БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
Институт по Математика и Информатика
Ул.”Акад. Г. Бончев”, бл. 8, 1113 София
Проф. дмн Петър Ст. Кендеров
Тел.(02) 873-26-70, (02) 979-2881, ел.поща: kenderovp@cc.bas.bg

Р Е Ц Е Н З И Я

За: Материалите, представени във връзка с придобиване на научната степен „Доктор на математическите науки”.
Автор на материалите: Проф. Надежда Костадинова Рибарска
Тема на дисертационния труд:
„Fragmentability and Functional Analytic Approach to Necessary Optimality conditions“

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика.
Професионално направление: 4.5. Математика

Представям тази рецензия като външен член на журито за провеждане на процедурата за придобиване на научната степен „Доктор на математическите науки“ от Надежда Костадинова Рибарска, професор към Факултета по математика и информатика на Софийски университет „Св. Климент Охридски“.

1. Общо описание на представените материали по конкурса.

Във връзка с тази процедура ми бяха предоставени в хартиен вид и на електронен носител:

1. Дисертационен труд, написан на английски език със заглавие „Fragmentability and Functional Analytic Approach to Necessary Optimality conditions“, съдържащ 178 страници текст, както и осем страници Bibliography със 103 литературни източника.
2. Автореферат на дисертацията на български език, озаглавен „Фрагментируемост и функционално-аналитичен подход към необходимите условия за оптималност“. Авторефератът съдържа 39 страници текст с описание на резултатите и осем и половина страници литература с общо 105 източника (разликата със споменатите по-горе 103 източника е в добавянето на статиите с номера 93 и 95). В автореферата се съдържа също: „Авторска справка“ с десет основни постижения на докторантката, списък на публикациите по дисертацията (десет единиции), данни за апробацията на резултатите. Девет от споменатите статии вече са излязли от печат, а десетият е приет за публикуване. Осем от статиите са в списания с импакт фактор. Споменава се и за непубликуван ръкопис, резултати от който са включени в дисертацията. Този непубликуван ръкопис обаче е получи известност и има четири цитирания.
3. Кратка автобиография.
4. Информация за цитиранията на трудовете на дисертантката.
5. Копие от публикациите на дисертантката по темата на дисертацията (включително и копие от непубликувания ръкопис).

2. Анализ на научните и научно-приложните постижения в дисертацията.

Дисертационния труд се състои от две глави. Първата е посветена на фрагментируемите пространства, а втората – на въпроси от оптималното управление в безкрайномерни пространства. Връзката между тези две тематики е използването на един и същ апарат – функционален анализ, топология, геометрия на банаховите пространства. От друга страна, личността и научните интереси на авторката, която има солидни постижения и в двете области също има принос за това положение на нещата. Естественото разширяване и „мигриране" на научните интереси, също си казва думата.

Фрагментируемостта като топологично понятие формално се появява през 1985 г. в съвместна работа на Jayne и Rogers, като инструмент за доказване на съществуването на селектори от даден борелов клас за полунепрекъснати отгоре, компакно-значни изображения. Фрагментируемостта е обобщение на понятията „метризуемост" и „дентабилност". Важността на понятието метризуемост не буди съмнения. Вниманието към дентабилността се предизвика от тясната взаимовръзка на това понятие с едно обобщение за векторно-значни мерки на класическата теорема на Радон-Никодим (M. Rieffel, 1966), В топологията са разглеждани частни случаи на понятието фрагментируемост и преди то да бъде обособено и въведено като отделно понятие. Разредените топологични пространства (scattered spaces), които се фрагментират от дискретната метрика, са известни в топологията от много отдавна. Те са плодотворна среда за контрапримери в топологията, но впоследствие придобиха и самостоятелено значение (особено след знаменития резултат на Namioka и Phelps, че компактът X е разреден тогава и само тогава, когато C(X) е Асплундово пространство). Още през 1953 г. Thielman разглежда т.нар. „кликови изображения", които по естествен начин водят до пространства, за които съществува метрика, фрагментираща отворените множества. Фрагментируемостта се наложи като поле за изследване (а и като инструмент за изследване) поради това, че значително отслабва твърде ограничителното в някои ситуации условие за метризуемост, а запазва част от свойствата му. Например, слабата топология на едно безкрайномерно банахово пространство (или слабата със звезда топология на неговото спрегнатото) твърде редко е метризуема, а има широки класове от пространства, за които тя е фрагментируема.

Фрагментируемостта е основна тема в първата дисертация на Рибарска, въз основа на която тя придоби научната степен „кандидат на математическите науки" (сега приравнена към образователната и научна степен „доктор"). Още тогава тя изгради оригинален поход към изучаването на фрагментируемите пространства и получи резултати, които впечатлиха специалистите, за което мога да свидетелствам „от първа ръка". Резултатите в първа глава на сегашната диссертация са значително надграждане и задълбочаване на изследванията от тази първа дисертация. Става дума за нови резултати, включително и такива, които дадоха отговор на дълго стояли „отворени" проблеми. Тук ще отбележа само няколко от най-характерните резултати в първа глава.

За изследване на различни въпроси от теорията на банаховите пространства Jayne, Namioka и Rogers въвеждат през 1992 г. едно сродно, но различно от фрагментируемостта понятие, което те наричат с донякъде подвеждащото име „сигма-фрагментируемост" (по топологична традиция зад такова наименование би следвало да се крие „изброимо обединение на фрагментируеми множества", а всъщност става дума за друго, по-слабо свойство). Сигма-фрагментируемостта е „отслабена фрагментируемиост". Особено интересен е случаят, когато сигма - фрагментиращата метрика е нормата на банаховото пространство. Рибарска получава изненадващ резултат, че ако нормата на банаховото пространство сигма-фрагментира слабата топология, то има друга метрика, която фрагментира слабата топология. Теорема 1.2.2. от дисертацията е естествено обобщение на този резултат.

Дълго време стоеше отворен и въпросът за това дали сигма-фрагментируемостта има „свойството на трите пространства“: ако затвореното подпространство H на банаховото пространство E и фактор-пространството E/H са сигма-фрагментируеми от съответните норми, следва ли от тук, че и самото пространство E е сигма-фрагментируемо от нормата си? Теорема 1.2.4 от дисертацията дава положителен отговор. Доказателството е много оригинално и позволява да се получи положителен отговор и на аналогичен въпрос относно пространствата, притежаващи изброимо покритие с множества с малък локален диаметър по отношение на нормата (Corollary 1.2.6 от дисертацията).

Рибарска има съществени резултата за фрагментируемост на единичното кълбо B* на спрегнатото пространство E* по отношение на „слабата със звезда“ топология. Тези резултати са важни поради това, че всяко банахово пространство E с фрагментируема слаба със звезда топология в B* е слабо асплундово, т. е. всяка непрекъсната изпъкнала функция в E е диференцуема по Гато в точките на гъсто G_δ-множество („почти навсякъде“ в топологичен смисъл). Рибарска установява, че спрегнатото кълбо е фрагментируемо, ако изходната норма е диференцуема по Гато във всички точки на пространството с изключение на нулата (Theorem 1.2.13). От тук следва, че същото твърдение е вярно, ако дуалната норма е строго изпъкнала (виж Theorem 1.2.10 за по-общ резултат).

Друг проблем, успешно решен от Рибарска е доказателството на Theorem 1.2.23, че топологията на поточковата сходимост на пространството C(X x Y) е сигма – фрагментируема от равномерната норма, ако пространствата C(X) и C(Y) имат същото свойство. Подобен род твърдения в дисертацията има още няколко, като сигма-фрагментируемостта е заменена с други свойства. Например, в Theorem 1.3.11. са намерени условия за C(X) и C(Y), при които C(X x Y) има изброимо покритие от множества с локално малък диаметър по отношение на нормата, а в Corollary 1.4.5 става дума за съществуване на локално равномерно изпъкнала еквивалентна норма в C(X x Y). Между другото, Corollary 1.4.5 е отговор на въпрос, поставен от Jayne, Namioka и Rogers. Те доказват един „условен резултат“, че ако за декартовото произведение на всяко крайно подсемейство на едно безкрайно семейство от компакти е вярно, че пространството от непрекъснатите в него функции допуска еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма, то същото е вярно и за произведението на всички компакти от семейството. Те поставят въпроса дали за верността на заключението е достатъчно да се предположи само, че за всеки компакт X от семейството, пространсттвото от непрекъснатите функции C(X) има еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма. Резултатът на Рибарска показва, че отговорът на този въпрос е положителен. Интересен и оригинален е и резултатът в Theorem 1.4.5, където се дават достатъчни условия пространството C(K, E) от всички непрекъснати изображения от K в банаховото пространство E да има изброимо покритие от множества с локално малък диаметър. В секция 1.3. е намерена интересна връзка на тази проблематика с пространствата на Gruenhage. Във всички изброени по-горе случаи доказателствата са нетривиални, изискват оригиналност, конструктивност и добро владеене на солиден арсенал от факти, понятия и техники. Накратко, получените в тази глава резултати издават математическа сила и висок професионализъм.

Във втората глава от дисертацията се изследват необходими условия за оптималност в безкрайномерни пространства. Ударението е върху задачите на оптималното управление в безкрайномерни фазови пространства, за които има терминални ограничения (разглеждат се траектории които в даден краен момент T попадат в предварително зададено множество S) . За такива задачи в дисертацията е доказан принцип на максимума на Понтрягин (Theorem 2.2.4), който обобщава редица от известните до сега резултати в това направлenие, но покрива и случаи, за които до сега не е имало подобен резултат. В доказателството се използва вариационния принцип на Екеланд. Общността се дължи на това, че вместо изискването за крайна коразмерност се появява по-общото понятие „квазисолидност".Тук е уместно да се направи обща забележка по отношение на това, защо е необходимо да се разглеждат задачи на оптималното управление в безкрайномерни пространства. Дори когато фазовото пространство на задачата е крайномерно, т.е. допустимите траектории са в крайномерно пространство, съвкупността от всички допустими траектории лежи в безкрайномерно пространство и в това пространство първоначалната задача може да се погледне „от по-високо" като обикновенна оптимизационна задача. Това позволява задачата да се атакува с обичайните за оптимизационните задачи средства и техники за намиране на необходими условия за екстремум. Например, в точката на минимума направленията, по които целевата функция намалява „трябва да са надалеч" от самото множество (или от негова апроксимация с някакви подходящи обекти, обикновено конуси). При конкретната реализация на тази подкупващо проста идейна схема обаче възникват редица концептуални и технически трудности. За преодоляването им в дисертацията е въведено и изучно понятието „равномерно допирателно множество" (Definitions 2.4.1 – 2.4.3) и е доказана „теорема за неразделяне" (Theorem 2.4.6). Тази теорема се използва за доказване на една абстрактна форма на теоремата за множителите на Лагранж (Theorem 2.4.16), която е подобна на теорема, публикувана от M.McAsey и L.Mou през 2008 година. В дисертацията обаче е приведен пример, който показва, че твърдяното от M.McAsey и L.Mou не е вярно тъкмо поради липсата на „равномерност" за допирателното множество. В същия раздел с помощта на Theorem 2.4.16 е доказана и и обща форма на принципа за максимума на Понтрягин (Theorem 2.4.21 и Corollary 2.4.23). Преодоляните концептуални и технически трудности в тази глава са значителни и справянето с тях представя дисертантката в много благоприятана светлина. Освен математическа сила тази глава на дисертацията издава и математическа зрялост при подбора на разглежданите задачи и при намирането на подходящи понятия и методи за решаването им. Без съмнение дисертационният труд отговаря на изискванията на Закона за развитие ма академичния състав (ЗРАС). Той съдържа теоретични обобщения и решения на големи научни и научноприложни проблеми, които съответстват на съвременните постижения и представляват значителен и оригинален принос в науката.

5. Публикации по дисертацията и отражение в трудовете на други автори.

Следната таблица показва, че дисертационният труд покрива с излишък и изискванията (критериите) от правилника на ФМИ, регулиращ защитата на такива дисертации по отношение на публикациите и техния отзвук под формата на цитирания (тези изисквания са взети от сайта на ФМИ):

Критерии	Изисквания на ФМИ	Представени от дисертантката
Брой статии по дисертацията	поне 10	10 (от тях един приет за печат)
От тях в списания с импакт фактор	поне 5	8
Цитирания на публикациите по дисертацията	поне 20	72
От тях в списания с импакт фактор	поне 5	38

6. Критични бележки.

Нямам съществени критични бележки към дисертационния труд. Глава 1 и глава 2 не са равнопоставени в смисъл, че втората има много добър и информативен увод, докато уводът на първата по същество липсва. Всъщност, може да се каже, че уводът на първа глава е във автореферата. Забелязах отделни несъществени грапавини в изложението на английски език. В Дефиниция 2.10 и Дефиниция 2.11 на авторферата (стр. 29) изрично е казано, че равномерно допирателното множество е затворено. Непосредствено след тези дефиниции обаче се коментира, че затворената обвивка на равномерно допирателно множество е също равномерниo допирателно. В дисертацията тези дефиниции са под номера 2.4.1 и 2.3.2. В тях няма изискване за затвореност, а за ограниченост на множеството. Ясно е, че текстът в дисертацията е меродавен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ:

Дисертационият труд „Fragmentability and Functional Analytic Approach to Necessary Optimality conditions“ съдържа редица висококостойностни научни приноси, които са получили признание от световната математическа колегия. Оценявам положително този труд и считам, че той с излишък покрива изискванията за придобиване на научната степен „доктор на математическите науки”. Поради това считам, че авторката на този труд проф. Надежда Костадинова Рибарска напълно заслужава да придобие научната степен “доктор на математическите науки”.

Член на научното жури:

/акад. проф. д.м.н. Петър Кендеров/

гр. София, 19.12.2017 г.