14. Справка за оригиналните научни приноси

представени в конкурс за професор

по 4.5 Математика (Изследване на операциите)

обявен в ДВ брой 21 от 13 март 2020 г.

от Надя Златева

Резултатите, публикувани в представените за конкурса статии, могат да бъдат обособени в следните три групи:

1. използване на пертурбационни пространства за минимизиране на интегрални функционали;
2. сюрективност на изображения в пространства на Фреше;
3. нови доказателства на известни резултати в областта на вариационния анализ,

на които ще се спрем по-долу.

1. Използване на пертурбационни пространства за минимизиране на интегрални функционали ([б2, б3])

Разглеждаме задачата за минимизиране на безкрайномерен интегрален функционал, като в [б2] подинтегралната функция е изпъкнала, а в [б3] това не е задължително. Идеята е да се намери такова пертурбационно пространство от функции, че когато интегрантът се смути с функция от това пространство, задачата да има решение и освен това смутената задача да бъде от същия вид като изходната.

В [б2] разглеждаме вариационна задача за минимизиране на интегрален функционал като подинтегралната функция е изпъкнала. Когато пространството е нерефлексивно, дори и интегрантът да е изпъкнал, прости примери показват, че минимизационната задача може да няма решение. Един от начините да се преодолее това препятствие, което се дължи на липсата на локална компактност, е да бъде приложен някой от така наречените вариационни принципи, при което подходящо смутеният функционал достига минимум. Проблемът е в това, че смущението може да промени вида на задачата. В статията е представен общ метод за доказване на съществуване на решение на подходящо смущение на интегранта, което запазва вида на задачата. За целта е разработен нов вариационен принцип, който позволява да се смущава само интегрантът и така да се запазва първоначалният вид на задачата.

В [б3] разглеждаме задачата за минимизиране на безкрайномерен интегрален функционал с не непременно изпъкнал интегрант. Тук адаптираме идеята от [б2], която позволява да се смути единствено интегрантът и така да се запази вида на задачата. Резултатите от [б2] не могат да бъдат приложени директно, защото там изпъкналостта (или поне слабата затвореност) се използва съществено. Също така, аксиомите за пертурбационното пространство, които използваме тук, са по-малко общи, но по-лесни за проверка и достатъчни в повечето случаи.

2. Сюрективност на изображения в пространства на Фреше ([б5, б6])

Теоремата на Наш и Мозер (вж. напр. *R. S. Hamilton, The Inverse Theorem of Nash and Moser, Bulletin of AMS 7(1), 1982, 65–222*) е теорема за обратната функция в пространства на Фреше и е полезно средство за изучаване на въпроса за разрешимост на някои нелинейни задачи с безкрайно гладки данни. Ако съответната локална линейна задача е разрешима и са налице някои равномерни оценки, то първоначалната задача също е разрешима. Тъй като пространствата от безкрайно гладки функции не са банахови, обичайната теорема за обратната функция не работи. Доказателството на теоремата на Наш и Мозер се основава на нютонов тип метод за преодоляване на така наречената загуба на производни. Затова то работи за поне двукратно гладки функции и при допълнителни предположения. Често инективната част на теоремата за обратната функция на Наш и Мозер не е интересна за приложенията. Това, което е важно, е да има решение при дадена дясна страна, т.е. сюрективност. Оригиналната статия на Екеланд (*I. Ekeland, An inverse function theorem in Fréchet spaces, Ann. Inst. H. Poincaré C 28(1), 2011, 91–105*), показва че известна сюрективност може да се докаже за функции които са само диференцируеми по Гато. Използваният от Екеланд метод се състои в прилагане на вариационния принцип на Екеланд към подходящо конструирано банахово пространство, наподобяващо l_1. Въпреки това, получената от него оценка е за една избрана норма на пространството на Фреше (по-точно, за линейна комбинация на нормите, но с неканонични коефициенти), докато в оригиналната теорема на Наш и Мозер всички полунорми са оценени.

В [б5] доказваме резултат от тип сюрективност за многозначни изображения с оценки на всички полунорми. Вместо производна по Гато, използваме лека модификация на контингентната производна на многозначно изображение. Ключово за нашия метод е разглеждане на банахово пространство (наподобяващо l_∞), което пасва на структурата на задачата. С други думи, геометризираме оценките посредством използването на паралелепипеди, които служат за единични кълба на банахови пространства.

Работейки с многозначни изображения, ние подчертаваме връзката на теоремата на Наш и Мозер с една от централните концепции на вариационния анализ

– метрическата регулярност. Накратко, показваме, че стандартните предположения на теоремата на Наш и Мозер водят до някакъв вид слаба метрическа регулярност на изображението. Интересно е, че тази слаба регулярност влече метрическа регулярност на изображението в една от възможните метрики на пространството на Фреше.

В [б6] представяме просто и директно доказателство на един важен случай на теоремата на Наш-Мозер-Екеланд за еднозначно изображение. Основният резултат в [б6] усилва Теорема 1 от посочената по-горе статия на Екеланд от 2011 г. в смисъл, че всички норми са оценени едновременно. Условията, които налагаме върху пространствата са по-рестриктивни, но най-важните за приложенията случаи се покриват. По-общият резултат в [б5] изисква значително по-сложна техника.

3. Нови доказателства на известни резултати в областта на вариационния анализ ([б1, б4, б8, б7])

Подобни резултати са интересни най-вече от преподавателска гледна точка. Освен това, новите и принципно различни доказателства на известни резултати помагат се откроят техни съществени характеристики и това разбиране води до нови методи за развитие на теорията. За да се види мястото на представените нови доказателства, са дадени кратки исторически бележки за предходните такива.

В [б1] е дадено просто доказателство на класическата теорема на Моро и Рокафелар, че собствена полунепрекъсната отдолу изпъкнала функция в банахово пространство се определя с точност до константа от нейния субдиференциал. Интегруемостта на субдиференциала на такава функция в хилбертово пространство е доказана от Моро чрез използване на Моро-Йосида регуляризация като доказателството работи също така и в рефлексивно банахово пространство. Докато пълното доказателство на този резултат на Рокафелар използва дуални аргументи, много от другите доказателства разчитат на приближаване на производната по посока и последващо свеждане към едномерния случай. Възможно е да се следва първоначалното доказателство на Рокафелар. Въпреки че има известна неточност в това доказателство, статия на Тейлър прави нейна корекция чрез различно доказателство. Идеята за апроксимация на производната по посока и след това свеждане към едномерния случай ясно се очертава в доказателството на Тибо. Различно доказателство, използващо теоремата за средните стойности на Загродни, е дадено от Тибо и Загродни.

Доказателството, което представяме в [б1] следва различен път. То е подобно на доказателството на класическата теорема от анализа, че монотонна функция е интегруема по Риман. То не използва нито дуалност, нито явни едномерни аргументи.

В [б4] даваме ново доказателство на максималната монотонност на субдиференциала на изпъкнала функция.

Това е добре известен класически резултат на Рокафелар. Той е доказан първоначално от Минти за непрекъсната изпъкнала функция в хилбертово пространство, а в последствие Моро дава доказателство в хилбертово пространство като използва дуалност и апроксимация на Моро-Йосида. Трудността да се обобщи метода на Минти е в това, че за полунепрекъсната отдолу функция, която не е непрекъсната, субдиференциалът може да бъде празен в някои точки. Освен това контролът върху нормите на субградиентите, използвани в доказателството, е нетривиален. От друга страна, методът на Моро се опира силно на факта, че хилбертовото пространство е канонично изометрично на своето дуално.

Методът да се сведат разглежданията до права, използван от Минти и обобщен от Рокафелар, преобладава в последващите доказателства на Тейлър, Борвейн, Тибо, непубликувано доказателство на Загродни и скорошно такова на Жул и Ласонд. Подобно е доказателството и в книгата на Фелпс (*R. R. Phelps, Convex functions, monotone operators and differentiability, Lecture Notes in Mathematics 1364, Springer-Verlag, Berlin, 1989*).

Първото пълно доказателство в банахово пространство – това на Рокафелар – е пробив в методическо отношение, който показва че спрягането по Фенхел и дуалността могат да се използват и в нерефлексивния случай. Скорошните доказателства на Маркес Алвес и Свейтър и на Саймънс също използват дуалност. В книгата на Залинеско (*C. Zălinescu, Convex analysis in general vector spaces, World Scientific, River Edge, 2002*) се споменава, че в много учебници авторите предпочитат да докажат само рефлексивния случай (в който двойнствените техники са по-лесни заради симетрията). Известното доказателство на Саймънс показва как може да се вземе субградиент с контролирана норма. Както и някои други доказателства, и нашето започва с едно достатъчно условие за минималност от тип Минти, което доказваме чрез добавяне на допълнителна функция с което да гарантираме ограниченост отдолу на сумата. Всички използвани от нас средства са били известни 70-те години на миналия век.

В [б8] представяме нов метод за доказване на теоремата на Кореа, Джофре и Тибо, че монотонността на субдиференциала влече изпъкналост на функцията. Този нов метод е базиран на бариерни функции. Използването на бариерни функции помага да се преодолеят основните технически трудности при работа с полунепрекъснати отдолу функции.

Според една от основните теореми на анализа, една диференцируема функция е изпъкнала тогава и само тогава, когато производната ѝ е монотонна. Така че може да се очаква, че обобщенията на производната трябва да удовлетворяват това свойство. Кларк в своята класическа книга показва, че изпъкнала локално липшицова функция може да се характеризира чрез монотонност на субдиференциала ѝ на Кларк. Този резултат бива продължен за полунепрекъсната отдолу функция. Първото продължение е на Поликен, който доказва резултата в крайномерно пространство. Кореа, Джофре и Тибо доказват в серия от статии, че изпъкналост на полунепрекъсната отдолу функция може да се характеризира чрез монотонност на нейния субдиференциал – в релексивно банахово пространство за субдиференциала на Кларк, в произволно банахово пространство за аксиоматично въведен субдиференциал и накрая за по-общ аксиоматичен пресубдиференциал. Основното средство за доказване на тези характеризации е теоремата за средните стойности на Загродни, която е в сила за полунепрекъсната отдолу функция в банахово пространсто и произволен пресубдиференциал.

Доказваме този резултат за допустим субдиференциал по различен начин – чрез използване на бариерни функции вместо на някакъв вариант на теоремата на Загродни. При създаването на аксиоматичната рамка избираме привидно минималния набор от аксиоми, при които доказателствата могат да работят. По този начин нашите резултати са малко по-общи.

В [67] представяме ново доказателство, свързано с неотдавнашната книга на Йофе на резултат на Франковска, показващ че метрическата регулярност на многозначно изображение може да се характеризира с регулярност на неговата контингентна вариация – понятие, разширяващо понятието за контингентна производна.

Метрическата регулярност е важна концепция във вариационния анализ, която интензивно се изучава, както може да се види от много скорошни монографии – на Борвейн и Жу (*J. M. Borwein, Q. J. Zhu, Techniques of Variational Analysis, CMS Books in Mathematics, Springer, 2006*), на Пено (*J.-P. Penot, Analysis: From Concepts to Applications, Universitext, Springer, 2016*), на Дончев и Рокафелар (*A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, Implicit Functions and Solution Mappings: A View from Variational Analysis, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springe, 2014*), на Мордухович (*B. S. Mordukhovich, Variational Analysis and Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2018*) и цитираната в тях литература.

Книгата на Йофе (*A. Ioffe, Variational Analysis of Regular Mappings: Theory and Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2017*) е богато и поучително изследване на метрическата регулярност. Там, в глава V, се отбелязва че модулът на регулярност на многозначно изображение между банахови пространства се оценява в термините на тангенциалните конуси към неговата графика. Оценките са точни, но не са характеристични. Това се дължи на факта, че в безкрайна размерност, изображение може да бъде регулярно и в същото време тангенциалните конуси към неговата графика да не бъдат достатъчно информативни.

В литературата има различни оценки на модула на метрическа регулярност на многозначно изображение в термините на подобни на производна обекти. За разлика от т. нар. кодеривативен (дуален) критерий, повечето деривативни критерии не са характеристични. Тук отново установяваме един деривативен критерий, който допълва раздел 5.2.2 от книгата на Йофе и освен това е характеристичен. По същество това е направено от Франковска в (*H. Frankowska, Some inverse mapping theorems, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire 7, 1990, 183–234*). Там обаче е дадена характеризация на локалния модул на регулярност, докато ние правим характеризацията глобална. Техниката на Франковска е различна, но също зависи от вариационния принцип на Екеланд.

Публикации, представени за конкурса

[б1] M. Ivanov, N. Zlateva, A new proof of the integrability of the subdifferential of a convex function on a Banach space, **Proceedings of the American Mathematical Society**, vol:136, issue:5, 2008, pages:1787-1793, ISSN (print):0002-9939, ISSN (online):1088-6826, DOI: 10.1090/S0002-9939-08-09178-8, Web of Science IF (0.584 – 2008), **Web of Science Quartile: Q2** (101/215 Mathematics), SCOPUS SJR (1.174 – 2008), SCOPUS Quartile: Q1 (Mathematics), Ref. MathSciNet (MR2373609)

[б2] Milen Ivanov, Nadia Zlateva, Perturbation method for variational problems, **Journal of Convex Analysis**, vol:19, issue:4, 2012, pages:1033-1042, ISSN (print):0944-6532, ISSN (online):2363-6394, Web of Science IF (0.625 – 2012), **Web of Science Quartile: Q2** (124/296 Mathematics), SCOPUS SJR (1.229 – 2012), SCOPUS Quartile: Q1 (Mathematics), Ref. MathSciNet (MR3059052)

[б3] M. Ivanov, N. Zlateva, Perturbation Method for a Non-convex Integral Functional, **Journal of Optimization Theory and Applications**, vol:157, issue:3, 2013, pages:737-748, ISSN (print):0022-3239, ISSN (online):1573-2878, doi:10.1007/s10957-012-0196-1, Web of Science IF (1.406 – 2013), **Web of Science Quartile: Q1** (43/251 Mathematics Applied), SCOPUS SJR (0.928 – 2013), SCOPUS Quartile: Q1 (Control & Optimization), Ref. MathSciNet (MR3047028)

[б4] M. Ivanov, N. Zlateva, Maximal Monotonicity of the Subdifferential of a Convex Function: a Direct Proof, **Journal of Convex Analysis**, vol:24, issue:4, 2017, pages:1307-1311, ISSN (print):0944-6532, ISSN (online):2363-6394, Web of Science IF (0.627 – 2017), **Web of Science Quartile: Q3** (192/310 Mathematics), SCOPUS SJR (0.534 – 2017), SCOPUS Quartile: Q2 (Mathematics)

[б5] Milen Ivanov, Nadia Zlateva, Surjectivity in Frechet Spaces, **Journal of Optimization Theory and Applications**, vol:182, issue:1, 2019, pages:265-284, ISSN (print):0022-3239, ISSN (online):1573-2878, doi:https://doi.org/10.1007/s10957-019-01482-2, Web of Science IF (1.6 – 2018), **Web of Science Quartile: Q2** (65/254 Mathematics Applied), SCOPUS SJR (1.086 – 2018), SCOPUS Quartile: Q1 (Control & Optimization)

[66] Milen Ivanov, Nadia Zlateva, A simple case within Nash-Moser-Ekeland theory, **Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences**, vol:72, issue:2, 2019, pages:152-157, ISSN (print):1310-1331, ISSN (online):2367-5335, DOI:10.7546/CRABS.2019.02.02, Web of Science IF (0.321 – 2018), **Web of Science Quartile: Q4** (68/69 Multidisciplinary), SCOPUS SJR (0.205 – 2018), SCOPUS Quartile: Q2 (Multidisciplinary)

[67] Milen Ivanov, Nadia Zlateva, On Characterizations of Metric Regularity of Multi-valued Maps, **Journal of Convex Analysis**, vol:27, issue:1, 2020, pages:383–390, ISSN (print):0944-6532, ISSN (online):2363-6394, Web of Science IF (0.794 – 2018), **Web of Science Quartile: Q2** (147/313 Mathematics), SCOPUS SJR (0.717 – 2018), SCOPUS Quartile: Q2 (Mathematics)

[68] Milen Ivanov, Nadia Zlateva, Barrier Functions in Subdifferential Theory, **Journal of Convex Analysis**, vol:27, issue:4, 2020, ISSN (print):0944-6532, ISSN (online):2363-6394, Web of Science IF (0.794 – 2018), **Web of Science Quartile: Q2** (147/313 Mathematics), SCOPUS SJR (0.717 – 2018), SCOPUS Quartile: Q2 (Mathematics)