\beta_2^2 + 64p_1\beta_2,\\
q_3' &= 128p_1 + \frac{1}{64}q_3^2,\\
p_1' &= \frac{1}{32}q_2,\\
p_2' &= \frac{1}{32}p_1q_2 + \frac{1}{32}q_1,\\
p_3' &= -\frac{1}{32}p_3q_3 - \frac{1}{64} + \frac{1}{32}\alpha_3,\\
z' &= 1, \quad F' = -2p_1.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Доказваме следният резултат

Теорема 3. *(Теорема 3.4.1) Да предположим, че*

(i) $\beta_1 = \alpha_2 = 0$. Тогава Хамилтоновата система, съответстваща на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ е неинтегруема чрез рационални първи интеграли;

(ii) $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_3 = 0$. Тогава Хамилтоновата система, съответстваща на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$ е неинтегруема чрез рационални първи интеграли.

(NVE) относно някои определени рационални решения се оказват обобщени конфлуентни хипергеометрични уравнения, чийто групи на Галоа пресмятаме както в секция 3, като единичните им компоненти са изоморфни на $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$ и $\mathrm{Sp}(6,\mathbb{C})$ съответно.

В Глава 4 [9] изследваме интегруемостта на Хамилтонова система, описваща стационарните решения на Бозе-Ферми смеси в едномерна оптична решетка. Моделът се описва със следните $N_f + 1$ свързани нелинейни уравнения на Шрьодингер

$$
\begin{aligned}
i\hbar\tfrac{\partial\Psi^b}{\partial t} &+ \frac{1}{2m_{\mathrm{B}}}\frac{\partial^2\Psi^b}{\partial x^2} - V\Psi^b - g_{\mathrm{BB}}|\Psi^b|^2\Psi^b - g_{\mathrm{BF}}\rho_f\Psi^b = 0,\\
i\hbar\tfrac{\partial\Psi_j^f}{\partial t} &+ \frac{1}{2m_{\mathrm{F}}}\frac{\partial^2\Psi_j^f}{\partial x^2} - V\Psi_j^f - g_{\mathrm{BF}}|\Psi^b|^2\Psi_j^f = 0, \quad j = 1,\ldots,N_f,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

където вълновите функции Ψ_j^f описват всеки от N_f фермиона и Ψ^b е вълновата функция на бозонната компонента, $\rho_f = \sum_{i=1}^{N_f}|\Psi_i^f|^2$ и $g_{\mathrm{BB}}, g_{\mathrm{BF}}, m_{\mathrm{F}}, m_{\mathrm{B}}$ са физически константи. Потенциалът V обикновено има вида $V = V_0 sn^2(\alpha x, \kappa)$, където $sn(\alpha x, \kappa)$ е синус елиптичната функция на Якоби. Ние ще предположим, че

$V_0 = 0$. Интересуваме се от стационарни решения на (25) от вида

$$\begin{aligned} \Psi^b(x,t) &= q_0(x)\exp\left(-i\frac{\omega_0}{\hbar}t + i\Theta_0(x) + i\kappa_0\right), \\ \Psi_j^f(x,t) &= q_j(x)\exp\left(-i\frac{\omega_j}{\hbar}t + i\Theta_j(x) + i\kappa_{0,j}\right), \quad j = 1,\ldots,N_f, \end{aligned} \tag{26}$$

където κ_0, $\kappa_{0,j}$ са константни фази, q_0, q_j и Θ_0, Θ_j са реално значни функции, свързани чрез

$$\Theta_0(x) = C_0\int_0^x \frac{dx'}{q_0^2(x')}, \qquad \Theta_j(x) = C_j\int_0^x \frac{dx'}{q_j^2(x')}, \quad j = 1,\ldots,N_f, \tag{27}$$

като C_0, C_j са константи на интегриране. След заместване на (26) в уравненията (25) и отделяне на реалната и имагинерната част, получаваме система от ОДУ, която след трансформиране се свежда до Хамилтонова с функция на Хамилтон

$$H = \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} p_j^2 + \omega_0 q_0^2 + \sum_1^{N_f}\omega_j q_j^2 - g_{\rm BF} q_0^2\sum_1^{N_f} q_j^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{C_0^2}{2q_0^2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f}\frac{C_j^2}{q_j^2}. \tag{28}$$

За тази Хамилтонова система разглеждаме случаите:

1) $C_0 = 0$, $C_j \neq 0$, $\sum C_j \neq 0$, $\omega_j = \omega^2/2, j = 1,\ldots,N_f$;

2) $C_0 \neq 0$, $C_j = 0, j = 1,\ldots,N_f$, $g_{\rm BF} = n(n+1)/2, n \notin \mathbb{Z}$;

3) $C_0 \neq 0$, $C_1 \neq 0, N_f = 1$, $g_{\rm BF}$ достатъчно малко.

Доказва се следният резултат

Теорема 4. *(Теорема 4.1.1) За случаите, дадени по-горе, Хамилтоновата система, отговаряща на (28) е интегруема точно тогава, когато $g_{\rm BF} = 0$.*

С други думи, Хамилтоновата система е интегруема точно тогава, когато променливите се разделят.

Случай 2 се нуждае от обяснение. Формулираме следната

Хипотеза. Хамилтоновата система, отговаряща на (28), когато $C_0 \neq 0, C_j = 0, j = 1,\ldots,N_f$ и $g_{\rm BF} = n(n+1)/2, n \in \mathbb{Z}$, е неинтегруема, освен ако $g_{\rm BF} = 0$.

Това твърдение е формулирано така, защото сме го доказали само за $n = 1$ и $n = 2$. Въпреки това, ние считаме, че системата съответстваща на (28), е неинтегруема за произволно цяло $n > 2$.

В Глава 5 [7] изучаваме моделите на Грос-Невьо в малките размерности. Моделите на Грос-Невьо са Хамилтонови системи, свързани с кореновите системи на прости Ли алгебри, зададени с

$$H = \frac{1}{2}(y,y) + \sum_\alpha \exp[(\alpha, x)],$$

където $x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n)$ са каноничните координати в $\mathbb{R}^{2n}$, $(,)$ означава стандартното скаларно произведение и α е корен на една проста Ли алгебра $\mathfrak{g}$. Сумата е взета по цялата коренова система на $\mathfrak{g}$ или върху подходящо подпространство, в зависимост от модела.

Освен Хамилтониана, имаме допълнителен пръв интеграл само в случая на $\mathrm{sl}(n+1)$, а именно $\sum y_j = const$. Следователно, моделът на Грос-Невьо за $\mathrm{sl}(2)$ е интегруем. Интегруем се оказва моделът за $\mathrm{so}(4)$. За Хамилтоновите системи в останалите случаи с две или три степени на свобода се знае, че са неинтегруеми (Хорозов [26] с модификация на метода на Зиглин). За произволен брой степени на свобода Мачиевски и др. [36] доказват неинтегруемост с методите на Диференциалната теория на Галоа.

Мотивацията за нашето изследване е серия от работи на Ринк [46, 47], който представя известната Ферми-Паста-Улам система като пертурбация на една интегруема и КАМ-неизродена система, а именно нормалната форма от ред 4 в околност на равновесието. Неизроденост на интегруема система в КАМ смисъл означава, че изображенито на честотите е локален дифеоморфизъм.

Нашата цел е да проверим дали такъв факт е верен за моделите на Грос-Невьо.

Теорема 5. *(Теорема 5.1.1) Хамилтоновите системи, съответстващи на моделите на Грос-Невьо за алгебрите* $\mathrm{so}(4), \mathrm{so}(5), \mathrm{sp}(4), \mathrm{sl}(3)$ *имат нормални форми на Биркхоф-Густавсон* $\bar{H}^{tr} = H_2 + H_4$*, които са интегруеми и КАМ неизродени.*

От този факт в частност следва, че в малка околност на равновесието в динамиката на моделите на Грос-Невьо за горните алгебри има много квазипериодични и периодични решения.

За съжаление, такъв резултат не е валиден в по-големите размерности. Ние се ограничаваме за простота с разглеждането на моделите с три степени на свобода.

Теорема 6. *(Теорема 5.1.2) Хамилтоновите системи, съответстващи на моделите на Грос-Невьо за алгебрите* $\mathrm{so}(6) \sim \mathrm{sl}(4), \mathrm{so}(7), \mathrm{sp}(6)$ *имат неинтегруеми нормални форми на Биркхоф-Густавсон* $\bar{H}^{tr} = H_2 + H_4$*.*

Последният резултат може да се обобщи за произволна размерност.

В Глава 6 [10] изследваме интегруемостта на една система от пет нелинейни ОДУ със симетрии, която възниква в контекста на механиката на флуидите. За да се характеризират солитонни вълни в несвиваем, тежък флуид при крайна дълбочина над плоско дъно, Уитинг [53] въвежда специфичен ред (ред на Уитинг). Карабут [28, 29, 30] доказва, че проблема за сумирането на този ред се свежда до решаването на специална система ОДУ и решава тази система в случаите, когато уравненията са три или четири.

В секция 1 описваме физическия проблем като формулираме следващата по сложност система на Карабут от пет уравнения. След смени на променливите тази система приема вида

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \ y_3y_5 - y_2y_4,\\
\dot{y}_2 &= \ y_4y_1 - y_3y_5,\\
\dot{y}_3 &= \ y_5y_2 - y_4y_1,\\
\dot{y}_4 &= \ y_1y_3 - y_5y_2,\\
\dot{y}_5 &= \ y_2y_4 - y_1y_3.
\end{aligned} \tag{29}$$

Освен серия от дискретни симетрии, горната система допуска два първи интеграла

$$I_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5, \quad I_2 = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2\right). \tag{30}$$

Очевидно системата (29) не е Хамилтонова и не е ясно дали може да се въведе подходяща Поасонова структура. Не е известно също така има ли други интеграли, поради което Карабут я изследва числено.

Следващият резултат дава отговор на въпроса за интегруемостта на горната система

Теорема 7. *(Теорема 6.1.1) Системата на Карабут е неинтегруема в не-Хамилтонов смисъл.*

Припомня се какво се разбира под интегруема динамична система в не - Хамилтонов смисъл.

За доказателството на горната Теорема използваме едно обобщение на Ayoul и Zung [1] на Теоремата на Моралес-Руиз – Рамис (виж Гл. 1 Теорема 1.0.1) в не - Хамилтоновия случай, което е основано на наблюдението, че всяка динамична система може да се трансформира до Хамилтонова с една процедура, наречена "котенгенциално повдигане".

В този параграф ще припомним накратко някои понятия за нелинейните еволюционни ЧДУ. Ще предполагаме, че $u(t, x)$ е реално-значна функция на две независими променливи с област на определяне в зависимост от контекста. Това разглеждане е достатъчно за нашите цели (за по-общо третиране виж Олвер [42]).

Интересуваме се от уравнения от вида

$$u_t = K(x, u, u_x, \dots, u^{(n)}). \tag{31}$$

Тъй като t е отделена, говорим за еволюционни уравнения, и още че (31) задава движение в едно безкрайномерно пространство от функции u. Закон за запазване, свързан с (31) е израз от вида

$$T_t + X_x = 0, \tag{32}$$

където T, X са функции на t, x, u и краен брой производни на u. T се нарича плътност, а $-X$ "flux". Говорим за локални закони за запазване, когато T, X не зависят от t, x експлицитно. Типичен пример е когато T, X са полиноми на

u и краен брой нейни производни. В такъв случай след интегриране на (32) се вижда, че величината
$$I = \int T dx$$
е константа, $I_t = 0$ или интеграл. Не всички интеграли идват от закони за запазване.

Първо, да уточним понятието Хамилтоновост за (31). По аналогия с крайномерния случай – формула (4) дадена в началото, Хамилтонианът $H(x)$ се заменя с Хамилтонов функционал $\mathcal{H}[u] = \displaystyle\int h(u)dx$, градиентът gradH се заменя с вариационна производна $\frac{\delta \mathcal{H}[u]}{\delta u}$ и накрая, антисиметричната матрица J се заменя с антисиметричен диференциален оператор $\mathcal{B}$, който може да зависи от u. Тогава имаме
$$u_t = \mathcal{B}\frac{\delta \mathcal{H}[u]}{\delta u}. \tag{33}$$
За едно хамилтоново еволюционно уравнение (33) дефинираме скобка на Поасон за два функционала, зависеща билинейно от вариационните им производни
$$\{\mathcal{P}[u], \mathcal{Q}[u]\} = \int \frac{\delta \mathcal{P}[u]}{\delta u}.\mathcal{B}\frac{\delta \mathcal{Q}[u]}{\delta u}dx. \tag{34}$$
Антисиметричността и тъждеството на Якоби налагат ограничения на оператора $\mathcal{B}$ и тогава казваме, че $\mathcal{B}$ е Хамилтонов. Два Хамилтонови оператори са съвместими, ако тяхната линейна комбинация е отново Хамилтонов оператор. Примери за такива оператори ще видим след малко. От
$$\frac{\partial \mathcal{H}[u]}{\partial t} = \int \frac{\delta \mathcal{H}[u]}{\delta u}\frac{\partial u}{\partial t}dx = \int \frac{\delta \mathcal{H}[u]}{\delta u}.\mathcal{B}\frac{\delta \mathcal{H}[u]}{\delta u}dx = \{\mathcal{H}[u], \mathcal{H}[u]\} = 0$$
следва, че $\mathcal{H}[u]$ е интеграл за (33).

Едно еволюционно уравнение се нарича бихамилтоново, ако може да се запише в хамилтонов вид по два различни начина
$$u_t = \mathcal{B}_2\frac{\delta \mathcal{H}_1[u]}{\delta u} = \mathcal{B}_1\frac{\delta \mathcal{H}_2[u]}{\delta u}, \tag{35}$$
където $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ са два Хамилтонови оператори, а $\mathcal{H}_1[u], \mathcal{H}_2[u]$ са съответните Хамилтонови функционали. Поради съвместимостта на двете Поасонови структури може да се построи йерархия от закони за запазване
$$\mathcal{B}_2\frac{\delta \mathcal{H}_{n-1}[u]}{\delta u} = \mathcal{B}_1\frac{\delta \mathcal{H}_n[u]}{\delta u}, \qquad \forall n. \tag{36}$$
Най-известният пример е уравнението KdV. Ние ще видим още такива.

И накрая, естествено възниква въпросът:

Какъв е аналогът на понятието интегруемост за хамилтоново еволюционно уравнение?

Засега универсална дефиниция за интегруемост на ЧДУ няма (виж например за дискусия Захаров [54], Михайлов [37]).

Наличието на достатъчно локални закони за запазване (или по-общо симетрии) може да бъде прието като индикатор за интегруемост (наричана понякога формална интегруемост). Следователно, едно бихамилтоново уравнение се счита за интегруемо.

Откриването на IST и подходът на Лакс да представи уравнението KdV в термините на два комутиращи оператори, известни като Лаксова двойка, доведе до по-общ подход базиран върху така нареченото представяне с нулева кривина

$$U_t - V_x + [U, V] = 0$$

или условие за съвместимост на две линейни задачи

$$L\Psi = 0, \quad M\Psi = 0, \qquad L = \frac{d}{dx} - U, \quad M = \frac{d}{dt} - V,$$

където $U = U(x, t, \lambda), V = V(x, t, \lambda)$ са квадратни матрици, зависещи от спектралния параметър λ. Уравнения, представими по този начин понякога се наричат кинематически интегруеми уравнения. Както ще видим след малко има и геометрически интегруеми уравнения.

В Глава 7 [11, 12] се изследва уравнението на Дулин-Готвалд-Холм (DGH)

$$u_t - \alpha^2 u_{xxt} + 2\omega u_x + 3uu_x + \gamma u_{xxx} = \alpha^2(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}), \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \tag{37}$$

където $\alpha^2, \gamma, 2\omega$ са някакви физични константи. Уравнението (37) е получено чрез асимптотично разлагане в Хамилтониянът на Ойлеровите уравнения в режим на плитка вода [18]. Това уравнение включва във себе си две важни уравнения, а именно

. при $\alpha = 0$ и $\gamma \neq 0$, то се превръща в KdV уравнението

$$u_t + 2\omega u_x + 3uu_x = -\gamma u_{xxx};$$

. при $\gamma = 0$ и $\alpha = 1$, то става уравнението на Камаса-Холм

$$u_t + 2\omega u_x + 3uu_x - u_{xxt} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}.$$

Уравнението (DGH) е бихамилтоново. Означавайки $m = u - \alpha^2 u_{xx}$ имаме

$$m_t = -\mathcal{B}_2 \frac{\delta H_1[m]}{\delta m} = -\mathcal{B}_1 \frac{\delta H_2[m]}{\delta m}, \tag{38}$$

където Хамилтонианите са

$$H_1[m] = \frac{1}{2}\int (u^2 + \alpha^2 u_x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int mu\, dx, \tag{39}$$

$$H_2[m] = \frac{1}{2}\int (u^3 + \alpha^2 u u_x^2 + 2\omega u^2 - \gamma u_x^2)\, dx. \tag{40}$$

Разглеждаме решения в класа на Шварц, означен с $S(\mathbb{R})$, така че интегрирането е от $-\infty$ до ∞. Двата съвместими Хамилтонови оператора $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ са (∂ означава $\partial/\partial x$)

$$\mathcal{B}_2 = \partial m + m\partial + 2\omega\partial + \gamma\partial^3, \quad \mathcal{B}_1 = \partial - \alpha^2\partial^3. \tag{41}$$

Тъй като (DGH) е бихамилтоново, то допуска безкрайно много закони за запазване H_n, такива че

$$\mathcal{B}_2 \frac{\delta H_{n-1}[m]}{\delta m} = \mathcal{B}_1 \frac{\delta H_n[m]}{\delta m} \tag{42}$$

(в добавка към H_1, H_2 ние даваме само още няколко, от които се нуждаем - H_{-1} и H_0).

Тъй като $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ са съвместими всяка линейна комбинация на тези оператори дефинира скобка на Поасон,

$$\{f, h\} = -\int \frac{\delta f}{\delta m}(c_1\mathcal{B}_1 + c_2\mathcal{B}_2)\frac{\delta h}{\delta m}dx$$

при произволни c_1 и c_2. За да опростим пресмятанията, ние вземаме $c_1 = \frac{\gamma}{\alpha^2}$, $c_2 = 1$ и означаваме

$$\Omega = \omega + \frac{\gamma}{2\alpha^2}.$$

По този начин свеждаме горната скобка до

$$\{f, h\}_s = -\int (m + \Omega)\left(\frac{\delta f}{\delta m}\partial\frac{\delta h}{\delta m} - \frac{\delta h}{\delta m}\partial\frac{\delta f}{\delta m}\right)dx. \tag{43}$$

Тогава (DGH) може да се запише като

$$m_t = \{m, \tilde{H}\}_s, \tag{44}$$

където

$$\tilde{H} := H_1 - \frac{\gamma}{\alpha^2}\left(H_0 - 2\sqrt{\Omega}\, H_{-1}\right) \tag{45}$$

и

$$H_0[m] = \int m\, dx, \quad H_{-1}[m] = \int (\sqrt{m + \Omega} - \sqrt{\Omega})\, dx. \tag{46}$$

Да отбележим, че H_{-1} е Казимир за тази скобка.

След тази подготовка разглеждаме задачата за обратно разсейване, описваме как да се конструират законите на запазване в термините на данните на разсейване и пресмятаме скобките на Поасон за даннте на разсейване и конструираме променливи действие-ъгъл за DGH. Пресмятанията са аналогични на тези за другите интегруеми уравнения, ние следваме близко [3].

Накрая, прилагаме един метод на обратно разсейване, развит от Константин, Герджиков и Иванов [4] за уравнението на Камаса-Холм, към DGH уравнението. Решенията отговарящи на безотражателните потенциали се конструират за данните на разсейване.

В Глава 8 [15, 13] изследваме фамилия от не-еволюционни уравнения в динамика на флуидите, известни като Холм - Стали b-фамилия [25]

$$m_t + u m_x + b u_x m = 0, \tag{47}$$

където $m = u - u_{xx}$, $u(x,t)$ е скоростта на флуида, а константата b е бифуркационен параметър за поведението на решението. Това уравнение обобщава два важни модела в динамиката на плитките води. Ако $b = 2$, то (47) става уравнението на Камаса-Холм (CH)

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{48}$$

Ако $b = 3$, то уравнението (47) се превръща в уравнението на Дегасперис-Процеси (DP)

$$u_t - u_{xxt} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{49}$$

И двата модела (CH) и (DP) са интегруеми и това са единствените случаи на интегруемост за уравнението (47).

В тази глава изследваме периодичната задача на Коши за b-фамилията (47)

$$u_t - u_{xxt} + (b+1)uu_x = bu_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0,\, x \in \mathbb{S}. \tag{50}$$

Задачите на Коши за (CH) и (DP) в периодичния и непериодичния случай са изследвани интензивно от много автори. Показано е, че задачата на Коши за (CH) е локално добре поставена в H^s, $s > \frac{3}{2}$ с решения, зависещи непрекъснато от началните данни. Локалната добре поставеност за уравнението (50) е разгледана например в [13].

Понякога е по-подходящо да се разглежда друга версия на коректност, например, ако се поиска изображението данни - решение да е равномерно непрекъснато.

В [23] Химонас и Мизиолек показват, че за $s \geq 2$ изображението $u_0 \to u$ за уравнението (CH) не е равномерно непрекъснато от произволно ограничено множество от $\mathrm{H}^s(\mathbb{S})$ в $C([0,T], \mathrm{H}^s(\mathbb{S}))$. Основният аргумент в доказателството е конструирането на редици от гладки бягащи вълни. По-късно Химонас, Кьониг и Мизиолек [24] обобщават горния резултат до обхватът $3/2 < s < 2$. Съществена роля за това допринася факта, че H^1 нормата се запазва. Да отбележим, че H^1 нормата е закон за запазване за уравнението (47) само за $b = 2$, т.е. само за уравнението (CH).

Първият резултат на тази глава е

Теорема 8. *(Теорема 8.1.1) За всяко $s \geq 3$, изображението данни - решение $u_0 \to u$ за уравнението (50) при $b \neq 0$, не е равномерно непрекъснато от произволно ограничено множество в $\mathrm{H}^s(\mathbb{S})$ във $\mathrm{C}([0,t_0], \mathrm{H}^s(\mathbb{S}))$. По- точно, за всяко $s \geq 3$ съществуват константи $c_{1,2} > 0$ и две редици от гладки решения u_n, v_n на уравнението (50) такива, че за всяко $t \in [0,1]$*

$$\begin{gathered}\sup_n ||\, u_n(t)||_{\mathrm{H}^s} + \sup_n ||v_n(t)||_{\mathrm{H}^s} \leq c_1,\\ \lim_{n\to\infty} ||\, u_n(0) - v_n(0)||_{\mathrm{H}^s} = 0,\\ \liminf_n ||\, u_n(t) - v_n(t)||_{\mathrm{H}^s} \geq c_2 \sin\left(\tfrac{t}{2}\right).\end{gathered}$$

Такъв подход не е приложим за $b = 0$ поради липса на периодични решения. По нататък получаваме подобен резултат за уравнението на Дегасперис-Процеси(DP) $b = 3$, но в обхват $s \geq 2$. Да припомним отново, че (DP) е интегруемо.

Теорема 9. *(Теорема 8.6.1) За всяко $s \geq 2$, изображението $u_0 \to u$ за уравнението (DP) не е равмерно непрекъснато от произволно ограничено множество в $\mathrm{H}^s(\mathbb{S})$) върху $\mathrm{C}([0,T], \mathrm{H}^s(\mathbb{S})))$. По-точно, за всяко $s \geq 2$ съществуват константи $c_{1,2} > 0$ и две редици от гладки решения u_n, v_n на уравнението (DP) такива, че за всяко $t \in [0,1]$*

$$\begin{gathered}\sup_n || u_n(t)||_{\mathrm{H}^s} + \sup_n ||v_n(t)||_{\mathrm{H}^s} \leq c_1, \\ \lim_{n\to\infty} || u_n(0) - v_n(0)||_{\mathrm{H}^s} = 0, \\ \liminf_n || u_n(t) - v_n(t)||_{\mathrm{H}^s} \geq c_2 \sin\left(\frac{t}{2}\right).\end{gathered}$$

В Глава 9 [16] изследваме т.н. μ-Камаса-Холм (μCH) уравнение, изведено наскоро в [31]

$$\mu(u_t) - u_{txx} = -2\mu(u)u_x + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \tag{51}$$

където $u(x,t)$ е пространствено периодична реално-значна функция на променлива време t и пространствена променлива $x \in S^1 = [0,1)$, $\mu(u) = \int_0^1 u dx$ означава нейното средно. Уравнението μCH описва разпространението на слабо нелинейни вълни в голям течен кристал при външно магнитно поле и вътрешно взаимодействие. В тази форма уравнението μCH се появява като уравнение на геодезични върху групата на дифеоморфизмите на окръжността съответваща на една естествена дясно инвариантна Соболева метрика.

Въвеждайки $m = \mathcal{A}u = \mu(u) - u_{xx}$, където $\mathcal{A} := \mu - \partial^2$ е операторът на инерция (∂ означава $\frac{\partial}{\partial x}$), уравнението (51) става

$$m_t = -um_x - 2mu_x, \quad m = \mu(u) - u_{xx}. \tag{52}$$

Уравнението μCH е близко свързано с уравнението Камаса-Холм (CH) и с уравнението на Хънтър-Сакстън (HS) с $\mathcal{A} = -\partial^2$

$$- u_{txx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{53}$$

Уравнението μCH е интегруемо и бихамилтоново. Дефинираме Хамилтонианите

$$H_1 = \frac{1}{2}\int umdx, \quad H_2 = \int \left(\mu(u)u^2 + \frac{1}{2}uu_x^2\right) dx. \tag{54}$$

Уравнението (52) може да бъде представено като

$$m_t = -\mathcal{B}^1 \frac{\delta H_2}{\delta m} = -\mathcal{B}^2 \frac{\delta H_1}{\delta m}, \tag{55}$$

където $\mathcal{B}^1 = \partial\mathcal{A} = -\partial^3, \mathcal{B}^2 = m\partial + \partial m$ са двата съвместими Хамилтонови оператори.

Всъщност, съществува безкрайна редица от закони за запазване $H_n[m], n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, такива че

$$\mathcal{B}^1 \frac{\delta H_n}{\delta m} = \mathcal{B}^2 \frac{\delta H_{n-1}}{\delta m},$$

първите няколко от тях в йерархията са H_2, H_1 дадени по-горе и

$$H_0 = \int m dx, \quad H_{-1} = \int \sqrt{m} dx, \quad H_{-2} = -\frac{1}{16} \int \frac{m_x^2}{m^{5/2}} dx. \tag{56}$$

Да отбележим, че

$$H_0 = \int m dx = \int (\mu(u) - u_{xx}) dx = \mu(u). \tag{57}$$

Тогава $\mu(u_t) = 0$ върху решенията на уравнението μCH – този факт може да бъде видян също така ако интегрираме двете страни на уравнението (51) върху окръжността и използваме периодичността. Това означава, че средното на всяко решение u е константа по времето и следователно е напълно определена от началните условия [31]. Този факт е съществен за пресмятанията. Тогава уравнението (51) става

$$-u_{txx} = -2\mu(u)u_x + 2u_x u_{xx} + u u_{xxx}, \tag{58}$$

точно както е въведено в [31] под името уравнение μHS.

Уравнението μCH може да бъде записано като

$$m_t = -\{m, H_2\}_1 = -\{m, H_1\}_2, \tag{59}$$

където двете съвместими Поасонови скобки са

$$\{f, g\}_1 = \int_0^1 \frac{\delta f}{\delta m} \mathcal{B}^1 \frac{\delta g}{\delta m} dx, \quad \{f, g\}_2 = \int_0^1 \frac{\delta f}{\delta m} \mathcal{B}^2 \frac{\delta g}{\delta m} dx. \tag{60}$$

Да отбележим, че $H_0 = \int m dx = \int \mu(u) dx = \mu(u)$ е Казимир за първата скобка и $H_{-1} = \int \sqrt{m} dx$ е Казимир за втората скобка.

Уравнението μCH описва псевдо-сферична повърхнина (PSS). Ще припомним дефиницията (за повече детайли вижте Чърн, Таненблат, Рейес, Сасаки [2, 45, 48]).

Дефиниция 1. Едно скаларно уравнение $\Xi(x, t, u, u_x, \ldots, u_{x^n t^m}) = 0$ с две независими променливи x, t, където $u_{x^n t^m} = \partial^{n+m} u / (\partial x^n \partial t^n)$, е от псевдо-сферичен тип (или, описва псевдо-сферична повърхнина) ако цъществуват 1-форми $\omega^\alpha \neq 0$

$$\omega^\alpha = f_{\alpha 1}(x, t, u, \ldots, u_{x^r t^p})\, dx + f_{\alpha 2}(x, t, u, \ldots, u_{x^s t^q})\, dt,\ \alpha = 1, 2, 3, \tag{61}$$

чиито коефициенти $f_{\alpha\beta}$ са гладки функции, които зависят от x, t и краен брой производни на u, такива че 1-формите $\bar{\omega}^\alpha = \omega^\alpha(u(x,t))$ удовлетворяват структурните уравнения

$$d\bar{\omega}^1 = \bar{\omega}^3 \wedge \bar{\omega}^2,\ d\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}^3,\ d\bar{\omega}^3 = \bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}^2, \tag{62}$$

винаги когато $u = u(x, t)$ е решение на $\Xi = 0$.

Дефиниция 2. Едно уравнение $\Xi = 0$ е геометрически интегруемо ако описва нетривиална едно-параметрична фамилия от псевдо-сферични повърхнини.

Това геометрично свойство се оказва изключително полезно. С него може да се възстановят Лаксовата двойка, (част от) законите на запазване и съществува квадратичен псевдопотенциал. За уравнението μCH псевдопотенциалът γ се дефинира с

$$\gamma_x = \lambda m - \gamma^2, \quad \gamma_t = \left(\frac{u_x}{2} + \frac{\gamma}{2\lambda} - u\gamma\right)_x, \tag{63}$$

където $\lambda \neq 0$.

Сега ще изследваме нелокалните симетрии на уравнението μCH , разгледано като система уравнения за променливите m и u, а именно (52). Ще търсим нелокални симетрии, които запазват средното на решението, т.е., интегралът $\mu(u) = \int udx$ остава същата константа след действието на всяка симетрия върху решението. Нелокалните симетрии са изучавани от Красилшчик и Виноградов [32]. Почти невъзможно е да се опишат съответните понятия и факти накратко. Ние ще дадем процедурата приложена за уравнението μCH. Дефинираме нова нелокална променлива δ чрез съвместимата система от уравнения

$$\delta_x = \gamma, \quad \delta_t = \frac{u_x}{2} + \frac{\gamma}{2\lambda} - u\gamma. \tag{64}$$

След това разглеждаме потенциала β, определен чрез съвместимата система уравнения

$$\beta_x = me^{2\delta}, \quad \beta_t = \left(\frac{\gamma^2}{2\lambda^2} - um\right)e^{2\delta}. \tag{65}$$

Нашият първи резултат е следната

Теорема 10. *(Теорема 9.3.1) Следните векторни полета са обобщени симетрии от първи ред за разширената μCH система (52), (63), (64) и (65), които запазват средните на решенията на уравнението μCH (52)*

$$\begin{aligned}
W_1 &= -u_t\tfrac{\partial}{\partial u} + (m_x u + 2mu_x)\tfrac{\partial}{\partial m} - \left[\tfrac{\mu(u)}{2} + \gamma^2\left(u - \tfrac{1}{2\lambda}\right) - \gamma u_x - \lambda um\right]\tfrac{\partial}{\partial \gamma} \\
&\quad - \left(\tfrac{u_x}{2} + \tfrac{\gamma}{2\lambda} - u\gamma\right)\tfrac{\partial}{\partial \delta} - \left(\tfrac{\gamma^2}{2\lambda^2} - um\right)e^{2\delta}\tfrac{\partial}{\partial \beta}, \\
W_2 &= u_x\tfrac{\partial}{\partial u} + m_x\tfrac{\partial}{\partial m} + (\lambda m - \gamma^2)\tfrac{\partial}{\partial \gamma} + \gamma\tfrac{\partial}{\partial \delta} + me^{2\delta}\tfrac{\partial}{\partial \beta}, \\
W_3 &= \tfrac{\partial}{\partial \delta} + 2\beta\tfrac{\partial}{\partial \beta}, \\
W_4 &= \tfrac{\partial}{\partial \beta}, \\
W_5 &= \gamma e^{2\delta}\tfrac{\partial}{\partial u} - \lambda(m_x + 4m\gamma)e^{2\delta}\tfrac{\partial}{\partial m} - \lambda^2 me^{2\delta}\tfrac{\partial}{\partial \gamma} - \lambda^2\beta\tfrac{\partial}{\partial \delta} - (\lambda me^{4\delta} + \lambda^2\beta^2)\tfrac{\partial}{\partial \beta}.
\end{aligned}$$

Следователно, тези векторни полета са нелокални симетрии на уравнението μCH (52).

Следствие. Петте нелокални симетрии $W_1 - W_5$ определят Ли алгебра $\mathcal{L}$ и техните комутатори са дадени в Таблица 1.

Забележка 1. Ако въведем векторните полета $h := -W_3, \quad e := \frac{1}{\lambda}W_4, \quad f := -\frac{1}{\lambda}W_5$, намираме, че комутаторите са $[h,e] = 2e, [h,f] = -2f, [e,f] = h$, т.е. e, f, h

Таблица 1. Таблица на комутаторите на алгебрата на нелокални симетрии на μCH.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
W_1	0	0	0	0	0
W_2	0	0	0	0	0
W_3	0	0	0	$-2W_4$	$2W_5$
W_4	0	0	$2W_4$	0	$-\lambda^2 W_3$
W_5	0	0	$-2W_5$	$\lambda^2 W_3$	0

определят алгебрата $sl(2,\mathbb{R})$. Следователно, $\mathcal{L}$ е изоморфна на директна сума на $sl(2,\mathbb{R})$ и абелевата Ли алгебра, определена от W_1 и W_2.

Забележка 2. Да отбележим, че W_1 и W_2 са просто генераторите на транслациите по отношение на независимите променливи – те са $\frac{\partial}{\partial t}$ и $-\frac{\partial}{\partial x}$, съответно.

Обикновено симетриите се използват за решаване (намиране на частни решения) на системата. Това тук не е толкова просто. Затова ги използваме за построяване на Дарбу-подобна трансформация за уравнението μCH.

Може би е интересно да се види и друг обект, свързан с уравнението μCH. Да припомним, че така нареченото асоцирано уравнение на Камаса-Холм (ACH) е въведено от Schiff [49]. Нека да дадем по аналогия асоцираното уравнение μCH. Дефинираме

$$p = \sqrt{m}, \quad dy = pdx - pudt, \quad dT = dt \tag{66}$$

и заместваме в уравнението (52). Да отбележим, че тази смяна е смислена, тъй като ако $m(0)$ е положително, то $m(x) > 0$, докогато $u(x,t)$ съществува (виж [31] за доказателството). Намираме

$$p_T = -p^2 u_y, \quad -p\left(\frac{p_T}{p}\right)_y + \frac{p^2}{2} = \mu(u). \tag{67}$$

Това е аналогът на уравнението ACH – асоцираното μ Камаса-Холм (AμCH) уравнение. Не е ясно дали това уравнение е от някаква полза. Независимо от това, нашата цел е да изследваме нелокалните симетрии на уравнението AμCH. Първо, трансформираме уравненията за γ, δ и β (63), (64) и (65) използвайки (66).

Твърдение 11. *(Предложение 9.4.1) Уравнението AμCH (67) допуска псевдопотенциал γ и потенциали δ, β определени от съвместимите уравнения, съответно*

$$\gamma_y = \tfrac{\lambda p}{2} - \tfrac{\gamma^2}{p}, \quad \gamma_T = \tfrac{\mu(u)}{2} - \tfrac{\gamma^2}{2\lambda} - p\gamma u_y, \tag{68}$$

$$\delta_y = \tfrac{\gamma}{p}, \quad \delta_T = \tfrac{p u_y}{2} + \tfrac{\gamma}{2\lambda}, \tag{69}$$

$$\beta_y = \tfrac{p}{2} e^{2\delta}, \quad \beta_T = \tfrac{\gamma^2}{2\lambda^2} e^{2\delta}. \tag{70}$$

□

Нашият следващ резултат е

Теорема 12. *(Теорема 9.4.1) Следните векторни полета са обобщени симетрии от първи ред за разширената AμCH система (67)-(70)*

$$\begin{aligned}
W_1 &= u_T\frac{\partial}{\partial u} - p^2u_y\frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{\mu(u)}{2} - \frac{\gamma^2}{2\lambda} - p\gamma u_y\right)\frac{\partial}{\partial \gamma} + \left(\frac{pu_y}{2} + \frac{\gamma}{2\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial \delta} + \frac{\gamma^2}{2\lambda^2}e^{2\delta}\frac{\partial}{\partial \beta},\\
W_2 &= u_y\frac{\partial}{\partial u} + p_y\frac{\partial}{\partial p} + \left(\frac{\lambda p}{2} - \frac{\gamma^2}{p}\right)\frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\gamma}{p}\frac{\partial}{\partial \delta} + \frac{p}{2}e^{2\delta}\frac{\partial}{\partial \beta},\\
W_3 &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \delta} + \beta\frac{\partial}{\partial \beta},\\
W_4 &= \frac{\partial}{\partial \beta},\\
W_5 &= -(\gamma + \lambda p u_y)e^{2\delta}\frac{\partial}{\partial u} + 2\lambda p\gamma e^{2\delta}\frac{\partial}{\partial p} + \lambda\gamma^2e^{2\delta}\frac{\partial}{\partial \gamma} + (\lambda^2\beta - \lambda\gamma e^{2\delta})\frac{\partial}{\partial \delta} + \lambda^2\beta^2\frac{\partial}{\partial \beta}.
\end{aligned}$$

Следователно, тези векторни полета са нелокални симетрии за уравнението AμCH (67).

□

Да отбележим, че алгебрата от симетриите $\mathcal{L}$ е отново изоморфна на директна сума от $sl(2,\mathbb{R})$ и абелева алгебра, генерирана от W_1 и W_2, които са еквивалентни на $-\frac{\partial}{\partial T}, -\frac{\partial}{\partial y}$, съответно. Човек може да намери Дарбу трансформация по един аналогичен начин. Тук обаче успяваме да намерим еднопараметрично решение на уравнението AμCH (67).

В Глава 10 [14, 17] се изследват два проблема, свързани с въведените в предната Глава уравнения и понятия. Мотивацията за разглеждането на първия проблем е следната. Наскоро ново уравнение от шести ред, именувано KdV6 бе изведено в [33]. След трансформации това уравнение се записва така:

$$\begin{aligned} u_t &= 6uu_x + u_{xxx} - w_x, \\ w_{xxx} &+ 4uw_x + 2u_xw = 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Тази система представлява пертурбацив на уравнението KdV ($w = 0$) и тъй като ограничението върху w е диференциално, това е нехолономна пертурбация.

Купершмид [35] представя една обща конструкция, приложима към всяка би-Хамилтонова система, даваща нехолономна пертурбация за нея. За тази пертурбация се предполага, че запазва интегруемостта. В случая на KdV6, системата (71) може да бъде записана като

$$\begin{aligned} u_t = \mathcal{B}^1\tfrac{\delta H_{n+1}}{\delta u} - \mathcal{B}^1(w) &= \mathcal{B}^2\tfrac{\delta H_n}{\delta u} - \mathcal{B}^1(w), \\ \mathcal{B}^2(w) &= 0, \end{aligned} \tag{72}$$

където $\mathcal{B}^1 = \partial, \mathcal{B}^2 = \partial^3 + 2(m\partial + \partial m)$ двата стандартни Хамилтонови оператори на KdV йерархията и

$$H_1 = \int u dx, \quad H_2 = \frac{1}{2}\int u^2 dx, \ldots. \tag{73}$$

В същата статия Купершмид проверява интегруемостта на KdV6, а също така интегруемостта на такива нехолономни деформации за някои представителни случаи: класическото уравнение на дългите вълни, верижката на Тода (непрекъснатата и дискретна) и пумпалът на Ойлер.

Керстен и др. [34] доказват, че деформацията на Купершмид на всяко бихамилтоново уравнение е отново бихамилтонова система и всяка йерархия от закони за запазване на оригиналната бихамилтонова система дава йерархия от закони за запазване на деформацията на Купершмид.

Естествено е да се мисли, че може би има връзка в следният смисъл:

Хипотеза. Деформацията на Купершмид за геометрически интегруема система е отново геометрически интегруема.

Ние не успяхме досега да установим връзка от горния тип, затова сме се ограничили с няколко важни примери. Ние показваме чрез директно конструиране на едно-формите, че уравнението CH и уравнението μCH имат геометрически интегруеми деформации на Купершмид. Показваме също, че уравнението KdV6 и дву-компонентната CH система [5] са също така геометрически интегруеми.

Сега отново ще разгледаме уравнението μCH въведено по-рано (58). Ще конструираме спрегнати променливи за двете скобки на Поасон (60) следвайки Пенской [43], където са получени спрегнати променливи за периодичното уравнение CH. Да припомним, че уравнение (58) може да бъде представено като условие за съвместимост между

$$\psi_{xx} = -\lambda m \psi \tag{74}$$

и

$$\psi_t = -\left(\frac{1}{2\lambda} + u\right)\psi_x + \frac{1}{2}u_x\psi, \tag{75}$$

т.е., $(\psi_{xx})_t = (\psi_t)_{xx}$, където λ е спектрален параметър.

Да разгледаме спектралният проблем (74). Да припомним, че $u(x+1) = u(x)$ и $m(x+1) = m(x)$.

Нека $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$ образуват фундаментална състема решения на (74), получена при началните условия

$$\begin{aligned} y_1(0,\lambda) &= 1, \qquad y_1'(0,\lambda) = 0,\\ y_2(0,\lambda) &= 0, \qquad y_2'(0,\lambda) = 1. \end{aligned}$$

Всяко решение ψ на (74) може да бъде представено като линейна комбинация на $y_{1,2}$:

$$\psi(x,\lambda) = \psi(0,\lambda)y_1(x,\lambda) + \psi'(0,\lambda)y_2(x,\lambda). \tag{76}$$

Тогава имаме формулата

$$\begin{pmatrix} \psi(x,\lambda) \\ \psi'(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \\ y_1'(x,\lambda) & y_2'(x,\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(0,\lambda) \\ \psi'(0,\lambda) \end{pmatrix} \tag{77}$$

и означаваме матрицата в горната формула с $U(x,\lambda)$. От дефиницията на $y_{1,2}$ имаме $\det U(x,\lambda) = Wr(y_1,y_2) = Wr(0) = 1$. Нека да дефинираме също така дискриминантата

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, U(1,\lambda) = \frac{1}{2}\left(y_1(1,\lambda) + y_2'(1,\lambda)\right). \tag{78}$$

Да разгледаме първо (74) с периодични гранични уславия

$$\psi(0) = \psi(1), \quad \psi'(0) = \psi'(1).$$

Съществува безкрайна редица от собствени стойности

$$\lambda_0^+ < \lambda_1^+ \le \lambda_2^+ < \lambda_3^+ \dots, \quad \lambda_n^+ \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

След това разглеждаме антипериодичната задача за собствени стойности, т.е., граничните условия за (74) имат вида

$$\psi(1) = -\psi(0), \quad \psi'(1) = -\psi'(0).$$

Съответната редица от собствени стойности е

$$\lambda_1^- \le \lambda_2^- < \lambda_3^- \le \lambda_4^- \dots, \quad \lambda_n^- \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Величините $\lambda_m^\pm$ са корени на $\Delta(\lambda) = \pm 1$, λ_0^+ е винаги просто. Известно е, че

$$\lambda_0^+ < \lambda_1^- \le \lambda_2^- < \lambda_1^+ \le \lambda_2^+ < \lambda_3^- \le \lambda_4^- < \lambda_3^+ \dots.$$

Интервалите

$$(\lambda_0^+, \lambda_1^-), (\lambda_2^-, \lambda_1^+), (\lambda_2^+, \lambda_3^-), \dots$$

се наричат интервали на устойчивост. Допълнителните на тези, са интервали на неустойчивост. Някои интервали на неустойчивост могат да изчезнат, но $(-\infty, \lambda_0)$ винаги присъства. Лесно се проверява, че в нашия случай $\lambda_0^+ = 0$ и за $\lambda \in (-\infty, 0)$ решенията на (74) са неограничени.

Да припомним, че едно решение на (74) се нарича решение на Флоке ако съществува число ρ, наричано мултипликатор на Флоке, удовлетворяващо

$$\psi(x+1,\lambda) = \rho\psi(x,\lambda).$$

Веднага се вижда от (77), че решението на Флоке и съответстващото ρ са собствен вектор и собствено число на $U(x,\lambda)$. Следователно, ρ се получава от

$$\rho^2 - 2\Delta(\lambda)\rho + 1 = 0. \tag{79}$$

Нека сега разгледаме допълнителните собствени числа μ_j, дефинирани с решение на уравнението $y_2(1,\mu_j) = 0$. Тъй като $m(x)$ е периодично, $y_2(x+1,\mu_j)$ е едно решение на (74) за $\lambda = \mu_j$. Поради (76) имаме

$$y_2(x+1,\mu_j) = y_2'(1,\mu_j)y_2(x,\mu_j),$$

т.е., $y_2(x,\mu_j)$ е решение на Флоке с мултипликатор $\rho_j = y_2'(1,\mu_j)$. И така, имаме един корен на (79) за $\lambda = \mu_j$, а именно ρ_j. Другият корен е $\tilde{\rho}_j = \frac{1}{\rho_j}$. Да означим с $y(x,\mu_j)$ съответстващото на $\tilde{\rho}_j$ решение на Флоке

$$y(x+1,\mu_j) = \tilde{\rho}_j y(x,\mu_j). \tag{80}$$

Тъй като y и y_2 са линейно независими, нормализираме y с $y(0, \mu_j) = 1$. Не сложно да се покаже, че точките от "допълнителния спектър" μ_j лежат в интервалите на неустойчивост. Тъй като $\mu_j \neq 0$ можем да дефинираме следните променливи $f_j = -\frac{\ln|\rho_j|}{\mu_j^2}$ и $g_j = -\frac{\ln|\rho_j|}{\mu_j^3}$. Нашият резултат е следната теорема

Теорема 13. *(Теорема 10.3.1) Променливите*

a) μ_i и $f_j = -\frac{\ln|\rho_j|}{\mu_j^2}$ са спрегнати по отношение на скобката $\{,\}_2$;

b) μ_i и $g_j = -\frac{\ln|\rho_j|}{\mu_j^3}$ са спрегнати по отношение на скобката $\{,\}_1$.

Апробация на резултатите

Резултатите, включени в дисертацията, са отразени в следните публикации

1. On the inverse scattering approach and action-angle variables for the Dullin-Gottwald-Holm equation, Phys. D 238 (2009), 9–19. (съвместна със С. Хаккъев) **IF $\sim$ 1.568**

2. Inverse scattering transform for the Dullin - Gottwald - Holm equation, Proceedings of the International Conference dedicated to the 105th anniversary of the birth of the pioneers of computing J. Atanasoff and J. von Neumann, Vol. 1, pp.35–42, Shumen, 2009.

3. On the Cauchy problem for the periodic b-family of equations and of the non-uniform continuity of Degasperis-Procesi equation, J. Math. Anal. Appl. **360** (2009), 47–56. (съвместна със С. Хаккъев) **IF $\sim$ 1.225**

4. Near Integrability in Low dimensional Gross-Neveu Models, Z. Naturforsch. **66a** (2011), 468–480. **IF $\sim$ 0.94**

5. Geometric Integrability of Some Generalizations of the Camassa-Holm Equation, International J. of Diff. Equ., Vol. 2011, ID738509, 13pp, 2011.

6. Non-integrability of first order resonances in Hamiltonian systems in three degrees of freedom, Celest. Mech. Dyn. Astr. **112** (2012), 149–167. **IF $\sim$ 2.319**

7. Non-uniform continuity of periodic Holm-Staley b-family of equations, Nonlinear Analysis TMA, **75** (2012) 4821–4838. (съвместна със С. Хаккъев и И. Илиев) **IF $\sim$ 1.640**

8. On the nonlocal symmetries of the μ-Camassa-Holm equation, J. Nonl. Math. Phys., **19**, No.3 1250025 (17pp), (2012). **IF $\sim$ 0.569**

9. Canonically conjugate variables for the μ-CH equation, Pliska Stud. Math. Bulgar. 21 (2012), 287–298.

10. On the integrability of a system describing the stationary solutions in Bose-Fermi mixtures, Chaos, Solitons and Fractals, 77 (2015), pp. 138-148 (съвместна с Г. Георгиев). **IF $\sim$ 1.448**

11. Non-Integrability of Some Higher-Order Painlevé Equations in the sense of Liuville, SIGMA, 11 (2015) 045, 20pp. (съвместна с Г. Георгиев). **IF $\sim$ 1.245**

12. Non-integrability of the Karabut system, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 32 (2016) 91Ц97, doi:10.1016/j.nonrwa.2016.04.002. **IF $\sim$ 2.519**

Части от резултатите, включени в дисертацията са докладвани на конференции и семинари

Доклади на международни конференции

- International Conference dedicated to the 105th anniversary of the birth of the pioneers of computing J. Atanasoff and J. von Neumann, Shumen, December 5-7, 2008.
- International Conference Partial Differential Equations and Applications, Sofia, September 14-17, 2011.
- 1081 AMS Meeting, University of Kansas, Lawrence, KS, March 30-April 1, 2012.
- FDIS 2013, Marseille, France - poster session
- The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madrid, Spain, July 07-11, 2014.
- Algebraic Methods in Dynamical Systems AMDS, Barrancuilla, Colombia, October 05-11, 2014.

Доклади на семинари

Университет Канзас (2012), Университет Грьонинген (2012), Университет Утрехт (2012), Технологичен Университет Варшава (2014).

Авторска справка

По мнение на автора основните приноси в дисертацията са:

1) Доказано е строго, че Хамилтоновите резонанси $1:2:3$, $1:2:4$, $1:1:2$ са неинтегруеми в смисъл на Лиувил, освен няколко вече известни случая.

2) Доказана е неинтегруемостта на няколко уравнения на Пенлеве от по-висок ред. Основна роля за това играят обобщените конфлуентни хипергеометрични уравнения.

3) Доказано е, че Хамилтоновата система описваща стационарните решения на Бозе-Ферми смеси е интегруема, точно когато е сепарабелна.

4) За Хамилтоновите системи, отговарящи на моделите на Грос-Невьо при две степени на свобода е показано, ограничената до четвърти ред нормална форма е интегруема и КАМ-неизродена. Това дава периодични и квазипериодични решения в околност на равновесието за пълната система. Нормалните форми за системите с три степени на свобода са вече неинтегруеми.

5) Построени са променливите действие-ъгъл за уравнението на Дулин-Готвалд-Холм (DGH).

6) За b-фамилията ($b \neq 0$) уравнения на Холм-Стали е доказано, че изображението данни - решение не е равномерно непрекъснато от ограничени множества от $\mathrm{H}^s(\mathbb{S})$ в $C([0,T],\mathrm{H}^s(\mathbb{S}))$ за произволно $s \geq 3$.

7) Получени са нелокални симетрии за уравнението μКамаса-Холм (μCH). Въведено е асоциираното μCH уравнение и са изследвани неговите нелокални симетрии. Построени са спрегнати променливи за уравнението μCH.

Благодарности

Считам за свой приятен дълг да благодаря на своите съавтори най-малко за това, че ме изтърпяха. Изказвам и сърдечната си признателност на проф. Иван Димитров и проф. Азнив Каспарян за съществена помощ по някои алгебрични въпроси, както и на Ръководството на ФМИ за тяхната морална подкрепа и съдействието, което са ми оказвали.

Литература

[1] Ayoul M., Zung N., Galoisian obstructions to non-Hamiltonian integrability, C. R. Acad. Paris, Ser. I 348 (2010) 1323–1326.

[2] Chern S. S., Tenenblat K., Pseudospherical Surfaces and Evolution Equations, Stud. in Appl. Math. **74** (1986) 55 - 83.

[3] Constantin A., Ivanov R., Poisson Structure and Action - Angle Variables for the Camassa - Holm Equation, Lett. Math. Phys. 76 (2006) 93 - 108.

[4] Constantin A., Gerdjikov V., Ivanov R., Inverse scattering transform for the Camassa-Holm equation, Inverse Problems, 22(2006), 2197-2207.

[5] Constantin A., Ivanov R., On an integrable two-component Camassa-Holm shallow water system, Phys. Lett. A 372(2008) 7129 - 7132.

[6] Christov O., Non-integrability of first order resonances in in Hamiltonian systems in three degrees of freedom, Celestial Mech Dyn Astronom 112 (2012) 149–167.

[7] Christov O., Near Integrability in Low dimensional Gross-Neveu Models, Z. Naturforsch. **66a** (2011), 468-480.

[8] Christov O., Georgiev G., Non-Integrability of Some Higher-Order Painleve Equations in the sense of Liuville, SIGMA, 11 (2015) 045, 20pp.

[9] Christov O., Georgiev G., On the integrability of a system describing the stationary solutions in Bose-Fermi mixtures, Chaos, Solitons and Fractals, 77 (2015), pp. 138-148.

[10] Christov O., Non-integrability of the Karabut system, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 32 (2016) 91Ц97.

[11] Christov, O., Hakkaev, S., On the inverse scattering approach and action - angle variables for the Dullin - Gottwald - Holm equation, Physica D, **238**, (2009), 9 - 19.

[12] Christov O., Inverse scattering transform for the Dullin-Gottwald-Holm equation, Proceedings of the International Conference dedicated to the 105th anniversary of the birth of the pioneers of computing J. Atanasoff and J. von Neumann, Vol. 1, pp.35-42, Shumen, 2009.

[13] Christov O., Hakkaev S., On the Cauchy problem for the periodic b-family of equations and of the non-uniform continuity of Degasperis-Procesi equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **360** (2009), 47–56.

[14] Christov O., Geometric integrability of some generalizations of the Camassa-Holm equation, Intern. J. Diff. Equ., (2011), doi:10.1155/2011/738509.

[15] Christov O., Hakkaev S. and Iliev I., Non-uniform continuity of periodic Holm-Staley b-family of equations, Nonlinear Analysis TMA, **75** (2012) 4821-4838.

[16] Christov O., On the nonlocal symmetries of the μ-Camassa-Holm equation, J. Nonl. Math. Phys., **19**, No.3 1250025 (17pp), (2012).

[17] Christov O., Canonically conjugate variables for the μ-CH equation, Pliska Stud. Math. Bulgar. 21 (2012), 287Ц298.

[18] Dullin H., Gottwald G., Holm D., An integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion, Phys. Rev. Letters 87 (2001) 4501-4504.

[19] Duistermaat J., Non-integrability of the 1 : 1 : 2 resonance, Ergodic Theory Dyn. Systems **4**, 553-568 (1984).

[20] Duval A., Mitschi C., Matrices de Stokes et Groupe de Galois des Équations Hypergeométriques Confluentes Généralisées, *Pacific J. Math.* **1**38 (1989), 25–56.

[21] Georgiev G., Non-integrability in the sense of Liouville of some higher-order Painlevé equations, PhD Thesis, Sofia 2015 (in Bulgarian).

[22] Gromak V., On the nonlinear differential equations of fourth order with Painlevé property, *Differential Equations* **4**2 (2006), 1017–1026. (in Russian)

[23] Himonas A., Misiolek G., High-frequency smooth solutions and well-posedness of the Camassa-Holm equation, *IMRN*, no. 51 (2005), 3135–3151.

[24] Himonas A., Kenig C., Misiolek G., Non-uniform dependence for the periodic CH equation, *Comm. Part. Diff. Eqs.*, **35** (2010), 1145–1162
[25] Holm D., Staley M., Wave structure and nonlinear balance in a family of 1+1 evolutionary PDE's, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, **2** (2003), 323–380.
[26] Horozov E., On the non-integrability of the Gross-Neveu models, Annals of Physics **174**, 430-441 (1987).
[27] Katz N., On the calculation of some differential Galois groups, *Invent. Math.* **87** (1987), 13–61.
[28] Karabut E., Summation of the Witting series in the solitary-wave problem, Sib. Math. Zh. 36 (1995) 328–348.
[29] Karabut E., Asymptotic expansions in the solitary-wave problem, J. Fluid Mech. 319 (1996) 109–123.
[30] Karabut E., Summation of the Witting series in the solitary-wave problem, J. Appl. Mech. Techn. Phys. 40 (1999) 36–45.
[31] Khesin B., Lenells J., Misiołek G., Generalized Hunter-Saxton equation and the geometry of the group of circle diffeomorphisms, Math. Ann. **342** (2008) 617-656.
[32] Krasil'shchik I., Vinogradov A., (Eds.) Symmetries and conservation laws for Differential Equations of Mathematical Physics, Translations of Math. Monographs, 182, Providence, RI: AMS, 1999.
[33] Karasu-Kalkani A., Karasu A., Sakovich A., Sakovich S., Turhan R., A new integrable generalization of the Korteveg-de Vries equation, J. Math. Phys. 49(2008) 073516.
[34] Kersten P., Krasil'shchik I., Verbovetsky A., Vitolo R., Integrability of Kupershmidt Deformations, Acta Appl. Math. 109(2010) 75-86.
[35] Kuperschmidt B., KdV6: An integrable system, Phys. Lett. A 372(2008) 2634 - 2639.
[36] Maciejewski A., Przybylska M., Stachowiak T., Non-integrability of Gross - Neveu systems, Physica D, **201**, (2005), pp. 249 - 267.
[37] Mikhailov A. (Ed.), Integrability, LNP 767, Springer, Berlin, 2009.
[38] Morales-Ruiz J., Differential Galois Theory and Non-integrability of Hamiltonian Systems, Birkhäuser, Basel, 1999.
[39] Morales-Ruiz J., Kovalevskaya, Liapunov, Painlevé, Ziglin and Differential Galois Theory, *Reg. Chaot. Dyn.* **5** (2000), 251–272.
[40] Morales-Ruiz J., A Remark about Painlevé transcendents, A: Theories asymptotiques et equations de Painlevé, Université d'Angers, 2004, 1–7.
[41] Mazzocco M., Yue Mo M., The Hamiltonian Structure of the Second Painlevé Hierarchy, *Nonlinearity* **2**0 (2007), 2845–2882.
[42] Olver P., Application of Lie Groups to Diffrential Equations, 2nd ed, New York, Springer, 1993.
[43] Penskoi A., Canonically conjugate variables for the periodic Camassa-Holm equation, Nonlinearity **18**, 415-421, 2005.
[44] Ramis, J.-P., Filtration Gevrey sur le groupe de Picard Vessiot d'une équation differentielle irrégulière, Informes de Mathematica Serie A-045/85, 1985.
[45] Reyes E., Pseudo-potentials, nonlocal symmetries and integrability of some shallow water equations, Sel. math. New ser. **12** (2006) 241 - 270.
[46] Rink B., Verhulst F., Near - integrability of periodic FPU - chains, Phys. A, **285**, 467 - 482, (2000).
[47] Rink B., Symmetry and Resonance in Periodic FPU Chains, Commun. Math. Phys., **218**, 665 - 685, (2001).
[48] Sasaki S., Soliton Equations and Pseudospherical Surfaces, Nucl. Phys. B 154(1979) 343-357.
[49] Schiff J., The Camassa-Holm equation: loop group approach, Phys. D **121** no. 1-2, (1998) 24-43.

[50] Stoyanova Ts., On the non-integrability of sixth Painlevé equation in Liouvillian sense, PhD Thesis, Sofia 2009 (in Bulgarian).
[51] Stoyanova Ts., Non-integrability of the fourth Painlevé equation in the Liouville-Arnold sense, *Nonlinearity* **27** (2014), 1029–1044.
[52] Verhulst F., Symmetry and integrability in Hamiltonian normal forms, in "Symmetry and Perturbation Theory Bambusi D., Gaeta G., (eds.), Quadern GNFM, Farenze, 245-284 (1998).
[53] Witting J., On the highest and other solitary waves, J. Appl. Math. 28 (1975) 700–719.
[54] Zakharov V. (Ed.), What is integrability?, Springer, Berlin, 1991.