Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ

за придобиване на научна степен "доктор на науките"
в професионално направление: 4.5 Математика

Геометрия на кватернионно-контактните многообразия и проблем на Ямабе

доц. д-р Иван Минчев Минчев

София
2020

Дисертационният труд е преминал успешно през процедура по предварително обсъждане на 13.02.2020 г. пред съвета на катедра Геометрия на Факултета по математика и информатика на Софийския университет "Св. Климент Охридски", при разширение на катедрата в състав: чл.кор. проф. дмн Олег Мушкаров (ИМИ на БАН), проф. д-р Величка Милушева (ИМИ на БАН), доц. д-р Георги Ганчев (ИМИ на БАН). Разширението е направено със заповед РД 38-39/30.01.2020 г. на Ректора на Софийския университет "Св. Климент Охридски".

Дисертационният труд е на английски език и съдържа 208 страници, от които 4 страници библиография.

Дисертантът работи като доцент във Факултета по математика и информатика на Софийския университет "Св. Климент Охридски". Изследванията са извършени във Факултета по математика и информатика на СУ "Св. Климент Охридски", в Мазариковият университет в Бърно (Чехия) и в Хумболтовия университет в Берлин (Германия).

Съдържание

Предговор

В представения дисертационен труд се разглеждат проблеми свързани с теорията на кватернионно-контактните (съкратено QC, от английски "quaternionic-contact") многообразия. QC геометрията е въведена от френския математик Оливие Бикар [Biq] като средство за изследване на границата в безкрайността на кватернионното хиперболично пространство. По дефиниция под QC структура върху $(4n+3)$-мерно многообразие M разбираме разпределение H (често наричано тук хоризонтално разпределение) с коразмерност 3 върху M, което се задава локално като ядро на 1-форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, приемаща стойности в $\mathbb{R}^3$, за която трите 2-форми $d\eta_i|_H$ (получени като рестрикции върху H на външните диференциали на формите η_i) са фундаментални форми на (подходяща) кватернионна структура върху H (виж също Дефиниция 5.1 по-долу).

Според теорема доказана от Бикар [Biq], всяка реално-аналитична QC структура върху $(4n+3)$-мерно многообразие M е граница в безкрайността (conformal infinity) на еднозначно определена кватернионно-Келерова метрика, дефинирана в "малка" околност на M. Тази теорема е обобщение на предхождащ резултат на Льобрън [LeB82], според който всяко 3-мерно реално-аналитично конформно Риманово многообразие е граница в безкрайността на (еднозначно определена) 4-мерна автодуална Айнщайнова метрика. Прието е 4-мерните автодуални Айнщайнови метрики да се разглеждат като кватернионно-Келерови метрики в размерност 4, което обуславя разглеждането на QC геометрията като естествено обобщение на 3-мерната конформна Риманова геометрия за по-високи размерности от вида $4n+3$.

Забележително е също, че QC геометрията се оказва подходящ инструмент за изследване на едно отдавна известно нелинейно диференциално уравнение от втори ред (виж формула 27 по-долу), свързано с определяне на нормата и екстремалите на определено Соболев-тип влагане върху кватернионната група на Хайзенберг [FS74], известно като влагане на Фоланд и Щайн (за повече подробности виж Точка 6.1 по-долу). Намирането на решения на това уравнение представлява така наречения проблем на Ямабе върху кватернионната група на Хайзенберг, заемащ централно място в представения дисертационен труд.

За да изясним геометричната страна на този проблем, нека разгледаме 1-форма η, приемаща стойности в $\mathbb{R}^3$, която дефинира QC структура H върху произволно $(4n+3)$-мерно многообразие M. Тази форма не е еднозначно определена от разпределението H, ами може да бъде избирана с точност до конформен фактор и ротация с матрица от $SO(3)$ (виж Лема 5.2 по-долу за доказателство на този факт). Трансформациите на формата η, запазващи QC структурата H имат вида $\bar{\eta} = \mu\Psi \cdot \eta$, където μ е положителна функция, а Ψ е $SO(3)$-значна функция върху M. Такива трансформации наричаме QC-конформни, а когато функцията μ е константа, казваме, че трансформацията е QC-хомотетична. От тук може да се направи извод, че върху M съществува канонично определен конформен клас от метрики $[g]$ на разпределението H и кватернионна структура $Q \subset End(H)$. Към всяка фиксирана метрика g от класа $[g]$ може да бъде асоциирана еднозначно определена линейна свързаност върху M, запазваща QC структурата и метриката g, която ще наричаме свързаност на Бикар. Тази свързаност е инвариантна относно QC-хомотетичните трансформации на η, но се променя по нетривиален начин при QC-конформни трансформации. Скаларната кривина $Scal$ на свързаността на Бикар представлява много важен диференциален инвариант в QC геометрията. Най-общо, проблема на Ямабе върху дадено QC многообразие (M, H) може да се формулира, като проблем за намирането на всички метрики $g \in [g]$, за които свързаността на Бикар притежава константна скаларна кривина.

Още със самото появяване на понятието QC геометрия (около 2000-та година) е било известно, че съществуват безброй много (не еквивалентни) примери на такива геометрии дори и ако фиксираме базовото многообразие M да бъде $(4n+3)$-мерна сфера. Аргументите доказващи това идват от по-ранна статия (отпечатана през 1991 г.) на Льобрън [LeB91], където, използвайки теорията на деформациите на комплексни структури, се показва съществуването на безкрайно-мерно семейство от специални пълни кватернионно-Келерови метрики, дефинирани върху единичното кълбо B^{4n+4}. Льобрън забелязва, че ако бъде умножена с аналитична функция, която се анулира върху граничната сфера S^{4n+3} на кълбото като полином от 2-ра степен, всяка от получените от него специални кватернионно-Келерови метрики може да бъде гладко продължена върху границата S^{4n+3}, но ранга на получения симетричен 2-тензор там спада до 4. Бикар забелязва [Biq], че възникващата по този начин индуцирана структура върху граничната сфера S^{4n+3} е всъщност QC структура и по този начин доказва съществуването на безброй много различни (глобално дефинирани) QC структури върху сферата.

Описаната по-горе конструкция, макар и да доказва съществуването на QC структури, не помага особено за тяхното експлицитно построяване, поради неявния характер на използваните аргументи. Всъщност броят на известните, експлицитно зададени, примери на QC геометрии е доста ограничен. По същество, до момента е известен един единствен общ метод за получаването на такива примери. Той се базира на съществуването на много специфичен клас от Риманови многообразия, наречени (обобщени) 3-Сасакиеви пространства. Това са Риманови многообразия, допускащи специална тройка R_1, R_2, R_3 от Килингови полета, удовлетворяващи някои допълнителни условия (виж Глава 3 от дисертацията за повече подробности). Върху такива многообразия получаваме естествена QC структура, вземайки H да бъде ортогоналното допълнение на R_1, R_2, R_3. До момента не е известен пример на QC многообразие, за който да е доказано, че не може да бъде получен по този начин. Една от основните задачи в представената дисертация е изследването на връзката между 3-Сасакиевите пространства и породените от тях QC геометрии.

Първа глава ("Preliminaries") от дисертацията представлява въведение в темата и има подготвителен характер. Тук се дава мотивация за разглежданите проблеми, дефинират се основните понятия и се прави преглед на известните до момента резултати от областта. Всяка от останалите четири глави на дисертацията е построена върху оригинални резултати, публикувани в четири отделни статии: [**IMV14**], [**IMV16**], [**IMV10**] и [**IMV12**].

Глава 2 е основна в дисертацията. Резултатите получени в нея са публикувани в статията [**IMV14**]. Тук се развиват базисни концепции и методи на QC геометрията и се получават резултати, върху които се гради цялата дисертация. В Теореми A и B на тази глава получаваме частично решение на QC проблема на Ямабе върху кватернионната група на Хайзенберг. В Теорема C се представя резултат свързващ Римановата геометрия на 3-Сасакиевите многообразия с геометрията на QC Айнщайновите структури.

В Глава 3 от дисертацията продължаваме изследванията започнати в предишната глава свързани с геометрията на QC Айнщайновите многообразия. В Теорема D разширяваме резултат, получен в Глава 2 (Теорема 5.9), като го допълваме за най-сложния случай на 7-мерно многообразие, доказвайки, че QC скаларната кривина на всяко QC Айнщайново многообразие е задължително константна. Освен това, в тази глава показваме, че в зависимост от стойността на QC скаларната кривина, QC Айнщайновите многообразия са "по същество" разслоения над кватернионно-Келерови или хипер-Келерови многообразия. Резултатите получени тук са публикувани в [**IMV16**].

В Глава 4 от дисертацията, базирайки се на методите, развити в Глава 2, получаваме пълно решение на проблема на Ямабе върху 7-мерната кватернионна група на Хайзенберг (Теореми E и F). Резултатите в тази глава са публикувани в [**IMV10**].

В Глава 5 от дисертацията определяме най-добрата константа в L^2 неравенството на Фоланд и Щайн върху кватернионната група на Хайзенберг (за всички размерности), както и не отрицателните екстремали на това неравенство. Аргументацията използвана тук е чисто аналитична. Понятието QC скаларна кривина се използва в доказателството, но неговият геометричен смисъл е оставен на заден план. Основната тежест тук пада върху ляво-инвариантния суб-Лапласиан на групата, докато QC скаларната кривина участва като обикновена константа, получена от трансформацията на Кели. Методът на доказателство, използван тук, не дава възможност да бъдат определени всички решения на QC уравнението на Ямабе, а само тези, които минимизират функционала на Ямабе. Поради това, резултатът, получен тук, за размерност 7 е по-слаб от Теорема E на Глава 3. Резултатите от тази глава са публикувани в [IMV12].

Въведение

1. Кватернионно-Келерова геометрия

1.1. Алгебра на кватернионите. По дефиниция алгебрата на кватернионите $\mathbb{H}$ се задава от векторното пространство $\mathbb{R}^4$, в което е въведена асоциативна операция умножение $(z, w) \mapsto zw$, удовлетворяваща аксиомите за лява и дясна дистрибутивност с единичен елемент

$$\mathbf{1} \stackrel{def}{=} (1, 0, 0, 0).$$

Използвайки означенията

$$\mathbf{i} = (0, 1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 0, 1, 0), \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 0, 1),$$

дефинираме умножението на пораждащите елементи чрез формулите (познати още като кватернионни тъждества):

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}.$$

Умножението в $\mathbb{H}$ е некомутативно, но позволява деление на ненулеви елементи, т.е. $\mathbb{H}$ е тяло. Това се вижда лесно, използвайки операцията (кватернионно) спрягане $z \mapsto \bar{z}$ в $\mathbb{H}$, която се дефинира за произволно

$$z = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

чрез формулата

$$\bar{z} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

С директно пресмятане се показва, че

$$\bar{z}z = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |z|^2$$

и че $\overline{zw} = \overline{w}\,\overline{z}$. От тук следва, че обратния елемент z^{-1} за произволно ненулево $z \in H$ се дава от формулата

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

1.2. Кватернионни структури върху векторни пространства. Нека V е $4n$-мерно векторно пространство над реалните числа и нека Q е 3-мерно подпространство на алгебрата на ендоморфизмите на V, $Q \subset End(V)$. Казваме, че Q е *кватернионна структура* върху V, ако съществува базис I_1, I_2, I_3 на Q, удовлетворяващ кватернионните тъждества

$$I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = -id, \qquad I_1 I_2 = -I_2 I_1 = I_3. \tag{1}$$

Всяка кватернионна структура Q върху V притежава канонично скаларно произведение $\langle ., . \rangle$ и ориентация, така че елементите $I \in Q$ с единична дължина са точно тези, за които е изпълнено $I^2 = -id$, а два елемента $I, J \in Q$ са ортогонални спрямо $\langle ., . \rangle$, ако $IJ = -JI$.

Освен това имаме, че три елемента J_1, J_2, J_3 на Q удовлетворяват кватернионните тъждества

$$J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -id, \qquad J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3,$$

тогава и само тогава, когато съответната квадратна матрица 3×3, чрез която J_1, J_2, J_3 се изразяват спрямо базиса I_1, I_2, I_3, се съдържа в $SO(3)$.

1.3. Групата Sp(1). Доколкото $\mathbb{H}$ е некомутативна алгебра (тяло), следва да бъдат различавани левите и десните векторни пространства над $\mathbb{H}$. Всяко такова (ляво или дясно) пространство, ако е крайно мерно, е изоморфно на координатното пространство $\mathbb{H}^n$.

Ще считаме, че е фиксиран (веднъж завинаги) изоморфизъм (на реални векторни пространства) $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$. Дясното умножение с $\mathbb{H}$ дефинира естествена кватернионна структура $Q = span\{I_1, I_2, I_3\}$ върху $\mathbb{R}^{4n}$, за която $I_1(z) = z\bar{i}$, $I_2(z) = z\bar{j}$, $I_3(z) = z\bar{k}$ за всички $z \in \mathbb{H}^n$. Очевидно Q е 3-мерна подалгебра на Ли в $End(\mathbb{R}^{4n})$, която е изоморфна на класическата Ли-алгебра $so(3) = sp(1)$. Следователно Q определя свързана подгрупа G на $\subset GL(4n, \mathbb{R})$, за която лесно се показва, че е в сила представянето

$$G = \{a_0 id + a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I_3 \mid a_s \in \mathbb{R},\ a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\}.$$

Доколкото групата G е видимо едносвързана, тя е задължително изоморфна с класическата група $Sp(1)$. В бъдеще често ще идентифицираме групите G и $Sp(1)$, без да го отбелязваме изрично в текста, като ще имаме предвид така описаната конструкция.

Стандартното Ермитово скаларно произведение в $\mathbb{H}^n$ се въвежда с формулата $\langle \bar{z}, w \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_s \bar{z}_s w_s$, $z, w \in \mathbb{H}^n$. Неговата реална част съвпада със стандартното скаларно произведение в $\mathbb{R}^{4n}$, т.е. $\langle z, w \rangle_{\mathbb{R}} = Re(\langle \bar{z}, w \rangle_{\mathbb{H}})$. Доколкото $Sp(1)$ очевидно запазва формата $\langle \bar{z}, w \rangle_{\mathbb{H}}$, налице е влагането $Sp(1) \subset SO(4n)$.

1.4. Групите GL(n,$\mathbb{H}$) и Sp(n). По дефиниция $GL(n, \mathbb{H})$ се състои от всички неизродени квадратни матрици $n \times n$ над тялото на кватернионите $\mathbb{H}$.

Разглеждайки действието отляво на $GL(n,\mathbb{H})$ върху векторното пространство $\mathbb{H}^n$, елементите на $GL(n,\mathbb{H})$ задават ендоморфизми на $\mathbb{H}^n$ които комутират с умножението отдясно с кватерниони от $\mathbb{H}$. Използвайки фиксирания изоморфизъм $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$ (виж точка 1.3), можем да разглеждаме $GL(n,\mathbb{H})$ като подгрупа на $GL(4n,\mathbb{R})$,

$$GL(n,\mathbb{H}) = \{A \in GL(4n,\mathbb{R}) \mid AJ = JA, J \in Q\}.$$

Нека P е стабилизатора в $GL(n,\mathbb{H})$ на Ермитовата форма $\langle \bar{z}, w\rangle_{\mathbb{H}}$, т.е.

$$P = \{A \in GL(n,\mathbb{H}) \mid \bar{A}^t A = E\} = \{B \in SO(4n) \mid BJ = JB,\ J \in Q\}.$$

Понеже, между P и класическата група на Ли $Sp(n)$, съществува очевиден изоморфизъм, в бъдеще ще отъждествяваме тези две групи. Тук следва да се отбележи, че така въведените означения допускат известна неяснота в случая $n = 1$; доколкото в тази размерност току-що дефинираната група P и дефинираната в Точка 1.3 група G следва да бъдат идентифицирани с $Sp(1)$, въпреки че, на практика, това са две съвсем различни подгрупи на $SO(4)$. Независимо от това, въведената нотация е широко използвана от редица автори и ние ще се придържаме към нея; когато разглеждаме $Sp(1)$ като подгрупа на $SO(4)$ в текста по-долу, винаги ще бъде ясно от контекста коя от двете подгрупи P или G на $SO(4)$ се има предвид.

Следвайки тази уговорка, имаме, че произведенията $Sp(n)Sp(1) \cong Sp(n) \times Sp(1)/\mathbb{Z}_2$ и $GL(n,\mathbb{H})Sp(1)$ отговарят на следните подгрупи на $GL(4n,\mathbb{R})$:

$$Sp(n)Sp(1) = \{A \in SO(4n) \mid A^{-1}JA \in Q,\ J \in Q\}$$

$$GL(n,\mathbb{H})Sp(1) = \{A \in GL(4n,\mathbb{R}) \mid A^{-1}JA \in Q,\ J \in Q\}.$$

1.5. Риманова холономия. Да разгледаме свързано Риманово многообразие (M,g) с размерност m и нека $p \in M$ е произволно фиксирана точка. Групата на холономия на (M,g) в точката p се състои от всички ендоморфизми на $End(T_pM)$, индуцирани чрез паралелен пренос по произволна частично гладка крива с начало и край в p. Рестриктираната група на холономия се дефинира аналогично, като се използват само кривите с начало и край в точката p, който са хомотопно еквивалентни на единица. Последната е винаги свързана група на Ли и може да бъде разглеждана като подгрупа на $SO(m)$ чрез избора на ортонормиран репер на T_pM. Промяната на базовата точка p или на репера на T_pM води до промяна на групата на холономия в $SO(m)$ чрез спрягане.

Извън Римановите произведения и симетричните пространства, броят на възможните подгрупи на $SO(m)$, които могат да бъдат рестриктирани групи на холономия на Риманови многообразия, е много ограничен; съгласно известната теорема на Берже [Ber], това са точно групите от списъка: $SO(m)$,

$U(m/2)$, $SU(m/2)$, $Sp(m/4)Sp(1)$ (в размерност $m \geq 8$); G_2 (в размерност 7); и $Spin(7)$ (в размерност 8).

1.6. Кватернионно-Келерови многообразия. Едно Риманово многообразие (M, g) с размерност $m = 4n \geq 8$ се нарича кватернионно-Келерово (QK) ако групата му на холономия се съдържа в $Sp(n)Sp(1)$. Тази дефиниция е еквивалентна на условието допирателното пространство на M да допуска поточкова кватернионна структура Q, удовлетворяваща $\nabla Q \subset Q$, където ∇ е свързаността на Леви-Чивита на метриката g. Ако $F \to M$ е главно разслоение със структурна група $Sp(n)Sp(1)$ над QK многообразието M, генерирано чрез всевъзможните паралелни преноси на един фиксиран ортогонален репер на многообразието, то поточковата кватернионна структура Q върху допирателното пространство на M представлява векторното разслоение над M, асоциирано с F, съответстващо на присъединеното представяне на групата $Sp(n)Sp(1)$ върху Ли-алгебрата $sp(1)$.

Горната дефиниция на QK многообразие изрично изключва 4-мерния случй. Проблема е в това, че в размерност 4 имаме $SO(4) = Sp(1)Sp(1)$, а многообразията с тази група на холономия са просто Риманови многообразия с фиксирана ориентация. Правилната дефиниция за тази размерност е: Едно 4-мерно Риманово многообразие се нарича кватернионно-Келерово, ако то е Айнщайново и конформно полуплоско. Нека припомним тук, че конформно полуплоски наричаме тези ориентирани Риманови многообразия, чиято конформна кривина удовлетворява $*W = W$ (или $*W = -W$), където $*$ е съответният Ходж-звезда оператор. Интересно е да се отбележи, че исторически 4-мерния случай е бил изследван най-напред (виж [**Pen**, **AHS**]), а получените резултати там са послужили като мотивация за въвеждането на понятието QK многообразие за повисоките размерности.

2. Твисторни пространства

Нека (M, g) а QK многообразие с размерност $4n \geq 4$ и нека $F \to M$ е съответното главно разслоение над M със структурна група $Sp(n)Sp(1)$. Да разгледаме стабилизатора $Sp(n)U(1) \subset Sp(n)Sp(1)$ на фиксиран ендоморфизъм I_1 от инвариантната кватернионна структура Q на $\mathbb{R}^{4n}$. Дефинираме Z като фактор разслоение $F/(Sp(n)U(1))$ на F. Тогава $\pi : Z \to M$ е разслоение над M, чийто слой над всяка точка $p \in M$ е 2-мерна сфера, а всеки елемент I на Z отговаря на ортогонална комплексна структура (която означаваме по същия начин),

$$I : T_pM \to T_pM, \quad I^2 = -1, \quad g(IX, IY) = g(X, Y),$$

където $p = \pi(I)$, а $X, Y \in T_pM$. Слоят $Z_p = \pi^{-1}(p)$ над $p \in M$ се описва като

$$Z_p = \{I \in Q_p \mid I^2 = -id\}.$$

Използвайки свързаността на Леви-Чивита ∇, можем да разложим тангенциалното разслоение на Z в сума на хоризонтална и вертикална компоненти, $TZ = D \oplus V$; вертикалната компонента V е ядрото на диференциала π_* на проекцията $\pi : Z \to M$. Понеже $\pi_* : D_I \to T_pM$ е изоморфизъм на векторни пространства, всеки елемент $I \in Z_p$ може да бъде повдигнат до ендоморфизъм $J'_I : D_I \to D_I$, $(J'_I)^2 = -1$, така че $D \subset TZ$ да се превърне в комплексно векторно разслоение над M, където умножението с $\sqrt{-1}$ се задава от J'. От друга страна всеки слой на π е ориентирана двумерна Риманова сфера и следователно върху вертикалната компонента $V = \ker \pi_*$ на тангенциалното пространство на Z имаме естествен ендоморфизъм $J'' : V \to V$ със свойството $(J'')^2 = -1$. Това ни позволява да дефинираме почти комплексна структура J върху цялото пространство $TZ = D \oplus V$, полагайки $J = J' \oplus J''$. Много важен резултат в геометрията на кватернионно-Келеровите многообразия, получен независимо от Саламон [Sal1] и Берард-Бержери [Brd], е че почти комплексната структура J е винаги интегруема, т.е. че съответния на J тензор на Ньоенхойз се анулира върху Z и следователно (съгласно известната теорема Нюлендър-Ниренберг) Z е комплексно многообразие. Освен това $D \subset TZ$ е холоморфно разпределение върху Z, а проекцията $TZ \to TZ/D$ задава холоморфна едноформа $\Theta \in \Gamma(Z, \Omega^1(\mathcal{L}))$, $\mathcal{L} := TZ/D$, удовлетворяваща $\Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0$, т.е. Θ е холоморфна контактна структура върху Z. Изображението $\sigma : Z \to Z$, което върху всяка сфера $\pi^{-1}(p)$ съвпада с антиподалното изображение $I \mapsto -I$, е анти-холоморфна инволюция ($\sigma^2 = 1$) без неподвижни точки. По дефиниция, твисторното пространство на QK многообразието (M, g) се задава от така конструираната наредена тройка (Z, Θ, σ).

3. Обратна твисторна конструкция

Много важно свойство на по-горе описаната твисторна конструкция е, че тя е обратима [**LeB89**, **PP**, **BE**]. Наистина, нека е дадена наредена тройка (Z, Θ, σ), състояща се от $(2n+1)$-мерно комплексно многообразие Z, холоморфна 1-форма Θ върху Z, приемаща стройности в холоморфно едномерно разслоение $\mathcal{L}$ над Z, и анти-холоморфна инволюция $\sigma : Z \to Z$ без неподвижни точки, съгласувана с контактната структура Θ. Следвайки [**LeB91**], дефинираме M^c като множеството на всички компактни комплексни криви $C \subset Z$ от нулев род (genus zero) с нормално разслоение, изоморфно на $\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^{2n}$. Тук с $\mathcal{O}(k) \to \mathbb{C}P_1,\ k \in \mathbb{Z}$ означаваме едномерното разслоение, чийто клас на Чърн е k. Понеже групата $H^1(\mathbb{C}P_1, \mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^{2n})$ се анулира, съгласно една известна теорема на Кодайра [**Kod**], множеството M^c (ако не е празно) е $4n$-мерно комплексно многообразие, чието тангенциално пространство над произволна точка $C \in M^c$ се дава от $H^0(\mathbb{C}P_1, \mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^{2n}) \cong \mathbb{C}^{4n}$. Подмножеството $M \subset M^c$, състоящо се от всички σ-инвариантни криви $C \in M^c$, е реално аналитично многообразие, съдържащо се в M^c като негово реално сечение (real slice). Съгласно Proposition 1 от [**LeB91**], подмножеството $S^c \subset M^c$, състоящо се от тези криви

$C \in M^c$, който са тангенциални на контактното разпределение $D = \ker(\Theta)$ е (ако не е празно) неизродена комплексна хиперповърхнина на M^c. Освен това множеството S на σ-инвариантите криви $C \in S^c$ е реално сечение на S^c, което също така е и затворена гладка хиперповърхнина на M. Реалното многообразие $M - S$ има естествена псевдо Риманова метрика с холономия $Sp(n-l,l)Sp(1)$, $0 \leq l \leq n$, с ненуева скаларна кривина (виж Theorem 1.3 от [LeB89]) и твисторно пространство (Z, Θ, σ).

Така описаната обратна твисторна конструкция е еднозначна в следния смисъл: Ако (Z, Θ, σ) е твисторно пространство на произволно (друго) QK многообразие N, то N е изометрично на отворено подмножество в $M - S$.

4. Геометрия на граничната повърхнина S

О. Бикар пръв забелязва [Biq], че граничната хиперповърхнината $S \subset M$ (тук използваме означенията от Точка 3) притежава естествена геометрична структура, която той дефинира като кватернионно-контакнта геометрия. Тази структура може да бъде описана по следния начин: За произволна точка $p \in M^c$ нека C_p е съответната компактна комплексна крива в Z. Тогава $C_p \cong \mathbb{C}P_1$ (бихоломорфно) и нормалното разслоение $N_p := TZ/TC_p$ над C_p е изоморфно на $\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^{2n}$. Контактната форма Θ, приемаща стойности в $\mathcal{L}$, задава изоморфизъм

$$\Theta \wedge d\Theta^n : \Lambda^{2n+1}(TZ) \to \mathcal{L}^{n+1}. \tag{2}$$

Рестриктирайки върху кривата C_p, имаме, че

$$TZ|_{C_p} \cong TC_p \oplus N_p,$$

което комбинирано с изоморфизма (2) дава

$$\Lambda^{2n+1}(TZ)|_{C_p} \cong TC_p \otimes \Lambda^{2n} N_p.$$

Понеже $TC_p \cong \mathcal{O}(2)$ и $\Lambda^{2n} N_p \cong \Lambda^{2n}\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(2n)$, получаваме, че

$$(\mathcal{L}|_{C_p})^{n+1} \cong \mathcal{O}(2n+2),$$

от където следва $\mathcal{L}|_{C_p} \cong \mathcal{O}(2)$. Следователно разслоението

$$(T^*C_p) \otimes (\mathcal{L}|_{C_p}) \cong \mathcal{O}(-2) \otimes \mathcal{O}(2)$$

е тривиално над всяка отделна крива C_p. Това разбира се не означава, че съществува глобална тривиализация, валидна за всяка една от кривите C_p, $p \in M^c$, едновременно. За да изследваме този въпрос по-подробно, нека означим с $\mathbb{L}_p$ едномерното пространство от холоморфни сечения на разслоението $(T^*C_p) \otimes (\mathcal{L}|_{C_p}) \to C_p$. Ако положим $\mathbb{L} = \cup_{p \in M^c} \mathbb{L}_p$, то $\mathbb{L}$ е холоморфно 1-мерно разслоение над M^c, а рестрикцията на контактната форма Θ върху тангенциалното пространство TC_p определя холоморфно сечение θ на това разслоение. Тоест глобална тривиализация за разслоенията $(T^*C_p) \otimes (\mathcal{L}|_{C_p}) \to C_p$ съществува, ако се ограничим до област в M^c, върху която θ не приема стойност нула. От друга страна, по дефиниция, точките, върху който θ се анулира, са точно точките на граничната хиперповърхнина $S^c \subset M^c$, за която знаем, че е неизродена от Proposition 1 в [LeB91].

За част от по-нататъшните ни разсъждения, ще имаме нужда (поне формално) от предположението, че от разслоението $\mathcal{L}$ може да бъде извлечено като квадратен корен разслоение $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$. Понеже $\mathcal{L}|_{C_p} \cong \mathcal{O}(2) \cong \mathcal{O}(1)^2$, това предположени е винаги изпълнено, ако разглеждаме достатъчно малка околност на точка от M^c, макар че, дори и в този случай, биха могли да съществуват множество различни (неизоморфни) избора на квадратен корен $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$. Разсъжденията по-долу ще водят до резултат, който в крайна сметка няма да зависи от конкретния избор на $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$, поради което този резултат ще бъде валиден дори и без предположението за глобално съществуване на $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$.

Да разгледаме 2-мерното холоморфно векторно разслоение $\mathcal{H}$ над M^c, чийто слой над всяка точка p е $\mathcal{H}_p = H^0(C_p, \mathcal{L}^{\frac{1}{2}})$ (нека отбележим, че $H^0(C_p, \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}) \cong H^0(\mathbb{C}P_1, \mathcal{O}(1)) \cong \mathbb{C}^2$). Ронскиана W (Wronskian),

$$W : \Lambda^2(\mathcal{H}_p) \to H^0(C_p, T^*C_p \otimes \mathcal{L}) \cong \mathbb{L}_p$$
$$u \wedge v \mapsto u \otimes dv - v \otimes du$$

дефинира неизродена 2-форма върху векторното разслоение $\mathcal{H} \to M^c$, която приема стойности в $\mathbb{L}$. Тоест Ронскиана дефинира $Sp(1,\mathbb{C})$-структура за $\mathcal{H}$, и следователно също $SO(3,\mathbb{C})$-структура за векторното разслоение $Sym^2(\mathcal{H}) \to M^c$ на симетричните 2-тензори върху $\mathcal{H}$. Понеже

$$Sym^2(\mathcal{H}_p) = Sym^2\Big(H^0(C_p, \mathcal{L}^{\frac{1}{2}})\Big) = H^0(C_p, \mathcal{L}),$$

разслоението $Sym^2(\mathcal{H})$ не зависи от избора на квадратен корен $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$ и следователно е добре дефинирано глобално над M^c.

Нека сега $p \in S^c = \theta^{-1}(0)$. Допирателното пространство T_pS^c се задава от $\ker(d\theta) \subset T_pM^c$. Понеже $\Theta(TC_p) = 0$, контактната форма Θ поражда линейно изображение $\eta : H^0(C_p, N_p) \to H^0(C_p, \mathcal{L})$, т.е. линейно изображение $\eta : T_pM^c \to Sym^2(\mathcal{H}_p)$. Рестриктирайки върху $\ker(d\theta)$, получаваме ранг-3 линейно изображение $\eta : T_pS^c \to Sym^2(\mathcal{H}_p)$. Нека $H^c_p \subset T_pS^c$ е ядрото на това изображение. Тогва H^c е холоморфно разпределение с ко-размерност 3 върху хиперповърхнината S^c. Ако вземем локална $SO(3,\mathbb{C})$-инвариантна тривиализация (репрер) на $Sym^2(\mathcal{H}) \cong \mathbb{C}^3$, получаваме тройка η_1, η_2, η_3 от лкални 1-форми върху S^c чрез композицията

$$T_pS^c \to Sym^2(\mathcal{H}_p) \to \mathbb{C}^3.$$

В [**Biq**], III.2.C е показано, че върху H^c съществуа също така неизроден, симетричен, холоморфен 2-тензор g както и тройка от холоморфни ендоморфизми I_1, I_2, I_3 на H^c, удовлетворяващи кватернионните тъждества, така че $d\eta_s(X,Y) = 2g(I_sX,Y),\ X,Y \in H^c,\ s = 1,2,3$. Следователно, ако преминем към реалното сечение (real slice) $S \subset S^c$ (зададено от анти-холоморфната инволюция σ), получаваме, че (S,H) е аналитично кватернионно-контактно многообразие по смисъла на Дефиниция 5.1.

5. QC структури

5.1. Дефиниция и основни свойства. Да разгледаме едно $4n+3$-мерно многообразие M върху което е дадено произволно гладко разпределение H с ко-размерност 3. Да означим с L съответното 3-мерно фактор разслоение, $L = TM/H$, и нека L^* бъде неговото дуално разслоение. Ако $p \in M$ е фиксирана точка, по дефиниция, всеки елементите $\eta \in L^*_p$ е линейно изображения $L_p \to \mathbb{R}$. Ако вземем композицията на η с проекцията $T_pM \to L_p$, получаваме елемент на T^*_pM. Тоест можем да отъждествим

$$L^*_p \cong \{\lambda \in T^*_pM \ :\ \lambda|_H = 0\}, \tag{3}$$

при което сеченията на L^* отговарят на 1-формите на M, които се анулират върху разпределението H.

Дефиниция 5.1. *Кватернионно-контактна структура (QC структура) върху едно $(4n+3)$-мерно $(n \geq 2)$ многообразие M наричаме такова гладко разпределение H с ко-размерност 3 върху M, за което в околност на всяка точка $p \in M$ можем да намерим:*

i) сечения η_1, η_2, η_3 на L^*;

ii) сечения I_1, I_2, I_3 на разслоението $End(H)$, удовлетворяващи кватернионните тъждества

$$I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = -id_H \quad I_1I_2 = -I_2I_1 = I_3;$$

iii) симетрично и положително дефинитно би-линейно сечение g на разслоението $H^* \otimes H^*$,
така че всички тези обекти, взети заедно, да удовлетворяват

$$d\eta_s(X,Y) = 2g(I_sX,Y),\ s = 1,2,3. \tag{4}$$

Всяка група

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, I_1, I_2, I_3, g) \tag{5}$$

от локални сечения, удовлетворяващи условията на горната дефиниция ще наричаме *съгласувано множество* (admissible set) на QC структурата H. 1-формата $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, приемаща стойности в $\mathbb{R}^3$, ще наричаме *контактна форма*. Нито контактната форма η, нито съгласуваното множество $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, I_1, I_2, I_3, g)$ (което често ще съкращаваме до (η_s, I_s, g)) са еднозначно определени от QC структурата H. Всъщност, в сила е следната

Лема 5.2. *Нека (η_s, I_s, g) и (η'_s, I'_s, g') са две съгласувани множества за една и съща QC структура H върху M, дефинирани върху отворено подмножество $U \subset M$. Тогава можем да намерим положителна реална функция $f : U \to R$ и друга матрично-значна функция $\mathcal{A} = (a_{ij}) : U \to SO(3)$, така че*

$$(I'_1, I'_2, I'_3) = (I_1, I_2, I_3)\mathcal{A}, \quad (\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3) = f(\eta_1, \eta_2, \eta_3)\mathcal{A}, \quad g' = f\, g.$$

Доказателство. По предположение, $H = \cap_{i=1}^3 \eta_i = \cap_{i=1}^3 \eta'_i$. Следователно съществува матрично-значна функция $\mathcal{B} = (b_{ij}) : U \to GL(3)$, за която $\eta'_s = \sum_{t=1}^3 b_{st}\eta_t$, $s = 1, 2, 3$. Диференцирайки последното равенство, получаваме

$$(d\eta'_s)|_H = \sum_t b_{st}(d\eta_t)|_H. \tag{6}$$

Да изберем едно симетрично и положително дефинитно сечение h на $H^* \otimes H^*$, което ще използваме като "предварителна" метрика върху H. Спрямо тази метрика, можем да интерпретираме рестрикциите на 2-формите $(d\eta'_s)|_H$ върху H като ендоморфизми върху H, т.е. като сечения на $End(H) = H^* \otimes H$. Тази идентификация зависи от избора на h. Въпреки това, не е трудно да се забележи, че композицията на два такива ендоморфизма във вида $((d\eta'_s)|_H)^{-1} \circ (d\eta'_t)|_H$, е ендоморфизъм, който не зависи от избора на h. За произволна циклична пермутация (i, j, k) на $(1, 2, 3)$ и за $h = g'$ имаме

$$((d\eta'_j)|_H)^{-1} \circ (d\eta'_i)|_H = I'_k. \tag{7}$$

Това уравнение важи за всеки избор на "предварителната" метрика h върху H, в частност и за $h = g$. Използвайки 6, получаваме, че

$$I'_k \; = \; ((d\eta'_j)|_H)^{-1} \circ (d\eta'_i)|_H \; \in \; \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \, \{id_H, I_1, I_2, I_3\}.$$

Да отбележим, че $\mathrm{span}_{\mathbb{R}} \, \{id_H, I_1, I_2, I_3\} \subset End(H)$ е алгебра спрямо обичайното умножение на ендоморфизми, която е изоморфна на алгебрата на кватернионите $\mathbb{H} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \, \{1, i, j, k\}$. Понеже единствените елементи на $\mathbb{H}$ с квадрат -1, са единичните елементи от $Im(\mathbb{H})$, получаваме, че $I'_s \in \mathrm{span}\{I_1, I_2, I_3\}$ и от тук

$$\mathrm{span}_{\mathbb{R}} \, \{I_1, I_2, I_3\} \; = \; \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \, \{I'_1, I'_2, I'_3\}.$$

Отъждествявайки все още $H^* \otimes H$ и $End(H)$, чрез $h = g$, и имайки предвид, че g е I_s- и I'_s-съгласувана, забелязваме, че всеки от ендоморфизмите $(d\eta'_k)_H$ антикомутира с I'_i и I'_j. Следователно, като ендоморфизъм, $(d\eta'_k)_H$ е пропорционален на I'_k, и затова $g' = f\, g$ за $f > 0$. Това, че матрично-значната функция

$$\mathcal{A} \stackrel{def}{=} \frac{1}{f}\mathcal{B}$$

приема стойности в $SO(3)$, следва от условието, че и двете тройки (I_1, I_2, I_3) и (I'_1, I'_2, I'_3) удовлетворяват кватернионните тъждества. $\square$

Да отбележим, че горната лема описва едно много специфично свойство на QC геометрията (това е по принцип добре известен факт, който доказваме тук само с цел пълнота на изложението), което контрастира рязко със ситуацията в CR случая. От тази лема следва, че към всяко QC многообразие (M, H) могат да бъдат естествено асоциирани следните (глобално дефинирани) обекти:

i) Имаме естествено 3-мерно разслоение

$$Q = \operatorname{span}\{I_1, I_2, I_3\} \subset End(H)$$

над M, което наричаме *кватернионна структура* върху H. Да отбележим, че върху Q имаме канонично скаларно произведение $\langle .,. \rangle$ и ориентация, такива че за всяко съгласувано множество (5), басиса I_1, I_2, I_3 на Q е ортонормиран и ориентиран.

ii) Имаме каноничен конформен клас $[g]$ от симетрични и положително дефинитни сечения на $H^* \otimes H^*$. Използвайки "разлагане на единицата" и съответната стандартна аргументация, получаваме, че в конформния клас $[g]$ винаги може да бъде избрано глобално положително дефинитно сечение, което ще наричаме просто *метрика* върху контактното разпределение H.

iii) Разслоението L^* притежава канонична $CSO(3)$ структура (т.е. ориентирана конформна структура), така че за всяко съгласувано множество (5) базиса η_1, η_2, η_3 е ортогонален и ориентиран.

5.2. Кватернионно-контактни структури в размерност 7. За $n = 1$ условията на Дефиниция 5.1 се оказват недостатъчно силни и се налага въвеждането на допълните изисквания за получаването на адекватна дефиниция.

За да изясним по-точно проблема с Дефиниция 5.1 при $n = 1$, да разгледаме ориентирано 4-мерно разпределение върху 7-мерно многообразие M. Да изберем форма на обема ϵ върху H—тук под форма на обема разбираме глобално дефинирано, неанулиращо се сечение ϵ на разслоението $\Lambda^4(H^*)$ над M. Понеже за всеки две $\phi, \psi \in \Lambda^2(H^*)$, външното произведение $\phi \wedge \psi$ е пропорционално на ϵ, можем да дефинираме би-линейна симетрична 2-форма B върху $\Lambda^2(H^*)$ чрез уравнението $\phi \wedge \psi = B(\phi, \psi)\epsilon$. Формата B е неизродена, има сигнатура $(3, 3)$ и дефинира скаларно произведение върху разслоението $\Lambda^2(H^*)$ над M. За произволен локален базис η_1, η_2, η_3 на L^* (където $L = TM/H$), да разгледаме поточково подпространството

$$\Gamma = span\{(d\eta_1)_H, (d\eta_2)_H, (d\eta_3)_H\} \subset \Lambda^2(H^*).$$

Лесно се забелязва, че Γ зависи само от разпределението H, но не и от конкретния избор на базиса η_1, η_2, η_3. Оттук бързо получаваме, че разпределението H удовлетворява условията на Дефиниция 5.1 (с изключение на условието $n \geq 2$) тогава и само тогава, когато Γ е 3-мерно във всяка точка на M (т.е. когато Γ е неизродено разпределение) и рестрикцията на B върху Γ е положително или отрицателно дефинитна. Ясно е, че последните две условия са отворени в смисъл, че те задават отворено подмножество в множеството от всевъзможните разпределения на M (спрямо подходяща топология), което прави Дефиниция 5.1 твърде обща за тази размерност.

Както е показано в [**D1**], за размерност 7 е подходящо към Дефиниция 5.1 да бъде добавено допълнително условие, а именно условието за съществуване на векторни полета на Рийб, което обясняваме подробно по-долу.

5.3. Съществуване на векторни полета на Рийб. Да предположим че H е $4n$-мерно разпределение върху $(4n + 3)$-мерно многообразие M, което удовлетворява всички условия на Дефиниция 5.1 с изключение на $n \geq 2$, тоест тук допускаме също и случая $dim(M) = 7$.

Нека фиксираме едно съгласувано множество (η_s, I_s, g) за H. Ако V е произволно допълнение на H, тоест разпределение, за което

$$TM = H \oplus V,$$

то съществува единствен базис (ξ_1, ξ_2, ξ_3) на V, който е дуален на $(\eta_1|_V, \eta_2|_V, \eta_3|_V)$.

За нас тук ще бъде важно да изясним при какви условия можем да намерим специално допълнение $\bar{V}$ на H, за което съответният дуален базис $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ удовлетворява допълнителното условие

$$d\eta_s(\bar{\xi}_t, X) = -d\eta_t(\bar{\xi}_s, X) \quad s, t = 1, 2, 3, \;\; X \in H. \tag{8}$$

Ако такова допълнение $\bar{V}$ съществува, то ще наричаме $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ *полета на Рийб* за контактната форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$.

Следвайки изложението в [**Biq**], да разгледаме 3×3-матрицатата $(a_{st})_{3\times 3}$ от елементи на H^*,

$$a_{st} = d\eta_s(\xi_t, .) + d\eta_t(\xi_s, .), \quad s, t = 1, 2, 3,$$

определена спрямо началното (произволно) допълнение V на H. Тази матрица може да бъде интерпретирана като сечение на векторното разслоение $Q \otimes Q \otimes H^*$

над M, чрез формулата

$$\sum_{s,t=1}^{3} I_s \otimes I_t \otimes a_{st}. \tag{9}$$

Ясно е, че, сечението (9) остава непроменено при ротация (т.е. под действието на $SO(3)$) на съгласуваното множество (η_s, I_s) и затова това сечение зависи само от избора на допълнението V. Така проблемът за намирането на дуален базис, удовлетворяващ (8), се оказва еквивалентен на това да се намери допълнение $\bar{V}$, за което асоциираното сечение

$$\sum I_s \otimes I_t \otimes \bar{a}_{st} \tag{10}$$

на $Q \otimes Q \otimes H^*$ се анулира.

Понеже матрицата a_{st} е симетрична по дефиниция, имаме, че (10) всъщност е сечение на разслоението $Q \odot Q \otimes H^*$, където с $Q \odot Q$ означаваме симетричната компонента на $Q \otimes Q$. Разслоението $Q \odot Q \otimes H^*$ се разлага в директна сума на три неприводими компоненти под действието на групата $Sp(n)Sp(1)$. Използвайки стандартните означения за неприводимите представяния на $Sp(n)Sp(1)$, имаме, че

$$Q \odot Q \otimes H^* = [\lambda^1\sigma^5] \oplus [\lambda^1\sigma^3] \oplus [\lambda^1\sigma^1].$$

От особен интерес за нас ще бъде компонентата $[\lambda^1\sigma^5]$, която се определя експлицитно от

$$[\lambda^1\sigma^5] = \Big\{ \sum_{st} I_s \otimes I_t \otimes x_{st} \in Q \otimes Q \otimes H^* \ :\ x_{st} = x_{ts},\ \sum_t I_t x_{st} = 0 \Big\}.$$

Другите две компоненти могат да бъдат описани по подобен начин:

$$[\lambda^1\sigma^3] = \Big\{ \sum_{st} I_s \otimes I_t \otimes (I_s y_t + I_t y_s) \in Q \otimes Q \otimes H^* \ :\ y_s \in H^*,\ \sum_s I_s y_s = 0 \Big\},$$

$$[\lambda^1\sigma^1] = \Big\{ \sum_{st} I_s \otimes I_t \otimes (\delta_{st} y) \in Q \otimes Q \otimes H^* \ :\ y \in H^* \Big\}.$$

Ако $\sum I_s \otimes I_t \otimes b_{st}$ е $[\lambda^1\sigma^5]$-компонентата на (произволно) сечение $\sum I_s \otimes I_t \otimes a_{st}$ на $Q \odot Q \otimes H^*$, то

$$b_{st} = a_{st} + \frac{1}{5} \sum_{r=1}^{3} (I_s I_r a_{tr} + I_t I_r a_{sr} - \delta_{st} a_{rr}).$$

Използвайки някой прости методи от теория на представянията или чрез директно пресмятане, може да се покаже, че $[\lambda^1\sigma^5]$-компонентата $\sum I_s \otimes I_t \otimes b_{st}$ на практика не зависи от избора на допълнение V, т.е. това е обект, който характеризира QC структурата като цяло.

Твърдение 5.3. *За да съществува допълнение $\bar{V}$ на H, за което асоциираният дуален базис $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ удовлетворява (8), е необходимо и достатъчно $[\lambda^1\sigma^5]$-компонентата $\sum I_s \otimes I_t \otimes b_{st}$ за някое (а следователно и за всяко) допълнение V да се анулира.*

Доказателство. Наистина, нека предположим, че $b_{st} = 0$ $s,t = 1,2,3$ за дадено допълнение V, чийто асоцииран дуален базис е (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Ако дефинираме три векторни полета $r_1, r_2, r_3 \in H$ чрез формулата

$$g(r_s, X) = -\frac{1}{5}\sum_p (I_p a_{sp} + \frac{1}{2} I_s a_{pp})(X), \;\; s = 1,2,3, \;\; X \in H,$$

то дуалния базис $\bar{\xi}_s = \xi_s - \frac{1}{2} r_s$ притежава нужните свойства (8). □

В [Biq] е показано, че ако $\dim(M) > 7$, то $[\lambda^1\sigma^5]$-компонентата $\sum I_\alpha \otimes I_\beta \otimes b_{\alpha\beta}$ се анулира винаги (без никакви допълнителни условия за QC структурата H) и полетата на Рийб съществуват.

Ако размерността е 7, обаче, $[\lambda^1\sigma^5]$-компонентата $\sum I_s \otimes I_t \otimes b_{st}$ не се анулира в общия случай и съществуват примери на разпределения в тази размерност, които удовлетворяват всички условия на Дефиниция 5.1 (с изключение на $n \geq 2$), за които не съществуват полета на Рийб (виж [D1]).

5.4. Специална уговорка за размерност 7. Ако размерността на многообразието M е 7, ще казваме, че едно 4-мерно разпределение H върху M е QC структура, ако освен условията на Дефиниция 5.1 е изпълнено и допълнителното предположение, че $[\lambda^1\sigma^5]$-компонентата $\sum I_s \otimes I_t \otimes b_{st}$ (виж Подточка 5.3) за някое (и следователно за всяко) допълнение V на H се анулира, т.е. че съществуването на полета на Рийб е гарантирано.

5.5. Свързаността на Бикар. Нека (M^{4n+3}, H) е кватернионно-контактно многообразие и нека (η_s, I_s, g) е съгласувано множество за H. Както е обяснено в точка 5.1, контактната форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ от допустимото множество е определена с точност до конформен фактор и трансформация с матрица от $SO(3)$. Разпределението H има каноничен конформен клас $[g]$ от метрики и 3-мерно разслоение Q от ендоморфизми (кватернионната структура на H). Съгласно Лема 5.2, възможно най-общата трансформация на η има вида $\bar{\eta} = \mu\Psi \cdot \eta$, където μ е положителна функция, а Ψ е $SO(3)$-значна функция. Такива трансформации наричаме кватернионно-контактно конформни (QC конформни). Ако функцията μ е константа, казваме, че трансформацията е QC хомотетия. Контактните форми $\bar{\eta}$, който получаваме чрез QC хомотетии от η, са точно тези който получаваме от съгласуваните множества, при който метриката $\bar{g}$ е пропорционална (с константен фактор) на g.

Ако е фиксирана глобална положително дефинитна метрика g върху H (от класа $[g]$), казваме, че (M, H, g) е QC метрично многообразие. За всяко такова глобално g съществува еднозначно определена линейна свързаност ∇ върху M ([Biq]), която наричаме свързаност на Бикар. Тази свързаност е инвариантна при QC хомотетии на η, но се променя по нетривиален начин при QC конформни трансформации. Ако следваме аналогията с конформната Риманова геометрия, свързаността на Бикар следва да се разглежда като аналог на свързаността на Леви-Чивита.

Накратко, свързаността на Бикар може да бъде конструирана по следния начин (за повече подробност виж [Biq]): Да започнем с произволно разпределение $H \subset TM$ върху M и произволно векторно разслоение E над M. Частична свързаност (partial connection) върху E по направление на H представлява (по дефиниция) би-линейно изображение $\nabla_X \sigma$, дефинирано за векторни полета X със стойност в H и сечения σ на E, така че $\nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma$ и $\nabla_X(f\sigma) = X(f)\sigma + f\nabla_X\sigma$ за всяка гладка функция f върху M.

Ако g е метрика върху H, то (както е показано в [Biq, Lemma II.1.1]) за всяко допълнение V на H във TM съществува еднозначно определена частична свързаност ∇ върху H по направление на H, така че

- (i) $\nabla_X g = 0, \quad X \in H$;
- (ii) за всеки две сечения X, Y на H, торзията $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ удовлетворява $T(X,Y) = -[X,Y]_V$.

Нека (M, H, g) е QC метрично многообразие и нека (η_s, I_s) е съгласувано множество с полета на Рийб ξ_1, ξ_2, ξ_3. С V означаваме линейната обвивка на ξ_1, ξ_2, ξ_3. Всеки ендоморфизъм f на H се продължава естествено до ендоморфизъм на TM, полагайки $f(\xi) = 0,\ \xi \in V$. С тази уговорка, ще разглеждаме и $\{I_1, I_2, I_3\}$ като ендоморфизми на тангенциалното разслоение TM. Дефинираме фундаменталните 2-форми $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ с формулата

$$\omega_s(A,B) = g(I_sA, (B)_H),\ \ A, B \in TM,\ \ s = 1,2,3, \tag{11}$$

От Дефиниция 5.1 следва, че

$$\omega_s(A,B) = \begin{cases} \frac{1}{2}d\eta_s(A,B), & A, B \in H \\ 0, & A \in V,\ B \in TM \end{cases} \qquad \text{за} \ \ s = 1,2,3. \tag{12}$$

.

Нека ∇ е частичната свързаност върху H по направление на H, която съответства на фиксираното допълнение V. Тогава, съгласно [Biq, Proposition II.1.7], тази частична свързаност запазва $Q \subset End(H)$, т.е. имаме, че

(iii) $\nabla_X Q \subset Q,\ X \in H$.

С други думи, за всяка циклична пермутация (i,j,k) на $(1,2,3)$ и за всяко $X \in H$ са в сила равенствата

$$\nabla_X \omega_i = -\alpha_j(X)\omega_k + \alpha_k(X)\omega_j; \qquad (13)$$
$$\nabla_X I_i = -\alpha_j(X) I_k + \alpha_k(X) I_j,$$

където $\alpha_i(X) \overset{def}{=} d\eta_k(\xi_j, X)$.

Върху разслоението V над M имаме естествено скаларно произведение $\langle .,. \rangle$, спрямо което базиса от Рийб полета ξ_1, ξ_2, ξ_3 е ортонормиран. За всяко сечение ξ на V и всяко X от H, дефинираме

$$\nabla_X \xi = [X, \xi]_V.$$

Съгласно [Biq, Proposition II.1.9], горната формула задава частична свързаност върху V по направление на H, спрямо която скаларното произведение на V е инвариантно, $\nabla\langle .,. \rangle = 0$.

Естественото съответствие

$$\xi_s \to I_s, \quad s = 1,2,3, \qquad (14)$$

определя изоморфизъм на векторни разслоения $\varphi : V \to Q$ със свойството

(iv) $\nabla_X \varphi = 0$ за всяко $X \in H$.

Наистина, съгласно (13), имаме, че

$$\nabla_X(\varphi(\xi_t)) = \nabla_X I_t = -\sum_{s=1}^3 d\eta_t(\xi_s, X) I_s = \sum_{s=1}^3 d\eta_s(\xi_t, X) I_s = \sum_{s=1}^3 \eta_s([X, \xi_t]_V) I_s = \sum_{s=1}^3 \eta_s(\nabla_X \xi_t)\varphi(\xi_s) = \varphi(\nabla_X \xi_t)$$

Нека

$$P = \{A \in End(H) \mid A \text{ е косо-симетричен и } AI = IA \text{ за всяко } I \in Q\}.$$

Тогава P е подразслоение на $End(H)$ от ранг $2n^2+n$, което е ортогонално на Q и за което комутатора $[A_1, A_2]$ на всеки два ендоморфизма $A_1, A_2 \in P$ принадлежи също на P. Всеки слой на P (респективно на Q) е канонично изоморфен на Ли алгебрата $sp(n)$ (респективно $sp(1)$).

Съгласно [Biq, Lemma II.2.1] съществува единствена частична свързаност ∇ върху H по направление на V, за която

(v) $\nabla_\xi g = 0, \quad \xi \in H;$
(vi) $\nabla_\xi Q \subset Q, \quad \xi \in H;$
(vii) полагайки $T(\xi, X) = \nabla_\xi X - \nabla_X \xi - [\xi, X]$ за $\xi \in V$ и $X \in H$, всеки ендоморфизъм

$$T_\xi : H \in X \to T(\xi, X) = \nabla_\xi X - [\xi, X]_H \in H$$

е елемент на $(P \oplus Q)^{\perp} \subset End(H)$.

Да отбележим, че е налице изоморфизъм на векторни разслоения $\{(P \oplus Q)^{\perp} \subset End(H)\} \cong \{(sp(n) \oplus sp(1))^{\perp} \subset gl(4n)\}$.

Понеже $\nabla_{\xi} Q \subset Q$ за всяко $\xi \in V$, можем да прехвърлим ∇_{ξ} от Q към V чрез изоморфизма $\varphi : V \to Q$. По този начин получаваме частична свързаност върху V по направление на V със свойството

$(viii)$ $\nabla_{\xi} \varphi = 0, \quad \xi \in Q.$

Комбинирайки по-горе дефинираните частични свързаности в една линейна свързаност ∇ върху TM, получаваме свързаността на Бикар, която удовлетворява свойствата (i)-$(viii)$. Свързаността на Бикар е еднозначно определена с тези свойства.

Скаларното произведение върху разслоението V и метриката g на H задават метрика върху тангенциалното разслоение $TM = H \oplus V$, спрямо която H и V са ортогонални едно на друго. Тази метрика върху TM ще означаваме също с g и за нея знаем, че тя е паралелна спрямо свързаността на Бикар, $\nabla g = 0$.

Обобщавайки по-горните разсъждения, получаваме следния резултат, доказан за първи път от О. Бикар:

Теорема 5.4. [Biq] *Нека (M, H, g) е кватернионно-контактно метрично многообразие с размерност $4n + 3 \geq 7$. Съществува единствена свързаност ∇ (свързаността на Бикар) с торзия T върху M и единствено допълнение V на H в TM, такива че:*

i) ∇ запазва разлагането $H \oplus V$ и метриката g върху TM;
ii) за всеки $X, Y \in H$, имаме $T(X, Y) = -[X, Y]_{|V}$;
iii) ∇ запазва $Sp(n)Sp(1)$-структурата на H, т.е. $\nabla g = 0$ и $\nabla Q \subset Q$;
iv) за всяко $\xi \in V$, ендоморфизма $T(\xi, .)_{|H}$ на H принадлежи на $(sp(n) \oplus sp(1))^{\perp} \subset gl(4n)$;
v) върху V свързаността е индуцирана от естествената идентификация φ на V с подпространството $sp(1)$ от ендоморфизми на H, т.е. $\nabla \varphi = 0$.

5.6. Свойства на свързаността на Бикар. Всеки ендоморфизъм Ψ на H може да се разложи, спрямо дадено съгласувано множество (η_s, I_s), в сума на четири компоненти

$$\Psi = \Psi^{+++} + \Psi^{+--} + \Psi^{-+-} + \Psi^{--+},$$

където Ψ^{+++} комутира и с трите ендоморфизма I_i, Ψ^{+--} комутира с I_1 и антикомутира с останалите два и т.н. (това ще наричаме $Sp(n)$-инвариантно разлагане на ендоморфизма Ψ). Експлицитно,

$$4\Psi^{+++} = \Psi - I_1 \Psi I_1 - I_2 \Psi I_2 - I_3 \Psi I_3, \quad 4\Psi^{+--} = \Psi - I_1 \Psi I_1 + I_2 \Psi I_2 + I_3 \Psi I_3,$$

$$4\Psi^{-+-} = \Psi + I_1 \Psi I_1 - I_2 \Psi I_2 + I_3 \Psi I_3, \quad 4\Psi^{--+} = \Psi + I_1 \Psi I_1 + I_2 \Psi I_2 - I_3 \Psi I_3.$$

Спрямо действието на $Sp(n)Sp(1)$, Ψ се разлага инвариантно в сума от две компоненти $\Psi_{[3]}$ и $\Psi_{[-1]}$, определени с

$$\Psi_{[3]} = \Psi^{+++}, \qquad \Psi_{[-1]} = \Psi^{+--} + \Psi^{-+-} + \Psi^{--+}. \tag{15}$$

Всъщност тези две $Sp(n)Sp(1)$-инвариантни компоненти представляват ортогоналните проекции на Ψ върху собствените подпространства на оператора на Казимир

$$\dagger \ = \ I_1 \otimes I_1 \ + \ I_2 \otimes I_2 \ + \ I_3 \otimes I_3, \tag{16}$$

чиито собствени стойности са точно 3 -1, виж [CSal]. Ако $n = 1$, пространството на симетричните ендоморфизми, комутиращи с трите структури $I_i, i = 1, 2, 3$, е едномерно, т.е. [3]-компонентата на всеки симетричен ендоморфизъм Ψ на H е пропорционална на идентитета, $\Psi_{[3]} = \frac{tr(\Psi)}{4} Id_{|H}$.

Нека $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ са Рийб полетата за дадено съгласувано множество (η_s, I_s). Рестрикцията на торзията на свързаността на Бикар върху вертикалното пространство V (V е линейната обвивка на Рийб полетата) удовлетворява (виж [Biq])

$$T(\xi_i, \xi_j) = \lambda \xi_k - [\xi_i, \xi_j]_{|H}, \tag{17}$$

където λ е гладка функция върху M, която, както е показано в Глава 2 от дисертацията, се изразява със скаларната кривина на свързаността на Бикар. Тук (i, j, k) е циклична пермутация на $1, 2, 3$. Важна част от свойствата на торзията на свързаността на Бикар се определя от ендоморфизмите

$$T_\xi = T(\xi, .) : H \to H, \quad \xi \in V.$$

Разлагайки ендоморфизма $T_\xi \in (sp(n) + sp(1))^\perp$ в сума на симетрична, T^0_ξ, и косо-симетрична, b_ξ, компоненти,

$$T_\xi = T^0_\xi + b_\xi,$$

можем да обобщим описанието на торзията дадено от Бикар по следния начин:

Твърдение 5.5. [Biq] *Торзията T_ξ е напълно безследна,*

$$trT_\xi = \sum_{a=1}^{4n} g(T_\xi(e_a), e_a) = 0, \quad trT_\xi \circ I = \sum_{a=1}^{4n} g(T_\xi(e_a), Ie_a) = 0, \quad I \in Q, \tag{18}$$

където $e_1 \dots e_{4n}$ е ортонормиран базис на H. Симетричната компонента на торзията притежава свойствата:

$$T^0_{\xi_i} I_i = -I_i T^0_{\xi_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{19}$$

Имаме още, че

$$I_2(T^0_{\xi_2})^{+--} = I_1(T^0_{\xi_1})^{-+-}, \qquad I_3(T^0_{\xi_3})^{-+-} = I_2(T^0_{\xi_2})^{--+},$$
$$I_1(T^0_{\xi_1})^{--+} = I_3(T^0_{\xi_3})^{+--}. \tag{20}$$

Косо-симетричната компонента може да бъде представена като

$$b_{\xi_i} = I_i u, \quad i = 1,2,3, \tag{21}$$

където u е безследен и симетричен (1,1)-тензор на H, който комутира с I_1, I_2, I_3.

Ако $n = 1$, тензора u се анулира и $T_\xi = T^0_\xi$.

Нека $R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ е тензора на кривина на свързаността на Бикар. QC кривината на Ричи Ric, QC Ричи формите ρ_s и QC скаларната кривина $Scal$ се дефинират както следва:

$$Ric(A,B) = \sum_{a,b=1}^{4n} g(R(e_b,A)B,e_b), \; A,B \in TM,$$

$$\rho_s(A,B) = \frac{1}{4n}\sum_{a=1}^{4n} g(R(A,B)e_a, I_s e_a), \quad Scal = \sum_{a,b=1}^{4n} g(R(e_b,e_a)e_a,e_b),$$

където $e_1, ..., e_{4n}$ ортонормиран базис на H. Рестрикцията на кривината на Ричи Ric върху H е симетричен 2-тензор ([**Biq**]).

6. Кватернионна група на Хайзенберг

Базов пример на QC многообразие дава от кватернионната група на Хайзенберг $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$, която може да бъде дефинирана като

$$\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}) = \mathbb{H}^n \times \mathrm{Im}\mathbb{H} \quad (n \geq 1),$$

където груповото умножение "$\circ$" се задава с правилото

$$(q', \omega') = (q_o, \omega_o) \circ (q, \omega) = (q_o + q, \omega + \omega_o + 2\,\mathrm{Im}\; q_o\,\bar{q}),$$

за $q,\; q_o \in \mathbb{H}^n$ и $\omega, \omega_o \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$.

В локални координати, използвайки очевидните означения, задаваме хоризонтално разпределение H върху $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$ като линейна обвивка на следните ляво-инвариантни векторни полета $T_\alpha, X_\alpha = I_1 T_\alpha, Y_\alpha = I_2 T_\alpha, Z_\alpha = I_3 T_\alpha, \alpha = 1\dots,n,$

дефинирани с

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \partial_{t_\alpha} + 2x^\alpha\partial_x + 2y^\alpha\partial_y + 2z^\alpha\partial_z \qquad & X_\alpha &= \partial_{x_\alpha} - 2t^\alpha\partial_x - 2z^\alpha\partial_y + 2y^\alpha\partial_z \\ Y_\alpha &= \partial_{y_\alpha} + 2z^\alpha\partial_x - 2t^\alpha\partial_y - 2x^\alpha\partial_z \qquad & Z_\alpha &= \partial_{z_\alpha} - 2y^\alpha\partial_x + 2x^\alpha\partial_y - 2t^\alpha\partial_z\,. \end{aligned}$$

Централните (вертикални) ляво-инвариантни полета ξ_1, ξ_2, ξ_3 се определят от

$$\xi_1 = 2\partial_x \quad \xi_2 = 2\partial_y \quad \xi_3 = 2\partial_z\,.$$

В сила са следните формули за комутаторите

$$[I_j T_\alpha, T_\alpha] \;=\; 2\xi_j \qquad [I_j T_\alpha, I_i T_\alpha] \;=\; 2\xi_k, \tag{22}$$

където (i, j, k) е циклична пермутация на $(1, 2, 3)$.

В локални координати $(q', \omega) \subset \boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$, стандартната 3-контактна форма $\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}_1,\ \tilde{\Theta}_2,\ \tilde{\Theta}_3)$ се дефинира като

$$2\tilde{\Theta} \;=\; d\omega \;-\; q' \cdot d\bar{q}' \;+\; dq' \cdot \bar{q}'. \tag{23}$$

Ядрото на $\tilde{\Theta}$ съвпада с хоризонталното разпределение H върху $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$, за което лесно се проверява, че удовлетворява Дефиниция 5.1 и така задава QC структура върху $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$. Понеже H и $\tilde{\Theta}$ са ляво-инвариантни, те са паралелни спрямо естествената ляво-инвариантна (плоска) свързаност върху групата $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$. Нека g е ляво-инвариантната метрика на H, определена от $\tilde{\Theta}$. Тогава, централните векторни полета ξ_1, ξ_2, ξ_3 съвпадат с полетата на Рийб на QC структурата (виж 5.3). Линейната обвивка V на полетата на Рийб е също така ляво-инвариантно разпределение върху $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$ и имаме $T\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}) = H \oplus V$. Лесно се забелязва, че ляво-инвариантната (плоска) свързаност съвпада със свързаността на Бикар за метричната QC структура $(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}), H, g)$.

Транслациите $\tau_{(q_o,\omega_o)}$ върху $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$, изобразяващи (q, ω) в $(q{+}q_o, \omega{+}\omega_o)$, както и дилатациите δ_λ, $\lambda > 0$, дефинирани чрез $\delta_\lambda\,(q, \omega) = (\lambda q, \lambda^2\omega)$, са преобразования на групата, които запазват разпределението H. Такива преобразувания наричаме конформни QC автоморфизми на групата. Ако $u(q, \omega)$ е произволна функция върху групата, то под действието на транслациите и дилатациите тя се преобразува в нова функция, чрез формулите:

$$\tau_{(q_o,\omega_o)}\bar{u}\ (q, \omega) \;\stackrel{def}{=}\; \bar{u}(q_o + q, \omega + \omega_o), \tag{24}$$

$$u_\lambda \;\stackrel{def}{=}\; \lambda^{(n_h-2)/2}\; u \circ \delta_\lambda, \tag{25}$$

където $n_h = 4n + 6$ е хомогенната размерност на групата.

Често ще отъждествяваме $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$ с границата Σ на Сигел-област в $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}$,

$$\Sigma \;=\; \{(q', p') \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{H} \;:\; \mathrm{Re}\; p' \;=\; |q'|^2\},$$

чрез съответствието $(q', \omega) \mapsto (q', |q'|^2 - \omega)$. Понеже

$$dp' \;=\; q' \cdot d\bar{q}' \;+\; dq' \cdot \bar{q}' \;-\; d\omega,$$

при това отъждествяване на $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$ и Σ имаме, че

$$2\tilde{\Theta} \;=\; -dp' \;+\; 2dq' \cdot \bar{q}'.$$

Вземайки предвид, че $\tilde{\Theta}$ приема само чисто имагинерни стойност, последното равенство може да се запише по еквивалентен начин като

$$4\,\tilde{\Theta} \;=\; (d\bar{p}' \;-\; dp') \;+\; 2dq' \cdot \bar{q}' \;-\; 2q' \cdot d\bar{q}'.$$

6.1. Неравенство на Фоланд и Щайн. Нека dH е естествената ляво-инвариантна мярка върху кватернионната Хайзенберг група $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$. Имаме следния важен резултат, получен от Фоланд и Щайн [**FS74**], който следва да се разглежда като аналог на неравенството на Соболев за $\mathbb{R}^n$:

Теорема 6.1 (Фоланд-Щайн). *Съществува константа $S > 0$, такава че за всяко $u \in C_o^\infty$ (т.е. за всяка гладка функция и с компактен носител върху $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$) е в сила неравенството*

$$\left(\int_{\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})} |u|^{2^*}\, dH \right)^{1/2^*} \;\leq\; S\, \left(\int_{\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})} |(\nabla u)_H|^2\, dH \right)^{1/2}, \tag{26}$$

където с $(\nabla u)_H$ означаваме H-компонентата на градиента на u спрямо разлагането $T\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}) = H \oplus V$, а 2^* е числото $\frac{2n_h}{n_h - 2}$, където $n_h = 4n + 6$ е така наречената хомогенна размерност на групата.

Този резултат повдига следния естествен въпрос относно оптималността на неравенство, известен като проблем на Ямабе върху $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$:

* Кой е възможно най-добрият избор на константа $S > 0$ в неравенството на Фоланд и Щайн и кои са функциите u, за които това неравенство се превръща в равенство?

Следвайки аналогията с класическото неравенство на Соболев (виж [**GV1, Va2**] или Глава 2 от дисертацията), горният въпрос се свежда до решаването на следното нелинейно диференциално уравнение от втори ред върху групата на Хайзенберг.

$$\triangle u = -C u^{2^*-1}, \tag{27}$$

където C е положителна константа, $\triangle$ е хоризонталния суб-Лапласиан, дефиниран чрез свързаността на Бикар ∇ (която в този случай е просто плоската ляво-инвариантна свързаност върху $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$) с помощта на формулата

$$\triangle u = \sum_{s=1}^{4n} (\nabla du)(e_s, e_s), \quad e_1, \dots, e_{4n} \text{ е } g\text{-ортонормиран базис на } H. \tag{28}$$

Най-общо казано, уравнението

$$\triangle u = -Cu^q \tag{29}$$

представлява вид "нелинеен проблем за собствените стойности" на оператора $\triangle$, чиито аналитични свойства зависят много съществено от стойността на степенната функция q. Ако $q = 1$, то (29) е просто уравнението за собствените стойности и функции на $\triangle$. Когато q приема стойности (достатъчно) близки до 1, аналитичните свойства на (29), са сходни на линейния случай и уравнението може да бъде решено, ползвайки стандартни аналитични методи. Ако q е много голямо, методите базирани на линейната теория спират да работят. Оказва се, че степенната $q = 2^* - 1 = \frac{n+2}{n+1}$ от уравнението на Ямабе (27), представлява точно критичната степен, под която (29) може да бъде решено сравнително лесно и над която неговото решаване може да бъде невъзможно. В този смисъл, уравнението на Ямабе е критично и аналитичните усложнения са значителни.

6.2. QC структура върху сферата $\mathbf{S^{4n+3}}$. Единичната сфера $S^{4n+3} \subset \mathbb{H}^{n+1}$ $(n \geq 1)$ се задава по обичайния начин:

$$S^{4n+3} \ = \ \Big\{(q,p) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{H} \ \Big| \ |q|^2 + |p|^2 = 1\Big\}.$$

Стандартната (канонична) QC структура върху S^{4n+3} се дефинира както следва: Диференцирайки уравнението на сферата, $p\cdot\bar{p}+q\cdot\bar{q} = 1$, получаваме, че за произволна фиксирана точка $x = (q,p) \in S^{4n+3}$, допирателното пространство към сферата в тази точка е

$$T_x S^{4n+3} \ = \Big\{(dq, dp) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{H} \ \Big| \ \mathrm{Re}(dq \cdot \bar{q} + dp \cdot \bar{p}) = 0 \ \Big\}.$$

Дефинираме канонична контактна 1-форма $\tilde{\eta}$, приемаща стойности в $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}^3$, върху S^{4n+3} като

$$\tilde{\eta} = \mathrm{Im}(dq \cdot \bar{q} + dp \cdot \bar{p}).$$

Ядрото на $\tilde{\eta}$ задава каноничната QC структура H^{can} върху S^{4n+3}. Всъщност H^{can} отговаря на стандартната 3-Сасакиева структура върху S^{4n+3} (виж Глава 2 от дисертацията).

6.3. Трансформация на Кели (Cayley). Трансформацията на Кели, $\mathcal{C}$, представлява естествена идентификация на сферата S^{4n+3} без една точка и кватернионната Хайзенберг група. Тази идентификация играя роля подобна на ролята на стереографската проекция за конформната Риманова геометрия върху сферата.

Идентифицирайки $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$ с Σ (границата на Сигел областта) както по-горе, $\mathcal{C}$ съпоставя на всяка точка $(q,p)\in S^{4n+3}, p\neq 1$ (различна от “северния полюс” на сферата), точка $(q',p')\in\Sigma$,

$$(q',p')\;=\;\mathcal{C}\,\Big((q,p)\Big),\qquad q'\;=\;(1+p)^{-1}\,q,\qquad p'\;=\;(1+p)^{-1}\,(1-p).$$

Обратното съответствие $(q,p)\;=\;\mathcal{C}^{-1}\Big((q',p')\Big)$ се задава с

$$q\;=\;\;2(1+p')^{-1}\,q',\qquad p\;=\;(1+p')^{-1}\,(1-p').$$

Коректността на горните уравнения следва от

$$\mathrm{Re}\;p'\;=\;\mathrm{Re}\;\frac{(1+\bar p)(1-p)}{|1+p\,|^2}\;=\;\mathrm{Re}\;\frac{1-|p|}{|1+p\,|^2}\;=\;\frac{|q|^2}{|1+p\,|^2}\;=\;|q'|^2.$$

Записвайки трансформацията на Кели във вида: $(1+p)q'\;=\;\;q,\quad(1+p)p'\;=\;1-p,$ получаваме

$$dp\cdot q'\;+\;(1+p)\cdot dq'\;=\;dq,\qquad\qquad dp\cdot p'\;+\;(1+p)\cdot dp'\;=\;-dp,$$

откъдето следва

$$\begin{aligned}dp'\;&=\;-2(1+p)^{-1}\cdot dp\cdot(1+p)^{-1}\\ dq'\;&=\;(1+p)^{-1}\cdot[dq\;-\;dp\cdot(1+p)^{-1}\cdot q].\end{aligned}\tag{30}$$

Трансформацията на Кели задава кватернионно-контактен дифеоморфизъм между кватернионната група на Хайзенберг и сферата, от която е изтрита една точка—Северния полюс, с нейната канонична QC структура H^{can}. Този факт може да бъде показан по следния начин: От (30) следва

$$\begin{aligned}2\,\mathcal{C}^*\,\tilde\Theta\;&=\;-(1+\bar p)^{-1}\cdot d\bar p\cdot(1+\bar p)^{-1}\;+\;(1+p)^{-1}\cdot dp\cdot(1+p)^{-1}\\ &\quad+\;(1+p)^{-1}\,[dq\;-\;dp\cdot(1+p)^{-1}\cdot q]\cdot\bar q\cdot(1+\bar p)^{-1}\\ &\quad-\;(1+p)^{-1}\,q\cdot[d\bar q\;-\;\bar q\cdot(1+\bar p)^{-1}\cdot d\bar p\,]\cdot(1+\bar p)^{-1}\\ &=\;(1+p)^{-1}\Big[dp\cdot(1+p)^{-1}\cdot(1+\bar p)\;-\;|q|^2\,dp\cdot(1+p)^{-1}\Big](1+\bar p)^{-1}\\ &\quad+\;(1+p)^{-1}\Big[-(1+p)\cdot(1+\bar p)^{-1}\cdot d\bar p\;+\;|q|^2\,(1+p)^{-1}d\bar p\Big](1+\bar p)^{-1}\\ &\quad+(1+p)^{-1}\Big[dq\cdot\bar q\;-\;q\cdot d\bar q\Big](1+\bar p)^{-1}\;=\;\frac{1}{|1+p\,|^2}\,\lambda\,\tilde\eta\,\bar\lambda,\end{aligned}\tag{31}$$

където $\lambda = |1+p|\,(1+p)^{-1}$ е единичен (т.е. с дължина единица) кватернион, а $\tilde{\eta}$ е стандартната контактна форма върху сферата.

Понеже $|1+p| = \frac{2}{|1+p'|}$, $\lambda = \frac{1+p'}{|1+p'|}$ и уравнение (31) се записва като

$$\lambda \cdot (\mathcal{C}^{-1})^* \,\tilde{\eta} \cdot \bar{\lambda} = \frac{8}{|1+p'|^2}\,\tilde{\Theta}.$$

Следователно формите $(\mathcal{C}^{-1})^*\tilde{\eta}$ и $\tilde{\Theta}$ имат едно и също ядро и задават една и съща QC структура.

6.4. Кватернионно-контактен проблем на Ямабе. Следвайки класическата схема (виж [K] и [CDKR1]), можем да трансформираме Въпрос ($*$) (от Точка 6.1) в еквивалентен проблем върху QC сферата S^{4n+3}, използвайки трансформацията на Кели

$$\mathcal{C} : S^{4n+3} - \{\text{Северен полюс}\} \longrightarrow \boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})\ .$$

Използвайки стандартна аргументация, се показва (виж Глава 2 от дисертацията), че ($*$) се редуцира до следния въпрос, известен като кватернионно-контактен проблем на Ямабе върху сферата:

$**$ Кой са онези (глобално дефинирани върху S^{4n+3}) метрики g на H^{can} от естествения конформен клас $[g]$ на QC структурата, чиято QC скаларна кривина $Scal$ (т.е. скаларна кривина на свързаността на Бикар) е константа?

По-общо, за дадено произволно QC многообразие (M, H), кватернионно-контактният проблем на Ямабе се състои в намирането на глобални представители g с константна QC скаларна кривина на асоциирания конформен клас $[g]$ от метрики на H. Този проблем е еквивалентен на намирането на решения на диференциалното уравнение ([Biq]),

$$\mathcal{L}u := 4\frac{n+2}{n+1}\,\triangle u - u\,Scal = -C u^{2^*-1}\ , \tag{32}$$

известно като QC уравнение на Ямабе. Тук $\triangle$ е хоризонталния суб-Лапласиан, дефиниран чрез (28), спрямо свързаността на Бикар ∇ за дадена (начална) метрика на H; $Scal$ е QC скаларната кривина на началната метрика, а C е произволна положителна константа.

За случая на кватернионната Хайзенберг група $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$, QC уравнението на Ямабе приема вида

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} \left(T_\alpha^2 u + X_\alpha^2 u + Y_\alpha^2 u + Z_\alpha^2 u\right) = -\frac{C(n+1)}{4(n+2)}\,u^{2^*-1}, \tag{33}$$

което, с точност да константен множител, е Ойлер-Лагранж уравнението, описващо екстремалите на L^2 Фоланд-Щайн-влагането, зададено с Теорема 6.1.

По-общо, върху компактно QC многообразие M, QC уравнението на Ямабе характеризира екстремалите на функционала на Ямабе Υ,

$$\Upsilon(u) \stackrel{def}{=} \int_M 4\frac{n+2}{n+1}\,|\nabla u|^2 \;+\; Scal\cdot u^2\,dv_g, \qquad \int_M u^{2^*}\,dv_g \;=\; 1,\;\; u>0, \tag{34}$$

където dv_g е формата на обема върху M, определена от g. Да отбележим, че съгласно [**GV2**], екстремалите на този вариационен проблем са C^∞ функции, затова тук не възникват проблеми свързани с регулярност на решенията.

Константата на Ямабе $\lambda(M,H)$ за дадено компактно QC многообразие се дефинира като инфимум на функционала на Ямабе,

$$\lambda(M,H) \stackrel{def}{=} \inf\{\Upsilon(u)\,:\,\int_M u^{2^*}\,dv_g \;=\; 1,\;\; u>0\}.$$

Ако $\lambda(M,H)$ е строго по-малка от $\lambda(S^{4n+3},H^{can})$, съществуването на решение на уравнението на Ямабе е доказано в [**W**]. Доказателството на този факт следва почти дословно аргументацията използвана в [**JL2**] за CR случая. Предвид това, остава да бъде изяснен единствено случая

$$\lambda(M,H)=\lambda(S^{4n+3},H^{can}),$$

който е и предмет на настоящата дисертация.

Основни приноси в дисертацията

7. Преглед на Глава 2 от дисертацията

В тази глава се изследва диференциалната геометрия на кватернионно-контактните многообразия с акцент върху QC проблема на Ямабе (виж Точка 6.4 по-горе). Неговият произход и форма са сходни с тези, познати от класическата теория, свързана с Римановия [LP] и CR (Коши-Риман) [JL1, JL2, JL3, JL4] случаи. Както Римановия така и CR Ямабе проблема са напълно решени, като работата по всеки от тях е отнела десетилетия и е довела до развитие в редица области на математиката. Важна стъпка за получаване на цялостно решение (и в двата случая) е изследването на плоския модел, който се дава от съответната група на Хайзенберг: в Римановия случай, това е просто векторното пространство $\mathbb{R}^n$ (нулев център); в CR случая, това е комплексната група на Хайзенберг (1-мерен център). За случая разглеждан тук, аналогична роля играе кватернионната група на Хайзенберг (3-мерен център), виж Точка 6 по-горе.

В тази глава (Глава 2 от дисертацията) представяме частично решение на проблема на Ямабе за QC сферата или еквивалентно, за кватернионната група на Хайзенберг. Нека отбележим, че в [GV2] се решава същия проблем, но с допълнително предположение за инвариантност на решенията спрямо определена ротационна група. За $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$ това допълнително условие е еквивалентно на предположението, че с точност до транслация решенията са радиални спрямо променливите от първия слой. Доказателството в [GV2] използва метода на подвижната равнина, за да покаже, че решенията са радиални и относно променливите от центъра на групата. Резултата представен тук използва предположение от различен характер (виж по-долу), а частичното решение, което получаваме, служи като междинна стъпка за резултатите получени в следващите глави на дисертацията. Основната идея е, следвайки стъпките от [LP] и [JL3], да решим QC Ямабе уравнението като първо го редуцираме до подходяща геометрична система от уравнения.

Изследвайки конформни деформации на QC структури, запазващи QC условието за Айнщайновост, тук описваме експлицитно всички глобални функции върху кватернионната група на Хайзенберг, който деформират стандартната плоска QC структура на групата до произволна друга QC Айнщайнова структура. Първият основен резултат в тази глава е

ТЕОРЕМА A. *Нека*

$$\Theta = \frac{1}{2h}\tilde{\Theta}$$

е конформна деформация на стандартната QC структура $\tilde{\Theta}$ *върху* $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$. *Ако* Θ *е също QC Айнщайнова, то с точност до лява транслация функцията* h *се получава като*

$$h \;=\; c\,\Big[\big(1 \;+\; \nu\,|q|^2\big)^2 \;+\; \nu^2\,(x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2)\Big],$$

където c *и* ν *са положителни константи. Всички функции* h *от този вид имат това свойство.*

Ключов факт, позволяващ редукция на уравнението на Ямабе до геометрична система от уравнения е Твърдение 9.2 от дисертацията, според което при определени "допълнителни" условия, метриките с константна QC скаларна кривина, получени при конформна деформация на QC Айнщайнова метрика върху компактно многообразие, са задължително QC Айнщайнови. Доказателството на този факт стъпва върху детайлен анализ на тъждествата на Бианки за свързаността на Бикар.

Използвайки трансформацията на Кели (виж Точка 6.3 по-горе) и Теорема A, получаваме частично решение на QC Ямабе проблема върху сферата:

ТЕОРЕМА B. *Нека* $\eta = f\,\tilde{\eta}$ *е конформна деформация на стандартната контактна форма* $\tilde{\eta}$ *върху сферата* S^{4n+3}. *Да предположим, че* η *има константна QC скаларна кривина.* **Ако съответното на** η **вертикално допълнение е интегруемо**, *то с точност до константен множител* η *се получава от* $\tilde{\eta}$ *чрез конформен QC автоморфизъм на сферата. В случай, че* $n > 1$, *същият извод е в сила, ако функцията* f *е реална част на кватернионно-значна анти-CRF функция.*

Горната теорема дава само частично решение на проблема на Ямабе поради "допълнителното" условие (изписано с тъмен шрифт) относно интегруемостта на вертикалното допълнение на η. По-късно в дисертацията (Глава 4) показваме, че това допълнително условие може да бъде отстранено, ако размерността на многообразието е 7, но доказателството на този факт се нуждае от по-сложна аргументация.

Третият основен резултат тук дава локална характеризация на QC Айнщайновите пространствата, чиято скаларна кривина е положителна:

ТЕОРЕМА C. *Нека* (M^{4n+3}, H, g) *е QC многообразие с положителна QC скаларна кривина* $Scal > 0$, *за която предполагаме допълнително, че е константа, ако* $n = 1$. *Следните условия са еквивалентни:*

a) (M^{4n+3}, H, g) *е QC Айнщайново многообразие.*

б) M^{4n+3} *е локално 3-Сасакиево многообразие, т.е. съществува локална* $SO(3)$*-матрица* Ψ *с гладки коефициенти, за която контактната форма* $\frac{16n(n+2)}{Scal}\Psi \cdot \eta$ *е 3-Сасакиева структура.*

в) Торзията на свързаността на Бикар се анулира.

В частност всяко QC Айнщайново многообразие с положителна QC скаларна кривина, за която предполагаме, че е константа, ако $n = 1$*, е Айнщайново (като Риманово многообразие) с положителна Риманова скаларна кривина.*

Организация на Глава 2 от дисертацията по подточки.

Точка 4 от дисертацията. [1] Тук извеждаме редица свойства и тъждества за свързаността на Бикар, която е нашият основен инструмент за изследване геометрията на уравнението на Ямабе. Показваме, че торзията на свързаността на Бикар се определя от два тензора—T^0, U, и една функция—$tr(\tilde{u})$, където

$$T^0(X,Y) \overset{def}{=} g((T^0_{\xi_1}I_1 + T^0_{\xi_2}I_2 + T^0_{\xi_3}I_3)X, Y),$$
$$U(X,Y) \overset{def}{=} g(uX,Y), \quad X, Y \in H. \tag{35}$$

Лесно се забелязва, че T^0 и U са $Sp(n)Sp(1)$-инвариантни и безследни симетрични тензори със свойствата:

$$T^0(X,Y) + T^0(I_1X, I_1Y) + T^0(I_2X, I_2Y) + T^0(I_3X, I_3Y) = 0,$$
$$3U(X,Y) - U(I_1X, I_1Y) - U(I_2X, I_2Y) - U(I_3X, I_3Y) = 0.$$

Основният резултат в тази точка показва, че QC Ричи тензора се изразява напълно с помощта на торзията на свързаността на Бикар:

Теорема 4.13. *Нека* (M^{4n+3}, H, g) *е* $(4n+3)$*-мерно,* $n > 1$*, QC многообразие. За всеки* $X, Y \in H$*, QC Ричи тензора и QC скаларната кривина удовлетворяват*

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= (2n+2)T^0(X,Y) + (4n+10)U(X,Y) \\ &\qquad + (2n+4)\frac{tr(\tilde{u})}{n}g(X,Y), \\ Scal &= (8n+16)tr(\tilde{u}). \end{aligned} \tag{36}$$

За $n = 1$ *имаме, че*

$$Ric(X,Y) = 4T^0(X,Y) + 6\frac{tr(\tilde{u})}{n}g(X,Y).$$

[1] Първа точка на Глава 2 на дисертацията

Точка 5 от дисертацията. В тази точка използваме тъждествата на Бианки за извеждане на система от уравнения за дивергенциите на няколко важни тензора:

ТЕОРЕМА 5.8. *Хоризонталните дивергенции на кривината и торзията на свързаността на Бикар удовлетворяват системата от уравнения* $B\,b = 0$, *където*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 4n-1 & \frac{3}{16n(n+2)} & 0 \\ -1 & 0 & n+2 & \frac{3}{16(n+2)} & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \Big(\nabla^* T^0, \quad \nabla^* U, \quad \mathbb{A}, \quad d\,Scal\,|_H, \quad \textstyle\sum_{j=1}^3 Ric\,(\xi_j, I_j\,.) \Big)^t,$$

T^0 *и* U *са дефинирани с* (35), *а*

$$\mathbb{A}(X) = g(I_1[\xi_2,\xi_3] + I_2[\xi_3,\xi_1] + I_3[\xi_1,\xi_2], X).$$

Като следствие от тази теорема получаваме следния важен резултат:

ТЕОРЕМА 5.9. *QC скаларната кривина на всяко QC Айнщайново многообразие* **с размерност поне 11** *е константа. Освен това, съответното вертикално допълнение* V *на всяка QC Айнщайнова структура е интегруемо разпределение. Върху 7 мерно QC Айнщайново многообразие, константността на QC скаларната кривина е еквивалентна на интегруемостта на вертикалното допълнение* V. *Във всички случаи, QC Ричи кривината се дава от*

$$\rho_{t|H} = \tau_{t|H} = -2\zeta_{t|H} = -\frac{Scal}{8n(n+2)}\omega_t \quad s,t = 1,2,3.,$$
$$Ric(\xi_s, X) = \rho_s(X,\xi_t) = \zeta_s(X,\xi_t) = 0, \quad s,t = 1,2,3.$$

По-долу (в Глава 3 на дисертацията) ще покажем, че условието, изписано с тъмен шрифт в теоремата, което изключва 7-мерния случай, може всъщност да бъде отстранено. За целта обаче, е нужна аргументация, която ще бъде развита по-късно в дисертацията.

Използвайки отново Теорема 5.8, в тази точка даваме доказателство и на Теорема C.

Точка 6 от дисертацията. В тази точка изследваме конформните деформации, запазващи условието за QC Айнщайновост. Да отбележим, че под конформен QC автоморфизъм на дадено QC многообразия, разбираме автоморфизъм

Φ, който удовлетворява

$$\Phi^*\eta = \mu\ \Psi \cdot \eta,$$

за подходяща положителна функция μ и $SO(3)$-значна функция Ψ. Да отбележим още, че свързаността на Бикар не се променя при ротация, т.е. свързаността на Бикар за $\Psi \cdot \eta$ съвпада с тази за η. В частност, когато разглеждаме конформни автоморфизми, можем да се ограничим до случая $\Phi^*\eta = \mu\ \eta$. Основна цел в тази точка от дисертацията е получаването на доказателство на Теорема A.

Точка 7 от дисертацията. Тук се разглежда един специален клас от функции, които наричаме анти-регулярни, дефинирани като функции запазващи кватернионната структура съответно върху кватернионно пространство, върху реална хиперповърхнина на кватернионно пространство или върху QC многообразие, виж дефиниции 7.6 и 7.15 от дисертацията. Анти-регулярните функции играят роля донякъде подобна на ролята на CR функциите в Комплексния анализ, но аналогията не е пълна. Реалните части на тези функции са интересни с оглед на конформни деформации, запазващи QC Айнщайновите тензори и следва да бъдат разглеждани като обобщение на плури-хармоничните функции от CR геометрията. Да отбележим, че също така регулярни кватернионни функции са изследвани в литературата (виж [**S**]), но според нас те не са съвсем адекватни за разглежданите тук въпроси. Анти-регулярни функции върху хипер-Келерови и кватернионно-Келерови многообразия са разглеждани в [**CL1**, **CL2**, **LZ**] но в различен контекст, а именно от гледна точка на минималните повърхнини и кватернионните изображения между кватернионно-Келерови многообразия. Понятието хиперкомплексна контактна структура се появява в тази точка отново, понеже върху такива многообразия реалните части на анти-CRF функции (тяхната дефиниция е в дисертацията, виж формула 7.18) имат редица интересни свойства:

Теорема 7.20. *Ако $f : M \to \mathbb{R}$ е реална част на анти-CRF функция*

$$f + iw + ju + kv$$

върху (4n+3)-мерно $(n > 1)$ хиперермитово контактно многообразие (M, η, Q), то са в сила следните еквивалентни твърдения

i) Изпълнени са уравненията

$$DD_{I_i}f = \lambda\omega_i - 4(\xi_j f)\omega_k \qquad mod\ \eta. \tag{37}$$

ii) За всеки $X, Y \in H$ имаме, че

$$
\begin{aligned}
(38)\quad (\nabla_X df)(Y) + (\nabla_{I_1X} df)(I_1Y) + (\nabla_{I_2X} df)(I_2Y) + (\nabla_{I_3X} df)(I_3Y) \\
= \lambda g(X,Y) + df(X)\alpha_3(I_3Y) + df(I_1X)\alpha_3(I_2Y) \\
- df(I_2X)\alpha_3(I_1Y) - df(I_3X)\alpha_3(Y) + df(Y)\alpha_3(I_3X) \\
+ df(I_1Y)\alpha_3(I_2X) - df(I_2Y)\alpha_3(I_1X) - df(I_3Y)\alpha_3(X).
\end{aligned}
$$

iii) функцията f удовлетворява следната система от диференциални уравнения от втори ред

$$
\begin{aligned}
(39)\quad \Re(D_{T_\beta}\overline{D}_{T_\alpha} f) = \lambda g(T_\beta, T_\alpha) \\
+ df(\nabla_{T_\beta} T_\alpha) + df(\nabla_{I_1T_\beta} I_1T_\alpha) + df(\nabla_{I_2T_\beta} I_2T_\alpha) + df(\nabla_{I_3T_\beta} I_3T_\alpha) \\
+ df(T_\beta)\alpha_3(I_3T_\alpha) + df(I_1T_\beta)\alpha_3(I_2T_\alpha) - df(I_2T_\beta)\alpha_3(I_1T_\alpha) - df(I_3T_\beta)\alpha_3(T_\alpha) \\
+ df(T_\alpha)\alpha_3(I_3T_\beta) + df(I_1T_\alpha)\alpha_3(I_2T_\beta) - df(I_2T_\alpha)\alpha_3 I_1(T_\beta) - df(I_3T_\alpha)\alpha_3(T_\beta)
\end{aligned}
$$

$$
(40)\quad
\begin{gathered}
\Re(iD_{T_\beta}\overline{D}_{T_\alpha} f) = \Re(D_{I_1T_\beta}\overline{D}_{T_\alpha} f), \quad \Re(jD_{T_\beta}\overline{D}_{T_\alpha} f) = \Re(D_{I_2T_\beta}\overline{D}_{T_\alpha} f), \\
\Re(jD_{T_\beta}\overline{D}_{T_\alpha} f) = \Re(D_{I_3T_\beta}\overline{D}_{T_\alpha} f).
\end{gathered}
$$

функцията λ се определя от

$$
(41)\qquad \lambda \;=\; 4\left[(\xi_1 w) + (\xi_2 u) + (\xi_3 v)\right].
$$

Точка 8 от дисертацията. В таза точка изучаваме инфинитезималните конформни автоморфизми на QC структурите (QC векторните полета), като показваме, че те зависят от три функции, удовлетворяващи определено диференциално уравнение (Proposition 8.8 от дисертацията). Тази формула се опростява значително за случая на 3-Сасакиево многообразие (Corollary 8.9 от дисертацията). Показваме още, че торзията на свързаността на Бикар се анулира тогава и само тогава, когато съществуват три вертикални векторни полета, чийто поток запазва метриката и кватернионната структура. Получаваме следната характеризация на 3-Сасаки структурите:

Теорема 8.10. *Нека (M, H, g) е QC многообразие с положителна QC скаларна кривина, за която предполагаме допълнително, че е константа, ако размерността на многообразието е 7. Следните условия са еквивалентни.*

i) Всяко от полетата на Рийб е QC векторно поле.

ii) QC структурата е хомотетична на 3-Сасакиева. В частност, полетата на Рийб са инфинитезимални изометрии.

Точка 9 от дисертацията. Цел на тази последна точка от Глава 2 е получаването на доказателство на Теорема B.

8. Преглед на Глава 3 от дисертацията

3-Сасакиевите структуру определят един много интересен клас от QC многообразия, който е предмет на изследване в тази глава на дисертацията. В Теорема C (Глава 2 от дисертацията) показахме, че едно QC многообразие е локално 3-Сасакиево пространство тогава и само тогава, когато то е QC Айнщайново и неговата QC скаларна кривина в положителна константа. Освен това, като следствие от тъждествата на Бианки, в Теорема 5.9 (Глава 2 от дисертацията) показахме, че QC скаларната кривина на всяко QC Айнщайново многообразие, чиято размерност е поне 11, е задължително константна, докато 7-мерния случай беше оставен отворен В настоящата глава разширяваме тези два резултата от Глава 2, започвайки с:

Теорема D. *QC скаларната кривина на всяко 7-мерно QC Айнщайново многообразие е константа.*

Основното приложение на Теорема D е свързано с отстраняване на априори предположения за константност на QC скаларната кривина в множество предходни резултати отнасящи се до 7-мерни QC Айнщайнови многообразия. Като следствие от тази теорема показваме, че върху всяко 7-мерно QC Айнщайново многообразие, ассоциираното вертикално допълнение V е винаги интегруемо разпределение (Corollary 10.3 от дисертацията) и че фундаменталната 4-форма

$$\Omega = \omega_1 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_3$$

е винаги затворена (Corollary 10.4 от дисертацията).

Да припомним, че пълните и регулярни 3-Сасакиеви и nS (наричани тук нагативни 3-Сасакиеви) пространства моагат да бъдат представяни по каноничен начин като разслоения над кватернионно-Келерови многообразия със слой $Sp(1)$ или $SO(3)$. В тази глава показваме, че ако QC скаларната кривина на едно QC Айнщайново многообразие е строго положителна (респективно—строго отрицателна), то то “по същество” е $SO(3)$-разслоение над кватернионно-Келерово многообразие с положителна (респективно—отрицателна) Риманова скаларна кривина. Показваме още, че в случай на анулираща се QC скаларна кривина, QC Айнщайновите многообразия са “по същество ” разслоения над хипер-Келерови многообразия.

Организация на Глава 3 от дисертацията по подточки.

Точка 10 от дисертацията. В тази точка даваме доказателство на Теорема D. За целта използваме така наречения QC-конформен тензор на кривина, въведен в [IV1], характеризиращ конформно плоските QC структури. Използваме още резултат на Кулкарни [Kul] относно алгебричните свойства на тензорите на кривина в размерност 4, както и разширение на Теорема A (Глава 2), което позволява експлицитното определяне на всевъзможните QC Айнщайнови структури, дефинирани локално върху кватернионната група на Хайзенберг, който са поточково QC-конформно еквивалентни на стандартната плоска структура на групата.

Точка 11 от дисертацията. Тук въвеждаме специална нова свързаност $\tilde{\nabla}$ върху каноничното 3-мерно вертикално векторно разслоение V над M, асоциирано с произволно QC многообразие M, за която доказваме следното:

Теорема 11.3. *Едно QC многообразие M е QC Айнщайново тогава и само тогава, когато свързаността $\tilde{\nabla}$ е плоска.*

Свързаност $\tilde{\nabla}$ представлява основно техническо средство в тази глава, използвано за изучаване свойствата на QC Айнщайновите многообразия.

Точка 12 от дисертацията. Използвайки вертикалната свързаност, тук получаваме структурни уравнения, описващи QC Айнщайновите многообразия, с помощта на контактната 1-форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ и нейния външен диференциал $d\eta = (d\eta_1, d\eta_2, d\eta_3)$:

Теорема 12.1. *Нека M е произволно QC многообразие. Следните условия са еквивалентни:*

а) M е QC Айнщайново многообразие;

б) локално QC разпределението H се задава като ядро на едно-форми η_1, η_2, η_3, така че за подходяща константа S да бъдат изпълнени уравненията

$$d\eta_i = 2\omega_i + S\eta_j \wedge \eta_k; \tag{42}$$

в) локално QC структурата се задава с контактна форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, за която съответните 1-форми на свързаността на Бикар се анулират върху H, т.е. имам, че $\alpha_s = -S\eta_s$.

Точка 13 от дисертацията. В тази точка разглеждаме връзката между QC Айнщайновите структури (M, H, g) и геометрията на естествено асоциираната Риманова метрика h върху M, спрямо която $\mathrm{span}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = V \perp H$ и

$$h|_H = g, \qquad h|_V = \eta_1 \otimes \eta_1 + \eta_2 \otimes \eta_2 + \eta_3 \otimes \eta_3. \tag{43}$$

От Теорема C (Глава 2) знаем, че ако QC скаларната кривина на M е положителна, то (M, h) е локално 3-Сасакиево многообразие. Случая на отрицателна скаларна кривина е напълно аналогичен, като тогава (M, h) се оказва негативно локално 3-Сасакиево многообразие. Ако QC скаларната кривина се анулира, в Лема 13.2[2] показваме, че Рийб полетата на QC структурата са отново Килинг полета за Римановата метрика h, но за разлика от 3-Сасаки случай, те комутират едно с друго.

Основният резултат в тази точка се съдържа в Propsition 13.3, което показва, че "по същество" QC Айнщайновите структури с нулева QC скаларна кривина са разслоения над хипер-Келерови многообразия.

Тук показваме още, че всяко QC Айнщайново многообразия с ненулева QC скаларна кривина поражда две (поточково различни) Айнщайнови Риманови метрики. Да отбележим, че за случая на 3-Сасакиеви многообразия (т.е. положителна QC скаларна кривина), това твърдение е добре известно, виж [BGN].

9. Преглед на Глава 4 от дисертацията

QC проблема на Ямабе върху сферата S^7 се състои в намирането на всичко контактни 1-форми η с константна QC скаларна кривина от каноничната QC структура на сферата. В Глава 2 на дисертацията беше предположено, че това са точно 1-формите, които се получават като $\phi^*(\tilde{\eta})$, където $\tilde{\eta}$ е стандартната контактна форма на сферата, а ϕ е произволен конформен QC автоморфизъм на сферата. В Теорема B (Глава 2) доказахме по-слаб резултат, а именно, че същото твърдение е в сила, но при допълнителното предположение, че вертикалното допълнение на η е интегруемо разпределение върху сферата. Тук отстраняваме това допълнително предположение и получаваме пълно решение на проблема на Ямабе за сферата в размерност 7:

Теорема E. *Нека $\tilde{\eta} = \frac{1}{2h}\eta$ е конформна деформация на стандартната контактна 1-форма $\tilde{\eta}$ върху единичната сфера S^7. Ако η има константна QC скаларна кривина, то, с точност до мултипликативна константа, η се получава от $\tilde{\eta}$, чрез конформен QC автоморфизъм на сферата. В частност, QC константата на Ямабе $\lambda(S^7)$ е точно $48\,(4\pi)^{1/5}$, като тази минимална стойност се достига само за $\tilde{\eta}$ и нейните образи при конформни QC автоморфизми на сферата.*

QC Ямабе проблема върху сферата S^7 е особено интересен, задари неговата връзка с проблема за намиране на нормата и екстремалите на Фоланд–Щайн влагането върху 7-мерната кватернионна група на Хайзенберг $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$, виж Теорема 6.1. Използвайки Теорема E, получаваме:

[2]Използва се номерацията от дисертационния труд

Теорема F. *Най-добрата константа в L^2 неравенството на Фоланд и Щайн върху 7-мерната кватернионна група на Хайзенберг е*

$$S_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^{3/5}}$$

Екстермал на това неравенство се дава от функцията

$$v = \frac{2^{11}\sqrt{3}}{\pi^{3/5}}[(1+|q|^2)^2 + |\omega|^2]^{-2}, \ (q,\omega) \in \boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}).$$

Всеки друг неотрицателен екстремал на неравенството се получава от v, чрез транслация (24) *и дилатация* (25) *на групата.*

Ключов елемент в доказателството на Теорема E е конструирането на специална дивергенчна формула Теорема 15.4, която е аналог на съществуващи подобни формула в CR геометрията (виж [**JL3**]) и в Римановата геометрия (виж [**Ob**] или [**LP**]). Тази дивергенчна формула служи да се покаже, че "новата" (след конформната деформация) структура е отново QC Айнщайнова, което представлява редукция на QC уравнението на Ямабе до цяла система от уравнения върху сферата, описващи условието за QC Айнщайновост. Използвайки трансформацията на Кели (виж Точка 6.3), пренасяме задачата върху кватернионната група на Хайзенберг, където нейното решение се получава директно от Теорема A (Глава 2).

Организация на Глава 4 от дисертацията по подточки.

Точка 14 от дисертацията. В тази точка извеждаме редица формули свързани с конформни деформации на каноничната контактна форма на сферата S^7. Както е известно, конформните деформации водят до промяна на Рийб полетата и до ротация на допълнението V на H. Също така, при конформни деформации на метриката върху H се променя по нетривиален начин и свързаността на Бикар.

Точка 15 от дисертацията. Тук конструираме дивергенчната формула (44), която представлява основен елемент от доказателството на Теореми E и F.

Теорема 15.4. *Да предположим, че (M^7,η) е QC многообразие, QC-конформно еквивалентно на 3-Сасакиева структура $\tilde\eta$, $\tilde\eta = \frac{1}{2h}\eta$. Нека*

$$Scal_\eta = Scal_{\tilde\eta} = 16n(n+2)$$

и нека

$$f \;=\; \frac{1}{2} \;+\; h \;+\; \frac{1}{4}h^{-1}|\nabla h|^2.$$

В сила е следното тъждество

$$\nabla^*\Big(fD \;+\; \sum_{s=1}^{3} dh(\xi_s)\,F_s \;+\; 4\sum_{s=1}^{3} dh(\xi_s)I_sA_s \;-\; \frac{10}{3}\sum_{s=1}^{3} dh(\xi_s)\,I_sA\Big) \;=\; f|T^0|^2 \;+\; h\,\langle \mathcal{Q}V,\,V\rangle. \tag{44}$$

Тук $\mathcal{Q}$ е положителна семи-дефининтна матрица (т.е. диагонализируема матрица, чиито собствени стойност са положителни числа или нула), а

$$V = (D_1, D_2, D_3, A_1, A_2, A_3)$$

където A_s, D_s са форми върху H, дефинирани с помощта на градиента на h и торзията на свързаността на Бикар (виж (45) и (46)).

Експлицитно, имаме, че

$$A_i \;=\; I_i[\xi_j, \xi_k], \tag{45}$$

$$\begin{aligned} D_1(X) \;&=\; -h^{-1}T^{0+--}(X,\nabla h)\\ D_2(X) \;&=\; -h^{-1}T^{0-+-}(X,\nabla h)\\ D_3(X) \;&=\; -h^{-1}T^{0--+}(X,\nabla h), \end{aligned} \tag{46}$$

а матрицата $\mathcal{Q}$ има вида

$$\mathcal{Q} := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{10}{3}\\ \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{22}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{22}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{22}{3} \end{bmatrix}$$

Собствените стойности на Ω са

$$\{0, \quad 0, \quad 2\,(2+\sqrt{2}), \quad 2\,(2-\sqrt{2}), \quad 10, \quad 10\}.$$

Точка 16 от дисертацията. В тази точка даваме доказателство на Теореми E и F. Интегрирайки дивергенчната формула (44) и използвайки Proposition 9.1 (от Глава 2 на дисертацията), получаваме, че интеграла от лявата част на (44) се анулира и следователно и интеграла от дясната част на равенството се анулира. От тук получаваме, че "новата" контактна форма η има анулираща се торзия и следователно тя задава QC Айнщайнова структура (виж. Теорема 4.13). Доказателството завършва използвайки трансформацията на Кели (виж Точка 6.3) и Теорема A (Глава 2).

10. Преглед на Глава 5 от дисертацията

В тази глава определяме нормата и екстремалите на Фоланд–Щайн влагането (виж Теорема 6.1) върху кватернионна група на Хайзенберг $\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$ (във всички размерности):

Теорема G.
a) Най-добрата константа в L^2 неравенството на Фоланд и Щайн (26) е

$$S_2 \;=\; \frac{\left[2^{-2n}\;\omega_{4n+3}\right]^{-1/(4n+6)}}{2\sqrt{n(n+1)}},$$

където $\omega_{4n+3} = 2\pi^{2n+2}/(2n+1)!$ е обема на единичната сфера $S^{4n+3} \subset \mathbb{R}^{4n+4}$. Неотрицателните функции, за които (26) се превръща в равенство са точно функциите от вида

$$F \;=\; \gamma\left[(1+|q|^2)^2 \;+\; |\omega|^2\right]^{-(n+1)}, \qquad \gamma = const, \tag{47}$$

и тези, които се получават от F чрез транслация (24) и дилатация (25).
b) QC константата на Ямабе на стандартната QC сфера е

$$\lambda(S^{4n+3}, H^{can}) \;=\; 16\,n(n+2)\;\left[((2n)!)\,\omega_{4n+3}\right]^{1/(2n+3)}. \tag{48}$$

Доказателството се основава на метод използван от Бронсън, Фонтана и Морпурго [BFM], както и от Франк и Лийб [FL], който се базира на стара идея на Сцегьо [Sz] (виж още [He]), позволяваща намирането на оптимална форма на (логаритмични) Харди-Литълуъд-Соболев тип неравенства върху групата на Хайзенберг. Методите използвани тук са чисто аналитични. Понятието QC скаларна кривина, участва в доказателството като формула, но без да се придава съществено значение на нейния геометричен смисъл. Централна роля тук играе ляво-инвариантния суб-Лапласиан на групата, докато QC скаларната кривина може да се разглежда просто като константа, определена от трансформацията на Кели.

Разглеждания метод не дава всички решения на QC уравнението на Ямабе, а само онези, които същевременно задават инфимум за функционала на Ямабе. От тази гледна точка, представения тук резултат е по-слаб от Теорема E (Глава 4 на дисертацията) по отношение на 7-мерната QC Сфера.

Организация на Глава 5 от дисертацията по подточки.

Точка 17 от дисертацията. Тази точка има подготвителен характер. В Лема[3] 17.4 показваме, че първата собствена стойност на суб-Лапласиана върху сферата $S^{4n+3} \subset \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}$ е $\lambda_1 = 2n$ и че рестрикциите на реалните координатни функции на $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}$ върху сферата са собствени функции за λ_1. Тук доказваме и още няколко тъждества от техническо естество, нужни за по-нататъшните разсъждения в тази глава.

Точка 18 от дисертацията. В тази точка доказваме Теорема G, като разбиваме доказателството на няколко стъпки, оформени като леми. Стъпка I се съдържа в Лема[3] 18.1, която казва, че за всяка L^1 функция v върху сферата, удовлетворяваща

$$\int_{S^{4n+3}} v \, Vol_{\tilde{\eta}} = 1,$$

съществува конформен QC автоморфизъм ψ на сферата, така че

$$\int_{S^{4n+3}} \psi \, v \, Vol_{\tilde{\eta}} = 0.$$

Стъпка II се дава от Лема[3] 18.2, според която можем да считаме, че инфимума на функционала на Ямабе се достига върху функция u, удовлетворяваща допълнително условие за "добро центриране", т.е. равенството

$$\int_{S^{4n+3}} P \, u^{2^*}(P) \, Vol_{\tilde{\eta}} = 0, \qquad P \in \mathbb{R}^{4n+4} = \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}.$$

Стъпка III се дава от Лема[3] 18.3, според която, ако u е "добре центриран" локален минимизатор за функционала на Ямабе, то $u \equiv const$.

Използвайки тези три Леми, доказателството на Теорема G се получава по следния начин: Нека F е произволен минимизатор (локален минимум) за функционала на Ямабе върху кватернионната група на Хайзенберг и нека g е съответната функция върху сферата. От Лема 18.2 следва, че функцията $g_0 =$

[3] Използва се номерацията от дисертационния труд

$\phi^{-1}(g \circ \psi^{-1})$ е "добре центриран" минимизатор за функционала на Ямабе върху сферата. Тогава, според Лема 18.3, имаме $g_o = const$. Връщайки се обратно към съответната функция върху групата поучаваме, че

$$F_0 = \gamma \left[(1 + |q'|^2)^2 + |\omega'|^2\right]^{-(n_h-2)/4}$$

за подходяща константа $\gamma = const > 0$. Сега от Лема 18.1 получаваме, че F_0 се получава от F чрез конформен QC автоморфизъм на сферата. Следователно, всеки положителен минимизатор се дава с точност до конформен QC автоморфизъм на сферата от функцията

$$F = \gamma \left[(1 + |q'|^2)^2 + |\omega'|^2\right]^{-(n_h-2)/4}, \qquad \gamma = const > 0.$$

Библиография

[AHS] Atiayah, M. F., Hitchin, N., Singer, I.M., *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **362**(1978), $425-461$. 8

[BE] Bailey, T.N. and Eastwood, M.G., *Complex paraconformal manifolds-their differential geometry and twistor theory*, Forum Math **3**(1991), $61-103$. 9

[Brd] Bérard Bergery, L., *Une généralisation de la théorie des twisteurs de Penrose*, unpublished lectures at the Universite de Nancy I, (1983). 9

[Ber] Berger, M. *Remarques sur le groupe d'holonomie des variétés Riemanniennes*, C.R.Acad. Sci. Paris **262**(1966), $1316-1318$. 7

[Biq] Biquard, O., *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques*, Astérisque **265** (2000). 1, 2, 10, 12, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 27

[BGN] Boyer, Ch., Galicki, K. & Mann, B., *The geometry and topology of* 3*-Sasakian manifolds* J. Reine Angew. Math., **455** (1994), 183–220. 37

[BFM] Branson, T. P., Fontana, L., Morpurgo, C., *Moser-Trudinger and Beckner-Onofris inequalities on the CR sphere*, Annals of Mathematics, **177**, (2013), 1–52. 40

[CSal] Capria, M. & Salamon, S., *Yang-Mills fields on quaternionic spaces* Nonlinearity **1** (1988), no. 4, 517–530. 21

[CL1] Chen, J. & Li, J., *Quaternionic maps between hyperkähler manifolds*, J. Diff. Geom. **55** (2000), no. 2, 355–384. 33

[CL2] ———, *Quaternionic maps and minimal surfaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **4** (2005), no. 3, 375–388. 33

[CDKR1] ———, *H-type groups and Iwasawa decompositions*, Adv. Math., **87** (1991), 1–41. 27

[D1] ———, *Quaternionic contact structures in dimension 7*, Ann. Inst. Fourier, **56** (4) (2006), 851–885. 15, 17

[FS74] G. B. Folland & E. M. Stein, *Estimates for the $\bar{\partial}_b$ Complex and Analysis on the Heisenberg Group*, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 429–522. 1, 24

[FL] Frank, R. L., & Lieb, E.H.,*Sharp constants in several inequalities on the Heisenberg group*, Ann. of Math., **176** (2012), 349–381 40

[GV1] Garofalo, N., & Vassilev, D., *Symmetry properties of positive entire solutions of Yamabe type equations on groups of Heisenberg type*, Duke Math J, **106** (2001), no. 3, 411–449. 24

[GV2] ———, *Regularity near the characteristic set in the non-linear Dirichlet problem and conformal geometry of sub-Laplacians on Carnot groups*, Math Ann., **318** (2000), no. 3, 453–516. 28, 29

[He] Hersch, J., *Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sr. A-B **270** (1970). 40

[IMV10] Ivanov, S., Minchev, I., & Vassilev, D., *Extremals for the Sobolev inequality on the seven dimensional quaternionic Heisenberg group and the quaternionic contact Yamabe problem*, J. Eur. Math. Soc., **12** (2010), pp. 1041–1067. 3

[IMV16] ———, D., *Quaternionic contact Einstein manifolds*, Math Res. Lett., **23** (2016), no. 5, 1405–1432. 3

[IMV14] ______, *Quaternionic contact Einstein structures and the quaternionic contact Yamabe problem*, Mem. of AMS, Volume 231, Number 1086 (2014). 3

[IMV12] ______, *The optimal constant in the L^2 Folland-Stein inequality on the quaternionic Heisenberg group*, Ann. Sc. Norm. Super Pisa Cl. Sci. (5), Vol. XI (2012), 635-652 3, 4

[IV1] Ivanov, S., & Vassilev, D., *Conformal quaternionic contact curvature and the local sphere theorem*, J. Math. Pure Appl, **93** (2010), 277–307. 36

[JL1] Jerison, D., & Lee, J., *A subelliptic, nonlinear eigenvalue problem and scalar curvature on CR manifolds*, Contemporary Math., **27** (1984), 57–63. 29

[JL3] ______, *Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem*, J. Amer. Math. Soc., **1** (1988), no. 1, 1–13. 29, 38

[JL4] ______, *Intrinsic CR normal coordinates and the CR Yamabe problem*, J. Diff. Geom., **29** (1989), no. 2, 303–343. 29

[JL2] ______, *The Yamabe problem on CR manifolds*, J. Diff. Geom., **25** (1987), 167–197. 28, 29

[Kod] Kodaira, K., *A theorem of completeness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of complex manifolds*, . Ann. Math. $\mathbf{75}(1962), 146-162$. 9

[K] Korányi, A., *Kelvin transform and harmonic polynomials on the Heisenberg group*, Adv.Math. **56** (1985), 28–38. 27

[Kul] Kulkarni, R. S., *Curvature structures and conformal transformations.* Bull. Amer. Math. Soc. 75 1969 91–94. 36

[LeB82] LeBrun, C. R., *$\mathcal{H}$-spaces with a cosmological constant*, Proc. Roy.Soc. London Ser. A 380 (1982) 171-185 1

[LeB89] ______, *Quaternionic-Kähler manifolds and conformal geometry*, Math. Ann. $\mathbf{284}(1989), 353-376$. 9, 10

[LeB91] ______, *On complete quaternionic-Kähler manifolds.*, Duke Math. J. $\mathbf{63}(1991), 723-743$. 2, 9, 11

[LP] Lee, J. M. & Parker, T., *The Yamabe Problem*, Bull Am. Math. Soc. **17** (1987), no. 1, 37–91. 29, 38

[LZ] Li, J. & Zhang, X., *Quaternionic maps between quaternionic Kähler manifolds*, Math. Z. **250** (2005), no. 3, 523–537. 33

[Ob] Obata, M., *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom., 6 (1971), 247–258. 38

[PP] Pedersen, H. and Poon, Y.-S. , *Twistorial constructions of Quaternionic Kähler manifolds*, in Proc. of the VIth International Colloquium on Differential Geometry, Cursos y congresos **61**, Universidad de Santiago de Compostela, Spain $(1989), 207-218$. 9

[Pen] Penrose, R., *Non-linear gravitons and curved twistor theory*, Gen. Relativity Gravitation $\mathbf{7}(1976), 31-52$. 8

[Sal1] ——, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. math., **67** (1982), 143–171. 9

[S] Sudbery, A., *Quaternionic Analysis*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **85** (1979), 199–225. 33

[Sz] Szegö, G., *Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area* J. Rational Mech. Anal. 3, (1954). 343–356. 40

[Va2] ______, *Yamabe type equations on Carnot groups*, Ph. D. thesis Purdue University, 2000. 24

[W] Wang, W., *The Yamabe problem on quaternionic contact manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl., **186** (2006), no. 2, 359–380. 28