

РЕЦЕНЗИЯ

по процедура за публична защита на дисертационен труд на тема:

”Тороидални компактификации на дискретни фактори
на комплексното двумерно кълбо”
за придобиване на образователна и научна степен ”Доктор”
от Панчо Георгиев Бешков

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика,
Професионално направление: 4.5. Математика,
Докторска програма: ”Алгебра, топология и приложения”, катедра: ”Алгебра”,
Факултет по математика и информатика (ФМИ),
Софийски университет „Св. Климент Охридски“ (СУ).

Рецензията е изготвена от проф. д-р Мая Митева Стоянова, заместник-декан на ФМИ, академичен състав, катедра ”Алгебра”, ФМИ, СУ ”Св. Климент Охридски”, в качеството ми на председател на научното жури, съгласно Заповед РД-38-141/04.03.2022 г. на Ректора на СУ ”Св. Климент Охридски” и решение на научното жури (Протокол №1/14.03.2022 г.).

1 Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали

Представеният дисертационен труд е в обем от 126 страници и се състои от увод, четири глави и библиография от 50 заглавия. В приложения автореферат, в рамките на 20 стр., е представено в резюме съдържанието на дисертацията, като ясно и точно са отразени както основните приноси на докторанта, така и къде са апробирани резултатите. Дисертационният труд се базира на резултати, публикувани в две публикации на докторанта, като едната е в Годишника на Софийски университет, ФМИ, а другата е в Доклади на БАН. Приложен е както списък, така и копия на двете публикации. Представените материали и документи от докторант Панчо Бешков удостоверяват, че са спазени всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАС в Република България) и правилниците към него. Докторант Панчо Георгиев Бешков отговаря на минималните национални изисквания на чл. 2б. ал. 2 и ал. 3 от ЗРАС в Република България.

2 Данни и лични впечатления за кандидата

Познавам Панчо Георгиев Бешков първо като хоноруван преподавател и докторант към катедра "Алгебра", а сега вече и асистент към катедрата. Панчо Бешков придобива ОКС "Бакалавър" във Факултет по математика и информатика на Софийски университет "Св. Климент Охридски", специалност "Математика" през 2010 г. След това придобива ОКС "Магистър" във Факултет по математика и информатика на Софийски университет "Св. Климент Охридски", магистърска програма "Математика и математична физика". От 15.02.2017 г. е зачислен като редовен докторант към докторска програма "Алгебра, топология и приложения" към катедра "Алгебра", ФМИ-СУ. Със Заповед № РД-20-401/06.02.2020 г. е отчислен с право на защита, считано от 15.02.2020 г. От 01.10.2020 г. Панчо Бешков е асистент към катедра "Алгебра", ФМИ-СУ.

Панчо Бешков е коректен и отговорен колега, с добро студентско мнение като преподавател (доколкото съм информирана). В лични разговори проф. Каспаряни ми е споделяла, че имат добри професионални работни взаимоотношения като научен ръководител и докторант, което е видно и от представените от тях (в дисертационния труд на Панчо Бешков) съвместни научни резултати.

3 Съдържателен анализ на научните и научно-приложните постижения на кандидата, съдържащи се в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени по процедурата

В дисертацията се изследват гладките тороидални компактификации $X = (B/\Gamma)'$ на некомпактни фактори B/Γ на комплексното двумерно кълбо B по решетка $\Gamma < U(1, 2)$. Подробно се изучават крайните неразклонени покрития $f : X_2 = (B/\Gamma_2)' \rightarrow X_1 = (B/\Gamma_1)'$ на гладки тороидални компактификации, които се ограничават до крайни неразклонени покрития $f : B/\Gamma_2 \rightarrow B/\Gamma_1$ на съответните фактори на комплексното двумерно кълбо B . Получени са някои числови инварианти на гладките тороидални компактификации $X = (B/\Gamma)'$, които са бирационални на линейчатата повърхнина $r : Y \rightarrow E$ с елиптична база E .

В глави едно и две са въведени всички необходими дефиниции и известни факти. Разгледани са холморфните векторни разслоения над комплексно много-

образие, алгебрични повърхнини и техните числа на Чърн. Подробно е разгледано логаритмичното равенство на Богомоллов-Мияока-Яо, характеризиращо гладките тороидални компактификации $(B/\Gamma)'$ на фактори на кълбото B/Γ . Освен това е описана конструкция на тороидална компактификация $(B/\Gamma)'$ на фактор на комплексното двумерно кълбо B по решетка $\Gamma < U(1, 2)$. Присъединяването на крайния брой параболични точки към фактора води до не винаги гладко комплексно проективно многообразие, дори и при гладък фактор, като тороидалната компактификация представлява разрешаването на особеностите в параболичните точки.

В трета и четвърта глава са описани получените нови оригинални конструкции и резултати.

В трета глава е представена явна конструкция на взаимно еднозначно съответствие между крайните неразклонени покрития $X_1 = (B/\Gamma_1)' \rightarrow X = (B/\Gamma)'$ на гладка тороидална компактификация $X = (B/\Gamma)'$ и крайните неразклонени покрития $Y_1 \rightarrow Y$ на минимален модел Y на X .

След това е представена и явна конструкция на взаимно еднозначно съответствие между крайните неразклонени покрития $X = (B/\Gamma)' \rightarrow X_1 = (B/\Gamma_1)'$ чрез гладка тороидална компактификация $X = (B/\Gamma)'$, които са съгласувани с редица $\rho : X \rightarrow Y$ от свивания на гладки неприводими рационални (-1) -криви към минимална повърхнина Y и крайните неразклонени покрития $Y \rightarrow Y_1$, съгласувани с ρ .

Показано е, че крайните неразклонени покрития $X_2 = (B/\Gamma_2)' \rightarrow X_1 = (B/\Gamma_1)'$ на гладки тороидални компактификации, които са съгласувани с редица $\rho_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ от свивания на (-1) -криви към минимална повърхнина Y_2 и индуцират крайни неразклонени покрития $Y_2 \rightarrow Y_1$ на минималния модел Y_1 на X_1 задават частична наредба в множеството S на гладките тороидални компактификации $X = (B/\Gamma)'$ на факторите B/Γ на двумерното комплексно кълбо B по решетка $\Gamma < U(1, 2)$. Минималните елементи на S се наричат примитивни, докато максималните са наситени. Произволно $X = (B/\Gamma)' \in S$ доминира някоя примитивна $X_0 = (B/\Gamma_0)' \in S$. Гладка тороидална компактификация $X = (B/\Gamma)'$ се доминира от наситена $X_1 = (B/\Gamma_1)'$ тогава и само тогава, когато X има крайна фундаментална група $\pi_1(X)$. С помощта на свойствата на минималните проективни повърхнини Y с неположителна разменост на Кодаира, в дисертацията се характеризират наситените и примитивните $X = (B/\Gamma)' \in S$ с минимален модел Y .

Нека $X = (B/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор $D := X \setminus (B/\Gamma)$ и $\beta : X \rightarrow Y$ е крайна редица от свивания на (-1) -криви към минимална повърхнина Y , чийто изключителен дивизор

$E(\beta) = \bigsqcup_{i=1}^s L_i$ има непресичащи се неприводими компоненти L_i . В четвърта глава е доказано, че групата $Aut(X, D) = Aut(X, D, E(\beta))$ е крайна и изоморфна на $Aut(Y, \beta(D)) = Aut(Y, \beta(D), \beta(D)^{sing})$.

Нека $\beta : X = (B/\Gamma)' \rightarrow Y$ е свиване на гладки неприводими рационални (-1) -криви L_i , $1 \leq i \leq s$, върху гладка тороидална компактификация $X = (B/\Gamma)'$ към линейчатата повърхнина $r : Y \rightarrow E$ с елиптическа база E , а $D := X \setminus (B/\Gamma) = \sum_{j=1}^k D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на B/Γ с гладки елиптични неприводими компоненти D_j . В четвърта глава се изразява в явен вид логаритмичното равенство на Богомоллов-Мияока-Яо за (X, D) чрез индексите на пресичане $L_i \cdot D$ и индексите на само-пресичане $\beta(D_j)^2$ на гладките елиптични криви $\beta(D_j) \subset Y$. Ако всички $\beta(D_j)$ са сечения на $r : Y \rightarrow E$, то логаритмичното равенство на Богомоллов-Мияока-Яо за (X, D) е изразено само чрез $L_i \cdot D$, $1 \leq i \leq s$. Когато $r|_{\beta(D_j)} : \beta(D_j) \rightarrow E$ е от степен $d_j > 1$ за поне едно $1 \leq j \leq k$, то от логаритмичното равенство на Богомоллов-Мияока-Яо за (X, D) е изведено неравенство за $L_i \cdot D$, $1 \leq i \leq s$.

Чрез логаритмичното равенство на Богомоллов-Мияока-Яо за (X, D) и изведеното от него неравенство за $L_i \cdot D$, $1 \leq i \leq s$, са намерени долни граници за броя k на параболичните точки на B/Γ , който съвпада с броя на гладките елиптични неприводими компоненти D_j на тороидалния компактифициращ дивизор

$$D = X \setminus (B/\Gamma) = \sum_{j=1}^k D_j.$$

Доказано е, че за фактор на кълбото B/Γ с гладка тороидална компактификация $X = (B/\Gamma)'$, чийто минимален модел е линейчатата повърхнина $r : Y \rightarrow E$ с елиптическа база, съществува ненапълно геодезична пунктирана сфера $L_i \setminus D \subset B/\Gamma$, възникваща от гладка неприводима рационална (-1) -крива $L_i \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ върху $X = (B/\Gamma)'$.

Нека $\beta : X = (B/\Gamma)' \rightarrow Y$ е свиване на гладки неприводими рационални (-1) -криви L_i , $1 \leq i \leq s$, върху гладка тороидална компактификация $X = (B/\Gamma)'$ към линейчатата повърхнина $r : Y \rightarrow E$ с елиптическа база E , а $D := X \setminus (B/\Gamma) = \sum_{j=1}^k D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на B/Γ . Ако $r|_{\beta(D_j)} : \beta(D_j) \rightarrow E$ са бихоломорфизми за всички $1 \leq j \leq k$, в последната глава на дисертацията се предполага, че $k \leq 62$. Ако съществува $1 \leq j \leq k$ с $deg[r|_{\beta(D_j)} : \beta(D_j) \rightarrow E] > 1$, то ограничението е $k \leq 44$. При тези условия (в четвъртата последна глава на дисертацията) са изведени явни долни граници $\mu_k \geq 2$ върху броя на ненапълно

геодезичните $L_i \setminus D \subset B/\Gamma$, в зависимост от $\deg(r|_{\beta(D_j)}) = 1$ за всички $1 \leq j \leq k$, или от съществуването на $\deg(r|_{\beta(D_j)}) > 1$ за някое $1 \leq j \leq k$.

Преставените по-горе резултати ми дават основание да твърдя, че кандидатът Панчо Георгиев Бешков има задълбочени познания в тематиката на дисертационния труд, както и че оригиналните му приноси са достатъчни за придобиване на ОНС "Доктор".

4 Аprobация на резултатите

От представените документи е видно, че докторант Панчо Георгиев Бешков е оформил своя дисертационен труд въз основа на резултати, публикувани в две публикации [6] и [7], съгласно библиографията в дисертацията. Двете публикации са в съавторство с научния му ръководител проф. д-р Азнив Каспарян, като публикация [6] е в съавторство и с G. Sankaran. От представените декларации за съавторство е видно, че приносят на Панчо Бешков и на другите съавтори е равносвален. Публикация [6] е публикувана в Annual of Sofia University "St. Kliment Ohridski", Faculty of Mathematics and Informatics през 2019 г., като съгласно Правилника за прилагане на ЗРАС в Република България това носи на кандидата 18 т. за покриване на минималните национални изисквания (МНИ) за придобиване на ОНС "Доктор". Резултатите от втората публикация са публикувани през 2021 г. в Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences ("Доклади на БАН"), което е списание с импакт фактор (IF: 0.378 за 2020 г.) и попада в Web of Science Quartile: Q_4 , т.е. прибавя още 36 т. за покриване на МНИ. В резултат с 54 т. (при необходими 30 т.) кандидатът Панчо Бешков покрива и надвишава МНИ по чл. 2б, ал. 2 и 3 на ЗРАС в Република България, изискуеми за придобиване на ОНС "Доктор" в ПН 4.5. Математика. Нямам информация и каквито и да било съмнения за плагиатство в представения дисертационен труд и научни трудове по тази процедура. Нямам информация за цитирания на публикациите. Резултатите са представени от Панчо Бешков на Пролетната научна сесия на ФМИ през 2019 г. и 2021 г., както и на Националния семинар по теория на кодирането "Проф. Стефан Додунеков" през 2018 г. и 2019 г., съответно.

5 Качества на автореферата

Авторефератът на български език е в обем от 20 страници, а на английски език е в обем от 19 страници, като и двата са изготвени съгласно всички изисквания

и отразяват коректно съдържанието на дисертационния труд и научните приноси на докторанта.

6 Критични бележки и препоръки

Представеният дисертационен труд е в областта на алгебричната геометрия, като високият стил на описаното съдържание изисква предварително доста дълбоки математически познания, за да се разберат представените в него резултати. Това прави дисертацията трудна за четене от други млади учени и докторанти, което е малък недостатък според мен. Бих препоръчала занапред Панчо Бешков да се опита да описва по-подробно предварителните данни и дефиниции с илюстрации чрез известни примери, за да е по-привлекателна и достъпна тематиката за по-голяма група от читатели и наистина да популяризира разглежданите в дисертацията макар и трудни, много интересни и актуални задачи. Забелязват се и някои технически (правописни) грешки. Моите бележки и препоръки по-горе ни най-малко не променят по същество добрите ми впечатления за дисертацията и научните познания на кандидата по тематиката на дисертационния труд.

7 Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го научни трудове и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащи се в тях научни и научно-приложни приноси, потвърждавам, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на ЗРАС в Република България, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ "Св. Климент Охридски" за придобиване от кандидата на образователната и научна степен "Доктор" в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма "Алгебра, топология и приложения". В частност кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по процедурата научни трудове.

Въз основа на гореизложеното, **убедено препоръчвам** на научното жури да присъди на Панчо Георгиев Бешков образователна и научна степен "Доктор" в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, профе-

сионално направление 4.5. Математика, докторска програма "Алгебра, топология и приложения", катедра "Алгебра", Факултет по математика и информатика, СУ "Св. Климент Охридски".

07.05.2022 г.
гр. София

Подпис:
проф. д-р Мая Стоянова