# РЕЦЕНЗИЯ

***от доц. д-р Румен Костадинов Улучев***
***Катедра „Числени методи и алгоритми“, ФМИ***
***Софийския университет „Св. Климент Охридски“***

**По дисертация за присъждане на:** образователна и научна степен „доктор“

**Област на висшето образование:** 4. Природни науки, математика и информатика

**Професионално направление:** 4.5. Математика

**Докторска програма:** Изчислителна математика

**Автор на дисертационния труд:** Драгомир Ивов Алексов

**Тема на дисертационния труд:** „Неравенства от тип на Марков в $L_2$-норми при тегла на Гегенбауер“

**Научен ръководител:** проф. д.м.н. Гено Николов

### 1. Общи данни за дисертанта.

Драгомир Алексов е приет за студент във Факултета по математика и информатика на Софийския университет „Св. Климент Охридски“ през 2007 г., където се обучава по специалност „Математика“ в ОКС „бакалавър“ и специалност „Приложна математика“ в ОКС „магистър“. Дипломира се през 2013 г. с отличен успех 6,00, както от обучението в магистърската програма, така и от защитата на дипломната си работа. От 01.02.2014 г. е зачислен в редовна докторантура към катедра „Числени методи и алгоритми“ при ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“, с научен ръководител проф. Гено Николов. Със заповед на ректора на Университета е отчислен с право на защита, считано от 01.02.2017 г. По време на докторантурата си редовно е водил упражнения във ФМИ по „Числен анализ“ със студенти от специалност „Компютърни науки“ и по „Числени методи на анализа“ за специалност „Приложна математика“.

### 2. Анализ на научните постижения в дисертационния труд.

Представеният от Др. Алексов дисертационен труд „Неравенства от тип на Марков в $L_2$-норми при тегла на Гегенбауер“ е от 65 страници. По същество, той се състои от уводна глава, изложение от четири глави и библиография с цитирани 51 литературни източника.

Намирането на оценки за алгебрични полиноми и техните производни е класическа екстремална задача с широко приложение. Важността на проблема се потвърждава от големия брой публикации и учени, работили и върху тази тематика. В последните години интересът към задачи от този тип не намалява, което свидетелства за актуалността на проблема. За отбелязване е приносът на българската школа (Б. Боянов, Г. Николов, Д. Димитров и др.) в тези изследвания.

Една от първите публикации в това направление е на Дмитрий Менделеев от 1887 г., поставил задачата за оценяване на коефициентите на полином $p(x)$ от втора степен, такъв че $|p(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$, и $M$ е дадена положителна константа. Всъщност, Менделеев е намерил оценки за $p(0)$, $p'(0)$ и $p''(0)$.

Да означим с $\pi_n$ множеството на алгебричните полиноми от степен най-много $n$ с реални коефициенти. През 1889 г. Андрей Марков доказва, че за всеки полином $p \in \pi_n$ е изпълнено неравенство, което за равномерната норма $\|\circ\|$ в интервала $[-1, 1]$ има вида:

$$\|p'\| \leq c_n \|p\|,$$

където $c_n = n^2$. През 1992 г. Владимир Марков, брат на Андрей, доказва по-общо твърдение за производни от по-висок ред, а именно, че всеки полином $p \in \pi_n$ удовлетворява неравенството $\|p^{(k)}\| \leq c_n^{(k)} \|p\|$. Тук равенството се достига за полиномите на Чебишов от първи род $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ и $c_n^{(k)} = T_n^{(k)}(1)$.

В литературата, неравенства от типа

$$\|p^{(k)}\|_1 \leq c_n^{(k)} \|p\|_2, \qquad p \in \pi_n, \quad 1 \leq k \leq n,$$

където $\|\circ\|_1$ и $\|\circ\|_2$ са някакви норми, се наричат най-общо неравенства от типа на Марков. Естествено възникват задачите за намиране на екстремалния полином, за който се достига равенство, както и за намиране (или оценяване) на най-малката възможна (точната) константа $c_n^{(k)}$.

Представената на нашето внимание дисертация е посветена на изследвания за точната константа в неравенства на Марков за първата производна на полиномите, в които $L_2$-нормата $\|\circ\|_{w_\lambda}$ за интервала $[-1, 1]$ е с теглова функция на Гегенбауер:

$$w_\lambda(x) = (1 - x^2)^{\lambda - 1/2}, \qquad x \in [-1, 1], \quad \lambda > -1/2.$$

Именно, каква е най-малката възможна константа $c_n$, която можем да поставим в неравенството

$$\|p'\|_{w_\lambda} \leq c_n \|p\|_{w_\lambda},$$

така че то да бъде вярно за всеки полином $p \in \pi_n$?

Нека с $c_n(\lambda)$ означим точната константа в последното неравенство, т.е.

$$c_n(\lambda) := \sup_{p \in \pi_n} \frac{\|p'\|_{w_\lambda}}{\|p\|_{w_\lambda}}.$$

Уводната Глава 1 на дисертацията съдържа кратки исторически бележки върху някои задачи за полиномиални неравенства. Формулирана е в най-общ вид задачата за намиране/оценяване на точната константа в $L_2$-неравенство от типа на Марков. Ретроспективно са представени известните до момента резултати в случаите на тегло на Ермит, на Лагер (Туран, Шмидт, Дьорфлер, Николов, Шадрин и др.) и на Гегенбауер (Шмидт, Сегьо, Тамаркин, Николов, Шадрин, Дро, Елхами, Бьотхер, Дьорфлер и др.). Съвсем ясно са поставени задачите, които се решават в отделните глави. Формулирани са основните доказани теореми и следствия, като е посочено в какво се изразяват подобренията в получените оценки за точната константа, спрямо известните резултати.

Глава 2 е от помощно естество. Доказани са две твърдения, използвани съществено по-нататък в дисертацията. Теорема 2.1 дава характеризация на точната константа в неравенства от типа на Марков в $L_2$-норма с произволно тегло като най-голямата сингулярна стойност на определена матрица. В случая на тегло на Гегенбауер, с Теорема 2.2 е показано, че $c_n^2(\lambda) = 4\nu$, където $\nu$ е най-голямата собствена стойност на положително определена матрица, дадена в явен вид.

В Глава 3 е получена двустранна оценка за точната константа в $L_2$-неравенството на Марков при постоянно тегло $w(x) = 1$, което е частен случай на тегло на Гегенбауер $w_\lambda(x)$ при $\lambda = 1/2$. Тук целта на изследванията е проблемът за оценяване на $c_n(1/2)$ да се атакува чрез метод, използван от Г. Николов през 2003 г. за други задачи. В разглеждания случай има много силен резултат на Шмидт от 1944 г. В Теорема 3.1 дисертантът е получил двустранни оценки, които са точни по порядък и дават много добро приближение за асимптотичната константа $c(1/2) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n(1/2)}{n^2}$, за която Шмидт (също Хил, Сегьо и Тамаркин) намират точната стойност: $c(1/2) = 1/\pi$.

Основните резултати в Глава 4 са доказани за тегло на Гегенбауер при произволна стойност на параметъра $\lambda > -1/2$. В Теорема 4.1 за точната константа е изведена оценка отгоре, валидна освен за всяко $\lambda > -1/2$ и за всяко естествено число $n$. Тук за оценка на най-голямата собствена стойност на една положително определена матрица е използвана следата на матрицата. В доказателството на теоремата са разписани в явен вид следите на две еднотипни матрици, извършена е прецизна оценка отгоре и е приложена Теорема 2.2.

Другият важен резултат в тази глава е Теорема 4.2, който дава характеризация на екстремалния полином в $L_2$-неравенството на Марков при тегло на Гегенбауер за произволно $\lambda > -1/2$. Доказано е също, че екстремалният полином е четен, при четно $n$ и нечетен, при нечетно $n$, което не е тривиален факт в разглеждания общ случай. Трябва да се отбележи, че Теорема 4.2 е усилване на резултат, получен по-рано от Г. Николов с друга техника и валиден за $\lambda > 0$.

В Глава 5 на дисертацията са получени двустранни оценки за точната константа в неравенства от типа на Марков в $L_2$-норма при тегло на Гегенбауер за произволно $\lambda > -1/2$. Оценките в Теорема 5.1 са за случая на четно $n \geq 4$, а тези в Теорема 5.2 – за нечетно $n \geq 3$. Получените в тези две теореми оценки отгоре, подобряват намерените от Дрю и Елхами (1999) в случаите на: четно $n \geq 4$ и всяко $\lambda > -1/2$; нечетно $n \geq 5$ за всяко $\lambda \geq 0$; всяко $-1/2 < \lambda < 0$ и $n \geq \left(\frac{2\sqrt{2\lambda+5}}{2\sqrt{2\lambda+5}-2}\right)^{1/2}$. В Следствие 5.1 е получена двустранна оценка за $c_n(\lambda)$, в сила за всяко $n \geq 3$, която е по-добра от оценките на Николов и Шадрин. Частните случаи, когато $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ (Чебишеви тегла) и $\lambda = 1/2$ (постоянно тегло) са разгледани в Следствие 5.2. Поведението на точната константа $c_n(\lambda)$ при стойности на параметъра $\lambda$ близки до $-1/2$ е изследвано в Следствие 5.3. Тук е получена двустранна оценка за границата на $(2\lambda + 1)c_n(\lambda)$ при $\lambda \to -1/2$. Последният резултат в тази глава е Теорема 5.4, където е доказана характеризация на точната константа $c_n(\lambda)$ чрез най-малките нули на ортогонални полиноми, определени с тричленна рекурентна връзка. Получената зависимост е в основата на доказателствата на Теорема 5.1 и Теорема 5.2.

Накратко, научните приноси на дисертацията са както следва:

- изведени са различни нови оценки за точната константа в неравенства от типа на Марков в $L_2$-норма с тегло на Гегенбауер, които подобряват известните до момента;
- доказано е, че за всяко $\lambda > -1/2$ при четно (нечетно) $n$ екстремалният полином в неравенства от типа на Марков в $L_2$-норма с тегло на Гегенбауер за първата производна на полиноми от степен най-много $n$ е четен (нечетен);
- получена е характеризация на точната константа в неравенства от типа на Марков в $L_2$-норма с тегло на Гегенбауер чрез най-малките нули на ортогонални полиноми, определени с тричленна рекурентна връзка.

**3. Общо описание на публикациите по дисертацията.**

Публикациите по дисертационния труд са три на брой, а именно [1], [2] и [3], съгласно номерацията в библиографията на дисертацията и на автореферата. Резултатите в тези статии са основата на дисертацията на Драгомир Алексов, като изложението в Глава 3, Глава 4 и Глава 5 се придържа към представянето на основните твърдения и доказателствата им в публикациите [1], [2] и [3], съответно, поради което тук няма да влизаме в детайли.

В [1] са доказани двустранни оценки за точната константа $c_n(\lambda)$ в $L_2$-неравенство на Марков при тегло на Гегенбауер и $\lambda = 1/2$. Статията е написана самостоятелно от дисертанта и е отпечатана в тома от 2015 г. на Годишника на Софийския университет „Св. Климент Охридски“.

Публикацията [2] е посветена на изследването на точната константа $c_n(\lambda)$ в $L_2$-неравенства на Марков при тегло на Гегенбауер. Получена е оценка отгоре за $c_n(\lambda)$, валидна за всяко $\lambda > -1/2$. Доказано е, че $c_n(\lambda)$ се изразява чрез най-големите собствени стойности на две асоциирани с проблема положително определени матрици; при това, екстремалният полином, за който се достига равенството в неравенството на Марков, е четен при четно $n$ и е нечетен, при нечетно $n$. Статията [2] е в съавторство с Гено Николов и Алексей Шадрин (Кеймбриджски университет). Отпечатана е в реномираното списание *Journal of Approximation Theory* през 2016 г. (IF2016:0.931).

Статията [3] е съвместна работа на дисертанта с неговия научен ръководител и е публикувана също в *Journal of Approximation Theory* (IF2016:0.931). За точната константа $c_n(\lambda)$ в $L_2$-неравенства на Марков при тегло на Гегенбауер и всяко $\lambda > -1/2$ са доказани нови двустранни оценки, подобряващи намерените от Дрю и Елхами (1999). За извеждането на оценките е приложена техника, използваща връзка между точните константи в неравенства на Марков и най-малките нули на ортогонални полиноми. Тази връзка е доказана в отделна теорема на статията.

Не са представени допълнителни сведения за приноса на всеки от авторите в съвместните публикации [2] и [3], поради което считам, че авторите са с равностоен принос в тях.

Резултати от дисертационния труд са докладвани от Драгомир Алексов на международните конференции по апроксимации *Workshop on Approximation Theory, CAGD, Numerical Analysis, and Symbolic Computations*, проведени през 2014 г. в Созопол, през 2016 г. в София, и на конференцията *125 години математика и природни науки в СУ „Св. Климент Охридски“* през 2014 г.

**4. Критични бележки и препоръки.**

Цялата дисертация е написана с голяма акуратност. Сложните изчисления при извеждането на оценките са проведени с необходимата стриктност и яснота.

Ще отбележа някои дребни неточности, забелязани при прочита на дисертацията.

1. На стр. 56-58 се цитира „Твърдение 5.3“, като се има предвид „Предложение 5.3“.

2. Известно двусмислие има при използването на изрази от вида „$q+1/2$“. Например, на стр. 19 „$\lfloor n+1/2 \rfloor$“ е използвано за означаване на „$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$“, а на стр. 30 „$(2m+1/2)$“ за „$2m+\frac{1}{2}$“. Внимателният читател би съобразил точният смисъл във всеки такъв случай.

3. На стр. 24, ред 6 и 5 отдолу, числителите в последния член „$(4m+3)^2$“ и „$(4m+1)^2$“, следва да бъдат съответно „$(4m+3)^\alpha$“ и „$(4m+1)^\alpha$“. На стр. 18, ред 11 отгоре, вместо „$\frac{h_{2k-1}}{h_{2j-1}}$“ трябва да стои „$\frac{h_{2k-2}}{h_{2j-1}}$“. На стр. 32, ред 12 отдолу, е пропуснат множител 4 пред „$\max\limits_{1\le k\le n} A_k(\mathbf{p})$“. От последващите пресмятания става ясно, че това са просто печатни грешки.

Категорично, посочените неточности не оказват ни най-малко влияние на хода на разсъжденията, получените междинни и крайни оценки.

**5. Оценка на автореферата.**

Представеният автореферат следва изложението в Глави 2–5 на дисертационния труд, като в тази си част е идентичен с уводната Глава 1 на дисертацията. Посочени са научните публикации по темата на дисертацията (3 на брой) и конференциите на които са представени някои от резултатите. В авторската справка са изредени научните приноси на дисертацията. Поместена е пълна библиография на използваната литиратура.

Авторефератът е написан ясно и прецизно. Считам, че той дава много добра представа за дисертационния труд и научната работа върху него от дисертанта.

**6. Заключение.**

Представеният от Драгомир Ивов Алексов труд „Неравенства от тип на Марков в $L_2$-норми при тегла на Гегенбауер“ има всички необходими качества за придобиване на образователна и научна степен „доктор“ в съответствие със ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности на СУ и на ФМИ.

От него е видно, че дисертантът притежава задълбочени теоретични познания в класическата област на Конструктивната теория на функциите, отнасяща се за неравенства на Марков. Получил е редица нови оценки за точната константа в неравенства на Марков с $L_2$-норма и тегло на Гегенбауер, включително и резултати, характеризиращи тази константа. В хода на доказателствата Др. Алексов е преодолял значителни трудности, като е проявил съобразителност, находчивост и е демонстрирал отлична техника. Научните приноси на дисертацията са безспорни и са посочени по-горе.

В заключение, оценявам положително дисертационния труд „Неравенства от тип на Марков в $L_2$-норми при тегла на Гегенбауер“ и предлагам на Научното жури да присъди на Драгомир Ивов Алексов образователната и научна степен „доктор“ в област на висшето образование *4. Природни науки, математика и информатика*, професионално направление *4.5. Математика*, докторска програма *Изчислителна математика*.

20 февруари 2018 г. Рецензент:........................................

София /Доц. д-р Румен Улучев/