Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Факултет по Математика и Информатика

Градуирани алгебри и некомутативна теория на инвариантите

Деян Живков Джундреков

Автореферат

на докторска дисертация за придобиване на образователна и научна степен "Доктор"

в професионално направление 4.5 Математика

докторска програма "Алгебра, Теория на Числата и Приложения" - Топология

Научен ръководител:

доц. д-р Силвия Бумова

София, 2024

Дисертацията е в обем 84 страници и се състои от увод, три глави, заключение, индекс и библиография от 56 заглавия. Номерацията на всички дефиниции, примери, твърдения, леми и теореми в автореферата съответства на тази в дисертацията.

Глава 1

Увод

Теория на инвариантите е клон на абстрактната алгебра, който, общо казано, се занимава с изучването на обекти, които остават непроменени под действието на линейни трансформации. Началото ѝ може да се намери в в трудовете на Лагранж и Гаус в края на 18-ти и началото на 19-ти век. Те изучават квадратични бинарни форми и използват дискриминанти да отличават различни форми. Същинската теория на инвариантите започва с работата на Джордж Бул и Ото Хесе. В началните години на теория на инвариантите усилията биват съсредоточени главно в изучаването на бинарни форми (хомогенни полиноми на две променливи). Добре известен резултат е, че квадратното уравнение $ax^2+2bx+c$ има двоен корен, тогава и само тогава, когато инвариантът $b^2 - ac$ на квадратичната бинарна форма $ax^2 + 2bxy + cy^2$ е 0. Може би вдъхновени от резултати като този, в началото математиците мислели, че всяко полиномиално свойство може да бъде описано от нулирането на някакъв инвариант. Някои резултати на Бул, Кейли и Айзенщайн за инварианти на квадратични форми от периода 1840-1850 могат да бъдат намерени в [18]. Усилията в тази насока на Кейли, Аронхолд, Клепш и Гордан довеждат до разработката на "символния" метод[1]. Той позволява свеждането на изчисляването на бинарни форми от степен n до изчисляването на n-та степен на линейни форми. Проблемът на този метод, който позволява пресмятането на инварианти, е неговата особено голяма техническа сложност, като той се оказва напрактика неприложим, освен в някои

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Symbolic_method

конкретни случаи. Това е и една от причините изследванията да поемат в нова посока и да се насочат към намирането на “фундаментални множества” от инварианти, т.е. крайни множества, такива че всеки инвариант да може да бъде представен като полином на тези фундаментални инварианти. Основен пример за това е фундаменталната теорема на симетричните полиноми. През 1868 Пол Гордан [23] доказва, че множеството от инвариантите на бинарните форми от произволна степен n е крайно породено. През 1890, Хилберт [25], в една от най-важните статии в историята на математиката, обобщава резултатите на Гордан до системи от различни хомогенни форми. Доказателството му обаче е неконструктивно и не е добре прието от широката математическа общност. То даже кара Гордан да каже известните думи:

“Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie.”

Дали наистина е казал точно това, не е съвсем ясно, понеже най-ранните цитати са след смъртта му през 1912. Гордан всъщност е подкрепял идеите на Хилберт и даже е имплементирал някои от тях в своята работа, така че враждата между двамата е по-скоро мит. Във всеки случаи, Хилберт [26] дава конструктивно доказателство на тази теорема през 1893.

Въпросът за крайна породеност е един от най-важните в теория на инвариантите. Въпросът “Крайно породени ли са всички полиноми на d променливи, инвариантни под действието на подгрупа G на матричната група?” е една от основните мотивации за 14-тия проблем на Хилберт [27]. Еми Ньотер доказва, че това е вярно за крайни групи в [44, 45], а Нагата [43] дава контрапример в случая на безкрайни групи.

Друг важен комбинаторен въпрос в теория на инвариантите е колко са на брой инвариантите . Отговор дава формулата на Молин [41], която дава начин за пресмятане на броя пораждащи от всяка степен.

След това, привидно теория на инвариантите няма големи задачи, които да решава, и е в задънена улица. Оказва се, обаче, че това изобщо не е така. Ако цитираме Рота [48],

“Като арабския феникс, възкръсващ от пепелта, класическата

> *теория на инвариантите, преди обявена за мъртва, е отново на преден план в математиката.”*

Първото “възкръсване” на теория на инвариантите е през 1935 чрез работата на Шур, Вайл и Картан. По същото време математиците откриват, че класическата теория на инвариантите може да бъде разглеждана като частен случай на теория на полупростите групи. Това става явно от книгата [54] на Вайл *Класически Групи*, в която една от основните цели е изучването на инварианти на полиноми от произволна степен под действието на класически групи. Едно интересно мнение за тази книга е на Хау [28],

> *“Повечето хора, които са запознати с книгата считат, че материалът в нея е чудесен. Много от тях мислят, че той е поднесен ужасно. (Авторът не е сред последните.)”*

Това все още не е било достатъчно, за да привлече вниманието на математическата общност с интересни въпроси. Това се случва по-късно, с работата на Мъмфорд, които използва техники от теория на инвариантите, за да реши въпроси за “модули” на алгебрични криви. Неговият подход към теория на инвариантите е да я изучава в по-общ план, а именно алгебрични групи, действащи върху алгебрични многообразия. В своята книга [42] той обобщава и модернизира идеите на класическата теория на инвариантите.

В наши дни, различни клонове на математиката, като теория на Ли, алгебрична геометрия, диференциална алгебра и други са в известна степен повлияни от теория на инвариантите.

Какво обаче се случва с некомутативна теория на инвариантите? Тя се зарежда през 1936 със статията [55] на Маргарет Волф, в която тя изследва некомутативни симетрични полиноми. Съвсем естествено математиците след това се вълнуват кои от класическите резултати в комутативна теория на инвариантите остават в сила и в некомутативния случай. Отговорът е ”не много”. Теоремите на Еми Ньотер [44, 45], например, имат аналог, изглеждащ коренно различно в некомутативния случай. Той е доказан независимо през 80-те години на миналия век от Дикс и Форманек [17], и Харченко [33], и гласи, че некомутативната алгебра на инвариантите е крайно породена само за крайни групи от скаларни матрици. Резултатите им биват обобщени за безкрайни групи от Корюгин [35] през 1984.

На пръв поглед се оказва, че "няма какво да се направи" в некомутативна теория на инвариантите. Може би както и комутативната такава, некомутативната теория на инвариантите също е мъртва? Отговорът отново е не.

В своята статия [35] от 1894, която е основна мотивация за нашите резултати, Корюгин дефинира действие, което нарича S-действие. С негова помощ в известна степен се имитира комутативност, като се действа върху позициите на елементите в хомогенни полиноми. Той доказва, че алгебрата на некомутативните инварианти на редуктивни групи, с това допълнитено действие, е крайно породена. Неговите резултати ни позволяват отново да се върнем към следния важен въпрос.

Въпрос 1.0.1. За фиксирана редуктивна група G, да се намери фундаментална система от пораждащи за алгебрата от некомутативните полиноми, инвариантни под действието на групата G.

Ще дадем отговор на този въпрос в случая когато G е симетричната група и полиномите са на произволен брой променливи d, и когато G е алтернативната група и полиномите са на 3 променливи.

Дисертацията е структурирана както следва.

Втората глава съдържа всички означения, дефиниции и резултати, които ще ни трябват по-късно в дисертацията. По-точно, втората ѝ част 2.2 съдържа много резултати от класическа теория на инвариантите, формулирани на по-модерен език.

В третата част 2.3 разглеждаме някои от основните резултати от некомутативна теория на инвариантите, като правим съпоставка между тях и комутативния им аналог. Следва 2.4, която е посветена на статията на Корюгин [35], чиято важност вече отбелязахме. Формулираме резултат относно крайна породеност на алгебра на инварианти с допълнителното S-action, това е теорема 2.4.24. За да формулираме и докажем този резултат, ни трябват две други теореми и няколко спомагателни технически леми, които са подробно доказани в дисертацията, и само формулирани тук.

Последната част 2.5 на втора глава съдържа резултатите на Маргарет Волф за симетрични некомутативни полиноми. Опитали сме се да ги представим от по-модерна гледна точка и по начин, който е систематичен навсякъде в дисертацията, като все пак сме се опитали да сме възможно най-близко до оригиналните формулировки и доказателства.

Третата и четвъртата глави съдържат новите ни резултати.

В първата част 3.1 на глава 3 разглеждаме резултатите от нашата статия [10]. В нея доказваме некомутативен аналог 3.1.5 на фундаменталната теорема за симетрични полиноми, като построяваме крайно пораждащо множество от елементарни некомутативни симетрични полиноми. За целта, първо доказваме, че с допълнителното S-действие на Корюгин, за поле с произволна характеристика, алгебрата на некомутативните симетрични полиноми с коефициенти от това поле се поражда от степенните сборове. След това намираме аналог 3.1.4 на формулите на Нютон, даващи връзка между степенните сборове и елементарните симетрични полиноми. Основния резултат 3.1.5 е в сила за полета с характеристика 0 или по-голяма от броя променливи. За да илюстрираме идеите си по-добре, сме включили доста примери и алтернативни доказателства в някои частни случаи (за симетричните некомутативни полиноми на 2 променливи). Основните техники, използвани в тази част, са обобщаване на комутативни резултати и “повдигане” на фундаментално пораждащо множество от комутативния случай до некомутативния такъв.

Втората част 3.2 на глава 3 съдържа резултатите от нашата втора статия [11]. В нея изследваме некомутативните симетрични полиноми с коефициенти от поле с положителна характеристика, по-малка от броя променливи. В тази ситуация Теоремата на Корюгин 2.4.24 не е приложима. Статията дава отговор на два важни въпроса. Първо, в Теорема 3.2.10 доказваме, че в описаната ситуация, алгебрата на симетричните некомутативни полиноми не е крайно породена. Това постигаме чрез редуциране на разглежданията до случая на характеристика, равна на броя на променливите, и след това разглеждаме алгебрата на неразложимите елементи, тоест фактора на разширения идеал 3.2.3, по неговия квадрат. Вторият въпрос, който отговаряме е относно съществуването на минимално пораждащо множество на алгебрата на симетричните некомутативни полиноми. В Теорема 3.2.12 доказваме, че степенните сборове са такова множество, като идеята на доказателството е изложена по-нагледно чрез Пример 3.2.11.

В Глава 4 отново опитваме да дадем отговор на въпрос 1.0.1 в случая на инвариантите на алтернативната група. Успяваме да дадем такъв в случая на полиноми на 3 променливи, инварианти под действието на алтернативната група от ред 3. Отново опитваме да "повдигнем" комутативни резултати до некомутативния случаи, като използваме S-действието. Успяваме да получим крайно пораждащо множество за алгебрата на алтернативните полиноми с коефициенти от поле с характеристика 0 или повече от 3, и използвайки нашия резултат 3.2.10, доказваме, че ако полето е с характеристика 2 или 3, тази алгебра не е крайно породена.

Глава 2

Предварителни сведения

2.1. Означения

В дисертацията и автореферата използваме следните означения:

1. С $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ означаваме съответно полето на реалните и комплексните числа.

2. За множество променливи $X_d = \{x_1, \ldots, x_d\}$ и поле K, $K[X_d]$ е алгебрата на полиномите на d комутиращи променливи с коефициенти от K.

3. С $\mathrm{Sym}(d)$ и $\mathrm{Alt}(d)$ означаваме съответно симетричната и алтернативната група от ред d.

4. $\mathrm{GL}_d(K)$ означава общата линейна група на неособените матрици от ред d с елементи от полето K.

5. За линейни пространства V, W над поле F, $\mathrm{Hom}(V, W)$ е линейното пространство на всички линейни изображения $V \to W$.

6. Ако V е линейно пространство над поле F, с $\mathrm{Hom}\, V$ означаваме множеството на всички ендоморфизми V to V.

7. За поле K, с KX_d означаваме линейното пространство над K с базис $x_1, x_2, \ldots, x_d$.

2.2. Комутативна теория на инвариантите

В класическата теория на инвариантите всички разсъждения обикновено са над полето на комплексните числа $\mathbb{C}$, но повечето резултати са верни и над произволно алгебрически затворено поле K с характеристика 0.

Нека V_d е d-мерно линейно пространство с базис $\{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ и

$$x_i : V_d \to \mathbb{C}, \quad i = 1, 2, \ldots, d$$

са линейните фунцкии, дефинирани чрез

$$x_i(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \cdots + \xi_d v_d) = \xi_i, \quad \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d \in \mathbb{C}.$$

Тези функцкии се наричат *координатни.* Функциите $x_1, x_2, \ldots, x_d$ пораждат подалгебра на алгебрата на всички комплекснозначни функции във V. Тази алгебра се означава с $\mathbb{C}[X_d] = \mathbb{C}[x_1, x_2 \ldots, x_d]$ и се нарича алгебра на полиномиалните функции. Нека да отбележим, че съществува изоморфизъм φ от $\mathbb{C}[x_1, x_2 \ldots, x_d]$ върху полиномиалната алгебра $\mathbb{C}[y_1, y_2, \ldots, y_d]$, дефиниран чрез $\varphi(f_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, d$.

Нека групата $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ действа върху линейното пространство V_d. Това действие индуцира действие на $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ върху $\mathbb{C}[X_d]$, посредством

$$g(f) : v \to f\big(g^{-1}(v)\big), \quad g \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}),\ f(X_d) \in \mathbb{C}[X_d],\ v \in V_d. \tag{2.1}$$

Дефиниция 2.2.1. Нека G е подгрупа на общата линейна група $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$. Под *алгебра на G-инвариантите* ще разбираме всички полиноми в $\mathbb{C}[X_d]$, които не се променят под действието на всички елементи на G, тоест

$$\mathbb{C}[X_d]^G = \{f \in \mathbb{C}[X_d] \mid g(f) = f \text{ за всяко } g \in G\}.$$

По-удобно е да предположим, че $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ действа канонично върху линейно топространство с базис $X_d = x_1, x_2, \ldots, x_d$ и да продължим това действие диагонално върху $\mathbb{C}[X_d]$ чрез

$$g\big(f(x_1, x_2, \dots, x_d)\big) = f\big(g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_d)\big), \quad g \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}), f \in \mathbb{C}[X_d]. \tag{2.2}$$

Понеже групите са изоморфни, двете действия 2.1 и 2.2 имат една и съща алгебра на инварианти.

Може би най-ранният пример за резултат в теория на инвариантите е фундаменталната теорема на симетричните полиноми. Този основен резултат показва някои от основните въпроси в теория на инвариантите.

Нека K е произволно поле. Симетричната група $\mathrm{Sym}(d)$ действа върху линейното пространство X_d посредством

$$\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}, \quad \sigma \in \mathrm{Sym}(d), i = 1, \dots, d, \tag{2.3}$$

тоест σ пермутира променливите.Един полином $f \in K[X_d]$ се нарича симетричен, ако не се променя под действието на всички пермутации от $\mathrm{Sym}(d)$. Полиномите

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_d, \\ e_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_{d-1}x_d, \\ &\vdots \\ e_d &= x_1x_2 \dots x_d \end{aligned} \tag{2.4}$$

се наричат елементарни симетрични полиноми.

Теорема 2.2.2 (Основна теорема за симетрични полиноми)**.** *Всеки симетричен полином $f \in K[X_d]^{\mathrm{Sym}(d)}$ може да бъде представен по единствен начин като полином*

$$f = p(e_1, e_2, \dots, e_d)$$

на елементарните симетрични полиноми $e_1, e_2, \dots, e_d$.

На езика на теория на инвариантите, това означава, че алгебрата $K[X_d]^{\mathrm{Sym}(d)}$

се поражда от елементарните симетрични полиноми, тоест

$$K[X_d]^{\mathrm{Sym}(d)} = K[e_1, e_2, \dots, e_n].$$

"По единствен начин" означава, че полиномите $e_1, e_2, \dots, e_d$ са алгебрически независими. Да отбележим, че пораждащото множество $e_1, e_2, \dots, e_d$ не е единствено. Ако означим с $p_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_d^k$ k-тия степенен сбор, то

Лема 2.2.3. *Симетричните полиноми $K[X_d]^{\mathrm{Sym}(d)}$ се пораждат от първите d степенни сборове, тоест*

$$K[X_d]^{\mathrm{Sym}(d)} = K[p_1, p_2, \dots, p_d].$$

Въпросът за крайна породеност е основен в теория на инвариантите още от нейното начало.

Дефиниция 2.2.4. Нека K е поле и A - (комутативна) асоциативна алгебра над K. Казваме, че A е *крайно породена*, ако съществуват елементи $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$, такива че всеки елемент на A може да бъде представен като полином на $a_1, a_2, \dots, a_n$ с коефициенти от K.

Remark 2.2.5. Ще отбележим, че горната дефиниция е еквивалетна на следното. Ако

$$\varphi : K[X_n] \to A$$

изчислителният хомоморфизъм, който изпраща x_i в a_i за $i = 1, 2, \dots, n$, то A е крайно породена, ако φ е сюрективен. С теорема за хомоморфизмите получаваме, че

$$A \cong K[X_n]/\operatorname{Ker}(\varphi).$$

Обратното също е вярно. Ако A е изоморфна на фактор-алгебра $K[X_n]/I$ за идеал I на $K[X_n]$, то всеки елемент $a \in A$ е полином на съседните класове $x_i + I$ за $i = 1, 2, \dots, n$ и така A е крайно породена.

Въпрос 2.2.6. Крайно породена ли е алгебрата $K[X_d]^G$ за всяка подгрупа G на $\mathrm{GL}_d(K)$?

Този въпрос е бил основната мотивация зад 14-тия въпрос на Хилберт [27]. Когато групата G е крайна и K има характеристика 0, отговорът е да и е даден от Еми Ньотер [44] през 1916. Когато G е крайна и K е поле с произволна характеристика, отговорът пак е да, и пак е даден от Еми Ньотер [45] през 1926. В общия случай обаче не е вярно, като контрапример е даден от Нагата [43] през 1959. Следващата теорема е първата цитирана на Еми Ньотер.

Теорема 2.2.7 (Теорема за крайнопороденост на Еми Ньотер [44])**.** *Нека K е поле с характеристика 0 and G е крайна подгрупа на $\mathrm{Gl}_d(K)$. Тогава алгебрата на инвариантите $K[X_d]^G$ е крайно породена и има множество от пораждащи $f_1, \ldots, f_m$, където f_i е хомогенен полином от степен, ограничена от реда на групата G.*

Преводът на [44] от Колин МакЛарти [39] е изключително полезен за разбиране на тази важна статия.

Теорема 2.2.8 (Лема на Ньотер за нормализацията [45])**.** *Нека K е произволно поле и A е крайно породена комутативна K-алгебра. Тогава съществуват алгебрически независими елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, такива че A е крайно породен модул над полиномиалния пръстен $K[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.*

В 2.2.5 отбелязахме, че една K-алгебра е крайно породена, тогава и само тогава, когато е фактор-алгебра на полиномиална алгебра. Ще покажем, че това е различно от A да бъде полиномиална алгебра (т.е. ядрото на изчислителния хомоморфизъм да бъде 0).

Пример 2.2.9. От основните курсове по алгебра знаем, че

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$$

и от 2.2.5,следва, че $\mathbb{C}$ е крайно породена $\mathbb{R}$-алгебра. Като линейно пространство над реалните числа, $\mathbb{C}$ има размерност 2. Ако $\mathbb{C}$ беше изоморфна на полиномиална алгебра, то тя би имала безкрайна размерност над $\mathbb{R}$, което е противоречие.

Следният въпрос възниква естествено в теория на инвариантите.

Въпрос 2.2.10. За кои подгрупи G на $\mathrm{Gl}_d(K)$, алгебрата на инвариантите $K[X_d]^G$ е изоморфна на полиномиална алгебра?

Дефиниция 2.2.11. Нека V е крайномерно линейно пространство над поле K с размерност n. *Псевдо-отражение* наричаме обратим линеен оператор

$$\varphi : V \to V,$$

такъв че φ не е идентитет, φ има краен ред (относно умножение) и φ има инвариантна хиперравнина.

Теорема 2.2.12 (Шевалей-Шепард-Тод [14, 49])**.** *За крайна група G и поле K с характеристика $\mathrm{char}(K) = 0$, алгебрата на инвариантите $K[X_d]^G$ е изоморфна на полиномиална алгебра, $K[X_d]^G \cong K[Y_d]$, тогава и само тогава, когато G се поражда от псевдоотражения.*

Най-скорощното обобщение на 2.2.12 е от Ейбрахам Броер [12] през 2007 за полета с положителна характеристика.

Възниква следният комбинаторен въпрос: колко са на брой пораждащите? За да дадем отговор, ни трябват някои дефиниции.

Дефиниция 2.2.13. Един пръстен R се нарича *градуиран*, ако се представя като директна сума

$$R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$$

на адитивни групи, такива че $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$.
Една алгебра A се нарича *градуирана*, ако е градуирана като пръстен.

Алгебрата на инвариантите $K[X_d]^G$ е градуирана за всяка група G:

$$K[X_d]^G = K \oplus (K[X_d]^G)^{(1)} \oplus (K[X_d]^G)^{(2)} \oplus \dots,$$

където $(K[X_d]^G)^{(n)}$ е линейното пространство на хомогенните инварианти от степен n.

Дефиниция 2.2.14 ([7], глава 11)**.** Нека λ е целочислена функция върху класа на всички крайно породени модули над пръстен A и M е крайно породен градуиран A-модул, $M = M_0 \oplus M_1 \oplus \dots$. Редът на *Поанкаре (или Хилберт)* за M спрямо λ е пораждащата функция на $\lambda(M_n)$

$$H(M,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n)t^n.$$

В случая на алгебра на инварианти $K[X_d]^G$, целочислената функция е размерността на линейното пространство на хомогенните инварианти, и редът на Хилберт е

$$H(K[X_d]^G,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(K[X_d]^G)^{(n)}t^n.$$

Коефициентите в този ред дават броят на инвариантите от всяка степен.

Теорема 2.2.15 (Хилберт, Сер)**.** *Редът на Хилберт $H(M,t)$, дефиниран в 2.2.14, е рационална функция на t от вида*

$$\frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1-t^{k_i})},$$

където $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

Едно доказателство на тази теорема може да бъде намерено в [7], глава 11, и то е по индукция на броя пораждащи на модула A. Това не е оригиналното доказателство на Хилберт, в което той използва своята теорема [25].

Следващата теорема е от 1897 и дава формула за явния вид на реда на Хилберт за $H(K[X_d]^G,t)$.

Теорема 2.2.16 (Формула на Молин [41])**.** *Нека* $\mathrm{char}(K) = 0$. *За крайна група G,*

$$H(K[X_d]^G,t) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(1-gt)}.$$

Това са само някои от класическите резултати в теория на инвариантите. В следващата глава ще видим как излгеждат те в некомутативния случай.

2.3. Некомутативна теория на инвариантите

Първата стъпка в преминаването от комутативна към некомутативна алгебра от инварианти е да изберем аналог на полиномиалната алгебра $K[X_d]$. Естествен кандидат е свободната асоциативна алгебра, понеже тя има същото универсално свойство като $K[X_d]$. Ще дадем по-обща, категорна дефиниция на понятието "свободен".

Дефиниция 2.3.1. Нека $\mathcal{C}$ е произволна категория, X е множество, $F(X)$ е $\mathcal{C}$-обект и $i : X \to F(X)$ е инективно изображение между множества. $F(X)$ се нарича *свободен обект* на X в $\mathcal{C}$, ако за всеки $\mathcal{C}$-object A и всяко изображение между множества $f : X \to A$ съществува единствен $\mathcal{C}$-морфизъм $\bar{f} : F(X) \to A$, такъв че следната диаграма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F(X) \arrow[d, dashed, "\exists!\bar{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

е комутативна, тоест $\bar{f} \circ i = f$. Това свойство се нарича *универсално.*

В категориите на унитарните комутативни и некомутативни асоциативни алгебри, морфизъм е хомоморфизъм между алгебри.

Твърдение 2.3.2 ([19]). *За произволно множество X, полиномиалната алгебра $K[X]$ е свободна в категорията на унитарните комутативни асоциативни алгебри.*

Дефинираме свободна асоциативна алгебра $K\langle X_d\rangle$ да бъде свободния обект в категорията на всички унитарни асоциативни алгебри

Твърдение 2.3.3 ([19]). *Нека X е множество и K е поле. Алгебрата $K\langle X\rangle$ с базис всички думи*

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}, \quad x_{i_k} \in X, k = 0, 1, \dots$$

и умножение конкатенация на думи, съгласувана с елементите на K,

$$(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_s}) = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_s},$$

е свободна в категорията на всички унитарни асоциативни алгебри.

Отново ще подчертаем, нашият аналог за мономи на d некомутиращи променливи са думи от вида $x_1, \ldots, x_d \in X_d$, и полиноми са линейни комбинации на такива думи с коефициенти от K.

В комутативния случай имаме естествена наредба на полиномите. В некомутативния има много начини да постигнем това.

Дефиниция 2.3.4 ([56]). *Допустима наредба* σ върху свободния моноид $\langle X_d \rangle$ е релация в $\langle X_d \rangle \times \langle X_d \rangle$, такава че:

- Всеки два монома $w_1, w_2 \in \langle X_d \rangle$ са сравними, $w_1 \geq_\sigma w_2$ или $w_2 \geq_\sigma w_1$ (σ е тотална наредба $\langle X_d \rangle$);
- Всеки моном е сравним със себе си, $w \geq_\sigma w$ (σ е рефлексивна);
- Ако за два монома $w_1, w_2 \in \langle X_d \rangle$, $w_1 \geq_\sigma w_2$ и $w_2 \geq_\sigma w_1$, то $w_1 = w_2$ (σ е антисиметрична).
- Ако $w_1, w_2, w_3 \in \langle X_d \rangle$, $w_1 \geq_\sigma w_2$ и $w_2 \geq_\sigma w_3$, то $w_1 \geq_\sigma w_3$ (σ е транзитивна);
- Ако $w_1, w_2 \in \langle X_d \rangle$ са такива, че $w_1 \geq_\sigma w_2$, то за всеки $w_3, w_4 \in \langle X_d \rangle$, $w_3 w_1 w_4 \geq_\sigma w_3 w_2 w_4$ (σ е съвместима с умножението);
- Всяка намаляваща редица от думи $w_1 \geq_\sigma w_2 \geq_\sigma \ldots$ in $\langle X_d \rangle$ се стабилизира (σ е добра наредба).

От дефиницията следва, че ако σ е допустима наредба $\langle X \rangle$, то за всяка дума $w \in \langle X \rangle$ $w \geq_\sigma 1$.

Една от най-интуитивните наредби в $\langle X_d \rangle$ е лексикографската:

Пример 2.3.5 ([56]). Пример за наредба върху $\langle X_d \rangle$ е лексикографската, която означаваме с Lex. Ако w_1, w_2 са две думи в $\langle X_d \rangle$, $w_1 \geq_{\mathrm{Lex}} w_2$ ако или $w_1 = w_2 w$ за някоя дума $w \in \langle X_d \rangle$, или $w_1 = w x_i w'$ и $w_2 = w x_j w''$ за думи $w, w', w'' \in \langle X_d \rangle$ и букви $x_i, x_j \in \langle X_d \rangle$ с $i > j$.

Remark 2.3.6. Лексикографската наредба е тотална, рефлексивна, антисиметрична и транзитивна наредба на мономите в $\langle X_d \rangle$. Тя обаче не е допустима наредба, защото не удовлетворява последните две условия в дефиниция 2.3.4. За да проверим, че не е съвместима с умножението, е достатъчно да разгледаме свободния моноид, породен от два елемента $\langle x_1, x_2 \rangle$. Имаме, че $x_2^2 \geq_{\text{Lex}} x_2$ но $x_2^2 x_1 \leq_{\text{Lex}} x_2 x_1$. Можем също да получим и безкрайна намаляваща редица в $\langle X_d \rangle$ by

$$x_2 x_1 \gneq_{\text{Lex}} x_2^2 x_1 \gneq_{\text{Lex}} x_2^3 x_1 \gneq_{\text{Lex}} \ldots,$$

което доказва, че лексикографската наредба не е добра наредба.

Следва пример за допустима наредба в $\langle X_d \rangle$.

Дефиниция 2.3.7 ([56]). *Степенно-лексикографската наредба* (или *deg-lex наредба*) на $\langle X_d \rangle$ е наредбата на мономите в $\langle X_d \rangle$ първо по степен (дължина), и след това лексикографски.

Това е наредбата, която ще използваме, затова я означаваме само с $\leq$ или $\geq$, без допълителни индекси. Безкрайната намаляваща редица от 2.3.6 изглежда доста различно спрямо deg-lex-наредбата. Имаме, че

$$x_2 x_1 \leq x_2^2 x_1 \leq \ldots,$$

тоест тя е растяща редица.

След като имаме начин да сравняваме мономите на $\langle X_d \rangle$, можем да дефинираме старши моном за полином в $K\langle X_d \rangle$.

След като въведохме алгебрата $K\langle X \rangle$, можем да дефинираме алгебра от G-инварианти за подгрупа G на групата $\mathrm{GL}_d(K)$.Дефиницията е аналогична на тази в комутативния случай 2.2.1.

Нека групата $G \leq \mathrm{GL}_d(K)$ действа канонично върху линейно пространство над K с базис X_d и нека продължим това действие диагонално до $K\langle X_d \rangle$ посредством

$$g\big(f(x_1, x_2, \ldots, x_d)\big) = f\big(g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_d)\big), \quad g \in G, f \in K\langle X_d\rangle.$$

Дефиниция 2.3.8. Нека G е подгрупа на $\mathrm{GL}_d(K)$ и $K\langle X_d\rangle$ е свободната асоциативна алгебра. *Алгебрата на G-инвариантите* $K\langle X_d\rangle^G$ са всички полиноми в $K\langle X_d\rangle$, които остават непроменени под действието на всички елементи на G:

$$K\langle X_d\rangle^G = \{f \in K\langle X_d\rangle \mid g(f) = f \text{ за всяко } g \in G\}.$$

Началото на некомутативната теория на инвариантите е дадено от Маргарет Волф [55] през 1936. Нейните резултати са основно за алгебрата на симетричните полиноми на некомутиращи променливи $K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}$.

Резултатите на Дикс и Форманек, и Харченко, показват, че за разлика от комутативния случай, където алгебрата $K[X_d]^G$ е крайно породена за всяка крайна група G, в некомутативния случай това е вярно за много специфични групи.

Теорема 2.3.9 ([17,33]). *Нека G е крайна подгрупа на $\mathrm{GL}_d(K)$. Алгебрата на инвариантите $K\langle X_d\rangle$ е крайно породена, тогава и само тогава, когато G е циклична група от скаларни матрици.*

Тази теорема се получава като следствие от Теорема в статията на Корюгин [35].

Теорема 2.3.10 ([35]). *Нека G е произволна (крайна или безкрайна) подгрупа на матричната група $\mathrm{GL}_d(K)$. Нека KY_m е минимално (относно включването) линейно подпространство на X_d, такова че $K\langle X_d\rangle^G \subseteq K\langle Y_m\rangle$. Тогава $K\langle X_d\rangle^G$ е крайно породена, тогава и само тогава, когато G действа върху KY_m като крайна циклична група от скаларни матрици.*

Ще разгледаме резултатите на Корюгин [35] по-подробно, понеже те са от особена важност за нашата работа.

Следва аналог на теоремата на Шевалей-Шепард-Тод 2.2.12.

Теорема 2.3.11 ([32,36]). *Алгебрата $K\langle X_d\rangle^G$ е свободна за всяка подгрупа G на $\mathrm{GL}_d(K)$ и всяко поле K.*

Теорема 2.3.12 ([32]). *За крайни подгрупи G на $\mathrm{GL}_d(K)$, съществува съответствие на Галоа между подалгебрите на $K\langle X_d\rangle$, съдържащи алгебрата от инварианти $K\langle X_d\rangle^G$, и подгрупите на G. Подалгебрата F на $K\langle X_d\rangle$, за която $K\langle X_d\rangle^G \subseteq F$ е свободна, тогава и само тогава, когато $F = K\langle X_d\rangle^H$ за подгрупа H на G.*

Подалгебри на свободни алгебри не винаги са свободни, което се вижда от следните два примера.

Пример 2.3.13 ([15]). Нека K е поле и $K[x]$ е полиномиалната алгебра на една променлива. Тя е свободна, но подалгебрата $K[x^2, x^3]$, породена от x^2 иx^3, не е.

Твърдение 2.3.14 ([15]). *Нека A е свободна асоциативна алгебра. Ако I е ненулев идеал на A, такъв че подалгебрата B, породена от I, не съвпада с A, то B не е свободна.*

Подобен резултат е в сила и за крайно породени алгебри. Подалгебра на крайно породена алгебра не е задължително крайно породена. Това се вижда даже в комутативния случай, като го илюстрираме със следния пример:

Пример 2.3.15. Нека K е поле и $K[x, y]$ е полиномиалната алгебра на две променливи x и y. Ясно е, че тя е крайно породена. Да разгледаме подалгебрата $K[x, xy, xy^2, \dots]$. Тя не е крайно породена.

Формулата на Молин 2.2.16 има директен аналог в некомутативния случай. Получена е от Дикс и Форманек [17] в същата статия както Теорема 2.3.9.

Теорема 2.3.16 ([17]). *Ако $G \subseteq \mathrm{GL}_d(K)$ е крайно породена и K има характеристика 0, то редът на Хилберт може да бъде пресметнат посредством*

$$H\Big(K\langle X_d\rangle^G, t\Big) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{1 - tr(g)t}.$$

2.4. Резултатите на Корюгин

Този раздел е посветен на резултатите на Корюгин [35]. Ние вече се запознахме с един от тях, Теорема 2.3.10. Сега ще разгледаме подробно всичко в тази статия.

В [35], всички разглеждания са за $F\langle V\rangle$. Тази алгебра е изоморфна на свободната асоциативна алгебра, която ние дефинирахме.

Дефиниция 2.4.1. Нека A е множество от некомутативни полиноми в алгебрата $F\langle X_d\rangle$. Най-малкото относно включване подпространство на of FX_d, съдържащо A, се нарича *носител* на A.

Лема 2.4.2. *Ако едно множество от полиноми в свободната асоциативна алгебра $F\langle X_d\rangle$ е инвариантно спрямо действието на група $G \leq \mathrm{GL}_d(F)$, тоест $A^G = A$, то носителят на A е също инвариантен спрямо действието на G.*

Дефиниция 2.4.3. Нека $M \subseteq \langle X_d\rangle$ е множество от мономи, $A \subseteq K\langle X_d\rangle$ множество от полиноми на d некомутиращи променливи и $x_i \in \{x_1, \ldots, x_d\}$ е буква. Казваме, че x_i *участва* в M (в A), ако x_i се появява в моном от M (в моном, участващ в полином от A). Казваме, че редицата от букви $x_{i_1} \ldots, x_{i_n}, \ldots$ е *съвместима* с M (с A), ако в M съществува поне един моном от вида $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ (моном от вида $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ участва в полином от A).

Дефиниция 2.4.4. Симетричната група $\mathrm{Sym}(n)$ действа върху хомогенната компонента на $\langle X_d\rangle$ от ред n (тоест мономите от степен n) по формулата

$$(y_1 \ldots y_n) \circ \sigma = y_{\sigma^{-1}(1)} \ldots y_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Това действие се нарича *S-действие.*

Лема 2.4.5. *Нека $M \subseteq \langle X_d\rangle$ е крайно множество от мономи. Ако мултипликативното затваряне на M е затворено спрямо S-действието на симетричната група върху хомогенните компоненти, то всяка безкрайна редица от букви $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}, \ldots,$ участваща в M, е съвместима с M.*

Лема 2.4.6. *Нека R е крайно породена алгебра, $R = K\langle f_1, \dots, f_n\rangle$ за $f_1, \dots, f_n \in K\langle X_d\rangle$. Ако R е затворена спрямо S-действието на симетричните групи, то всяка безкрайна редица от букви $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, \dots$, участваща в множеството на пораждащите $f_1, \dots, f_n$, е съвместима с него.*

Дефиниция 2.4.7. Нека V е линейно пространство и $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ е автоморфизъм. Той се нарича *полупрост*, ако се диагонализира, и *скаларен*, матрицата му е скаларна в някой базис на V (тоест се диагонализира и има само една собствена стойност).

Лема 2.4.8. *Нека V е крайномерно линейно пространство над алгебрически затворено поне F и $g \in \operatorname{Hom} V$ е автоморфизъм. Ако g не е скаларен, съществува базис $x_1, x_2, \dots, x_n$ на V и безкрайна редица от букви (от елементи на X), която не е съвместима със свободната асоциативна алгебра $F\langle X\rangle^g$ на инвариантите на g.*

Следващата лема в [35] е:

Лема 5. *Нека K е разширение на полето F, G е група от автоморфизми на V над F, $W = V \otimes_F K$. Тогава алгебрата $F\langle V\rangle^G$ е крайно породена, тогава и само тогава, когато $F\langle W\rangle^G$ е крайно породена.*

Вместо тензорното произведение $W = V \otimes_F K$, понеже $V \cong F^d$, имаме, че $W = V \otimes_F K \cong K^n$ (това може да се види,например, от [20], страница 363).

С въпросните забележки, лемата придобива вида:

Лема 2.4.9. *Нека K е разширение на полето F, $G \leq \mathrm{GL}_d(F)$, $V = FX_d$ и $W = KY_d$. Тогава алгебрата $F\langle X_d\rangle^G$ е крайно породена, тогава и само тогава, когато $K\langle Y_d\rangle^G$ е крайно породена.*

Теорема 2.4.10 ([35])**.** *Нека G е произволна (крайна или безкрайна) подгрупа на матричната група $\mathrm{GL}_d(K)$. Нека KY_m е най-малкото (спрямо включване) линейно подпространство на X_d такова че $K\langle X_d\rangle^G \subseteq K\langle Y_m\rangle$. Тогава $K\langle X_d\rangle^G$ е крайно породена, тогава и само тогава, когато G действа върху KY_m като крайна циклична група от скаларни матрици.*

Дефиниция 2.4.11. Нека $\mathrm{GL}_d(K)$ е матричната група и $G \leq \mathrm{GL}_d(K)$ е нейна подгрупа. Тогава G се нарича *почти специална група*, ако индексът $[G : \mathrm{SL_d(K)}]$ на G спрямо подгрупата на специалните матрици е краен.

Следствие 2.4.12 ([35]). *Нека $G \leq \mathrm{GL}_d(K)$ е почти специална група. Ако алгебрата $K\langle X_d\rangle^G$ е крайно породена, то G е крайна циклична група от скаларни матрици.*

Remark 2.4.13. Теоремата на Дикс - Форманек - Харченко 2.3.9 се получава директно от следствие 2.4.12, като го приложим за крайна група G.

Дефиниция 2.4.14. [30] Нека G е група и F е поле. *Представяне* на G над F е хомоморфизъм

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_n(F)$$

от G в общата линейна група от ред n за някое $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниция 2.4.15. [30] Нека $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(F)$ е представяне на G. Казваме, че ρ е *неприводимо*, ако ρ няма нетривиално подпредставяне. Една група се нарича *неприводима*, ако всяко нейно представяне е неприводимо.

Ясно е, че ако G е неприводима група, то тя няма инварианти собствени подпространства.

Друго следствие от Теорема 2.4.10 е:

Следствие 2.4.16 ([35]). *Нека $G \leq \mathrm{GL}_n(K)$ е неприводима група. Тогава алгебрата на $G-$ инвариантите $K\langle X_d\rangle^G$ е или тривиална, или не е крайно породена.*

Дефиниция 2.4.17. Алгебрата $K\langle X_d\rangle$, заедно S-действието на симетричните групи върху хомогенните компоненти, ще наричаме S-алгебра и ще означаваме с $(K\langle X_d\rangle, \circ)$.

Ако F е хомогенна подалгебра (идеал) на $K\langle X_d\rangle$, затворена относно S-действието на $\mathrm{Sym}(n)$ върху хомогенните елементи на F, то F се нарича *S-подалгебра (S-идеал)*. Ако F е $S-$(под)алгебра, казваме, че тя е *крайно породена*

S-алгебра, ако съществува крайно множество $W \subseteq F$, такова че носителят на W е F.

Действието на $\mathrm{Sym}(n)$ върху $(K\langle X_d\rangle)^{(n)}$(хомогенната компонента от степен n на $K\langle X_d\rangle$) и действието на $G \leq \mathrm{GL}_d(K)$ върху $K\langle X_d\rangle$ комутират и $\left(K\langle X_d\rangle^G, \circ\right)$ е S-алгебра.

Втората част от статията на Корюгин отговаря на въпроса дали $\left(K\langle X_d\rangle^G, \circ\right)$ е крайно породена S-алгебра за редуктивни групи G.

Дефиниция 2.4.18. [40] Една група $G \leq GL_n(K)$, G се нарича *редуктивна*, ако всичките и рационални представяния са напълно приводими.

Лема 2.4.19 (Лема на Хайман [24])**.** *Нека X_d е крайно множество от букви $w_1, w_2, \dots,$ е безкрайна редица от думи $\langle X_d\rangle$. Съществуват индекси $i, j \in \mathbb{N}$,такива че $i < j$ и думата w_i е поддума на w_j (тоест w_i се получава от w_j като изтрием някои букви).*

Теорема 2.4.20. *Нека $R = (K\langle X_d\rangle, \circ)$ е S-алгебра. Всяка растяща редица от S-идеали $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ в R се стабилизира.*

Дефиниция 2.4.21. Нека R е S-алгебра, D е S-подалгебра на R и $f_1, \dots, f_m$ хомогенен елемент на D. С $I_D\langle f_1, \dots, f_m\rangle$ означаваме минималният S-идеал of D, съдържащ $f_1, \dots, f_m$.

Ако G е фиксирана редуктивна група и $h \in K\langle X_d\rangle$, с M_h означаваме най-малкото относно включване линейно пространство, съдържащо h и инвариантно спрямо G (което означава, че M_h има базис $\{h^g \mid g \in G\}$). Означаваме с N_h подпространството на M_h с базис $\{h^g - h \mid g \in G\}$. Тогава N_h има коразмерност или 0, или 1, тоест или $M_h = N_h$, или (от редуктивност) съществува $h^* \in M_h^G$, такова че $M_h = Kh^* + N_h$. И в двата случая, от редуктивността на групата [1],

$$h = h^* + h', \quad h^* \in M_h^G, h' \in N_h. \tag{2.5}$$

[1]Теорията на редуктивните групи възниква в алгебричната геометрия. За да видим защо тази декомпозиция е вярна, трябва да навлезем надълбоко в теория, която е извън темата на дисертацията. Повече за тези групи може да се намери, например, в [40, 51].

Лема 2.4.22. *Нека $(K\langle X_d\rangle, \circ)$ е S-алгебра и G е редуктивна група. Нека още $f_1, \ldots, f_m$ са хомогенни елементи от S-алгебрата на G-инвариантите $K\langle X_d\rangle^G$. Тогава*

$$K\langle X_d\rangle^G \cap I_{K\langle X_d\rangle}\langle f_1, \ldots, f_m\rangle = I_{K\langle X_d\rangle^G}\langle f_1, \ldots, f_m\rangle.$$

Лема 2.4.23. *Нека $(K\langle X_d\rangle, \circ)$ е S-алгебра и R е нейна S-подалгебра. Нека $f_1, \ldots, f_m$ е хомогенен елемент на R и $R = I_R\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$. Тогава $R = K\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$.*

Последните две леми доказват основния резултат.

Теорема 2.4.24. *Нека K е поле и $G \leq \mathrm{GL}_d(K)$ е редуктивна група. Тогава S-алгебрата на инвариантите $\left(K\langle X_d\rangle^G, \circ\right)$, е крайно породена.*

Тази теорема е основна мотивация зад нашата статия [10]. Възниква следния въпрос:

Въпрос 2.4.25. Нека G е фиксирана редуктивна подгрупа на $\mathrm{GL}_d(K)$. Намерете крайно пораждащо множество за S-алгебрата $\left(K\langle X_d\rangle^G, \circ\right)$.

Ще го отговорим в глава 3.1, в случая, когато G е симетричната група $\mathrm{Sym}(d)$.

2.5. Резултатите на Маргарет Волф за симетрични некомутативни полиноми

Както и в комутативния случай 2.3, симетричната група $\mathrm{Sym}(d)$ действа върху свободната асоциативна алгебра $K\langle X_d\rangle$ посредством

$$\sigma : f(x_1, x_2, \ldots, x_d) \mapsto f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(d)}\right) \tag{2.6}$$

за всяка пермутация $\sigma \in \mathrm{Sym}(d)$ и всеки полином $f \in K\langle X_d\rangle$.

Дефиниция 2.5.1. Един некомутативен полином $f \in K\langle X_d\rangle$ наричаме *симетричен*, ако f не се променя под действието 2.6 на всички пермутации $\sigma \in \mathrm{Sym}(d)$.

Както казахме, ще използваме deg-lex наредбата 2.3.7 на мономите от $\langle X_d \rangle$. Ако $f \in K\langle X_d \rangle$ е некомутативен полином, deg-lex наредбата ни позволява да дефинираме старши моном на f, който означаваме с $\overline{f}$. Deg-lex наредбата е допустима, значи за полиноми $f, g \in K\langle X_d \rangle$, старшият моном $\overline{fg}$ на тяхното произведение fg е произведение $\overline{f}\,\overline{g}$ от старшите им мономи.

Действието на $\mathrm{Sym}(d)$ върху множеството от мономи $\langle X_d \rangle$ го разбива на орбити. Ако $f \in \langle X_d \rangle$ е моном, използваме стандартното означение

$$\sum f \tag{2.7}$$

да бъде сумата на всички различни мономи, които се получават от действието на $\mathrm{Sym}(d)$ върху f. Това означава, че сумираме за всички пермутации $\sigma \in \mathrm{Sym}(d) \setminus \mathrm{St}(f)$, които не са в стабилизатора $\mathrm{St}(f)$ на монома f под действието на $\mathrm{Sym}(d)$. Ако фиксираме моном h от всяка орбита, то множеството $\sum h$ е базис за алгебрата на инвариантите $K\langle X_d \rangle^{\mathrm{Sym}(d)}$. В своята статия [55], Маргарет Волф нарича такива полиноми *прости симетрични полиноми.* Тя също намира формула за пресмятането на броят на тези полиноми, както и таблица с броят им от степен не по-голяма от 8:

Degree

Number of distinct elements in a term

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	3	7	15	31	63	127
3			1	6	25	90	301	966
4				1	10	65	350	1701
5					1	15	140	1050
6						1	21	266
7							1	28
8								1
Total	1	2	5	15	52	203	877	4140

Теорема 2.5.2 ([55]).

(i) *Алгебрата на инвариантите* $K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}$ *на симетричната група от ред* d *(тоест алгебрата от симетричните некомутативни полиноми на* d *променливи) е свободна и има множество от хомогенни (прости симетрични полиноми) пораждащи, така че от всяка степен има поне един полином.*

(ii) *Всяко множество от свободни пораждащи на* $K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}$ *има един и същ брой пораждащи елементи от всяка степен.*

(iii) *Ако* $\{e_i \mid i \in I\}$ *е свободно пораждащо множество от прости симетрични полиноми за* $K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}$ *и* $f \in K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}$ *е симетричен некомутативен полином,*

$$f = \sum \beta_j e_{i_1} \dots e_{i_k}, \quad \beta_j \in K,$$

то коефициентите β_j *в това представяне са еднозначно определни линейни комбинации с цели коефициенти на коефициентите на полинома* $f(x_1, \dots, x_d)$.

В [55] също са включени полиномите в пораждащото множество за алгебрата от малки степени. Ако с $H_k^{(j)}$ означим j-тия (в deg-lex наредбата) прост симетричен пораждащ полином от степен k, то

$$\begin{aligned}
H_1 &= \sum x_1, & & & & \\
H_2 &= \sum x_1x_2, & & & & \\
H_3^{(1)} &= \sum x_1x_2^2, & H_3^{(1)} &= \sum x_1x_2x_3, & & \\
H_4^{(1)} &= \sum x_1x_2x_1x_3, & H_4^{(2)} &= \sum x_1x_2^3, & H_4^{(3)} &= \sum x_1x_2^2x_3, \\
H_4^{(4)} &= \sum x_1x_2x_3x_2, & H_4^{(5)} &= \sum x_1x_2x_3^2, & H_4^{(6)} &= \sum x_1x_2x_3x_4.
\end{aligned}$$

В статията също е пресметнат броят на полиномите $H_k^{(j)}$ за степени до 6:

Degree

Number of distinct elements in a term

	1	2	3	4	5	6
1	1					
2		1	1	1	1	1
3			1	4	12	33
4				1	8	44
5					1	13
6						1
Total	1	1	2	6	22	92

В доказателството на следната теорема тя използва резултати от [38].

Теорема 2.5.3 ([55]). *Алгебрата на симетричните некомутативни полиноми $K\langle X_2\rangle^{\mathrm{Sym}(2)}$ има точно един пораждащ елемент от всяка степен в кое да е хомогенно свободно пораждащо множество.*

Резултатите на [55] са обобщени цели 30 години по-късно, през 1969, от Бергман и Кон [9]. Различни аспекти от теорията на симетричните функции са изучавани в [1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 16, 21, 22, 29, 31, 34, 46, 47, 52, 53].

Глава 3

Некомутативни симетрични полиноми

3.1. Симетричните некомутативни полиноми като S-алгебра

Тук описваме резултатите от нашата статия [10] за крайната породеност на S-алгебрата $\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)$ на симетричните некомутативни полиноми на d променливи. По-точно, отговаряме на въпрос 2.4.25, който формулирахме накрая на 2.4, като построяваме крайно пораждащо множество.

Дефиниция 3.1.1 ([6]). Нека $n \in \mathbb{N}^+$ е ненулево естествено число. *Разбиване* на n е k-орка $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ от положителни естествени числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, такива че

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \lambda_k \text{ и } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k.$$

Ако λ е разбиване на n, означаваме с $\lambda \vdash n$.

Да припомним, че в предишния раздел 2.5 видяхме, че действието на симетричната група $\mathrm{Sym}(d)$ разбива множеството от мономите $\langle X_d\rangle$ на орбити и хомогенната компонента $\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)^{(n)}$ от степен n на алгебрата на симетричните некомутативни полиноми, като линейно пространство, има базис $\sum v$, where $v \in \langle X_d \rangle^{(n)}$. Можем така да изберем такъв елемент от $G(v)$, че

$$\deg_{x_1}(u) \geq \deg_{x_2}(u) \geq \cdots \geq \deg_{x_d}(u)$$

и $\sum u = \sum v$. С него свързваме разбиването $\lambda = \Big(\deg_{x_1}(u), \ldots, \deg_{x_1}(u)\Big)$.

Благодарение на S-действието 2.4.4 $\circ$, можем още да подобрим вида на u. Съществува пермутация $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$, такава че

$$\sum u = \sum x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_d^{\lambda_d} \circ \sigma.$$

Означаваме $p_\lambda = \sum x_1^{\lambda_1} \ldots x_d^{\lambda_d}$ и така

$$\sum u = \sum p_\lambda \circ \sigma.$$

За разбиване $\lambda = (n)$, полиномът

$$p_{(n)} = \sum x_1^n + x_2^n + \cdots + x_d^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

наричаме (n-ти) степенен сбор и за $\lambda = (1^n)$, $n \leq d$,

$$p_{(1^n)} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(d)} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

са некомутативните елементарни симетрични полиноми. Следващият резултат е в сила за полета K с произволна характеристика.

Лема 3.1.2. *Нека K е поле. Тогава S-алгебрата на некомутативните симетрични полиноми на d променливи се поражда от степенните сборове $p_{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Лема 3.1.2 ни помага да намалим пораждащото множество на $K\langle X_d \rangle^{\mathrm{Sym}(d)}$, но пак ни оставя с изброимо безкрайно пораждащо такова $\{p_{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$. За да го намалим още, ни трябва начин да получим всички некомутативни степенни сборове чрез крайно множество. Да припомним, че в комутативния случай това става чрез формулите на Нютон (това се вижда, например, от [50], или от

Уикипедия страницата [1]). В $K[X_d]^{\mathrm{Sym}(d)}$, ако с $e_1, \dots, e_d$ означим елементарните симетрични полиноми 2.4, и с p_i, $i = 1, 2, \dots$ - степенните сборове, то имаме, че

$$\begin{aligned} ke_k &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i} p_i, \qquad k \le d, \\ 0 &= \sum_{i=k-n}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i} p_i, \qquad k > d. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Дефиниция 3.1.3. За $k \le d$, означаваме с Sh_i, $i = 1, 2, \dots, k$ всички “разбърквания”, тоест пермутации $\sigma \in \mathrm{Sym}(k)$ σ, такива че σ^{-1} запазва реда на $1, 2, \dots, k-i$ и реда на $k-i+1, k-i+2, \dots, k$. За $k > d$, Sh_i, $i = 0, \dots, d$ са всички пермутации $\sigma \in \mathrm{Sym}(k)$, фиксиращи $d+1, \dots, k$, и за които σ^{-1} запазва реда на $1, 2, \dots, d-i$ и $d-i+1, d-i+2, \dots, d$.

Лема 3.1.4. *В свободната асоциативна S-алгебра $\left(K\langle X_d\rangle, \circ\right)$ имаме следните тъждества:*

$$k! p_{(k)} + (-1)^k k p_{\left(1^k\right)} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} i! \left(p_{\left(1^{k-i}\right)} p_{(i)} \circ \sum_{\sigma \in Sh_i} \sigma \right) = 0, \quad k \le d,$$

и

$$d! p_{(k)} + (-1)^d d p_{\left(1^d\right)} p_{(k-d)} + \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{d-i} i! \left(p_{\left(1^{d-i}\right)} p_{(k-d+i)} \circ \sum_{\sigma \in Sh_i} \sigma \right) = 0$$

за $k > d$.

Теорема 3.1.5. *За поле K с характеристика или 0, или по-голяма от броя променливи, S-алгебрата на некомутативните симетрични полиноми на d променливи $\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)$ се поражда от елементарните симетрични полиоми $p_{(1^i)}$, $i = 1, 2, \dots, d$.*

В нашата статия имаме няколко алтернативни доказателства на частният случай на симетрични полиноми на 2 променливи.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_identities

Теорема 3.1.6. *Нека K е крайно поле с характеристика $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Тогава S-алгебрата $\left(K\langle X_2\rangle^{\mathrm{Sym}(2)}, \circ\right)$ на симетричните некомутативни полиноми на две променливи е крайно породена.*

В края на статията [10], формулираме следната хипотеза:

Хипотеза 3.1.7. *Нека $\mathrm{char}\, K = p \leq d$. Тогава S-алгебрата на некомутативните симетрични полиноми на d променливи $\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)$ не е крайно породена.*

Тази хипотеза е доказана в нашата статия [11], като ще видим как става това в следващата част 3.2.

3.2. Безкрайна породеност и минимално пораждащо множество за S-алгебрата на симетричните полиноми в случая $p \leq d$

Тук описваме резултатите от нашата статия [11], където нашата цел е да докажем Хипотеза 3.1.7 и да стигнем по-далеч, като построим минимално пораждащо множество за S-алгебрата $(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ)$.

Remark 3.2.1. Ако $d' > d$, проекцията $K\langle X_{d'}\rangle \to K\langle X_d\rangle$, която праща променливите $x_{d+1}, \ldots, x_{d'}$ в 0, индуцира сюрективно изображение между двете S-алгебри на симетрични полиноми. Поради това е достатъчно да докажем, че S-алгебрата на симетричните некомутативни полиноми $\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)$ не е крайно породена само за полета с характеристика $\mathrm{char}(K) = p = d$. Затова ще считаме, че $p = d$.

Дефиниция 3.2.2 ([37]). Нека K е поле и A унитарна асоциативна алгебра над K. Казваме, че алгебрата A е *разширена*, ако съществува хомоморфизъм на алгебри $\varepsilon : A \to K$, наречен *разширяващо изображение*. Ядрото му $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ се нарича *разширен идеал*[2].

[2]На английски терминът е *augmented*.

Пример 3.2.3 ([37]). Ако G е група и $K[G]$ е груповата алгебра (свободният модул над K с базис G), то изображението

$$\varepsilon : \sum r_i g_i \mapsto \sum r_i$$

е разширяващо изображение и ядрото му е разширяващ идеал.

Пример 3.2.4. Ако A е градуирана алгебра над поле K, $A = A_0 \oplus A_1 \oplus$ и $A_0 = K$, хомоморфизмът $\varepsilon : A \to K$, изобразяващ елемент в неговата хомогенна компонента от степен 0 е разширяващо изображение.

Последният пример важи и за свободната асоциативна алгебра $K\langle X_d\rangle$, и в този случай полином $f \in K\langle X_d\rangle$ се изобразява в свободния си член,

$$f = \sum a_s x_{i_1}^{j_1} \dots x_{i_s}^{j_s} \mapsto a_0.$$

Това може да се използва също в случая на S-алгебра $\big(K\langle X_d\rangle, \circ\big)$, и ще ни бъде полезно точно в този случай.

Ако A е разширена алгебра и означим с I^+ разширяващия идеал на A, от интерес за нас ще бъде и $I^+/(I^+)^2$. В [37] авторите наричат $I^+/(I^+)^2$ *множество от неразложими елементи* на A.

Пример 3.2.5. Нека G е група и $G' = [G, G]$ е нейната комутаторна подгрупа. Нека I^+ е разширения идеал на груповия пръстен $\mathbb{Z}[G]$. Тогава

$$I^+/(I^+)^2 \cong G/G'.$$

Групата G/G' се нарича *абелианизация*[3] на G. С

$$M_d \coloneqq \big(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\big)^+ / \circ \left(\left(\big(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\big)^+\right)^2\right)$$

означаваме факторът на разширения идеал по неговия квадрат. Имаме, че

$$M_d = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_d^{(n)}$$

[3] На английски терминът е *abelianization*

и така M_d е градуиран по естествен начин. Всеки от хомогенните компоненти на $M_d^{(n)}$ е $\mathrm{Sym}(n)$-модул и значи има естествено S-действие $\circ$ върху M.

Лема 3.2.6. *Линейното пространство M_d, разглеждано като $\circ$-модул и като линейно пространство, от образите на степенните сборове*

$$p_i = x_1^i + \cdots + x_d^i \text{ за } i = 1, 2, \ldots .$$

Да отбележим, че това не означава, че $\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)$ не е крайно породена, понеже е възможно някои степенни сборове да бъдат проектирани в 0. Теорема 3.1.5 показва, че в случая на $p > d$, всички степенни сборове p_i за $i > d$ биват изобразени в 0.

We now consider the abelianization map $\pi : K\langle X_d\rangle \to K[X_d]$ and the map it induces on the subalgebra of noncommutative polynomials

$$\pi : K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)} \to \pi\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}\right).$$

Лема 3.2.7. *Абелианизиращото изображение π изпраща пораждащо множество на S-алгебрата $\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)$ в пораждащо множество на нейния образ - комутативната алгебра*

$$\pi\Big(\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)\Big) \subset K[X_d]^{\mathrm{Sym}(d)}.$$

Имаме, че

$$\sum u = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(d) \setminus H_u} u^g = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(d) \setminus H_u} g(u).$$

Трябва да внимаваме къде принадлежи мономът u, понеже стабилизаторите на u в $K[X_d]$ и $K\langle X_d\rangle$ са различни.

Лема 3.2.8. *За всеки моном $u \in K\langle X_d\rangle$, съществува естествена константа $c_u \in \mathbb{N}$, такава че*

$$\pi\Big(\sum u\Big) = c_u\Big(\sum \pi(u)\Big).$$

В случая $p = d$, c_u е 0, тогава и само тогава, когато $\pi(u) = x_1^s x_2^s \ldots x_p^s$ за някое

$s \geq 1$.

Лема 3.2.9. *Нека* $\mathrm{char}(K) = p = d$. *Тогава комутативната алгебра*

$$\pi\Big(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}\Big) \subset K[X_d]^{\mathrm{Sym}(d)} = K[e_1, \dots, e_d]$$

се поражда (като K*-линейно пространство) от всички произведения на елементарни симетрични полиноми* $e_1^{m_1} \dots e_d^{m_d}$*, освен степените* e_p^m *на* e_p*,* $m \geq 1$.

Теорема 3.2.10. *Ако* K *е поле с ненулева характеристика, по-малка или равна на броят на променливите на* S*-алгебрата на симетричните некомутативни полиноми* $\Big(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\Big)$*, то тази алгебра не е крайно породена.*

Пример 3.2.11. Ще покажем, че p_3 не принадлежи на S-подалгебрата F на $\Big(K\langle X_2\rangle^{\mathrm{Sym}(2)}, \circ\Big)$, породенна от първите два степенни сбора p_1 и p_2.

Теорема 3.2.12. *Ако* $0 < p = \mathrm{char}(K) \leq d$*, множеството* $\{p_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ *от всички степенни сборове е минимално пораждащо множество за* S*-алгебрата* $\Big(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\Big)$.

Глава 4

Некомутативни алтернативни полиноми

Резултатите в тази глава все още не са публикувани никъде. Целта ни е да разширим резултатите си за симетрични полиноми до резултати за алтернативни полиноми.

Лема 4.0.1. *Всеки алтернативен $f \in K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Alt}(d)}$ може да бъде представен като $f = f_1 + f_2$, където f_1 е симетричен полином на d некомутиращи променливи и f_2 е алтерниращ*[1]*, тоест f_2 сменя знака си когато сменим местата на две от променливите.*

Ако $u \in \langle X_3\rangle$ е моном на 3 некомутиращи променливи, с $\sum\limits_{\mathrm{Alt}} u$ означаваме алтерниращата сума

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Alt}(3)} (-1)^{\sigma} u^{\sigma}.$$

Ясно е, че всеки алтерниращ полином може да се представи като сума на такива полиноми. Ако $u \in \langle X_3\rangle$ е моном от степен n, $u = x_{i_1}^{\mu_1} i_2{}^{\mu_2} \dots i_k{}^{\mu_k}$, where $\mu_1 + \mu_2 + \dots \mu_k = n$ and $i_1, i_2, \dots, i_k \in 1, 2, 3$, съществува пермутация $\rho \in \mathrm{Sym}(n)$, такава че $u = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \circ \rho$,където $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = n$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ and

$$\sum_{\mathrm{Alt}} u \circ \rho = \sum_{\sigma \in \mathrm{Alt}(3)} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} x_{\sigma(2)}^{\lambda_2} x_{\sigma(3)}^{\lambda_3} \circ \rho.$$

[1] На английски двете наименования са *alternative* и *alternating*

Да отбележим, че старшия моном на всеки алтерниращ полином (с допълнителното $S-$ действие) е или $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}$, или $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3}$, където, съответно $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 1$ и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 1$.

Ако алтерниращ полином има старши моном от вида $\sum\limits_{\mathrm{Alt}(3)} x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3}$ for which $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 1$, то

$$\sum_{\mathrm{Alt}(3)} x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3} = \frac{1}{3}(-1)^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k+s+t=i\\ k\leq\lambda_1,s\leq\lambda_2,t\leq\lambda_3}} \sum_{\tau\in Sh_{k,s,t}} (-1)^{n-i}x_1^{\lambda_1-k}x_2^{\lambda_2-s}x_3^{\lambda_3-t}p_i\circ\tau\Big). \tag{4.1}$$

където сумата е по всички разбърквания на k на брой z в x_1-ците, s на брой z вx_2-ките и t на брой z в x_3-ките.

Remark 4.0.2. Членовете за $i = n$ и $i = n-1$ in (4.1) са равни на 0.

Лема 4.0.3. *Алгебрата $K\langle X\rangle^{\mathrm{Alt}(3)}$ се поражда, като S-алгебра, от елементарните симетрични полиноми e_1, e_2, e_3 и полиномите $\sum\limits_{\mathrm{Alt}} x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}$.*

Означаваме $s_k = \sum\limits_{\mathrm{Alt}(3)} x_1^{k-1}x_2$.

Лема 4.0.4. *Алгебрата $K\langle X\rangle^{\mathrm{Alt}(3)}$ се поражда, като S-алгебра от елементарните симетрични полиноми e_1, e_2 и e_3, заедно с $s_k = \sum\limits_{\mathrm{Alt}} x_1^{k-1}x_2$, за $k = 2, 3, \ldots$.*

Последната стъпка е редуцирането на полиномите s_k, $k = 2, 3, \ldots$ до крайно множество. За целта, забелязваме, че за $\sigma = (n, n-1)(1, n-2)$ е в сила

$$\begin{aligned}&(p_1s_{n-1})\circ\sigma + p_{n-2}s_2 + p_{n-3}s_3 =\\ &= 2s_n + \sum_{\mathrm{Alt}} x_1^{n-2}x_2x_3 + \sum_{\mathrm{Alt}} x_1^{n-3}x_2^2x_3 - \sum_{\mathrm{Alt}} x_1^{n-3}x_2x_3x_1.\end{aligned}$$

Оттук получаваме, че

$$\begin{aligned}s_n = \frac{1}{2}\Big(&(p_1s_{n-1})\circ\sigma + p_{n-2}s_2 + p_{n-3}s_3 - \sum_{\mathrm{Alt}} x_1^{n-3}x_2^2x_3\\ &- \sum_{\mathrm{Alt}} x_1^{n-2}x_2x_3\circ\big(\mathrm{id} - (n-2, n-1, n)\big)\Big).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Понеже и $\sum\limits_{\mathrm{Alt}} x_1^{n-3}x_2^2x_3$, и $\sum\limits_{\mathrm{Alt}} x_1^{n-2}x_2x_3$ се получават чрез полиноми от по-ниска степен (от 4.1), това ни дава крайно пораждащо множество.

Теорема 4.0.5. *Нека* $\mathrm{char(K)} = 0$ *или* $\mathrm{char(K)} = p > 3$. *Тогава* S*-алгебрата на алтернативните полиноми на* 3 *некомутиращи променливи* $\left(K\langle X_3\rangle^{\mathrm{Alt}(3)}, \circ\right)$ *се поражда, като* S*-алгебра от елементарните симетрични полиноми* $p_{1^i}, i = 1, 2, 3,$*, заедно с алтерниращите полиноми* s_2 *и* s_3.

Теорема 4.0.6. *Ако полето* K *има характеристика* 2 *или* 3*, то* S*-алгебрата* $\left(K\langle X_3\rangle^{\mathrm{Alt}(3)}, \circ\right)$ *не е крайно породена.*

Глава 5

Заключение

5.1. Научни приноси

1. За поле K от произволна характеристика, доказваме, че S-алгебрата на симетричните некомутативни полиноми на d променливи има пораждащо множество, състоящо се от степенните сборове $p_i = \sum_{k=1}^{d} x_k^i$ for $i = 1, 2, \ldots$.
2. Получаваме некомутативен аналог на формулите на Нютон в свободната асоциативна S-алгебра $\big(K\langle X_d\rangle, \circ\big)$. Установява се връзка между степенните сборове p_i некомутативните елементарни симетрични полиноми $e_{(1^i)} = \sum_{\sigma\in \mathrm{Sym}(d)} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(i)}$, за $i \leq d$.
3. Доказваме некомутативен аналог на фундаменталната теорема на симетричните полиноми: елементарните симетрични некомутативни полиноми e_i, $i = 1, \ldots, d$, пораждат S-алгебрата $\big(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\big)$ за полета с характеристика 0, или по-голяма от броя променливи d.
4. Въпросът за безкрайна породеност на алгебрата $\big(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\big)$,когато полето K има положителна характеристика p, по-малка или равна от броят променливи, е сведен до случая, когато двете са равни.
5. Доказваме, че $M_d := \big(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\big)^+ / \circ \left(\left(\big(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\big)^+\right)^2\right)$, получен чрез факторизацията на разширения идеал на S-алгебра на некомутативните симетрични полиноми по неговия квадрат, се поражда и ка-

то $\circ$-модул, и като линейно пространство, от степенните сборове p_i за $i = 1, 2, \dots$.

6. Доказваме, че абелианизиращото изображение $\pi : K\langle X_d\rangle \to K[X_d]$ изпраща пораждащо множество на некомутативната S-алгебра $\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)$ в пораждащо множество на нейния образ, комутативната алгебра $\pi\Big(\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)\Big) \subset K[X_d]^{\mathrm{Sym}(d)}$.

7. За $\mathrm{char}(K) = p = d$ доказваме, че $\pi\Big(\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)\Big)$ е линейна обвивка на всички произведения $e_1^{m_1} \dots e_d^{m_d}$ на елементарните симетрични полиноми, без степените e_p^m на p-тия степенен сбор e_p.

8. Доказваме, че за $d \geq \mathrm{char}(K) = p > 0$, S-алгебрата на некомутативните симетрични полиноми $\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)$ не е крайно породена.

9. При същите предположения за $\mathrm{char}(K) = p = d$ степенните сборове $\{p_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ са минимално пораждащо множество за S-алгебрата $\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)$. За целта доказваме, че степенните сборове p_n не принадлежат на S-подалгебрата на $\left(K\langle X_d\rangle^{\mathrm{Sym}(d)}, \circ\right)$, породенна от предходните степенни сборове $p_1, \dots, p_{n-1}$.

5.2. Публикации, свързани с дисертацията

1. Boumova, S.; Drensky, V.; Dzhundrekov, D.; and Kassabov, M. (2022) "*Symmetric polynomials in free associative algebras*", Turkish Journal of Mathematics: Vol. 46: No. 5, Article 4. https://doi.org/10.55730/1300-0098.3225

2. Boumova, S.; Drensky, V.; Dzhundrekov, D.; Kassabov, M. (2023) "*Symmetric Polynomials in Free Associative Algebras—II*". Mathematics 2023, 11, 4817. https://doi.org/10.3390/math11234817

Резултатите от горните статии са представени на следните семинари:

1. *"Symmetric polynomials in noncommuting variables"*, Пролетна научна сесия на ФМИ, София, 27 март 2021.

2. *"On the symmetric polynomials in noncommuting variables"*, Национален семинар по Теория на кодирането „Професор Стефан Додунеков", 7-11 ноември, 2021.

3. *"Symmetric polynomials in d noncommuting variables"*, Годишен семинар по Алгебра и Геометрия, 14-17 ноември, 2021.

4. *" Symmetric polynomials in free associative algebras"*, Пролетна научна сесия на ФМИ, София, 26 март, 2022.

5. *"Symmetric polynomials in free associative algebras"*, Годишен семинар по Алгебра и Геометрия, 28 август-2 септември, 2021.

6. *"Symmetric polynomials in free associative algebras (Part 2)"*, Национален семинар по Теория на кодирането „Професор Стефан Додунеков", Арбанаси, 10-13 ноември, 2022.

7. *"Alternative polynomials in free associative algebras"*, Пролетна научна сесия на ФМИ, София, 25 март, 2023.

5.3. Декларация за оригиналност на представените резултати

Декларирам, че настоящият дисертационен труд съдържа оригинални резултати, получени при проведени от мен научни изследвания (с подкрепата и съдействието на научния ми ръководител и всичките ми съавтори). Резултатите, които са получени, описани и публикувани от други учени, са надлежно и подробно цитирани в библиографията. Настоящата работа не е прилагана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен исктитут.

5.4. Благодарности

Благодаря на проф. Мая Стоянова, декан на Факултета по Математика и Информатика. Рано в своята докторантура останах без научен ръководител, и се

свързах с нея. Тя ме свърза с доц. Бумова, с която тогава не се познавахме , и я убеди да ме вземе за ученик.

Благодаря на доц. Силвия Бумова, за това, че ме прие за ученик когато дори не се познавахме - това със сигурност е необичайна ситуация. Благодаря за търпението, помощта, подкрепата и насоките. Няма как да си и мечтая за по-добър научен ръководител.

Искам да благодаря на акад. Веселин Дренски. От това да ми води първия курс по Висша Алгебра във Факултета, до това да играе особено важна роля в докторантурата ми, той ми е помагал много през годините, може би и по повече начини, от колкото знае. Не мога да преброя пътите, в които съм имал въпроси, или съм търсел литература по даден проблем, и съм намирал отговор в неговите статии, учебници или записки.

Благодаря на проф. Мартин Касабов, който не познавам лично, но след съвместната работа съм убеден, че е невероятен математик (и човек). Благодарен съм, че се присъедини към нашата група.

Благодаря на колегите ми от катедра "Комплексен Анализ и Топология" за подкрепата през всичките ми години като нейн член.

На всички от катедра "Алгебра", благодаря, че се отнасяхте с мен като член на вашата катедра.

Много от преподавателите във Факултетът по Математика и Информатика са ме вдъхновявали и мотивирали през годините, като използвам случая да благодаря на всички - мога единствено да се стремя да правя същото в бъдеще.

И накрая, благодаря на семейството и приятелите си, за непрекъсната подкрепа през целия ми живот.

Библиография

[1] Abduvalieva, G. *Fixed-point and implicit/inverse function theorems for free noncommutative functions.* Ph.D. thesis, Drexel University, Philadelphia, PA, USA, 2015.

[2] Abduvalieva, G., and Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, D. S. Implicit/inverse function theorems for free noncommutative functions. *Journal of Functional Analysis 269*, 9 (2015), 2813–2844. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123615003043?via%3Dihub.

[3] Abduvalieva, G., and Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, D. S. Fixed point theorems for noncommutative functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 401*, 1 (2013), 436–446. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X12010293?via%3Dihub.

[4] Agler, J., McCarthy, J. E., and Young, N. J. Non-commutative manifolds, the free square root and symmetric functions in two non-commuting variables. *The Transactions of the London Mathematical Society 5*, 1 (2018), 132–183. https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1112/tlm3.12015.

[5] Agler, J., and Young, N. J. Symmetric functions of two noncommuting variables. *Journal of Functional Analysis 266*, 9 (2014), 5709–5732. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123614000883.

[6] Andrews, G. E., and Eriksson, K. *Integral Partitions.* Cambridge University Press, 2004.

[7] Atiyah, M. F., and Macdonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Westview Press, 1969.

[8] Bergeron, N., Reutenauer, C., Rosas, M., and Zabrocki, M. Invariants and coinvariants of the symmetric groups in noncommuting variables. *Canadian Journal of Mathematics 60*, 2 (2008), 266–296. https://shorturl.at/otZ57.

[9] Bergman, G. M., and Cohn, P. M. Symmetric elements in free powers of rings. *Journal of the London Mathematical Society s2-1*, 1 (1969), 525–534. https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/s2-1.1.525.

[10] Boumova, S., Drensky, V., Dzhundrekov, D., and Kassabov, M. Symmetric polynomials in free associative algebras. *Turkish Journal of Mathematics 46*, 5 (2022), Article 4. https://journals.tubitak.gov.tr/math/vol46/iss5/4.

[11] Boumova, S., Drensky, V., Dzhundrekov, D., and Kassabov, M. Symmetric polynomials in free associative algebras–II. *Mathematics 11*, 23 (2023). https://www.mdpi.com/2227-7390/11/23/4817.

[12] Broer, A. On Chevalley-Shephard-Todd's theorem in positive characteristic, arxiv:0709.0715, 2007. https://doi.org/10.48550/arXiv.0709.0715.

[13] Can, M., and Sagan, B. E. Partitions, rooks, and symmetric functions in noncommuting variables. *The Electronic Journal of Combinatorics 18*, 2 (2011), Research Paper P3, 7 p. https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v18i2p3/pdf.

[14] Chevalley, C. Invariants of finite groups generated by reflections. *American Journal of Mathematics 77*, 4 (1955), 778–782. https://www.jstor.org/stable/2372597?origin=crossref.

[15] Cohn, P. M. Subalgebras of free associative algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society s3-14*, 4 (1964), 618–632. https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1112/plms/s3-14.4.618.

[16] Cushing, D., Pascoe, J. E., and Tully-Doyle, R. Free functions with symmetry. *Mathematische Zeitschrift 289*, 3-4 (2018), 837–857. https://link.springer.com/article/10.1007/s00209-017-1977-x.

[17] Dicks, W., and Formanek, E. Poincaré series and a problem of S. Montgomery. *Linear and Multilinear Algebra 1* (1982), 21–30. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/03081088208817467.

[18] Dixmier, J. Quelques aspects de la théorie des invariants. *Gazette des mathématiciens 43* (1990), 39–64. http://www.numdam.org/article/SB_1985-1986__28__163_0.pdf.

[19] Drensky, V. *Free Algebras and PI-algebras: Graduate Course in Algebra*. Springer, Singapore, 2000.

[20] Dummit, D., and Foote, R. *Abstract Algebra*, 3rd ed. Wiley, 2003.

[21] Fomin, S., and Greene, C. Noncommutative Schur functions and their applications. *Discrete Mathematics 193*, 1-3 (1998), 179–200. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X06001567?via%3Dihub.

[22] Gelfand, I. M., Krob, D., Lascoux, A., Leclerc, B., Retakh, V. S., and Thibon, J.-Y. Noncommutative symmetric functions. *Advances in Mathematics 112*, 2 (1995), 218–348. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870885710328.

[23] Gordan, P. Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Funktion mit numerischen Coeffizienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 69* (1868), 323–354. https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0069?tify=%7B%22view%22:%22info%22,%22pages%22:%5B329%5D%7D.

[24] Highman, G. Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proceedings of the London Mathematical Society 2*, 7 (1952), 326–336. https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s3-2.1.326.

[25] Hilbert, D. Über die Theorie der algebraischen Formen. *Mathematische Annalen 36* (1890), 473–530.

[26] Hilbert, D. Über die vollen Invariantensysteme. *Mathematische Annalen 42* (1893), 313–370. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01444162.

[27] Hilbert, D. Mathematische Probleme. *Archiv der Mathematik und Physik 1* (1901), 44–63, 213–237. Reprinted in "Gesammelte Abhandlungen, Band III, Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes, Lebensgeschichte", Zweite Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970, pp. 290-329.

[28] Howe, R. Remarks on classical invariant theory. *Transactions of the American Mathematical Society 313*, 2 (1989), 539–570. https://www.ams.org/journals/tran/1989-313-02/S0002-9947-1989-0986027-X/.

[29] Hu, J., and Wang, M. Free holomorphic functions on the noncommutative polydomains and universal models. *Results in Mathematics 73*, 3 (2018), Paper No. 99, 33 p. https://link.springer.com/article/10.1007/s00025-018-0861-2.

[30] James, G., and Liebeck, M. *Representations and Characters of Groups*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2001.

[31] Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, D. S., and Vinnikov, V. *Foundations of Free Noncommutative Function Theory*. No. 199 in Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014. https://www.ams.org/books/surv/199/surv199-endmatter.pdf.

[32] Kharchenko, V. K. Algebra of invariants of free algebras (Russian). *Algebra Logika 17*, 4 (1978), 478–487. Translation: Algebra

and Logic 1978; 17 (4): 316-321. https://www.mathnet.ru/links/db23bd84fd49ba000c120d32c42d93a1/al1619.pdf.

[33] Kharchenko, V. K. Noncommutative invariants of finite groups and Noetherian varieties. *Journal of Pure and Applied Algebra 31*, 1-3 (1984), 83–90. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404984900793?via%3Dihub.

[34] Klep, I., and Špenko, v. Free function theory through matrix invariants. *Canadian Journal of Mathematics 69*, 2 (2017), 408–433.

[35] Koryukin, A. N. Noncommutative invariants of reductive groups (russian). *Algebra Logika 23*, 4 (1984), 419–429. Translation: Algebra and Logic 1984; 23 (4): 290-296. https://www.mathnet.ru/links/d84e5827e7ca45206ffa79fab58f24f1/al1871.pdf.

[36] Lane, D. R. *Free Algebras of Rank Two and Their Automorphisms*. Ph.D. thesis, Bedford College, London, UK, 1976.

[37] Loday, J.-L., and Vallette, B. *Algebraic Operads*, vol. 346 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 2012.

[38] MacMahon, P. A. *Combinatory Analysis, Volume I*. Cambridge University Press, 1915.

[39] McLarty, C. The finiteness theorem for invariants of a finite group (translation of Emmy Noether's "Der Endlichkeitsatz der Invarianten endlicher Gruppen"), arxiv:1503.07849. https://doi.org/10.48550/arXiv.1503.07849.

[40] Milne, J. S. Algebraic Groups (v2.00), 2015. Available at www.jmilne.org/math/.

[41] Molien, T. Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 52* (1897), 1152–1156.

[42] Mumford, D. *Geometric Invariant Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[43] Nagata, M. On the 14th problem of Hilbert. *American Journal of Mathematics 81*, 3 (1959), 766–772. https://www.jstor.org/stable/2372927.

[44] Noether, E. Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen. *Mathematische Annalen 77* (1915), 89–92. Reprinted in Gesammelte Abhandlungen. Collected Papers. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1983; 181-184., https://link.springer.com/article/10.1007/BF01456821.

[45] Noether, E. Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik *p*. *Nachrichten Göttingen* (1926), 28–35. https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN252457811_1926?tify=%7B%22view%22:%22info%22,%22pages%22:%5B32%5D%7D.

[46] Pascoe, J. E. Noncommutative free universal monodromy, pluriharmonic conjugates, and plurisubharmonicity. arXiv:2002.07801 [math.FA], 2020. https://arxiv.org/abs/2002.07801.

[47] Rosas, M. H., and Sagan, B. E. Symmetric functions in noncommuting variables. *Transactions of the American Mathematical Society 358*, 1 (2006), 215–232. https://www.ams.org/journals/tran/2006-358-01/S0002-9947-04-03623-2/S0002-9947-04-03623-2.pdf.

[48] Rota, G.-C. Two turning points in invariant theory. *The Mathematical Intelligencer 21*, 1 (1999), 20–27. https://link.springer.com/article/10.1007/BF03024826.

[49] Shephard, G. C., and Todd, J. A. Finite unitary reflection groups. *Canadian Journal of Mathematics 6* (1954), 274–304. https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/4A59731DC35C3FEC99F39EB2C009FE3E/S0008414X00023725a.pdf/finite-unitary-reflection-groups.pdf.

[50] Siderov, P., and Tchakerian, K. *Notes on Algebra: Groups, Rings and Polynomials (in Bulgarian)*. Vedi, 2018.

[51] Springer, T. A. *Linear Algebraic Groups (Modern Birkhäuser Classics)*, 2nd ed. Birkhäuser, 1998.

[52] Stevenson, L. C. *Calculus of Higher Order Noncommutative Functions*. Ph.D. thesis, Drexel University, Philadelphia, PA, USA, 2018.

[53] Špenko, v. *Modifying the Structure of Associative Algebras*. Ph.D. thesis, University of Ljubljana, Slovenia, 2015.

[54] Weyl, H. *Classical Groups: Their Invariants and Representations*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1939.

[55] Wolf, M. C. Symmetric functions of non-commutative elements. *Duke Mathematical Journal 2*, 4 (1936), 626–637. https://projecteuclid.org/journals/duke-mathematical-journal/volume-2/issue-4/Symmetric-functions-of-non-commutative-elements/10.1215/S0012-7094-36-00253-3.short.

[56] Xiu, X. *Non-Commutative Gröbner Bases and Applications*. Ph.D. thesis, Universität Passau, 2012. https://d-nb.info/1024803708/34.