



Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Факултет по математика и информатика  
Катедра „Обучение по Математика и Информатика“



# Ролята на приложните задачи от училищния курс по математика за целите на обучението

## АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд  
на Ралица Любомирова Стаменкова

за присъждане на образователна и научна степен „доктор“  
в професионално направление

1.3 „Педагогика на обучението по ...“

научна специалност:

Методика на обучението по математика и информатика

Научен ръководител:  
проф. д-р Иван Тонов

София  
2023

## СЪДЪРЖАНИЕ

УВОД .....	1
Актуалност на проблема.....	1
Тема.....	3
Обект на изследването .....	3
Предмет (субект) на изследването.....	3
Цел на изследването .....	3
Хипотези .....	5
Методи на изследването.....	6
Структура и съдържание.....	7
1. ГЛАВА: ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ.....	9
1.1. Задача .....	9
1.2. Решение на текстова задача .....	10
1.3. Компетентност и умения на 21. век.....	11
2. ГЛАВА: МАТЕМАТИКАТА В ОБРАЗОВАНИЕТО.....	12
2.1. Образование.....	12
2.2. Новата образователна парадигма .....	13
2.3. Мотивация .....	13
2.4. Творческо мислене в математиката.....	13
3. ГЛАВА: КОНТЕКСТ НА ПРОБЛЕМА .....	13
3.1. Парадокс – образование и очаквания .....	14
3.2. ДЗИ и прием в университети.....	16
4. ГЛАВА: МЕЖДУНАРОДЕН АСПЕКТ, АНАЛИЗ, ПАРАЛЕЛИ .....	16
4.1. Математическо есе .....	18
4.2. Приложните задачи според таксономията на Блум .....	19
5. ГЛАВА: ИЗСЛЕДВАНИЯ НА ТЕРЕН .....	21
5.1. Подготовка – избор на конкретни задачи .....	21
5.2. Методи и инструментариум .....	23
5.3. Критерии и показатели за оценка.....	23
5.4. Изследователска фаза .....	25

6.	ГЛАВА: АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ.....	25
6.1.	Оценка на решенията от двата експеримента .....	25
6.2.	Обобщение на резултатите от фаза '21 г.....	26
6.3.	Дискусия и изводи.....	27
7.	ГЛАВА: ПОГЛЕД НАЗАД.....	28
7.1.	Задача за втори гимназиален етап – профилирана подготовка .....	28
7.2.	Задача 1.....	29
7.3.	Задача 2 (приложна) .....	30
7.4.	Задача 3 (творчество).....	31
7.5.	Задача 4 (problem-solving) .....	31
	РАЗВИТИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	32
	Развитие на темата .....	32
	Заключение .....	33
	ПРИНОСИ .....	35
	Научноизследователски приноси .....	35
	Научноприложни приноси .....	35
	Приложни приноси .....	35
	Библиография на автореферата.....	36
	Документи и програми .....	38
	Декларация за оригиналност.....	39

## БЛАГОДАРНОСТИ

---

На моите учители и ръководители:

Проф. д-р Иван Тонов и доц. д-р Таня Топова, които ме вдъхновиха и подкрепиха, предоставяйки избрана литература и споделяйки безценния си опит.

Доц. Николина Николова, която ме научи, че за изследванията трябва да се пише и публикува.

Колегите ми Анна Цанева и Валентина Бонева, които ми помогнаха с полевите изследвания на терен с техните ученици.

На учениците ми, които откликнаха и работиха целенасочено.

## УВОД

---

*Умът е не само в знанието, но и умението то да се прилага.*  
*Аристотел*

### Актуалност на проблема

„Имаме проблем, когато е налице противоречие между новите изисквания и съществуващата реалност.“ (Бижков & Краевски, стр. 155)

**Проблеми** на образователната ни система са ниската функционална грамотност на учениците, затрудненията им да се справят със задачи, изискващи комбиниране на множество знания и подходи. **Проблем** е лесното отказване от решаване на проблеми, зададени в неявен вид. **Проблем** е, че се очаква от учениците да развият нови компетентности – креативност, критично мислене, *problem-solving*, боравене с информация, но подготовката им не отговаря на тези изисквания. **Проблем** е наличието на малко и изолирани приложни задачи в гимназиалния курс по математика у нас. „За да могат учениците да прилагат математически знания в нематематически контекст, е необходимо обучение в духа на математическото моделиране. От значение е не само учениците да познават някои математически приложения и стандартни модели, но и да имат опит в процеса на активно моделиране.“ (Събева-Колева, 2010)

Според програмите по математика на Министерството на образованието и науката (МОН) в 9, 10, 11 и 12 клас обучението „е насочено към овладяване на **базисни знания, умения и отношения**, свързани с постигане на изискванията за резултатите от обучението по учебен предмет **математика** и с изграждане на **ключови компетентности** на ученика“ (МОН, 2017).

Европейската референтна рамка посочва **8 компетентности**: езикова грамотност; многоезикова компетентност; математическа компетентност и компетентност в областта на точните науки, технологиите и инженерството; цифрова компетентност; личностна компетентност, социална компетентност и компетентност за придобиване на умения за учене; гражданска компетентност; предприемаческа компетентност; компетентност за културна осведоменост и изява. (Съвет на Европейския съюз, 2018) Европейската дигитална компетентностна рамка (DigComp, 2023) изброява пет ключови компетентности: информационна грамотност; комуникация и сътрудничество; създаване на цифрово съдържание; безопасност; умения за разрешаване на проблеми.

Ключова роля в развитието на изброените компетентности има училищният курс по математика. От своя страна приложните задачи имат значение за развитието на следните **умения на 21. век**: четивна грамотност; математическа грамотност; *problem-solving*; умения за учене; критическо мислене; дигитална

грамотност; творчество; боравене с предоставената информация; самонасочване и самооценка.

В началото на 19. век германският математик Феликс Клайн в книгата си „Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus“ („Елементарната математика от гледна точка на висшата математика“) адресира проблема с липсата на приложни задачи като част от училищния курс по математика. Той препоръчва на учителите „... взимайте много житейски примери за Вашето собствено преподаване“ (Klein, 1908). Два века по-късно концепцията, наблюденията и препоръките на Феликс Клайн продължават да звучат актуално.

Училищният курс на обучение по математика има за цел запознаването с науката – аксиоматиката, теоремите, лемите, следствията, правилата и др. Създават се умения за следване на алгоритми, за откриване на логически връзки и за комбиниране на модели за решаване на задачи. Наред с това е важно учащите да са наясно не само със стъпките, които следват, но с тяхното значение. Често учениците питат за какво са им необходими познанията за функции. Едва по-късно в университета или в работата си разбират значението и важността на уменията аналитично да разчитат по-сложни текстове и да анализират графично представена информация. Голямото методическо предизвикателство е за учителите – да преподават не само математика, но и нейното приложение, в ограничен брой часове. Ключовата им роля е да ангажират скептичните тийнейджъри и да ги мотивират, да събудят интелектуалното им любопитство с близък до реалността житейски проблем, който трябва да решат с математическите знания, с които разполагат. Специфична е методологията, с която този тип задачи се въвеждат, след усвояване на необходимия теоретичен материал. Задачата на учителя е да насочва, да изгражда у учениците речник, с който да облекчи прехода от текст към математически модел. Ролята му е да подаде ръка, за да може ученикът да превъзмогне страха от провал. Психологическият блокаж е породен от неувереността, дали може да разчете поставения в задачата проблем, макар да е усвоил необходимите дефиниции, аксиоми, теореми и алгоритми за решаване. „Въпреки че в учебните програми по математика моделирането е едно от ядрата на учебното съдържание, заложените стандарти не са достатъчно пълни и конкретни. Затова в учебниците, особено за класовете от гимназиалната степен, липсват задачи за моделиране на реални ситуации. На практика в учебния процес моделирането често се изчерпва с илюстрация на съществуващи математически модели. От друга страна бързото развитие на технологиите изисква от учениците да развият умения за аналитично мислене и активно моделиране на реални ситуации.“ (Събева-Колева, 2010)

Парадигмата на образованието се отнася до начин на мислене за целта на образованието, значението на ученето и ролите на учителите и учениците. Парадигмите на образованието влияят върху това как учениците се обучават и оценяват и какво се оценява и включва в учебната програма. В контекста на

съвременната учебна парадигма за учене през целия живот математиката в образованието допринася за развитието на когнитивното мислене. Тя не се ограничава само в сферата на понятия и правила, но и в умението за вземане на решения чрез комбиниране на множество знания. Новата образователна парадигма е наречена от френския математик и дидактик Ив Шевалар „парадигма на поставяне на света под въпрос“ (paradigm of questioning the world). Той застава зад идеята за учене през целия живот, но и набляга, че то трябва да лежи на солидни знания по математика. „Днес ние трябва да съживим епистемологичния дух на математиката, без арогантност, а с политическата и социална воля, необходима за съживяване на идеята, че **математиката за нас, човешките същества, е решение, а не проблем.**“ (Chevallard, 2015)

### Тема

Тема на дисертационния труд е ролята на приложните задачи в гимназиалния курс по математика за целите на обучението – ментално и интелектуално развитие на учениците. Ролята на тези задачи е многопластова и комплексна. От една страна те са инструмент за развитието на когнитивните и метакогнитивните умения, аналитичното мислене, творчество и функционалната грамотност на обучаемите. От друга са стимул за мотивацията и ангажираността. Те представляват интелектуално и познавателно предизвикателство за преподаващи и ученици.

### Обект на изследването

**Обект** на изследването е използването и прилагането на знанията за функции при решаване на практически задачи в обучението по математика в гимназиалния курс на обучение. „Учениците възприемат задачата като учебна необходимост. Ролята на учителя е да превърне тази необходимост в интересно предизвикателство... Той трябва да координира и коригира поведението на учащите се в процеса на решаване на задачи... самото обучение по математика трябва да бъде проблемно ориентирано.“ (Тонов, 2012)

### Предмет (субект) на изследването

**Предмет** на изследването е значението на приложните задачи за развитието на когнитивни и метакогнитивни умения и компетентности при ученици в първи и втори гимназиален етап.

### Цел на изследването

Изучаването на математика в училище има за цел не само преподаване на знания по предмета, но и развиване на логическото мислене, аналитичното четене и аргументирано изложение.

**Цел** на дисертацията е изследователски разрез на приложните задачи с оглед

на тяхната роля за развитие на математическото мислене, уменията и компетентностите на учениците.

Настоящата дисертация разглежда как компетентностите „оживяват“ чрез приложните задачи. Проучената литература, разгледаните добри практики от чуждестранни образователни системи и обзорът на проекти, разработени в страната, дават конкретни примери за задачи, които онагледяват значението на математиката при решаване на проблеми от различно естество.

**1. Задача:** Да се направи структуриран обзор на литературни източници, анализиращи ролята на приложните задачи в курса на обучение по математика. Да се разгледат сходни изследвания като се вземат под внимание: използваните методи; заложените хипотези; направените изводи.

**2. Задача:** Да се съпоставят: действащите в Република България нормативни документи и програми за образованието в прогимназиален и гимназиален етап; документите на ЕК за развитие на образованието – особено тези, които засягат България като членка на Европейския съюз.

**3. Задача:** Да се съпоставят: действащите учебници в България, чуждестранни учебници. Да се систематизират добри практики от други образователни системи, които могат да се адаптират и да обогатят курса на обучение по математика.

**4. Задача:** Да се анализира ролята на приложните задачи като инструмент за осъществяване на междупредметни връзки. Училищният курс на обучение е съвкупност от знания и умения в различни области. Задачи, комбиниращи проблематика от различни сфери, предлагат обединяващ модел на познанието.

**5. Задача:** Да се установи доколко има нужда и как е възможно да се допълни курсът на обучение по математика с приложни задачи без това да намалява теорията и рутинните задачи, които са заложи в действащите учебници.

**6. Задача:** Да се опише и аргументира как чрез приложните задачи се развиват компетентностите, когнитивни и метакогнитивните умения и уменията на 21. век, заложи от Европейската компетентностна рамка (ЕКР) – аналитичното четене, знанията по математика, *problem-solving*, нивото на дигитална компетентност, творчество и иновации, критично мислене, преценка и самооценка.

**7. Задача:** Чрез изследване на терен да се проследят трудностите в осъществяване на връзка между теоретични познания и тяхното приложение на практика, уменията на учениците да съставят математически модел на приложна задача и подходите, които използват, за решаването ѝ. Допълнителни аспекти на разглеждане са изявеното творчество, самоинициатива и нивото на прилагане на дигиталните технологии.



## Хипотези

Според Стратегическата рамка за развитие на образованието, обучението и ученето в Република България (2021 - 2030) „Основна цел на преподаването е чрез прилагане на нови методи и подходи да се направи обучението **по-привлекателно и практически ориентирано** и да се изградят нагласи за **учене през целия живот**.“ (МОН, Стратегически документи, 2021)

Съвременният ученик задържа все по-кратко вниманието си при четене. Навиците за бърз, повърхностен, диагонален прочит са неприложими при работа с обемна откъм текст математическа задача. Само с внимателен прочит може да се отсее важната от излишната информация и да се маркират необходимите компоненти за изграждането на математическия модел.

Въпреки промените в учебните планове и новите учебници, приложните задачи остават слабо застъпени в гимназиалния курс на обучение, което не отговаря на нивото на подготовката в други европейски страни. ЕК препоръчва споделяне на добри практики и партньорство в образованието, без това да нарушава идентичността на отделните системи. България е с традиции в задълбочената теоретична математическа подготовка, с което можем да се гордеем. Във връзка с новите промени на учебната програма и въвеждане на нов формат на Държавен зрелостен изпит (ДЗИ) следва да се почерпи вдъхновение за разнообразни задачи от опита и утвърдените практики от други страни.

Учителите е необходимо да развият умение за проява на творчество при работа със задачите от учебника и/или да създават подходящи приложни задачи според учебните цели, нуждите на учениците и в рамките на изучавания учебен материал. Наред с това да могат да подбират подходящи задачи, за да развият когнитивните умения на учениците, да предлагат различни стратегии за решаване. Ролята на учителя се разширява с тази на **фасилитатор**, провокиращ аналитично и критично мислене и творчество. Учителят не само избира задачите и създава обстановка за дискусия и търсене на оптимално решение, но трябва да стимулира и учениците да изследват, да се аргументират, да търсят алтернативни походи, да създават задачи.

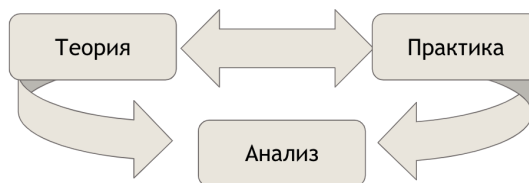
### 1. Хипотеза

Приложните задачи са един от инструментите за постигане на целите, посочени в Стратегическата рамка. Те повишават интереса и **мотивацията**, като дава примери за използването на конкретните познания по математика в различни сфери от живота и развият умения за **учене през целия живот**.

### 2. Хипотеза

Работата по приложни задачи развива до голяма степен уменията на 21. век и подготвя гимназистите за следващия етап от образованието им. Такива задачи

спомагат постигането на целите на образованието по математика като в по-голяма степен развиват заложените ключови **компетентности** – критично мислене, аналитично четене, *problem-solving*, творчество. Преходът от текст към математически модел създава връзка между теория и практика. Творчеството се изразява, както в решението на конкретна задача, така и в умението да се създават нови такива.



Фиг. 1: Ролята на приложните задачи за целите на образованието

### 3. Хипотеза

Приложните задачи в по-голяма степен **затрудняват** дори ученици с добра математическа подготовка. Богатата тематика на задачите е важна за изграждане на **аналитично-евристично мислене**.

### 4. Хипотеза

Целенасочената работа по такива задачи има значение за изграждане на **когнитивните и метакогнитивни модели**, тренира **концентрираното четене** и повишава **самодисциплината**.

### 5. Хипотеза

С оглед глобализацията, мобилността и целта за Европейско пространство за образование (ЕПО) до 2025 г. (Commission, 2023) е необходимо курсът на обучение да се допълни с практически задачи в синхрон със заложеното учебно съдържание. Това е полезно за повишаване на **конкурентоспособността** и възможността за **мобилност** на зрелостниците (Directorate-General for Education, 2023).

### 6. Хипотеза

В контекста на учене през целия живот **учителите също трябва да развиват** уменията си, да учат, да търсят и опознават нови образователни технологии и инструменти.

### Методи на изследването

Триангулацията се отнася до използването на множество методи или източници на данни в качествени изследвания за разработване на цялостно разбиране на явленията (Patton, 1999). В настоящата дисертация триангулацията

е между (1) научна литература, публикации, изследвания и съответните статистики; (2) различни учебници и учебни програми – международни и български през годините; (3) изследвания на терен, case-study. Заложените и използвани показатели, методи и инструментариум на изследването са подробно описани в **пета** глава.

## Структура и съдържание

Настоящият **увод** въвежда в проблема и актуалността му, представя темата, обекта и предмета на дисертационния труд. В увода се дефинират целите и задачите на изследването, залагат се хипотезите и се описва методът на изследването. Като допълнение е описана структурата на дисертацията.

В **първа глава** се дефинират основните понятия, които се използват в изложението. Въз основа на литературен обзор и с оглед целите на дисертацията се описват приложните задачи – формулировка, структура, основни части, речник, разнообразие. Дискутира се методологията на изграждане на въпросите по нива на трудност. Дава се пример за един процес на създаване на селекция от задачи. Цитират се избрани критерии за оценяването на значението на задачата, приложена в курса на обучение. Прави се разрез по няколко оси на решението на приложна задача. Анализират се етапите, очакваните дейности на учениците, ролята на учителя, адресираните компетентности, когнитивни и метакогнитивни умения. Описани са знания и умения, компетентности и умения на 21. век, функционална и множествена грамотност в контекста на поставената тема.

Във **втора глава** се прави ретроспекция на образованието и ролята на математиката в учебния процес на база литературен обзор и актуалните към момента дигитални приложения, базирани на изкуствен интелект. Разглежда се новата образователна парадигма за учене през целия живот и значението ѝ за учители и ученици. Обръща се внимание на мотивацията през призмата на приложните задачи и се проследява значението на творческото мислене в училищния курс по математиката.

В **трета глава** се прави обзор на отношението на родители и ученици към подготовката по математика в различните етапи на обучение. Търси се обяснение за разминаването между очаквания и резултати. Разглежда се парадоксът между интереса към математиката и действителното постигане на трайни знания и умения. Като един пример се разглежда участието в състезанието Европейско кенгуру от представителите на отделните възрастови групи. През призмата на приложните задачи се проследява развитието на решението на една конкретна задача в различните етапи на обучение, следвайки спираловидния модел в образованието. Целта е да се анализира добавената стойност на приложните задачи и ролята им за развитие на компетентностите. С оглед на набелязаните проблеми се търси споделен опит от специалисти в областта чрез преглед на научни публикации по темата.

**В четвърта глава** се прави паралел с чуждестранни системи от аспекта на приложните задачи. Разглеждат се отделни примерни задачи както и подходите към изучаване на различни методични единици. Описват се различията и се набелязват подходи и задачи, които са необходими за развитие, следвайки идеята за единно европейско образование. Анализират се конкретни примери за приложни задачи в различни образователни степени. Описва се мястото и ролята на дигитални технологии в курса по математика. Прави се обзор на съвременни образователни практики като проектно-базираното обучение. Подробно се описва математическото есе като инструмент в обучението по математика. Прави се разрез на приложните задачи според таксономията на Блум в контекста на компетентностния модел.

**Пета глава** проследява подготовката на проведеното изследване на терен. Началото се поставя от предварителни наблюдения, които дават насока за избора на конкретна математическа задача, формулиране на две нейни версии – за контролната и за фокус групата. Представя се допълнителният въпросник. Аргументира се изборът на методи и инструментариум. Дефинират се критерии и показатели за оценка. Охарактеризира се математическата подготовка на участниците в експеримента – ученици от гимназиален курс. Описва се процесът на двукратното провеждане на експеримента в две поредни години, както и условията на реализацията.

**Шеста глава** съдържа описание на кодирането на натрупаните данни през двете фази на изследването. Разглеждат се няколко подхода към решението, коментират се приложените от учениците стратегии на решение. Предлага се разрез на решенията според заложените критерии и показатели. Представя се отчет на резултатите от двете фази. Анализират се резултатите и данните от анкетата в контекста на уменията на 21. век. Качественият анализ на резултатите от гледна точка на ролята на приложните задачи в курса на обучение по математика дава основания за дискусия и изводи.

**Седма глава** предлага пет конкретни примери за приложни задачи, подходящи за втори гимназиален етап – профилирана подготовка. Предложените решения са разгледани от аспекта на компетентностния подход и развитието на уменията на 21. век. Ученическото творчество се разглежда като потенциален източник на интересни приложни задачи.

**В заключението** се обобщават резултатите от изследването на терен, от действащите нормативни документи, от разгледаните литературни източници, от чуждестранни образователни практики. Заложените хипотези се сравняват с направените изводи. Начертават се потенциалните посоки за развитие на изследването и анализ на резултатите.

Дисертационният труд завършва с авторска справка – публикации, участие в научни проекти и приносите на представената разработка.

## 1. ГЛАВА: ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

---

Дисертацията разглежда значението на **приложните задачи** за развитие на **умения и компетентности** на **когнитивно и метакогнитивно ниво**. В литературата се срещат различни определения за задача. Отправна точка на изложението е конкретизиране на значението на отделните понятия. На интуитивно ниво термините изглеждат ясни, което не гарантира разбирането и използването им в пълния им обем. Обзорът на научната литература по проблема служи за еднозначното им описване, за да може да бъде пълноценна и недвусмислена употребата им в дисертационния труд.

### 1.1. Задача

- Задача и упражнение
- Текстова задача
- Приложна задача – структура и предизвикателства: подробно са описани и анализирани значението и ролята на формулировката и на използвания речник, посочени са основните части, дискутирана е структурата на въпросите по нива на трудност и критерии за познавателната роля на задачите. Разгледани са процеси на създаване, начини за постигане на разнообразие и осъществяване на междупредметни връзки.

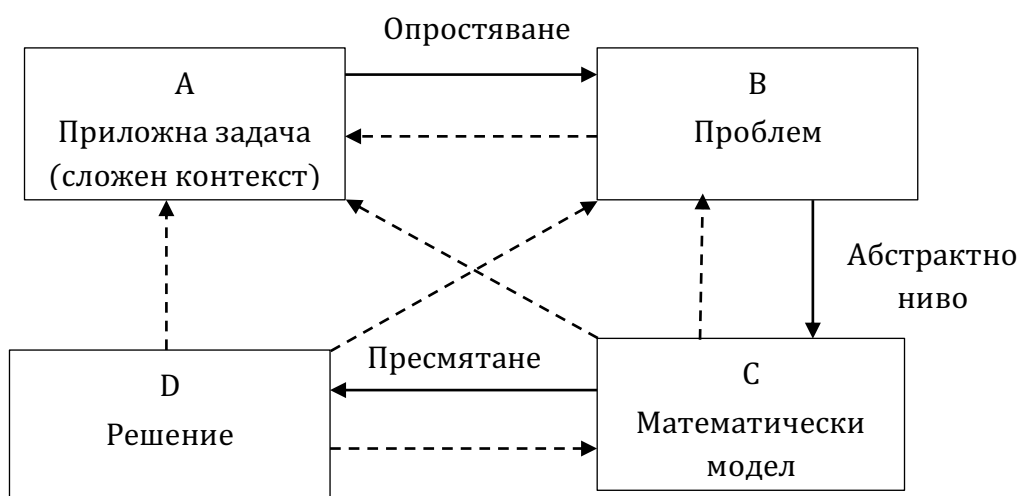
**Приложна задача** с паралел към понятия от художествената литературата:

1. Описание на ситуацията и участниците в нея. Не цялата информация е необходима за решението, но създава рамка, близка до реална житейска ситуация. По природа хората обичат приказки, измислят истории, разказват за обстоятелства и процеси. Приложната задача има своя сюжет, т.е. започва с **въведение**.
2. Действие или събитие, което променя ситуацията. По аналогия това е завръзката – сблъсък, **конфликт**.
3. Възникнал проблем – **кулминация**.
4. Въпроси към решаващия относно ситуацията. Тук решаващият задачата поема ролята на творец и трябва да разреши конфликта – **развързка**.
5. Въпрос – как да се реши възникналият проблем. Крайният отговор дава заключение. Решаващият от слушател се е превърнал в герой при развързката и остава да напише **епилога**.

Според зрелостта на учениците може да се повиши трудността, като се „обърне“ структурата – да се започне с проблемния въпрос, а след това да се опише ситуацията, в която той е възникнал.

## 1.2. Решение на текстова задача

При решаване на проблем, в началото липсват ясни ходове и осъзнати представи. Според Lester & Kehle успешен *problem-solving* включва координиране на предишен опит, знания, познати представи, модели за правене на изводи и интуиция, за да се извършват познавателни дейности, като някои от тях не са рутинни. (Lester F. K., 2003) Един от разгледаните в дисертацията модели е този от Фиг. 2. Пунктирните стрелки сочат как намереното решение трябва да се сравни и тълкува спрямо останалите фази. Решаващият се движи между двата свята – този на поставения проблем и света на математиката. Сравнение и проверка за смисленост протича на всеки един етап. Количеството такива сравнения може да е индикатор за сложността на проблема. (Lester F. K., Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction, 2013)



Фиг. 2: Модел на сложна математическа дейност

Таблица 1 съдържа по-общо описание на дейностите и целите, за да бъде полезна както за учителя, така и за отделния ученик. В оригиналната таблица има две оси на разглеждане – дейност и цел. С аспект заложената проблематика на изследването е добавена трета ос – „Познавателно значение“, която включва когнитивните и метакогнитивни умения и компетентности.

Таблица 1: Подход при решаване на приложна задача

Дейност	Цел	Познавателно значение
<b>Преди решаването на задачата</b>		
Прочитане на задачата; Дискутиране на думи или фрази, които са познати или не са напълно ясни.	Значението на концентрирания прочит; Внимание към лексиката	Аналитично четене; Концентрация; Боравене с предоставената информация.
Препрочитане до пълно	Концентриране върху	Критично мислене;

разбиране на формулираната задача; Вникване в същността на поставения проблем.	важните данни; Изясняване на съдържанието.	Математическа грамотност; Дисциплина.
<b>По време на решаването</b>		
Наблюдение; Установяване какъв е прогресът в търсене на решението.	Учителят определя доколко е усвоен материалът; Ученикът може да ревизира подхода си.	Самонасочване; Мотивация; Математическо познание; <i>Problem-solving</i>
Учителят дава насоки; Ученикът обмисля сходни задачи, които успешно е решил, разглежда различни методи и стратегии.	Превъзмогване на възникнал блокаж.	Саморегулация; Математическо познание; <i>Problem-solving</i> ; Творчество.
Формулиране на отговор.	Поглед назад дали полученият отговор с смислен.	Критично мислене; Самооценка.
<b>След приключване на решаването</b>		
Разбор на решението.	Обсъждане на различни стратегии.	Комуникация; Математическа грамотност.
Паралел с подобни задачи.	Обсъждане на общата приложимост на стратегиите.	Математическо познание; <i>Problem-solving</i> ; Творчество.
Анализ на особеностите на задачата.	Как отделните елементи на условието дават насока за избор на подход за решаване.	Аналитично четене; Боравене с предоставената информация.

В резултат от настоящото изследване чрез комбиниране и разширяване на описаните в литературата стратегии, следвайки етапите на Д. Пойа, с внимание към разглежданата проблематика, дисертацията предлага допълнително фрагментиране на фазите на решение.

### 1.3. Компетентност и умения на 21. век

Обект и предмет на настоящата дисертация са развитието на компетентностите и повечето от уменията на 21. век чрез работа върху приложни задачи. За целите на изследването е направен следният паралел между тях (Таблица 2).

Таблица 2: Компетентности и умения на 21. век

Компетентности	Умения на 21. век
Способност за използване на знания и умения	Четивна, математическа и дигитална грамотност
Поемане на отговорност при	Критично мислене, <i>problem-solving</i>

вземане на решения	
Степен на самостоятелност	Умения за учене, самонасочване и самооценка Боравене с предоставената информация
Преглед и развитие на собствените постижения	Критично мислене
Проява на новаторство	Творчество

В **първа глава** подробно са описани и следните понятия, необходими за целите на дисертацията: знание, умение, когнитивни и метакогнитивни умения; функционална и множествена грамотност.

## 2. ГЛАВА: МАТЕМАТИКАТА В ОБРАЗОВАНИЕТО

Водещо в образованието е целеполагането. Темата и предметът на дисертацията следват разбирането на Ив. Тонов „Процесът на изграждането на математическото мислене минава през овладяването на различните подходи и техники към задачите по математика.“ (Тонов, 2012)

С оглед на заложените цели на изследването се следва тезата на Алън Шьонфелд за ролята на обучението по математика:

- Да даде възможност на учениците да добият представа за дисциплината;
- Да развие у учениците разбиране на концепциите – не механично да прилагат техники, а да могат гъвкаво да боравят с наученото;
- Да даде възможност на учениците да изследват широк кръг от задачи, вариращи от упражнения, приложни задачи, задачи за анализ и синтез. Да предостави богат набор от подходи и техники за решаване – директно приложение на подходящия алгоритмичен метод, техники за моделиране и евристични техники за *problem-solving*.
- Да помогне на учениците да развият уменията да анализират, да възприемат структурата и да установяват структурните връзки.
- Да помогне на учениците да развият писмена и вербална прецизност на аргументацията и изказа си.
- Да развие у учениците умение за работа с текст и други математически материали и да ги направи независими учещи. (Schoenfeld, 1990)

### 2.1. Образование

Поставената в дисертацията тема е разглеждана в годините от учени в областта. Те са описвали различни аспекти на образованието за развитието на математическото мислене. За целите на дисертацията се проследява подходът към заложената проблематика и хипотези чрез кратък исторически преглед.



## 2.2. Новата образователна парадигма

Кредото на новата образователна парадигма за **учене през целия живот** е заложено в хипотезите на дисертацията – за ученици (1) и учители (6). Развитието на технологиите, изкуствения интелект и глобализацията са едни от факторите за прехода. Задача на изследването е да се сравнят публикации и нормативни документи, отразяващи прехода към новата образователна парадигма.

## 2.3. Мотивация

Интелектуалното любопитство и емоционалната ангажираност се отразяват на мотивацията. Актуално и днес остава твърдението на Д. Поля – „най-добрата мотивация е интересът на ученика към задачата му.“ (Рólya, 1981)

В дисертацията си Н. Николова извежда и доказва хипотезата „Синергията между проектен и изследователски подходи способства за пълноценно усвояване на учебното съдържание по информатика и информационни технологии при паралелно изграждане на ключови компетенции и важни нетехнически умения у учениците, повишава мотивацията за учене и създава основа за устойчивост на постигнатите резултати.“ (Николова, 2016) Близостта на научните области дава основание да се очакват сходни резултати и изводи при проверка на 1. Хипотеза – повишаване на мотивацията и устойчивост на получените знания при работа с приложни задачи.

## 2.4. Творческо мислене в математиката

Едно от уменията на 21. век е креативността и нейното стимулиране чрез регулярна работа по приложни задачи е заложен в 2. Хипотеза. При решаване на текстови задачи творчеството се изразява в подхода за създаване на „скелето“, комбинацията от използваните методи, прилагането на дигитални технологии както в процеса на решение, така и в документирането на представянето му. При задачите за анализ ученикът е в ролята на откривател на един или повече подходи за справяне с проблемната ситуация. Допълнителен стимул за креативността са задачите за синтез, при които ученикът е в ролята на творец.

## 3. ГЛАВА: КОНТЕКСТ НА ПРОБЛЕМА

---

Приложните задачи са заложени в курса по математика още от първите класове. Преди да могат да четат децата се учат да събират и изваждат например бонбони. Задачите ангажират въображението им, но и са свързани с познати предмети и действията им с тях.

### 3.1. Парадокс – образование и очаквания

Родителите подчертават важността на математиката за образованието на децата им и желаят те да бъдат обучавани в математически паралелки с очакването за по-добро образование и обучение в конкурентна среда. За жалост не науката и мисленето, което тя развива, а оценката по предмета остава основната цел. Математиката от Царица на всички науки се превръща в пръчка за овчарски скок за прием в гимназиите.

Настоящата дисертация се занимава с проблематика, свързана с мястото и ролята на приложните задачи в курса по математика и значението им за развитието на уменията на 21. век, както когнитивните така и метакогнитивните, компетентностите и функционалната грамотност на учащите. Наш дълг като учители и родители е да повишим средните резултати.

За целите на дисертацията са разгледани различни форми и инструменти за допълнително обучение, както тяхната роля и значение – извънкласни занимания; платформи с образователен характер; образователни видеа, форуми, онлайн тестове и материали.

Естеството на задачите е подходящ стимул за повишаване на интелектуалното любопитство и интерес в подрастващите. В статията *Problem solving model in Mathematics* е посочено, че един от признаците за класификация на математическите задачи е според „брой на участващите неизвестни компоненти (Desislava Georgieva, 2018) като е отбелязано, че приложните задачи рядко се срещат, изтъква необходимостта от допълнение на курса по математика с точно такива задачи с тематика от реалния живот. Същият проблем е дискутиран и от Филип Петров в статията му „Приложение на изследователския подход в образованието по информатика чрез един популярен математически фокус (Нов поглед към стари идеи)“. Изследването му показва, че сегашните български учебници имат прекалено много математически задачи и много малко имат пряко практическо приложение. „Мотивирано е мнение, че е нужно в по-голяма степен да се стимулира изследователски подход в обучението по информатика с помощта на практически задачи с фокуси, игри и софизми, а въвеждането в темите да се извършва чрез поставяне на учениците в проблемна ситуация с цел предизвикване на по-силен когнитивен дисонанс.“ (Петров, 2022) Направеният извод не може директно да се пренесе към часовете по математика, където е задължителна предварителна грамотност, за да се включат такива „предизвикателни“ задачи. Въпреки това е безспорно, че при работа по темите поставянето на учениците в проблемна ситуация е стимул за когнитивните процеси.

В книгата си „Математическото откритие“ Д. Поля (Pólya, 1981) разграничава четири типа градиращи задачи:

- (1) **Правилото е под носа ти** – характерно за задачите-упражнение, изисква се прилагане на алгоритъм за решение, който е демонстриран в часа от

учителя и следва да се повтори от ученика. Често е механично действие.

- (2) **Приложение с елемент на избор** – задача, която е подобна на решаваните, но се очаква да се направи избор измежду изучените в последния раздел правила.
- (3) **Избор на комбинация** – ученикът следва да комбинира методи, изучавани и демонстрирани в други раздели.
- (4) **Доближаване до изследователско ниво** – трудно е да се направи границата между предходното и това ниво

С нарастване на трудността се увеличава и образователната стойност от гледна точка на целта – развитие на математическото мислене.

За целите на дисертацията се прави разглеждане на типовете задачи в учебниците в отделните етапи на обучение. Интерес представляват количеството и разнообразието на приложните такива в паралел с тези в чуждестранните образователни системи. Разглеждането е разделено на преглед с примерни задачи от прогимназиален курс (5. – 7. клас), първи гимназиален етап (8. – 10. клас) и втори гимназиален етап (11. – 12. клас). Направен е паралел на решенията като се следва спираловидният модел на образование.

Един от разглежданите примери е как цитираните по-горе задачи-упражнения могат да се допълнят с приложна задача и от тип (1) от скалата на Д. Пойа да се причислят към тип (3).

**Задача 4:** От втория етаж на сграда се изстрелва топче. Траекторията му се описва от функцията  $h(t) = -t^2 + 2t + 3$ , като  $t$  отразява секундите, изминали от момента на изстрелване, а  $h(t)$  е височината в метри над земята. Да се определи:

- а) От колко метра височина е изстреляно топчето.
- б) След колко време топчето ще падне на земята.
- в) Интервалът за  $t$ , в който е смислено да се разглежда тази функция.
- г) След колко време топчето достига най-голяма височина в метри и каква е тя.
- д) Да се визуализира чрез подходящо приложение траекторията, която изстреляното топче описва.

*Разрез на задачата според надграждане на трудността:* Въпросите градиращ според описаната структура на трудност. Първите две подточки – а) и б) са свързани с началното и крайното положение – трудност (1). Търсеният интервал отговаря на допустимите стойности – трудност (2), определянето на критичната точка, която е връх на параболата, отговаря на трудност (3) – тълкуване на особените точки от графиката на функцията, а последната подточка е свързана с дигиталната грамотност на учениците, защото изисква работа с приложение, чрез което да се визуализира разглежданият процес.

*Разрез на задачата според критериите за задача:* Задачата покрива всички точки от списъка с критерии за избор на задача. Целта е приложен подход към

квадратната функция. Комбинират се знания за определяне на особени точки, което предполага различни подходи. Тук ролята на учителя е, след като проследи решенията на учениците, да направи преговор и сравнение между изучените начини за определяне на особените точки. Уместно е да се даде възможност на учениците да аргументират стратегията, която са избрали. Според справянето на учениците с поставения проблем се получава обратна връзка за резултатите от обучението.

*Въпроси, които учениците трябва да си задават: **Какво** точно правя? (Мога ли да го опиша прецизно?) **Защо** го правя? (Как това пасва на решението?) **Как** това ми помага? (Какво ще направя с резултата, когато го получа?)* (Schoenfeld, 1992)

В дисертацията подробно се описват решението, типичните грешки и как под ръководството на учителя учениците могат да се справят с поставените проблеми.

### 3.2. ДЗИ и прием в университети

Една от приоритетните области на Стратегическата рамка за развитие на образованието (Стратегически документи, 2021) е насърчаване на мобилността. Очакването е за синхронизирани учебни програми в рамките на Европейския Съюз и свободно движение на хора, в разглеждания случай – учащи, в рамките на Съюза. Редуцираният материал по ООП по математика е спънка за прием в чуждестранни университети. Допълнението на нормативните документи с възможността ученици, които не са изучавали математика като профилиращ предмет, да положат ДЗИ по математика, е някакво облекчение, но не решава проблема с разминаването на подготовката по математика на българските ученици в сравнение с връстниците им от другите европейски страни. Задача на настоящата дисертация е съпоставка с нормативните документи в подкрепа на 5. Хипотеза. Според Стратегическата рамка, която е основана на предходни препоръки на ЕК за развитие на образованието у нас и действащите документи, се цели „Активизиране на обмена с преподаватели, служители и **учащи** в чуждестранни образователни институции и включване в международни мрежи;“ (Стратегически документи, 2021). Ограниченият набор приложни задачи е компонент, който следва да се развие в аспекта на *problem-solving*, умения на 21. век и учене през целия живот, за да са конкурентни и мобилни зрелостниците ни.

## 4. ГЛАВА: МЕЖДУНАРОДЕН АСПЕКТ, АНАЛИЗ, ПАРАЛЕЛИ

---

За целите на дисертацията се прави паралел между българската образователна система и руската, немската, австрийската, английската, италианската, американската системи. Прегледът прави сравнителен анализ на ролята, типове и количеството на приложните задачи, застъпени в гимназиален курс в други държави – Австрия, Германия, Англия, Италия и в България.

Направеният обзор има за задача да анализира къде е нашето образование в европейски план. Търсят се начини как можем чрез обогатяване на курса на обучение с такива задачи да повишим резултатите по математика и мотивацията на учениците, как по-добре да развием математическото мислене, компетентностите, уменията за учене през целия живот и уменията на 21. век.

Разглеждането отново е разделено на задачи от прогимназиален курс, първи и втори гимназиален етап.

Една от разглежданите задачи е:

11. Разполагаме с 200 м тел, с която да се ограда правоъгълно дворно място, като едната страна е по продължението на стена. Да се определят размерите, при които оградената площ е най-голяма.

**Анализ:** Реално и тази задача се свежда до съставяне на квадратна функция и определяне на максимума ѝ. Интересно е как протича решението в паралел с компетентностната рамка:

- аналитичното четене – какво е дадено, какво се търси, отделяне на известните и неизвестните величини;
- критично мислене – какво е значението на стената;
- творчество – скица на проблема;
- *problem-solving* – каква е връзката между известните и неизвестните величини;
- знанията по математика – как се намира обиколка и лице на правоъгълник, как да се направи модел с една променлива, как се намира най-голяма стойност, какво е значението ѝ;
- преценка – какви са ограниченията, как се тълкуват намерените стойности;
- самооценка – смислени ли са получените стойности, има ли други начини за решаване на задачата.

Предложеното решение е съпоставено с възможни такива, генерирани с ChatGPT.

Анализът на чуждестранни образователни системи и разглежданите в тях задачи дава насока за обогатяване на набора от задачи чрез:

- Анализ на графични модели – задачи за „разпознаване“ на функции
- Различни подходи за анализиране на зададена функция в зависимост от вида на записа ѝ.
- Решаване на ранен етап на екстремални задачи.

В четвърта глава се проследява и комбинирането на дигиталните технологии при решаването на приложни задачи. Съвременните ученици са представители на поколението-Z, а учителите, които сега се обучават, ще работят с ученици от поколението-Алфа (Eldridge, 2023). Става дума за подрастващи, които прекарват часове пред екраните, свободно боравят с дигитални технологии и ги смятат за естествена част от живота си. В динамичното ни съвремие и следвайки

парадигмата за учене през целия живот неизбежно учителите и бъдещите такива трябва да са в крак с времето, да са информирани и да използват технологиите критично и уместно в образователния процес – 6. Хипотеза. От метаанализа, направен от А. Чунг и Р. Славин върху ефективността на образователните технологии за подобряване на постиженията по математика в училище, е недвусмислен изводът, че съвременният свят се дигитализира и няма как училището да прави изключение. Според учените не стои въпросът дали, а как учителите успешно да използват новите инструменти за целите на образованието (Cheung & Slavin, 2013). Авторите подчертават, че технологиите могат да са в помощ за образованието, но не могат да са негов заместител.

Ев. Сендова подчертава „Да внушим на учениците си идеята, че да овладеем технологиите е важно, но най-важното е да ги използваме СЕГА така, че да се научим да се справяме със сложни проблемни ситуации в БЪДЕЩЕ“ (Сендова, 2014)

Според програмите на МОН в някои методични единици е заложена работа с подходящ за целите софтуер, но няма как да се ограничим само с това. Характеристиките на дигиталните приложения дават възможности за по-тясна интеграция с учебната програма в почти всички изучавани теми в курса по математика. Една такава реализация е осъществена в материалите на Виртуален училищен кабинет по математика (ИМИ-БАН, 2013), който е водещ пример за споделяне на опит и материали. Свободно достъпна е колекция от разработени на GeoGebra упражнения и задачи. Ръководството на Тони Чехларова „Разработване на система от практико-приложни задачи за формиране на ключови компетентности по математика“ цели в примери да предложи промяна в учебния процес, съобразена с новата реалност. (Чехларова, 2014) Екипът застъпва идеята, че „... математическото моделиране и приложенията на математиката не са застъпени в достатъчна степен в училищния курс“ и всички модели при такива задачи са опростени и не отговарят на реалността (Кендеров & Чехларова, 2021). Използването на подходящ софтуер при решаване на заданията дава възможност да се разшири кръгът на приложните задачи, които съответстват по сложност на реалния живот. Такива задачи от своя страна повишават мотивацията на учениците, които виждат как математиката „оживява“ – 1. Хипотеза.

#### 4.1. Математическо есе

Направен е подробен анализ на математическото есе като инструмент в обучението по математика и неговата добавена стойност.

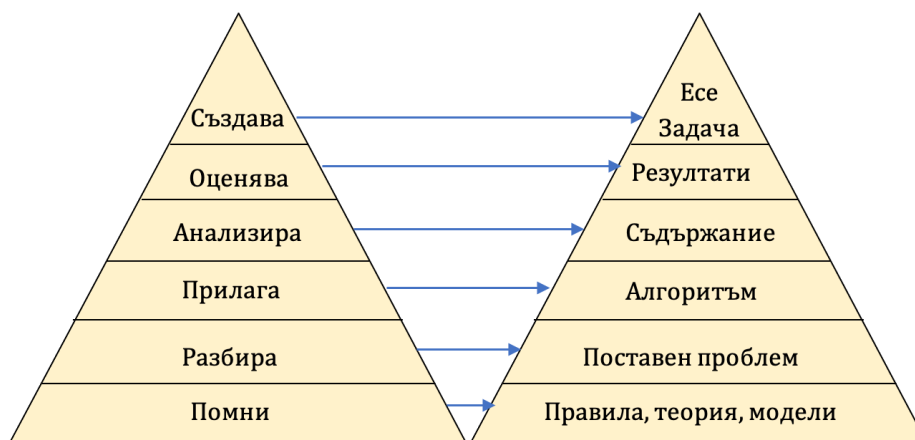
Таблица 3: Компетентности и критерии

Компетентност	Критерии за оценка
Математическа грамотност	Ниво на трудност на поставения проблем, коректност на решението
Задълбочени познания по предмета	Математическа обосновка
Дигитална грамотност	Оформяне на текст и презентация, боравене с дигитални инструменти за визуализиране на графики и формули
Изследователски подход и новаторство	Избор на тема, откриване на проблем, който не е неразгледан в часовете и в учебника
Евристично мислене	Търсене на решение на нерешен още проблем
Критично мислене	Към информацията в интернет пространството и към разсъжденията и резултатите, които реализира
Самоинициатива	Свобода на избора
Самонасочване	Системна и мотивирана работа, изискванията за обем и качество не могат да бъдат покрити за една нощ
Самооценяване	При ясно зададени критерии поставяне на обективна самооценка, умение да се види работата отстрани
Отговорност	Избор на тема; спазване на срокове; цитиране

Математическото есе учи как да се излагат идеи, да се формулира проблем и комуникира неговото решение, но не само чрез формули и пресмятания, но и с ясни обяснения на разбираем за по-широка публика език. Така се излиза от схемата на писане на домашно задание и се демонстрира по-задълбочено разбиране на същността на математиката. От учениците се очаква да имат опит с развиването на есета в други области, като литература, история, философия. Необходимо е да пренесат уменията си в създаването на изложението и структуриране на заданието от тези области, като го комбинират с математически формули и съждения. В математическото есе е важен точният изказ и ясното изразяване на идеите. Ролята на учителя е да подготви учащите да направят тази следваща стъпка в развитието си както на ниво математическо мислене, така и на ниво на конкретните компетентности. Преносът на умения между предметните области изгражда спойката, която е образованието.

#### 4.2. Приложните задачи според таксономията на Блум

С оглед проблематиката на дисертацията е направен разрез на приложните задачи (Фиг. 3), който следва преработената таксономия на Блум според Андерсон и Кратвол (Anderson & Krathwohl, 2001).



Фиг. 3: Преработена таксономия на Блум според Андерсон и Кратвол в паралел с приложните задачи

Добавена е ос на изследване на отделните нива. Тя цели да илюстрира как приложните задачи свързват когнитивните нива и уменията на 21. век. За целта са посочени както конкретни примери от математическото съдържание от курса на обучение, така и съответстващи на нивото компетентности.

**Помни** *формула* за лице, *метод* за намиране на най-голяма и най-малка стойност на функция, *неравенство* на Коши. Очакването е, че заложените по план математически знания са усвоени – математическа грамотност.

**Разбира** отделните думи от условието на задачата, текста като цяло и *поставения проблем* – какво се търси в задачата. При аналитично четене е важно да се обхване цялото условие – четивна грамотност, боравене с предоставена информация, дисциплина, концентрация, *problem-solving*. **Разбира** как се прилага запомненият теоретичен материал в конкретна задача – математическа грамотност, *problem-solving*.

**Прилага** и комбинира запомнени формули, изучен *алгоритъм* или натрупан опит за решаване на такива задачи – математическа грамотност, комбинативно и критично мислене, *problem-solving*, самостоятелност, самонасочване.

**Анализира** значението *съдържанието* на задачата и смисъла на получените стойности в контекста на зададения проблем – критично мислене, боравене с предоставената информация.

**Оценява** избраната стратегия, алтернативни подходи, кои получени *резултати* са смислени според поставената задача, формулира логичен отговор – критично мислене, оценка, самонасочване и самооценка.

**Създава** допълнителни условия или изменения на разглежданата задача, нова *задача*, математическо *есе*, презентация по зададена тема – творчество, математическа грамотност, *problem-solving*, самонасочване и самооценка. Математическото есе се позиционира директно в последния етап – **създава**, който е дефиниран като „обединява заедно елементи, за да състави разбираемо или функциониращо цяло; реорганизира елементи в нов модел или структура чрез генериране, планиране, произвеждане“ (Anderson L., et al., 2000).



## 5. ГЛАВА: ИЗСЛЕДВАНИЯ НА ТЕРЕН

---

Проведеното независимо изследване е **предшествано** от **наблюдения** върху възпитаници от Интернационалното училище към посолството на Германия в София (НУС) – предимно с българско гражданство и израснали в България.

**Предварително наблюдаваният казус и паралелът** с очакваните компетентности според програмата на МОН са в основата на емпиричната информация и служат за първоначално ориентиране в проблема (Кожухарова, Ганчев, & Делчев, 2004). Следвайки метода на качествените педагогически изследвания въз основа на участващи наблюдения се достига до разбиране за проблема, с който изследваните лица се сблъскват. Събраната информация дава възможност за поставяне на изследователските задачи на настоящата дисертация и формулиране на 3. Хипотеза – теория, основана на данни (Glaser & Strauss, 1967). Хипотезите на настоящата дисертация разглеждат от една страна четивна – разбиране на условието и функционалната грамотност на учениците – работата с текст и изображение. Друга ос на разглеждане са компетентностите и уменията на 21. век.

### 5.1. Подготовка – избор на конкретни задачи

Два различни типа задачи се използват за целите на изследването. Техните конкретни представители коренно се различават по формулировка. Единият (Задача А) ясно задава характерни точки на функция, чиито коефициенти трябва да се определят. Целта е да се отбележи нивото на познание на съответния материал по математика. Вторият (Задача Б) се състои от описателен текст и онагледяваща графика. В този случай въз основа на аналитично четене, комбинирано с разчитане на графиката, трябва да се отделят условията за намиране на същите коефициенти. Зададените в двете задачи ограничения са еднакви, еднакъв е и математическият модел, и съответно крайните отговори.

За основа е използвана задача от действащ учебник по математика за 11. клас в Германия (Oberstufe, 2017). Задачата е преведена и адаптирана, а след предварителното изследване, и коригирана. Условието на двете задачи от второто изследване на терен следват модела на първото изследване.

На Фиг. 4 са представени паралелно двете задачи, които се зареждат в браузър. За реализацията е използвана платформата Jotform (Jotform, 2022).

### Задача А

Прочете внимателно задачата и я решете на лист.

Дадени са функциите  $f(x) = \frac{d}{x}$  и  $g(x) = ax^2 + bx + c$ . Ако е известно, че:

- $f(x)$  има функционална стойност 3 при  $x = 5$
- Графиката на  $g(x)$  е симетрична спрямо ординатната ос, минава през точка  $(5, 3)$ , а върхът на параболата е с координати  $V(0, 2)$ .
  - 1) Да се определят коефициентите на функциите.
  - 2) Да се определи стойността  $f(15)$ .

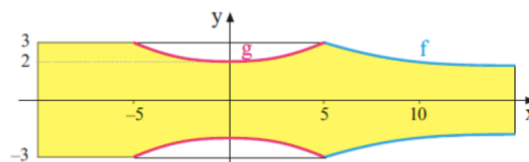
Прикачете тук беловата на решението.

Upload a File

You can upload any type of file. Max: 300 MB

### Задача Б

Прочете внимателно задачата и я решете на лист.



Изображението показва напречен разрез на бутилка, която може да се опише като цилиндър, вдлъбнатата част и гърло. Вдлъбнатата част се описва от функцията  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , като максималното вдлъбване е 1 см спрямо линията на цилиндъра. Гърлото на бутилката се описва от функцията  $f(x) = \frac{d}{x}$ .

- 1) Да се определи диаметъра на дъното на бутилката.
- 2) Да се определят коефициентите  $a, b, c$  и  $d$ .
- 3) Да се намери диаметърът на гърлото на бутилката.

Прикачете тук беловата на решението.

Upload a File

You can upload any type of file. Max: 300 MB

Фиг. 4: Формулировка на задачите – изследване Фаза '21

### Задача А

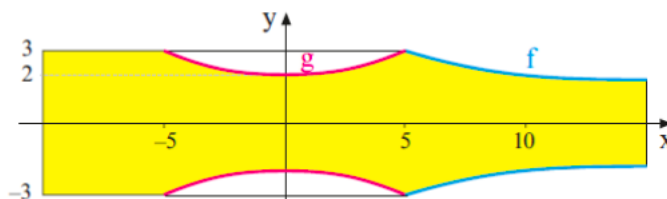
Дадени са функциите

$$f(x) = \frac{d}{x} \text{ и } g(x) = ax^2 + bx + c.$$

Ако е известно, че:  $f(x)$  има функционална стойност 3 при  $x = 5$  и графиката на  $g(x)$  е симетрична спрямо ординатната ос, минава през точка  $(5, 3)$ , а върхът на параболата е с координати  $V(0, 2)$ .

- 1) Да се определят коефициентите на функциите.
- 2) Да се определи стойността  $f(15)$ .

### Задача Б



Изображението показва напречен разрез на бутилка, която може да се опише като цилиндър, вдлъбнатата част и гърло. Вдлъбнатата част се описва от функцията  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , като максималното вдлъбване е 1 см спрямо линията на цилиндъра. Гърлото на бутилката се описва от функцията:

$$f(x) = \frac{d}{x}$$

- 1) Да се определи диаметърът на дъното на бутилката.
- 2) Да се определят коефициентите  $a, b, c$  и  $d$ .
- 3) Да се намери диаметърът на отвора на бутилката.

## 5.2. Методи и инструментариум

С цел проверка на хипотезите на дисертацията е проведено теоретично-емпирично (приложно) изследване, което по своя характер е диагностично (констатиращо) и верификационно – да се анализират затрудненията при решаване на текстова задача с изображение и да се направи паралел с решенията на чисто математическия модел. Експериментът според условията е естествен; според провеждане – основен; спазена е висока „чистота“ на реализация.

**Инструментариумът** на изследването включва две представителни задачи и анкета. Дидактическият **тест** е индивидуален; критериален; за текущ контрол на постижения и отношение. Очакваният отговор е отворен – подробно и аргументирано решение на задачата с ясно посочени стойности на търсените величини.

**Анкетната** част е въпросник (писмен, задочен) със закрити отговори, които са няколко вида: отворен отговор; Да/Не; скалирани; меню-отговори с пълно изброяване на случаите.

## 5.3. Критерии и показатели за оценка

С цел качествена оценка на предадените решения е подготвен многовариантен модел на очакваните решения и за двете задачи, за да може да бъдат оценени на нива. Предадените писмени работи на учениците са прегледани обстойно и кодирани по степен на успеваемост. Заложените в дисертацията показатели са декомпозирани според спецификата на конкретните задачи и съобразно избраните методи за изследване.

1. Степен на усвояване на знания и умения
  - 1.1. Определяне на един или повече от търсените параметри
  - 1.2. Определяне на функционална стойност
2. Задълбоченост при решаването
  - 2.1. Анализиране на отделни характеристики – четност, симетрия
  - 2.2. Връх на параболата
  - 2.3. Особени точки
3. Обмисленост на проблема
  - 3.1. Каква е целта на задачата
  - 3.2. Какви са смислените стойности на параметрите и променливата
4. Трансфер на знания
5. Умения за наблюдения при работа с текст и изображение
6. Самостоятелност
  - 6.1. Дублиране на предадени работи
  - 6.2. Търсене на готово решение в интернет
7. Творчество и инициативност
  - 7.1. Повече от едно решение.

7.2. Коментар по условието

8. Дисциплинираност и отговорност
  - 8.1. Качествена работа, макар и да не е за оценка
  - 8.2. Положени усилия (чернова – белова)
9. Самокритичност
  - 9.1. Паралел между самооценка и качество на предаденото решение
  - 9.2. Паралел между оценка за трудност и реално справяне
10. Дигитални умения
  - 10.1. Вид и формат на предадените файлове (при експеримента онлайн)
11. Критично мислене
  - 11.1. Коректна ли е скицата или е само за ориентир
  - 11.2. Задачата преопределена ли е
  - 11.3. Кои получени стойности са смислени в зададения контекст.
12. Ясно формулиран отговор.

2) Графиката на  $g(x) = ax^2 + bx + c$  е с връх на параболата  $V(0, 2)$ .

$$\Rightarrow g(0) = 2$$

$$g(0) = c$$

$$\Rightarrow c = 2$$

Показатели 1.1, 1, 2, 2.2

Параболата е отместена с 2 м. ед. нагоре и може да се запише във вида:

$$g(x) = ax^2 + 2$$

$$\Rightarrow b = 0$$

Показатели 2.1, 1.1

Информацията за симетрия спрямо ординатната ос е излишна, защото координатите на върха сочат, че оста на симетрия е с уравнение:

$$y = y_v$$

$$y = 0$$

Показатели 2.1, 5, 7.2

От друга страна информацията за симетрия спрямо ординатната ос може да се използва за определяне на стойността на параметъра  $b = 0$  с прилагане на свойството на четна функция  $g(-x) = g(x)$ .

$$\begin{cases} g(5) = 3 \\ g(-5) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25a + 5b + 2 = 3 \\ 25a - 5b + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = 0$$

Показатели 2.1, 7, 11

По условие функция минава през точка с координати  $(5, 3)$

$$\Rightarrow g(5) = 3$$

$$25a + 2 = 3$$

$$\Rightarrow a = 0,04$$

Показатели 5, 1.1, 1.2

Търсените коефициенти са съответно  $a = 0,04$ ;  $b = 0$ ;  $c = 2$ , а функцията има вида  $g(x) = 0,04x^2 + 2$ . Показател 12

## 5.4. Изследователска фаза

Според темата и задачите на дисертацията е направен преглед на литературата и изследванията в областта за значението на математиката за развитието на когнитивните умения и новата образователна парадигма за учене през целия живот. Очакваните компетентности според плановете на МОН и документите на ЕК, чуждестранни и български учебници, учебни помагала и използвани изпитни материали потвърждават актуалността на хипотезите. Сходни изследвания са реализирани като често дискутираният проблем е прекомерната употреба на дигитални технологии. Наблюдението, което предшества изследването, резонира с 3. Хипотеза и дава основание за подготовка и провеждане на полеви експеримент.

## 6. ГЛАВА: АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

---

Предварителното изследване се основава на включено наблюдение. Натрупаните данни дават основание да се формулира 3. Хипотеза. Предварително наблюдаваната група е малка и непредставителна за българската образователна система, затова не може да се представи теория, основана на факти, а по-скоро само хипотеза. Сравнителният анализ на учебните материали в българската и чуждестранната образователни системи сочат недостатъчното застъпване на приложни задачи в гимназиалния курс на обучение у нас, което е в подкрепа на формулираната 3. Хипотеза. Поради наложени ограничения от пандемията проучванията в настоящата дисертация не продължават метода на качествените педагогически изследвания, а се развиват по правилата на емпирично педагогическо проследяване. Тема на дисертацията е ролята на приложните задачи за развитието на ключови компетентности и умения на 21. век. Коментирането на наблюдаваните качества на учениците е причина за придържане към емпиричен анализ на равнище – описание (Бижков & Краевски, 2007, стр. 232).

### 6.1. Оценка на решенията от двата експеримента

Описателният анализ се фокусира на качествата на решенията в паралел с разглежданите умения и компетентности. Успеваемостта е отразена количествено, като резултатите са показани паралелно за двете изследвания с цел сравнителен анализ. Успеваемостта при контролната и фокус-групата при първото изследване е близка, което съвпада с очаквано за ученици с висока подготовка по математика. Все пак дори добре тренирани ученици срещат повече затруднения с нестандартно формулираната задача.

## 6.2. Обобщение на резултатите от фаза '21 г.

Събраните отговори са общо 151, но след отсяване на дублиращи се записи се разглеждат 138 уникални попълвания на анкетата и предадени задачи.

Според 3. Хипотеза успеваемостта при решаването на двете задачи трябва значително да се различава. Поради спецификата на ФГ и КГ, хипотезата не се потвърждава, но това не е повод да бъде отхвърлена. Наблюденията на резултатите показват, че въпреки високата математическа подготовка на участниците има различия в успеваемостта, обратната връзка и самооценката. Върху примерна работа са нанесени показателите, които са заложили в методологията на изследването (**Error! Reference source not found.**).

### Решение на задачата

#### 1. Подточка

Диаметърът на дъното на бутилката е равен на разстоянието между правите  $y = 3$  и  $y = -3$ , което се равнява на  $3 - (-3) = 6$  cm

#### 2. Подточка

$$f(x) = \frac{d}{x}$$

$$3 = \frac{d}{5}$$

$$d = 15$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{15}{x}$$

Параболата  $g$  пресича ординатата в точка  $(0; 2) \Rightarrow c = 0$  **1**

Доказателство:

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

$$2 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot b + c$$

$$c = 2$$

Параболата  $g$  е симетрична по правата  $x = 0 \Rightarrow b = 0$  **2**

Доказателство:

$$g(x) = g(-x)$$

$$g(5) = g(-5)$$

$$a \cdot 5^2 + 5b + c = a \cdot (-5)^2 - 5b + c$$

$$10b = 0$$

$$b = 0$$

$$g(x) = ax^2 + bx + 2$$

$$3 = a \cdot 5^2 + 0 \cdot x + 2$$

$$a = \frac{1}{25}$$
 **3**

От **1**, **2** и **3**  $\Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{25} + 2$

#### 3. Подточка

Диаметърът на дулото на бутилката следва правата  $x = 15$  и е еквивалентен на отсечката между точките  $(15; f(15))$  и  $(15; -f(15))$ .

Следователно той е равен на  $f(15) - (-f(15)) = 2 \cdot f(15) = 2 \cdot \frac{15}{15} = 2$  cm

Дигитални умения ✓

Умения за наблюдения при работа с текст и изображение ✓

Определяне на коефициентите ✓

Аргументация ✓

Критично мислене ✓

Задълбоченост при решаването ✓

Ясно формулиран отговор ✓

Фиг. 5: Решение на Задача Б

Навиците за стриктно прилагане на формули и следване на алгоритми за решаване ограничават креативността и рационалния подход в решаването на задачите. Интересно е наблюдението, че никой ученик не е предложил повече от едно решение на проблема, макар мнозина да са оценили задачата като лесна и са разполагали с достатъчно време. Липсват иновативност и активност, които могат да се изявят с алтернативни решения. В учебниците често се предлагат няколко варианта на решение на една задача, мнозина учители също стимулират различни подходи към един и същи проблем. За съжаление, макар и неограничени във времето за решаване, няма ученик, който да е добавил втори начин на решение. Единственият наблюдаван израз на новаторство е изборът на инструмент за реализация на записа на решението – работа с приложение от дигитално устройство.

Задача Б засяга директно уменията на 21 век – творчество, *problem-solving*, умения за боравене с предоставената информация. Според 2. Хипотеза приложните задачи развиват тези умения. Наблюденията от изследването сочат за ограничен опит за работа с такива задачи.

Въз основа на обработените писмени работи и данните от анкетата са направени: съпоставка между самооценка и оценка; време за изпълнение; анализа на преданите файлове от техническа гледна точка; анализ на обратната връзка.

Аналогичен анализ е направен на събраните данни от фаза '22 г.

### 6.3. Дискусия и изводи

Разгледаните критерии и показателите са:

- математическа грамотност – умение за разчитане на условието на поставената задача;
- математически знания – предвид профила на участниците очакването е за високи резултати;
- изследователски подход и новаторство – отсъства предложение с повече от едно решение;
- критично мислене – никой не е обърнал внимание на преопределеността на задачата, а само един ученик е забелязал разминаването в надписаната скала;
- самоинициатива – само един ученик предлага по-подходяща дума за отвора на бутилката;
- самонасочване – повечето ученици строго се придържат към прилагане на формули без аналитичен паралел между текст и изображение, формулиране на отговор, цялостно оформление на решението;
- отговорност – отношение към представянето – повечето работи имат вид на чернова;
- творчество и презентативни умения – главно изразени в оформлението на

решението и избора на инструмент;

- дигитална грамотност – техническа реализация, оформление и предадени файлове. Реално това е допълнително наблюдение, получено поради извънредните условия, при които е проведен експериментът, но дава представа за дигиталната култура на участниците. Без предварително да е заложена се осъществява междупредметна връзка с Информационни технологии.

Детайлният разрез на решенията според заложените критерии и показатели потвърждава значението на приложните задачи за развитието на компетентностите и уменията на 21 век – творчество, *problem-solving*, умения за боравене с предоставената информация.

## 7. ГЛАВА: ПОГЛЕД НАЗАД

---

След дефиниране на проблема, задълбочен преглед на литература и анализ на проведеното изследване, следвайки метода на Д. Пойа е ред на една по-широка ретроспекция.

България е страна с традиции в образованието по математика. Националният отбор по математика и отделни ученици от години печелят призови отличия от участия в международни математически състезания. Наред с това резултатите от PISA за страната са ниски и незадоволителни. Това откроява проблеми в образованието, свързани с развитието на уменията на учениците за аналитичен, креативен и комбинативен подход, при справянето с разнообразни задачи. Цел на изследването е анализ на представянето на обучаемите при решаване на сходни математически задачи. Наред с високото академично ниво, динамичното време, в което живеем, изисква подготовката по математика да не се свежда само до прилагане на алгоритми и формули. Нужни са умения за задълбочен анализ, интерпретация на данните, синтез на информацията по пътя на изграждане на модел, чрез който да се постигне решение на поставения проблем. После с поглед назад е необходимо аргументирано и ясно да се комуникира постигнатото решение.

### 7.1. Задача за втори гимназиален етап – профилирана подготовка

В програмите за профилирана подготовка „Модул 2. Елементи на Математическия анализ“ и „Модул 3. Практическа математика“ описаните очаквани умения се прекриват. В двете програми е заложен един и същи текст, като единствената разлика е в името на модула.

„Обучението в модул...

„Елементи на математическия анализ“ е насочено за овладяване



„Практическа математика“ е насочено за придобиване

... на компетентности, свързани с постигане на държавните образователни стандарти по математика за профилирана подготовка, *изграждане на умения за моделиране на реални или теоретични ситуации с изучените средства, умения за интерпретиране на получените резултати* и за разглеждане на поставените проблеми като съвкупност от отделни проблеми“. (МОН, Учебни програми за профилирана подготовка, 2020)

В целите не е посочено явно значението на **приложността** извън необходимото надграждане на теоретичните знания. За основна цел на модулите е посочено съответно:

- Модул 2. – „изучаване на някои елементи на математическия анализ и придобиване на основни изчислителни умения в тази област.“
- Модул 3. – „е изучаване на някои приложения на знанията по математика, придобити с изучаване на първите два модула на профилираната подготовка“

В графата „Компетентности като очаквани резултати от обучението“ на съответните таблици, съдържащи заложеното учебното съдържание, са изброени подробно умения и знания, които са пряко свързани със заложения теоретичен материал по математика. В Модул 2. не са посочени умения, които адресират моделиране на реални ситуации и тяхното интерпретиране. В Модул 3. единственото умение, което се отнася пряко към моделирането е „умее да решава екстремални задачи чрез моделиране с функции“. С оглед на учебното съдържание и поставените цели първият параграф на програмите звучи по-скоро пожелателно. Липсва отделна и ясна формулировка на нужните знания и умения за моделиране. Очакваните теоретични знания са специфицирани, но не и тяхното приложение в контекста на реални ситуации. Не са посочени експлицитно компетентностите за справянето с такива задачи и интерпретиране на резултатите в контекста на описания проблем. Докато в чуждестранните образователни системи се разглеждат задачи, в които многопластово се комбинира математическият апарат с реални житейски проблеми.

Приложните задачи свързват стъпките на алгоритъма и критичните точки на функцията с тяхното значение в различен контекст. Задачи, свързани с реални проблеми, са естественото продължение на теорията и липсващата приложна страна, която съществува от години в чуждестранни образователни програми.

## 7.2. Задача 1

**Задача:** *Да се изследва функцията  $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$  (Иван Тонов, 2021).*

Тази задача можем спокойно да сложим в графата **упражнения**. „Имаме цел и пътят към нея е ясно очертан“ (Тонов, 2012). При преподаването на изследване на функция се посочва алгоритъм. Изследването на тази полиномна функция има ясна

структура. Не са нужни евристични методи, които да спомогнат в решението.

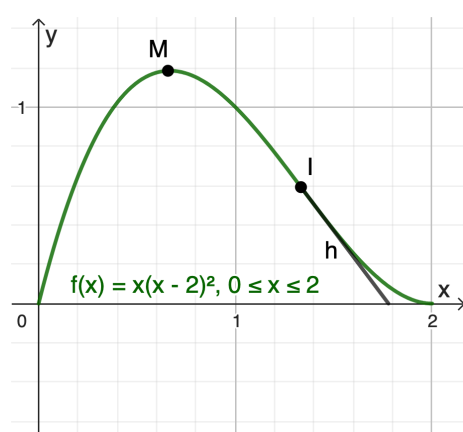
„Когато задачата има интересна и интригуваща формулировка, а особено, когато тя допуска неочаквано решение, работата по нея е по-привлекателна и мотивираща.“ (Тонов, 2012)

### 7.3. Задача 2 (приложна)

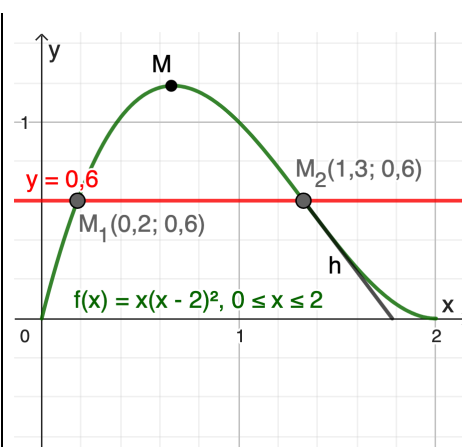
След инжектиране с лек наркотик на опитни мишки се следят нивата на еозинофилни\* левкоцити в кръвта им (\*индикатори за алергична реакция). Приемаме, че в началото нивото на тези ензими е било близо до 0%. Нивото (1 м. ед. = 10%) на наркотика в кръвта в периода на действие се описва от функцията  $f(t) = t(t - 2)^2$ , като времето се измерва в денонощия.

1. Колко време минава до пълно изчистване на кръвта?
2. За кой интервал на променливата разглежданата функция описва поставения проблем?
3. Кога се достигат най-високи стойности на левкоцитите и какви са те в проценти?
4. Кога се наблюдава най-бързото спадане на нивата?
5. Ако непосредствено след момента на най-големия спад изменението на нивото на ензимите може да се опише с линейна функция, то какво би било нейното уравнение (графика)? Как това ще промени моментът на пълно изчистване на кръвта?
6. Колко време трае алергичната реакция (референтни стойности 0 – 6%)?

В дисертацията са предложени няколко математически решения, съпроводени с описание на ролята на учителя и значението на отделните части за развитие на компетентностите и уменията на 21. век. Един от тях е с използване на софтуер като акцентът е върху тълкуването на резултатите, като пример за това са следните фигури.



Фиг. 6: Част от допирателна в  $I$



Фиг. 7: Пресечни точки на  $f(x)$  и  $y = 0,6$

„Математическият опит на ученика не бива да се счита пълен, ако той никога не е имал възможност да реши задача, измислена от самия него.“ (Поля, 1972) Като

следваща стъпка за самостоятелна работа, или за домашно задание, или като проект може да се даде следната задача:

#### 7.4. Задача 3 (творчество)

**Задача:** Дадена е функцията  $f(x) = x(x - 2)^2$

Съставете задача, в която дадената функция описва процес по избор от сферата на география, биология, химия, физика, технологии и предприемачество. Задайте подходящи спрямо процеса въпроси, свързани със стойностите на функцията, екстремумите, инфлексната точка, разгледайте допирателни към графиката на функцията.

Може в часа учителят да стимулира описанието на проблем от друга сфера на познанието. В дисертацията е предложена примерна формулировка.

Учители и университетски преподаватели се сблъскват с оплакването на обучаемите, че изпитно задание включва „неупражняван материал“. Оплакването „Това не сме го правили в час“ е доста неуместно за предмет по математика, където истинското владение на материала се демонстрира чрез комбиниране на знания и умения. Подходящ регламент на изпитванията може да елиминира подобно недоволство сред учащите и би ги подтикнало да търсят подходящи примери за упражнения.

#### 7.5. Задача 4 (problem-solving)

Напречното сечение на възвишение, заобиколено от две долини, може да се опише чрез функцията

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 3$$

На върха на хълма трябва да се монтира пилон с два прожектора, които да осветяват най-ниските точки на двете долини. Прожекторите трябва да се намират на най-малката възможна височина спрямо основата на пилона. Една линейна единица от графиката на функцията отговаря на 100 м в действителност.

1. Да се начертае профилът на разглеждания терен. Да се определят височината на хълма и най-голямата дълбочина на двете низини, ако абсцисната ос отговаря на нулева надморска височина. (първо ниво)
2. Да се определи надморската височина на точката с най-стръмно изкачване/слизание спрямо хълма (второ ниво).
3. Да се определи интервалът, в който функцията описва този релеф, ако е дадено, че двете страни на низините достигат височина, равняваща се на тази на най-високата точка на хълма. Или да се даде по-лек от изчислителна гледна точка интервал, за да не се дублират тежките пресмятания, ако са на ръка.
4. Да се намери къде трябва да се монтира пилонът и на каква височина на него от основата му се намират прожекторите (трето ниво).

## РАЗВИТИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

### Развитие на темата

Настоящата дисертация разглежда ролята на приложните задачи в курса на обучение по математика. Според цялостното изследване техният образователен потенциал е понастоящем недостатъчно развит.

Заложената 3. Хипотеза не е напълно потвърдена от проведеното изследване. Естествено продължение е планиране и осъществяване на представително изследване. Използваната задача следва да се прецизира. Придружаващият въпросник трябва да се доразвие след консултация със специалисти по статистика. Необходимо е изследването на терен да бъде при неопосредствено наблюдение, да се обогати с допълнителни беседи и дискусии както с учениците, така и с учителите. Анализът на резултатите е възможност за оценка на актуалната ситуация. Насоки за развитие:

**Изследване сред ученици** – с цел постигане на представителност на данните групата от участници трябва да се разшири с представители от цялата страна, различни по профил и специализация гимназии, първи и втори гимназиален етап.

**Изследване сред настоящи и бъдещи учители** – с цел проследяване на нагласите и опита на учителите (студенти-магистри, учители, посещаващи курсове за допълнителна или следдипломна квалификация) подобно изследване е добре да се проведе в два формата. Единият следва да е идентичен с този на учениците. Източник на повече изводи би бил „качествен експеримент“ (Бижков & Краевски, 2007) в търсене на подходи за ефективно минимално вмешателство при напътствие на учениците сами да намерят и аргументират решението си.

**Анализ на резултатите** – подробен количествен и статистически анализ на данните от проведеното представително изследване. Въз основа извлечените резултатите да се направят съответните оценки и изводи. На тяхна база да се формулират основания за предложения за допълнение на училищния курс по математика със съответния набор от задачи.

**Приложните задачи в годините назад** – безценен опит може да се почерпи от стари български учебници. За целта е необходимо хронологично проследяване на количеството и типовете приложни задачи от началото на миналия век до днес. Задачите могат да се опишат и направят достъпни в общо хранилище. Тематичното им структуриране дава възможност за абстрахиране от годишното разпределение според актуалната програма на МОН. Под внимание трябва да се вземат и експерименталните учебни програми, тяхното съдържание излиза от зададената рамка в търсене на нови подходи и предлагат нестандартни задачи, които заслужават внимание. В тях могат да се открият много интересни, апробирани задачи, които крият пропуснати към момента възможности.

**Обучителен материал** – формулировка и апробация на схема от критерии за

оценка на комплексността на приложна задача, инструменти за създаване на приложни задачи.

**Интеграция** със STEM образованието. Математика за математиката чрез подходящи задачи, напр. задачи за линейно програмиране.

## Заклучение

### *Изпълнение на изследователските задачи*

Разработката на дисертационния труд следва поставените задачи за разглеждане на ролята на приложните задачи в курса на обучение по математика. Направен е обзор на литературни източници и резултатите от сходни изследвания в областта. Съпоставени са действащите у нас нормативни документи и тези на ЕК за развитие на образованието с оглед на очакваните умения и компетентности. Сравнени са избрани теми от действащите учебници у нас и тези на утвърдени чуждестранни системи с цел анализира настоящото ниво на използване на задачи за моделиране в гимназиален етап. Анализирана е ролята на приложните задачи като инструмент за осъществяване на междупредметни връзки. Разработен е сценарий на приложните задачи от гледна точка на структура и съдържание. Описани са осите на разглеждане на приложните задачи. Направен е разрез на процеса на решаване на приложна задача според заложените ключови компетентности и уменията на 21. век. Анализирано е тяхното значение за развитието на когнитивните и метакогнитивните умения на учениците.

### *Достоверност на хипотезите*

Разгледаните литературни източници, нормативни документи и програми, сходни изследвания в областта потвърждават 1. Хипотеза, че приложните задачи повишават интереса и мотивацията и развиват умения за учене през целия живот и постигане на устойчиви знания.

Направеният анализ на съдържанието и процеса на решаване на приложни задачите, които описват близък до реален житейски проблем, са пречупени през призмата на компетентностния модел и уменията на 21. век. На база на литературен обзор и с конкретни примерни се потвърждава 2. Хипотеза, че такива задачи спомагат постигането на целите на образованието по математика като в по-голяма степен развиват заложените ключови компетентности – критично мислене, аналитично четене, *problem-solving*, творчество. Разгледана е ролята на тези задачи за формиране на аналитично-евристичното мислене и презентативни умения при формулирането на аргументирано изложение. Приложени са, както описани в литературата, така и авторски критерии за разрез на условията и решенията на конкретни задачи, за да се онагледят как компетентностите „оживяват“ на практика чрез използването на приложни задачи. Анализът на част от резултатите от проведеното педагогическо изследване също сочат в подкрепа на 2. Хипотеза.

Резултатите от проведеното педагогическо изследване на терен не са достатъчно убедителни за потвърждаване на 3. Хипотеза, че приложните задачи в по-голяма степен затрудняват дори ученици с добра математическа подготовка. Въпреки това не са повод за отхвърляне на хипотезата, а дават основание за подготовка и провеждане на представително изследване, защото литературният преглед на сходни изследвания потвърждава заложената хипотеза.

Посочено е какво е влиянието на приложните задачи върху концентрацията, когнитивните и метакогнитивните модели. На база на литературни източници и анализ на допълнителните данни от проведеното педагогическо изследване е потвърдена 4. Хипотеза, че целенасочената работа по такива задачи има значение за изграждане на когнитивните и метакогнитивни модели, тренира концентрираното четене и повишава самодисциплината. Комбинирано психологическо и педагогическо изследване следва да се проведе с постигане на по-добра измеримост.

С конкретни задачи е даден пример как преходът от зададен реален проблем към математически модел реализира „практически ориентирано“ познание, което е заложено в стратегическите документи на МОН. Аргументирано се представя проблемът с недостатъчно приложни задачи по математиката в гимназиален курс на обучение. Разгледано е, че въпреки регулярните промени в учебните планове, нивото на подготовка не отговаря на препоръките за нивото на единно Европейско образование. Извлечените изводи свидетелстват за необходимостта за допълнение на училищния курс с приложни задачи с цел повишаване на конкурентността и мобилността на зрелостниците, с което се потвърждава 5. Хипотеза.

Друга ос на разглеждане е новата образователна парадигма за учене през целия живот, при която водещ е личният пример на учителите – информирани и прилагащи актуалните подходи в образованието, използващи дигиталните технологии, интересувани се от достъпните за учениците материали и приложения, умеещи да оценяват качеството им. Разгледаните документи, анализиращият процес на решаване на приложни задачи и мястото на дигиталните технологии в образованието потвърждават 6. Хипотеза, че учителите също трябва да развиват уменията си, да учат, да търсят и опознават нови образователни технологии и инструменти.

От изложението е видно, че създаването на качествени приложни задачи изисква съвместна работа на учителите по математика с други специалисти. В този процес по естествен начин възникват междупредметни връзки и се онагледява свързаността на заложените в курса на обучение знания. Ученическото творчество следва да се разглежда като допълнителен източник на вдъхновение в тази дейност. Интерграция със STEM образованието и приложни задачи от математика за математиката дават насока за бъдещо развитие на темата.

## ПРИНОСИ

---

### Научноизследователски приноси

1. Направен е структуриран обзор на литературни източници, анализиращи ролята на приложните задачи в курса на обучение по математика като е описано значението им за развитието на когнитивните и метакогнитивните умения, ключовите компетентностите и уменията на 21. век.
2. Направена е съпоставка между действащите нормативни документи в България, в това число и програмите на МОН за курса на обучение по математика, с документите на ЕК за развитие на образованието в контекста на приложните задачи.
3. Анализно е мястото на приложните задачи при съчетаване на класически и иновативни дидактически подходи, в това число дигитални технологии.
4. Натрупани, кодирани и анализирани са данните от проведените изследвания на терен, които могат да послужат за отправна точка за по-нататъшни проучвания в областта.

### Научноприложни приноси

5. Направен е сравнителен анализ на разнообразието и количеството приложни задачи в курса на обучение по математика у нас и тези в утвърдени чуждестранни системи.
6. Изготвен е структуриран преглед на алтернативни подходи като математическото есе и матурен проект и тяхното значение за стимулиране на ученическото творчество, самонасочването, самодисциплината и мотивацията.
7. Предложен е модел на решаване на приложна задача, базиран на литературни източници и етапите на Пойа с допълнителен разрез на отделните стъпки според адресираните компетентности и умения на 21. век.
8. Направен е анализ на формулировката приложните задачи от гледна точка на основни части на структурата, поставяне на въпроси с надграждащо ниво на трудност, речник, разнообразие, коректно съдържание, базирано на междупредметни връзки.
9. Анализирани са ролята на учителя в представянето, комбинирането и надграждането на знания в паралел със съвременната образователна парадигма за учене през целия живот.
10. Подготвени са материали и план за провеждане на педагогическо изследване, което цели да оцени уменията за работа с приложна задача, която няма аналог в действащите учебници.

### Приложни приноси

11. Систематизирани са критерии за оценка на приложна задача.

12. Направен е разбор на конкретни задачи, изучавани в курса по математика, следвайки спираловидния модел.
13. Разработени са примерни приложни задачи, допълващи курса на обучение по математика, придружени с решение, разгледано по две оси – математическа обосновка и анализ на адресираните компетентности.
14. Очертани са насоки за развитие на набора от приложни задачи чрез изграждане на банка с въпроси като колективно усилие на учители и ученици и адаптирани добри практики от утвърдени чуждестранни образователни системи.

## Библиография на автореферата

---

Баптист, П. (2013). *Към нов подход в математическото образование* (Том 1). (Е. Сендова, Ред.) София: „Регалия 6“.

Бижков, Г., & Краевски, В. (2007). *Методология и методи на педагогическите изследвания*. София: Университетско издателство Св. Климент Охридски.

Георгиева, Д. (2018). Problem Solving Model In Mathematics. *Processing of the 57-th Annual Scientific Conference of Angel Kanchev University of Ruse and Union of Scientists – Ruse*. Ruse: University of Ruse "Angel Kanchev".

Иван Тонов, и. к. (2021). *Математика за 12. клас - Профилирана подготовка - Практическа математика Регалия 6 2021*. Регалия - 6.

ИМИ-БАН. (2013). *Образование по математика и информатика*. Извлечено от ИМИ - БАН: <http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/>

Кендеров, П., & Чехларова, Т. (2021). *ПОДГОТОВКА ЗА СЪСТЕЗАНИЯ ПО МАТЕМАТИКА С КОМПЮТЪР В 7. - 8. КЛАС*. София: Тонедико.

Кожухарова, Г. М., Ганчев, Г. К., & Делчев, М. Г. (2004). *Методика на педагогическите изследвания за студенти и учители*. Извлечено от Тракийски университет - Стара Загора – Център за електронни форми на дистанционно обучение: <https://edu.uni-sz.bg/book/22.dipku-gkojuharova-mdeltchev-ggantchev/22.DIPKU-GKojuharova-MDeltchev-Ggantchev-html/index.html>

Николова, Н. (2016). *ФМИ*. Извлечено от Проектно-изследователски подход при преподаването на информатика и ИТ: [https://www.fmi.uni-sofia.bg/sites/default/files/dissertation\\_work\\_of\\_phd/phdthesisnikolinanikolova.pdf](https://www.fmi.uni-sofia.bg/sites/default/files/dissertation_work_of_phd/phdthesisnikolinanikolova.pdf)

Петров, Ф. (2022). Приложение на изследователския подход в образованието по информатика чрез един популярен математически фокус (Нов поглед към стари идеи). *Математика и информатика*, 556-573.

Пойа, Д. (1972). *Как да се решава задача*. София: Народна просвета.

Сендова, Е. (2014). Изграждане на компетентности за моделиране чрез работа по проекти по математика и ИТ. София.

Събева-Колева, Н. (2010). *За мястото на математическото моделиране в училищния курс по математика*. (Т. Атанасова, Ред.) София, България: КТП.

Тонов, п. д.-р. (2012). *Евристиката – наука, изкуство, занаят (Монографичен труд)*. София.

Тонова, Т. (2012). *Когнитивни модели в обучението по математика на ученици от 3 – 6 клас*.



София.

Тонова, Т., Петрова, Д. (2019). Taxonomies and Technologies in Training (of Mathematics). EDULEARN19 Proceedings, (стр. 3786-3792).

Чехларова, Т. (2014). *Разработване на система от практикоприложни задачи за формиране на ключови компетентности по математика*. Извлечено от ПААБЕ: <https://btmdx1.mat.uni-bayreuth.de/kcm/data/Materials/BG/Learning%20environments%202.pdf>

VivaCognita. (2023). Извлечено от <http://vivacognita.org/>

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: Longman.

Anderson, L., Krathwohl, D., Airasian, P., Cruikshank, K., Mayer, R., Pintrich, P., . . . Wittrock, M. (2000). *A taxonomy for learning, teaching*. Boston: Allyn & Bacon.

Binkley, M. e. (2012). 21st century skills. От D. T.-F. *Skills, Assessment and Teaching of 21st Century Skills* (стр. 17-66). Dordrecht: Springer.

Cheung, A. C., & Slavin, R. E. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 89-113.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming Counter Paradigm. *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer.

Eldridge, S. (2023). *Generation Alpha*. Извлечено от Britannica: <https://www.britannica.com/topic/Generation-Alpha>

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. New Brunswick: Aldine Transaction.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*. Leipzig: B. G. Teubner, Leipzig.

Lester, F. K. (1989). *The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Sever. Classes. Final Report*. Washington: National Science Foundation.

Lester, F. K. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. От R. L. Doerr, *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah: Erlbaum.

Lester, F. K. (2013). Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction. *The Mathematics Enthusiast*.

Oberstufe, G. (2017). *Mathematik 1*. Brandenburg: Cornelsen.

Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery*. Wiley: John Wiley & Sons.

Rambe, R. N. (2017). The Effect Of Scanning Technique On Students Reading Comprehension In Narrative Text . *Usia Dini*.

Schoenfeld, A. (1990). *A Source Book for College Mathematics Teaching*. Washington: Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. От D. Grouws, *NCTM Handbook of research on mathematics teaching and learning* Publisher: Macmillan. Berkeley: Macmillan.

## Документи и програми

---

Европейска Комисия. (2009). *Европейската квалификационна рамка за учене през целия живот (ЕКР)*. Люксембург: Служба за официални публикации на Европейските общности.

Съвет на Европейския съюз, О. (4 6 2018 г.). *Препоръка на Съвета от 22 май 2018 година относно ключовите компетентности за учене през целия живот*. Извлечено от Официален вестник на Европейския съюз: [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/BG/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)&from=G](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/BG/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=G)

Commission, E. (1 5 2023 г.). *Приоритетни теми на ЕПО*. Извлечено от European Education Area: <https://education.ec.europa.eu/bg/focus-topics>

DigComp. (1 5 2023 г.). *DigComp Framework*. Изтеглено на 01 05 2023 г. от EU Science Hub: [https://joint-research-centre.ec.europa.eu/digcomp/digital-competence-framework\\_en#ref-1-information-and-data-literacy](https://joint-research-centre.ec.europa.eu/digcomp/digital-competence-framework_en#ref-1-information-and-data-literacy)

Directorate-General for Education, Y. S. (Май 2023 г.). *The EU in support of the Bologna process*. Изтеглено на 01 05 2023 г. от An official website of the European Union: <https://op.europa.eu/en/publication-detail/-/publication/e437d57d-5e32-11e8-ab9c-01aa75ed71a1>

МОН. (1 5 2020 г.). *Учебни програми за профилирана подготовка*. Извлечено от МОН: [https://web.mon.bg/upload/16252/UP\\_XI\\_%D0%9Cath.pdf](https://web.mon.bg/upload/16252/UP_XI_%D0%9Cath.pdf)

МОН. (11 3 2021 г.). *Стратегически документи*. Извлечено от Министерство на образованието и науката: [https://www.mon.bg/upload/25571/Strategicheska-ramka\\_ObrObuUchene\\_110321.pdf](https://www.mon.bg/upload/25571/Strategicheska-ramka_ObrObuUchene_110321.pdf)

МОН. (Май 2017 г.). *Учебни планове и програми по класове*. Извлечено от МОН: <https://web.mon.bg/bg/28>

*Jotform*. (2022). Извлечено от Jotform: <https://eu.jotform.com/>

## Декларация за оригиналност

---

Декларирам, че представената във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в Софийски университет „Св. Климент Охридски“ дисертация на тема: „*Ролята на приложните задачи от училищния курс по математика за целите на обучението*“ е мой труд.

Цитиранията на всички източници на информация, текст, илюстрации, таблици, изображения и други са обозначени според стандартите.

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.