РЕЦЕНЗИЯ

от проф. дмн Камен Ганчев Иванов,
Институт по математика и информатика при БАН – София

по материалите, представени за защита на докторска дисертация на тема:
“Неравенства от тип на Марков в L_2-норми при тегла на Гегенбауер”
на Драгомир Ивов Алексов

за получаване на образователната и научна степен “доктор” в Област на висшето образование: “4. Природни науки, математика и информатика”; Професионално направление: “4.5. Математика”; докторска програма: “Изчислителна математика”.

Представям рецензията си по дисертационния труд като член на Научното жури, определено със Заповед РД 38-803/22.12.2017 г. на ректора на СУ “Св. Климент Охридски” съгласно Решение на ФС на Факултета по математика и информатика (Протокол 11/18.12.2017 г.). Рецензията е изготвена според изискванията на:

- Закона за развитието на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ);
- Правилника за прилагане на ЗРАСРБ;
- Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в СУ “Св. Климент Охридски”;
- Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности във Факултет по математика и информатика на СУ “Св. Кл. Охридски”.

1 Данни за дисертанта

Драгомир Алексов е роден през 1988 г. в София. През 2011 г. завършва висше образование със степен “Бакалавър” по специалност “Математика”, а през 2013 г. получава степен “Магистър” по специалност “Приложна математика” във Факултета по математика и информатика на СУ “Св. Кл. Охридски” с отличен успех.

2 Данни за докторантурата

Драгомир Алексов е редовен докторант с научен ръководител проф. Гено Николов към катедра “Числени методи и алгоритми” във Факултета по математика и информатика на СУ “Св. Кл. Охридски” в периода 2014–2017 г. По време на докторантурата той е взел всички изискуеми изпити с отлични оценки. Предзащитата се е състояла на 13.12.2017 г. и е завършила с положително мнение на звеното. Представеният от Драгомир Алексов комплект материали по дисертацията е в съответствие с Правилника на ФМИ-СУ за прилагане на ЗРАСРБ.

3 Данни за дисертацията и автореферата

Дисертацията на тема: “Неравенства от тип на Марков в L_2-норми при тегла на Гегенбауер” е разделена на пет глави и използвана литература от 51 заглавия. Тя е с общ обем 65 страници.

Първа глава въвежда читателя в тематиката на дисертацията. Тя започва с исторически бележки, посветени на неравенствата на братя Маркови. След това е направен подробен обзор на известните резултати за точните константи в неравенства на Марков в L_2-норми при тегла на Ермит, Лагер и Гегенбауер. Обзорът показва, че Драгомир Алексов познава в детайли съвременното състояние на тематиката на дисертацията. Първа глава завършва с кратко описание на получените в следващите глави резултати и сравняването им с резултатите на други автори. Тема на дисертацията е получаване на добри оценки отгоре и отдолу на точната константа

$$c_n(\lambda) = \sup_{P\in\pi_n} \frac{\|P'\|_{w_\lambda}}{\|P\|_{w_\lambda}}, \quad \lambda > -1/2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad w_\lambda(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$$

в неравенството на Марков в L_2-норма с тегло на Гегенбауер w_λ, където $\|f\|_{w_\lambda} = \left(\int_{-1}^{1} w_\lambda(t)|f(t)|^2dt\right)^{1/2}$ и π_n означава множеството на алгебричните полиноми от степен n.

Втора глава съдържа, като предварителни сведения, характеризация на константата $c_n(\lambda)$ в термините на максималните собствени стойности на две матрици асоциирани с редицата на ултра-сферичните ортонормални полиноми. Определянето на точната стойност на $c_n(\lambda)$ от тази характеризация е задача, която е съизмеримо трудна с използването на дефиницията на $c_n(\lambda)$. Но характеризацията е използвана като отправна точка за получаване на резултатите в следващите глави.

Основният резултат на трета глава е получаване в Теорема 3.1 на двустранната оценка

$$0.317837(n+0.5)^2 \leq c_n(1/2) \leq 0.325779(n+1.6)^2$$

за постоянно тегло $w_{1/2}(x) \equiv 1$. За доказване на теоремата е използван метода, разработен от научния ръководител за случаите $\lambda = 0$ (полиноми на Чебишов от I род) и $\lambda = 1$ (полиноми на Чебишов от II род). Резултатът е публикуван през 2013 г. в статия в *Годишника на СУ*. Отбелязано е, че оценката отдолу може да бъде подобрена с по-прецизни пресмятания до $0.317837(n+1.5)^2$.

В четвърта глава е разгледан общия случай $\lambda > -1/2$ на тегла на Гегенбауер и са получени следните резултати. В Теорема 4.1 е доказана оценката отгоре

$$c_n(\lambda) < \frac{(n+1)(n+2\lambda+1)}{2\sqrt{2\lambda+1}},$$

а в Теорема 4.2 са показани съществуване и характеризация на екстремалния полином за всяко $\lambda > -1/2$. Последния резултат е пряко следствие на доказаното в Лема 4.4 преплитане на максималните собствени стойности на асоциираните матрици. Резултатите са публикувани през 2016 г. в статия в *Journal of Approximation theory*.

В пета глава отново е разгледан общия случай $\lambda > -1/2$ на тегла на Гегенбауер и са получени двустранни оценки – за четно n в Теорема 5.1 и за нечетно n в Теорема 5.2. Доказателството е базирано на връзка на оптималната константа с най-малката (положителна) нула на редица от ортогонални полиноми, установена в Теорема 5.4. Резултатите са публикувани през 2018 г. в статия в *Journal of Approximation theory*.

Авторефератът отговаря на съдържанието на дисертацията и представя правилно осъществените научни изследвания.

4 Научни приноси

Основните научни приноси на дисертанта са в установяването на двустранни оценки за точната константа $c_n(\lambda)$ в неравенството на Марков в L_2-норма с тегло на Гегенбауер. Тези резултати са нови и при определени стойности на n и λ съществено подобряват предишни резултати на редица математици, например Дро и Елхами (1999), Николов и Шадрин (2017).

Използваните методи за доказателство комбинират определени идеи, разработени от научния ръководител проф. Г. Николов през 2003 г. и след това, с нови оригинални идеи на автора. За начало на изследванията си дисертантът използва характеризации на константата $c_n(\lambda)$ в термините на максимална собствена стойност на матрица или на минимална положителна нула на полином. Такъв род характеризации са добре известни в литературата, но стандартните оценки на тези величини не водят до много добри резултати. В дисертацията са получени нови оценки чрез съществен анализ на структурата на асоциираната матрица (Глава 4) или тричленна рекурентната формула, пораждаща съответния полином (Глава 5). Резултатите в Глава 4 отчасти се основават на положителната определеност на асоциираната матрица, а тези в Глава 5 допълнително използват и тридиагоналната форма на обратната на асоциираната матрица. Въпреки че в редица моменти са използвани изчисления със системата *Mathematica*, доказателствата не са компютърно базирани – те са строго математически, а комютърната програма е използвана за определяне на стойностите на редица константи, както и за подпомагане на интуицията. Пример за това са сложните формули за коефицентите пред μ и μ^2 на полиномите Q_m и $\tilde{Q}_m$ в Глава 5, които, след компютърно подпомогнатото им формулиране, се доказват по индукция.

Според мен най-впечатляващият резултат в дисертацията са оценките в Теореми 5.1 и 5.2, които като следствие дават както при фиксирано $\lambda > -1/2$ точния порядък $c_n(\lambda) \asymp n^2$, $n \in \mathbb{N}$, така и при фиксирано $n \in \mathbb{N}$ точния порядък $c_n(\lambda) \asymp \lambda(2\lambda+1)^{-1/2}$, $\lambda > -1/2$. В това отношение този резултат е съществено по-добър от споменатите по-горе резултати на Дро, Елхами, Николов, Шадрин, дадени във формули (1.11)–(1.14) от дисертациата.

Трябва да се отбележи, че получените оценки са равномерни по n и λ, като частното на оценката отгоре и оценката отдолу е близко до 1 (виж Теореми 5.1 и 5.2). По своята същност тези оценки са различни от асимптотическите формули с оценка на остатъчния член. Много добър пример за асимптотическа формула в тази област е класическата оценка (1.9) на Е. Шмидт за тегло 1, т.е. фиксирано $\lambda = 1/2$, като главния член на асимптотиката е независимо установена и от Хил, Сегьо и Тамаркин.

5 Критични бележки и препоръки

Няколко критични бележки относно оформянето на дисертацията.

Изразът $n + 1/2$ има двойнствено значение. Например в оценката отдолу в Теорема 3.1 той трябва да се разбира като $n + (1/2)$, докато в израза $\lfloor n + 1/2 \rfloor$ авторът има предвид $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Посочената цяла част е използвана редовно за индексиране на матрици и тяхните най-голями собствени стойности. Такъв род грешки затрудняват възприемането на дисертацията.

Означението c_n е използвано за няколко различни цели. Например, $c_n(\alpha)$ означава точната константа за теглата на Лагер, а $c_n(\lambda)$ означава точната константа за теглата на Гегенбауер. В резултат $c_n(0)$ от стр. 9 на дисертацията е различно от $c_n(0)$ от стр. 11, формула (1.10). По същия начин c_n от стр. 17, формула (2.1), е различно от c_n от следващата формула. Дисертантът следва да е по-внимателен с означенията за да не затруднява възприемането на резултатите му.

6 Публикации и участие в научни форуми

Резултатите от дисертацията са публикувани в:

- две статии в *Journal of Approximation theory* (с импакт-фактор 0.931 за 2016), едната от които е със съавтори Г. Николов и А. Шадрин, а другата – със съавтор Г. Николов, и

- една самостоятелна статия в *Годишник на Софийския университет ‘Св. Климент Охридски”*.

Специфичните изисквания за научни публикации на ФМИ-СУ са напълно удовлетворени с тези три статии.

Драгомир Алексов е изнесъл 7 доклади на научни конференции и семинари. От тях резултатите от дисертацията са докладвани на:

- конференция “125 години математика и природни науки в Софийския университет ‘Св. Климент Охридски”, София, 2014;
- Workshop on Approximation Theory, CAGD, Numerical Analysis, and Symbolic Computation, August 25-31, 2014, Sozopol, Bulgaria;
- Workshop on Approximation Theory, CAGD, Numerical Analysis, and Symbolic Computation, September 6-11, 2016, Sofia, Bulgaria.

7 Заключение

Оцеката ми за дисертационния труд, автореферата, научните публикации и научните приноси на Драгомир Ивов Алексовe *положителна*.

Получените резултати в предложения дисертационен труд и представените публикации ми дават основание да заключа, че изискванията на ЗРАСРБ и правилниците към него са спазени и предлагам на уважаемото жури да присъди на

Драгомир Ивов Алексов

научната и образователна степен “доктор” в област на висшето образование: “4. Природни науки, математика и информатика”, професионално направление “4.5. Математика”, докторска програма: “Изчислителна математика”.

София, 20.02.2018 г. Подпис:

(проф. Камен Иванов)