

РЕЦЕНЗИЯ

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:

”Градуирани алгебри и некомутативна теория на инвариантите”

за придобиване на

образователна и научна степен „доктор“

от

кандидат: Деян Живков Джундреков

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление: 4.5. Математика,

Докторска програма: ”Алгебра, теория на числата и приложения”-Топология,

катедра: ”Алгебра”

Факултет по математика и информатика (ФМИ),

Софийски университет „Св. Климент Охридски“ (СУ).

Рецензията е изготвена от проф. д-р Азнив Киркор Каспарян, катедра Алгебра, Факултет по математика и информатика, Софийски университет ”Св. Климент Охридски” в качеството ми на член на научното жури, съгласно Заповед № 38-64/01.02.2024 на Ректора на Софийския университет.

1 Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали

Дисертацията съдържа 84 страници и се състои от въведение, четири глави и библиография. В една от главите са събрани предварителни сведения от комутативната и некомутативната теория на инвариантите. Тя анализира подробно резултати на Корюкин от 1984 г. и на Margarete Wolf от 1936 г. Следващите две глави отразяват оригинални научни приноси на автора. Те съдържат положителни и отрицателни резултати за крайна породеност на алгебрата $K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}$ на некомутативните симетрични полиноми на d променливи, снабдена с допълнително пермутационно S -действие върху позициите на мономите. Гореспоменатите резултати са публикувани в две статии в изключително престижни специализирани научни списания от първи и втори квартал, съгласно

Web of Science. Една от главите отразява статия в процес на работа върху алгебрата $K\langle X_d \rangle^{\text{Alt}(d)}$ на некомутативните полиномиални инварианти на алтернативната група $\text{Alt}(d)$, снабдена с допълнително S -действие. Последната глава изброява основните научни постижения на дисертацията и дискутира тяхната апробация. Библиографията се състои от 56 заглавия, от които 34 статии от специализирани научни списания, 13 монографии или учебници, както и 7 препринта или дисертации за придобиване на образователната и научна степен "Доктор". Деветнадесет заглавия от литературата са публикувани преди 1970 г., а четиринадесет от тях са се появили през последните десет години. Това доказва, че задачите, решени от дисертацията, са едновременно класически и съвременни.

2 Данни и лични впечатления за кандидата

Деян Живков Джундреков е завършил Софийския университет "Св. Климент Охридски". При мен е взел с отлични оценки избираемите дисциплини "Въведение в комутативната алгебра" и "Въведение в хомологичната алгебра". Представи се отлично, показвайки задълбочено разбиране на материала и оригинално мислене. Деян Джундреков е преподавал "Линейна алгебра" и "Алгебра 2" - абстрактна алгебра в моя екип. Той организира перфектно преподаването си, избирайки подходящи задачи, илюстриращи теорията и ги обяснява по достъпен за студентите начин. По този начин, Деян Джундреков е заслужил уважението и отличните отзиви на своите студенти. Като член на комисията на докторантския му приеман изпит съм впечатлена от неговата задълбоченост и широка математическа култура. Деян Джундреков е високо уважаван за своята честност, квалифицираност и отговорно отношение към задълженията си. Той е изключително прецизен в научно-изследователската и преподавателската си работа. Има отлични умения за работа в екип.

3 Съдържателен анализ на научните и научноприложните постижения на кандидата, съдържащи се в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени по процедурата

Рецензираната дисертация започва с въведение, последвано от предварителни сведения. Предварителните сведения включват Основната теорема за комутативните симетрични полиноми, резултатите на Emmy Noether за крайна породеност на алгебрата $K[X_d]^G$ на комутативните полиноми, които са инвариантни относно крайна подгрупа $G \leq \text{GL}_d(K)$ на общата линейна група над поле K с произволна характеристика, както и Теоремата на Chevalley-Shephard-Todd за K -трансцендентност на комутативните полиномиални инварианти $K[X_d]^G$ на крайна група $G \leq \text{GL}_d(K)$, породена от псевдотражения. Специално внимание е отделено на рационалността на реда на Hilbert на крайно породена градуирана K -алгебра, както и на явната формула на Molien от 1897

г. за реда на Hilbert на алгебрата $K[X_d]^G$ на комутативните полиномиални инварианти на крайна линейна група G над поле K с характеристика $\text{char}(K) = 0$. Преобладаваща част от предварителните сведения е посветена на некомутативната теория на инвариантите. Това включва описанието на степенно-лексикографската пълна Артинова наредба на некомутативните мономи, която е съгласувана с ляво и дясно почленно умножение и въведена от Хiu през 2012 г. Независими резултати на Dick-Formanek от 1982 г. и на Харченко от 1984 г. установяват, че алгебрата $K\langle X_d \rangle^G$ на некомутативните полиномиални инварианти на крайна подгрупа $G \leq \text{GL}_d(K)$ е крайно породена тогава и само тогава, когато G е циклична група от скаларни матрици. Двете оригинални статии на доц. д-р Силвия Бумова, акад. проф. д-р Веселин Дренски, асистент Деян Джундрекков и проф. д-р Мартин Касабов, отразени в дисертацията, преодоляват гореспоменатото препятствие пред крайната породеност чрез въвеждане на допълно пермутационно S -действие върху позициите на променливите на мономите. Това позволява "повдигане" на резултати от комутативната теория на инвариантите в некомутативната теория. Предварителните сведения дискутират независими резултати на Lane от 1976 г. и на Харченко от 1978 г., които доказват, че над произволно поле K , алгебрата $K\langle X_d \rangle^G$ на некомутативните полиномиални инварианти на произволна подгрупа $G \leq \text{GL}_d(K)$ е свободна асоциативна K -алгебра. Дисертацията обяснява съответствието на Galois на Харченко, съгласно което за произволна крайна подгрупа $G \leq \text{GL}_d(K)$, свободните асоциативни подалгебри на $K\langle X_d \rangle$, съдържащи $K\langle X_d \rangle^G$, са точно алгебрите $K\langle X_d \rangle^H$ на некомутативните полиномиални инварианти на подгрупите H на G . Специално внимание е отделено на явната формула на Dick-Formanek за реда на Hilbert на гдуираната K -алгебра $K\langle X_d \rangle^G$, която е изпълнена за произволна крайна подгрупа $G < \text{GL}_d(K)$ и е доказана през 1982 г. Цял параграф на главата на предварителните сведения е посветена на статия на Корюкин от 1984 г., въвеждаща допълнително пермутационно S -действие \circ върху $K\langle X_d \rangle$, което за всяко $n \in \mathbb{N}$ се задава чрез действието на $\text{Sym}(n)$ върху мономите $\langle X_d \rangle^{(n)}$ от степен n чрез пермутации на позициите на променливите. Дисертацията дава подробно доказателство на резултати на Dick-Formanek от 1982 г. и на Харченко от 1984 г., които установяват, че за произволна подгрупа $G \leq \text{GL}_d(K)$, алгебрата $K\langle X_d \rangle^G$ на некомутативните полиномиални инварианти е крайно породена тогава и само тогава, когато за минималното K -линейно подпространство KY_m на K -линейната обвивка KX_d на X_d с $K\langle X_d \rangle^G \leq K\langle Y_m \rangle$, ограничението на G върху KY_m е крайна циклична група от скаларни матрици. Специално внимание е отделено на обобщението на Корюкин на Теоремата на Hilbert за базиса за S -идеали на $K\langle X_d \rangle$, както и на крайната породеност на S -алгебрата $(K\langle X_d \rangle^G, \circ)$ на некомутативните полиномиални инварианти на редуктивна подгрупа $G \leq \text{GL}_d(K)$ над произволно поле K . Последният параграф на предварителните сведения напомня резултатите на Margarete Wolf от 1936 г. за алгебрата $K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(n)}$ на некомутативните симетрични полиноми. Тя установява, че $K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(n)}$ е свободна асоциативна алгебра и всяка минимална хомогенна пораждаща система на $K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(n)}$ се състои от един и същи брой $\nu_n \geq 1$ хомогенни полиноми от степен $n \in \mathbb{N}$. Освен оригиналното доказателство на Margarete Wolf от 1936 г., дисертацията дава още две доказателства на това, че произволна минимална

хомогенна пораждаща система на $K\langle X_2 \rangle^{\text{Sym}(2)}$ има точно един хомогенен пораждащ от всяка степен $n \in \mathbb{N}$.

Третата глава на дисертацията отразява оригиналните резултати на двете публикувани статии, докато четвъртата глава дискутира частен случай на статия в процес на работа върху некомутативните инвариантни полиноми на алтернативните групи. Първият параграф на глава 3 установява, че орбитите на некомутативните елементарни симетрични полиноми относно допълнителното пермутационно S -действие образуват пораждаща система на K -алгебрата $K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}$ на некомутативните симетрични полиноми над поле K с характеристика $\text{char}(K) = 0$ или с проста характеристика $\text{char}(K) = p > d$. Като първа стъпка е доказано, че S -орбитите на степенните сборове $p_{(n)} = x_1^n + \dots + x_d^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ са пораждаща система на K -алгебрата $K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(n)}$. За тази цел, за произволно естествено число $n \in \mathbb{N}$ е установено, че некомутативните хомогенни симетрични полиноми $p_{(\lambda)}$, отговарящи на разбиванията λ на n , пораждат хомогенната компонента $[K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}]^{(n)}$ на $K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}$ от степен n . С индукция по броя на компонентите на λ са изброени S -орбитите на $p_{(\lambda)}$. За да построим крайна пораждаща система на S -алгебрата $(K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}, \circ)$, дисертацията въвежда специални подмножества $\text{Sh}_i \subset \text{Sym}(k)$ от пермутации, наречени розетки. За произволни $k \in \mathbb{N}$ и $\min(d - \min(k, d), 1) \leq i \leq \min(k, d)$, множеството Sh_i се състои от онези $\rho \in \text{Sym}(k)$, за които ρ^{-1} запазва взаимните положения на числата от множествата $\{1, 2, \dots, \min(k, d) - i\}$ и $\{\min(k, d) - i + 1, \min(k, d) - i + 2, \dots, \min(k, d)\}$. За произволни $k \in \mathbb{N}$ са доказани некомутативни формули на Newton, свързващи степенните сборове $p_{(k)}$ с некомутативните елементарни симетрични полиноми $p_{(1^i)} = \sum_{\sigma \in \text{Sym}(d)} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(i)}$, $1 \leq i \leq d$. Това е изключително сложен резултат, изразен като анулиране на подходящи алтерниращи суми над орбитите на $p_{(1^{k-i})} p_{(\max(k-d, 0), i)}$ под действие на Sh_i , за всички $0 \leq i \leq \min(k, d)$. В резултат, S -орбитите на некомутативните елементарни симетрични полиноми $p_{(1^i)}$, $1 \leq i \leq d$ са свободна пораждаща система на K -алгебрата $K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}$ над поле K с характеристика $\text{char}(K) = 0$ или с проста характеристика $\text{char}(K) = p > d$.

Вторият параграф на третата глава установява, че ако основното поле е с проста характеристика $\text{char}(K) = p \leq d$, то S -алгебрата $(K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}, \circ)$ не е крайно породена. След свеждане на разглежданията към случая $\text{char}(K) = p = d$ е доказано, че естественият епиморфизъм $\pi : K\langle X_d \rangle \rightarrow K[X_d]$ на свободната асоциативна алгебра $K\langle X_d \rangle$ върху съответната свободна комутативна и асоциативна алгебра $K[X_d]$ изобразява $K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}$ върху K -линейната обвивка на 1 и на мономите $e_1^{m_1} \dots e_d^{m_d}$ на комутативните елементарни симетрични полиноми $e_k = \sum x_1 \dots x_k$, $1 \leq k \leq d$ с $m_k \geq 1$ за поне едно $1 \leq k \leq d - 1$. Нека B^+ е идеалът на полиномите от $\pi(K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)})$, които се анулират за $x_1 = \dots = x_d = 0$. В геометричен контекст и с изключителен финес е построено безкрайно K -линейно независимо подмножество $\{e_1 e_d^m + (B^+)^2, \dots, e_{d-1} e_d^m + (B^+)^2 \mid m \in \mathbb{N}\}$ на фактор-пространството $B^+ / (B^+)^2$. От съществуването на гореспоменатата безкрайна линейно независима система следва, че подалгебрата $\pi(K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)})$ на $K[X_d]$ и нейният пра-образ $K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}$ не са крайно породени. Същият параграф установява,

че над поле K с $\text{char}(K) = p \leq d$, S -орбитите на некомутативните степенни сборове $p(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ образуват минимална пораждаща система на $K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}$.

Четвъртата глава е посветена на непубликувани резултати за некомутативните полиномиални инварианти $K\langle X_d \rangle^{\text{Alt}(d)}$ на алтернативната група $\text{Alt}(d)$. Тя доказва, че произволен полином $f \in K\langle X_d \rangle^{\text{Alt}(d)}$ се разлага в сума $f = f_1 + f_2$ на симетричен некомутативен полином $f_1 \in K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}$ и алтерниращ некомутативен полином $f_2 \in K\langle X_d \rangle^{\text{Alt}(d)}$, т.е. $\tau(f_2) = -f_2$ за транспозиция $\tau = (i, j) \in \text{Sym}(d)$, $1 \leq i < j \leq d$. Разполагайки с минимална пораждаща система на S -алгебрата $(K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}, \circ)$, свеждаме построението на минимална пораждаща система на $(K\langle X_d \rangle^{\text{Alt}(d)}, \circ)$ към намиране на пораждащо множество на S -орбитите на алтерниращите некомутативни полиноми $\sum_{\sigma \in \text{Sym}(d)} (-1)^\sigma u^\sigma$, породени от мономи $u \in \langle X_d \rangle$. За $d = 3$ и за поле K с произволна характеристика е доказано, че S -орбитите на некомутативните елементарни симетрични полиноми $p_{(1)}, p_{(1^2)}, p_{(1^3)}$ и S -орбитите на алтерниращите полиноми $s_k := \sum_{\sigma \in \text{Sym}(3)} (-1)^\sigma (x_1^{k-1} x_2)^\sigma$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ пораждат K -алгебрата $K\langle X_3 \rangle^{\text{Alt}(3)}$. Ако K е с характеристика $\text{char}(K) = 0$ или с проста характеристика $\text{char}(K) = p > 3$, K -алгебрата $K\langle X_3 \rangle^{\text{Alt}(3)}$ се поражда от S -орбитите на некомутативните елементарни симетрични полиноми $p_{(1)}, p_{(1^2)}, p_{(1^3)}$, заедно с S -орбитите на алтерниращите полиноми $s_2 = \sum_{\sigma \in \text{Sym}(3)} (-1)^\sigma (x_1 x_2)^\sigma$ и $s_3 = \sum_{\sigma \in \text{Sym}(3)} (-1)^\sigma (x_1^2 x_2)^\sigma$. От резултатите на втория параграф на глава 3 следва, че над поле K с характеристика $\text{char}(K) = 2$ или 3 , K -алгебрата $K\langle X_3 \rangle^{\text{Alt}(3)}$ не е породена от краен брой S -орбити.

Последната, пета глава формулира основните научни приноси на дисертацията и описва апробацията на получените резултати, т.е., публикациите и докладите върху оригиналните резултати.

4 Апробация на резултатите

Оригиналните резултати на дисертацията са публикувани в две статии. Едната от тях е в Turkish Journal of Mathematics с Impact Factor 1 от 2022 и е класифицирана от Web of Science във втори квартал. Другата статия е публикувана в MDPI Mathematics с Impact Factor 2,4 от 2022 и е от първи квартал във Web of Science. Тези статии носят общо 135 точки, вместо необходимите 30. По този начин, Деян Живков Джундрекков преизпълнява значително минималните национални изисквания на член 2 б, алинеи 2 и 3 на Закона за развитие на академичния състав в Република България и съответните изисквания на Софийския университет "Св. Климент Охридски" за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в научната област и професионалното направление на процедурата. Публикациите, отразени в дисертацията са съвместни с доц. д-р Силвия Бумова, акад. проф. д-р Веселин Дренски и проф. д-р Мартин Касабов. Доколкото ми е известно, приносите на всички съавтори към гореспоменатите публикации са равностойни.

Резултатите, представени от кандидата в дисертационния труд и научните трудове към него не повтарят такива от предишни процедури за придобиване на научно звание и академична длъжност. Няма доказано по законоустановения ред плагиатство в

представения дисертационен труд и научни трудове по тази процедура.

5 Качества на автореферата

Авторефератите на български и английски език отразяват коректно резултатите и съдържанието на дисертацията. Те съдържат формулировките на всички твърдения от дисертацията, както и списък на основните научни приноси, описание на апробацията на получените резултати, декларация за оригиналност и цялата библиография.

6 Критични бележки и препоръки

Нямам критични забележки и препоръки.

7 Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го научни трудове и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащи се в тях научни и научноприложни приноси, **потвърждавам**, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на Закона за развитие на академичния състав на Република България, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ „Св. Климент Охридски“ за придобиване от кандидата на образователната и научна степен „доктор“ в научна област 4. Природни науки, математика и информатика и професионално направление 4.5 Математика. В частност, кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

Въз основа на гореизложеното, препоръчвам на научното жури да присъди на

Деян Живков Джундреков

образователна и научна степен „доктор“ в научна област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, докторска програма ”Алгебра, теория на числата и приложения”-Топология.

25.03.2024 г.

Рецензент:

Азнив Киркор Каспарян, проф. д-р