Р Е Ц Е Н З И Я

на дисертационен труд за получаване на научната степен „Доктор на науките" в област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, по научна специалност 01.01.11 Изследване на операциите

Автор на дисертацията: доцент д-р Надя Пейчева Златева

Тема на дисертацията: „Вариационен анализ: методи и приложения"

Рецензент: проф. дмн Михаил Иванов Кръстанов

1. Общо описание на дисертацията. Представеният дисертационен труд е представен на 222 стандартни страници. Библиографската справка показва, че са използвани 172 литературни източници, като 162 са на английски език, седем – на френски език, два – на руски език и един - на немски език. Материалът е структуриран в увод, три глави и литература. Всяка глава е разделена на параграфи, всеки от които започва с необходими означения и предварителни сведения.

2. Актуалност на изучаваните задачи. В дисертацията се изследват задачи от областта на вариационния анализ. Това е една значима област на съвременната математика, която се развива бурно в последните 40 години. За нейната актуалност можем да съдим по това, че много известни съвременни математици работят в тази област. Като пример мога да посоча имената на J.-P. Aubin, J. Borwein, F. H. Clarke и R. T. Rockafellar. Един раздел (49 XX) от „Mathematics Subject Classification – 2010" е посветен на получаване на необходими условия за дачи на вариационното смятане и оптималното управление. Нещо повече, няколко подраздела от същия класификатор са посветени на изучаване на различни аспекти на многозначните изображения (28B20, 47H04, 49J53, 54C60, 58C06), които са един от основните обекти на изучаване във вариационния анализ. За важността на тази област можем да съдим например и по това, че Google Scholar дава повече от един милион работи по ключовата дума „вариационен анализ".

3. Познаване на състоянието на изучаваните проблеми и характеристика на избраните методи на изследване. В дисертацията се прилагат методи на вариационния анализ, основани на понятия като допирателните конуси на Bouligand и на Clarke; нормални конуси, като проксималния нормален конус, нормалния конус на Frechet, граничният нормален конус на Mordukhovich и нормалният конус на Clarke. Изследвани са еднозначни функции с квадратична оценка отдолу чрез свойства на техните субдиференциали. Изследвани са и многозначни изображения и тяхната зависимост от параметри. За тази цел е използвано така нареченото свойство метрична регулярност.

От изложението става ясно, че доцент Златева е добре запозната със състоянието на изучаваните задачи. Нещо повече, от цитираната литература личи, че тя добре познава и постиженията на други математици, работещи в същата област. Използваните от нея понятия, както и резултатите свързани с тях, показват едно задълбочено познаване на съвременни методи, прилагани във вариационния анализ. Повечето от изучаваните задачи се разглеждат в банахово пространство, което изисква и определени познания в областта на функционалния анализ.

4. Описание на получените резултати В първа глава се разглежда клас от функции с квадратична оценка отдолу (primal lower-nice functions). Това са реалнозначни полунепрекъснати отдолу функции, дефинирани в произволно банахово пространство, които могат да приемат и стойност безкрайност. Тези функции са въведени през 1991 г. от Poliquin в [136]. В параграф 1.1 се дават две дефиниции на свойството квадратична оценка отдолу: едната е посредством оценка отдолу с развитието по Тейлор (Дефиниция 1.1.4), а другата е чрез свойството хипомонотонност на определени отсичания на абстрактен субдиференциал. Еквивалентността на тези дефиниции е основният резултат в този параграф. В параграф 1.2 е доказано, че субдиференциалът на Clarke-Rockafellar и проксималният субдиференциал на функция с квадратична оценка отдолу съвпадат (Теорема 1.2.2). В параграф 1.3 и параграф 1.4 се изучава класа от проксимално регулярни множества (prox-regular sets). Този клас множества е естествено обобщение на изпъкналите множества, както и на множествата с двукратно гладка граница. Въведени са от Poliquin и Rockafellar в [137]. Първоначалната дефиниция е в хилбертово пространство. В параграф 1.3 се дефинира проксимално регулярно множество в произволно равномерно изпъкнало банахово пространство. Основният резултат на този параграф са Теорема 1.3.25 и Теорема 1.3.27, където се доказват няколко различни характеризации на свойството проксимална регулярност на затворено множество (Теорема 1.3.25) и равномерно r-проксимална регулярност на затворено множество (Теорема 1.3.27). В параграф 1.4 продължава изследването на свойството проксимална регулярност на затворено множество в произволно равномерно изпъкнало банахово пространство. Основният резултат на подпараграф 1.4.1 е Теорема 1.4.6, в която се доказва, че за проксимално регулярни множества съвпадат следните нормални конуси: проксималния нормален конус, нормалния конус на Frechet, граничният нормален конус на Mordukhovich и нормалният конус на Clarke. В подпараграф 1.4.2 е доказано, че надграфиките на J-регулярни отдолу полунепрекъснати отдолу функции са проксимално регулярни множества (Твърдение 1.4.9). При подходящи предположения върху модулите на равномерна изпъкналост и равномерна гладкост на нормата в банаховото пространство е изследвана надграфиката на J-регулярните отдолу полунепрекъснати отдолу функции (в подпараграф 1.4.2.), както и свойствата проксимална регулярност и N–хипорегулярност (в подпараграф 1.4.3). В подпараграф 1.4.4 са сравнява конуса от проксималните нормални функционали с β-Hölder нормалния конус N_C^β, където β е степента на модула на равномерна изпъкналост или на модула на равномерна гладкост на нормата в банаховото пространство. В подпараграф 1.4.5 се изучава запазването на свойството проксимална регулярност при пресичане на краен брой множества и при обратно изображение. Получени са общи достатъчни условия, при които се запазва това свойство. Тези условия използват понятието за уравновесеност (calmness) на многозначно изображение, въведено от Rockafellar и Wets в [152]. В подпараграф 1.4.6 е получена формула за коничната производна на изображението метрична проекция върху проксимално регулярно множество. В подпараграф 1.4.7 се разглежда банахово пространство, в което модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата са от степенен тип. В този параграф се изучава поведението на метричната проекция върху фамилия от затворени r-проксимално регулярни множества C_t, които клонят в смисъл на Attouch-Wets към затворено множество C. В същия параграф се изучава и производната на Фреше на квадрата на функцията разстояние до същата фамилия от множества.

Във втора глава се изучава интегрируемостта на субдиференциали на функции. Мотивацията на тази задача е един резултат на Moreau-Rockafellar (виж [147] от списъка с литературата), който показва, че всяка собствена, изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция в банахово пространство се определя с точност до адитивна константа от своя субдиференциал. Подобни резултати са получени за класове от локално липшицови функции. Оказва се, че такива резултати са в сила извън изпъкналия, както и извън локално липшицовия случай. Първият такъв резултат е получен от Poliquin (виж [135]) за функции с квадратична оценка отдолу, дефинирани в крайномерно пространство. Този резултат е обобщен за по-общ клас от функции, дефинирани в банахово пространство. Например, Иванов и Златева (виж [93]) доказват такъв резултат за класа на полуизпъкналите функции (semi-convex functions).

По-конкретно за съдържанието на втора глава: в параграф 2.1 е дадено ново доказателство на резултата на Moreau-Rockafellar, като са използвани апроксимиращи и регуляризиращи техники, предложени от Moreau за случая на хилбертово пространство. В параграф 2.2 е доказана локална интегруемост на субдиференциали на строго липшицови по посока регулярни функции, които са непрекъснати в своя домейн (Теорема 2.2.6). В параграф 2.3 се изследва интегруемостта на функции на две променливи, дефинирани върху банахово пространство, което е произведение на две банахови пространства. Въведени са две понятия за регулярност на функции на две променливи. В подпараграф 2.3.2. е доказана интегруемостта на субдиференциали на локално липшицови функции на две променливи, за които е изпълнено подходящо условие за регулярност (Теорема 2.3.5). В подпараграф 2.3.4. е доказан резултат за локална интегруемост на общия субдиференциал на функция на две променливи, за която са в сила обща регулярност и обща липшицовост по посока (Теорема 2.3.13.). В същия подпараграф е доказана локална интегруемост на частните субдиференциали на функция на две променливи при подходящо предположение за регулярност (Теорема 2.3.15.). В параграф 2.4 са изследвани седловидни функции, дефинирани в банахово пространство, което е произведение на банахови пространства. Такива функции са тясно свързани с различни минимаксни задачи. В подпараграф 2.4.1 са представени основни свойства на седловидните функции. В подпараграф 2.4.2 се изучават субдиференциалните свойства на собствена затворена седловидна функция. При подходящи условия е показано, че домейнът на субдиференциала на собствена затворена седловидна функция е гъсто множество в домейна на функцията. С всяка седловидна функция K е свързан монотонен многозначен оператор T_K. При подходящи условия е доказано, че операторът T_K е максимално монотонен (Теорема 2.4.14.) и субдиференциалът на функцията е интегрируем (Теорема 2.4.16.).

В трета глава се изследват многозначни изображения и многозначни изображения, зависещи от параметър. В параграф 3.1 е изследван тип липшицова непрекъснатост (Aubin непрекъснатост) на множеството от решения на параметризирана минимаксна задача в банахово пространство по отношение на параметър. Разглежда се изображението, което на всяка стойност на параметъра съпоставя множеството от решения на задачата (възможно е то да бъде многозначно и неограничено). Получено е достатъчно условие това изображение да е Aubin непрекъснато. В параграф 3.2 е доказан критерий за метрическа регулярност на многозначно изображение в термините на неговата контингентна производна (критерий на Aubin). Доказана е и свързана с него теорема за неявната функция. Като следствие е получено, че многозначно изображение, свързано със система от равенства и неравенства, е метрически регулярно точно тогава, когато са в сила условията на Mangasarian-Fromovitz. Получено е ново необходимо и достатъчно условие за строга регулярност на вариационни неравенства върху многостенни множества. Представено е и ново доказателство (основано на критерия на Aubin) на теоремата за радиуса на метрическа регулярност. В параграф 3.3 е доказан така наречения принцип за дълга орбита или празна стойност на многозначно изображение. Този принцип мотивира единен подход за доказване на теорема за фиксирана точка на многозначно изображение, както и получаване на теореми за сюрективност на еднозначни изображения.

5. Оценка на приносите В параграфи 1.1 и 1.2 са получени две нови субдиференциални характеризации на полунепрекъснати отдолу функции с квадратична оценка отдолу. Резултатът в параграфи 1.1 обобщава резултат на Poliquin (виж [136]) в крайномерно пространство и резултат на Levy, Poliquin и Thibault (виж [111]) в хилбертово пространство. В параграфи 1.3 и 1.4 са получени нови характеризации на свойството проксимална регулярност на затворено множество в произволно равномерно изпъкнало банахово пространство. В параграф 2.1 е дадено ново доказателство на резултата на Moreau-Rockafellar.

В параграф 2.2 е доказана локална интегруемост на субдиференциали на строго липшицови по посока регулярни функции, които са непрекъснати върху своя домейн. В параграф 2.3. е доказана локална интегруемост на общия субдиференциал на функция на две променливи, за която са в сила обща регулярност и обща липшицовост по посока. В същия параграф е доказана и локална интегруемост на частните субдиференциали на функция на две променливи, за която е в сила подходящо свойство за регулярност. В параграф 2.4 са изследвани седловидни функции, дефинирани в банахово пространство, което е произведение на банахови пространства. Доказано е достатъчно условие домейнът на субдиференциала на собствена затворена седловидна функция да е гъсто множество в домейна на функцията. С всяка седловидна функция K е свързан монотонен многозначен оператор T_K. Доказано е достатъчно условие операторът T_K да бъде е максимално монотонен и субдиференциалът на функцията да бъде интегрируем.

В параграф 3.1 е доказано достатъчно условие едно многозначно изображение да бъде Aubin непрекъснато. В параграф 3.2 е доказан критерий за метрическа регулярност на многозначно изображение в термините на неговата контингентна производна (критерий на Aubin)). Доказана е и свързана с него теорема за неявната функция. Получено е ново необходимо и достатъчно условие за строга регулярност на вариационни неравенства върху многостенни множества. Представено е и ново доказателство (основано на критерия на Aubin) на теоремата за радиуса на метрическа регулярност. В параграф 3.3 е доказан така наречения принцип за дълга орбита или празна стойност на многозначно изображение. Този принцип мотивира единен подход за доказване на теорема за неподвижна точка на точка на многозначно изображение (теоремата на Caristi-Kirk), както и получаване на теореми за сюрективност на еднозначни изображения.

6. Преценка на публикациите. В дисертацията на доцент д-р Надя Златева са представени 12 статии, публикувани в реномирани списания. Това са статиите с номера [18, 19, 63, 93, 94, 95, 96, 140, 162, 163, 164, 172] от библиографията. От тях една е самостоятелна ([172]), две са в съавторство с F. Bernard, L. Thibault ([18], [19]), четири – с М. Иванов ([93],[94],[95],[96]), една – с А. Дончев и M. Quincampoix ([63]), една с M. Quincampoix ([140]) и три – с L. Thibault ([162],[163],[164]). От тях 9 са публикувани в списания с импакт фактор: [18, 63] в Journal of Convex Analysis (IF 0.567/2006), [19] в Transactions of the AMS (IF 1.100/2010), [140] в SIAM Journal on Optimization (IF 1.525/2008) , [162] в Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications (IF 0.354/2003), [163] в Proceedings of the AMS (IF 0.429/2005), [164] в Mathematics of Operations Research (SJR 1.744/2005), [96, 172] в Доклади на БАН (IF 0.233/2016 , IF 0.251/2016), а статиите [94, 95] са публикувани в Доклади на БАН преди списанието да получи импакт фактор. Всички публикации са пряко свързани с темата на дисертацията.

От всичките 12 публикации 11 са в съавторство с известни български и чуждестранни математици. За мен няма съмнение, че тези статии, по тематика и методи на изследване, определено попадат в сферата на компетентност на доцент д-р Надя Златева и носят белезите на нейното участие. Затова считам, че участието на доцент д-р Златева в съвместните публикации е равностойно.

В информационната система Scopus се вижда, че доцент Златева има h-индекс 5 и са известни 171 цитирания на нейните статии в 148 научни публикации. В приложен списък на забелязани цитирания са посочени 209 цитирания в статии и монографии и 9 цитирания в дисертационни и хабилитационни трудове. В автореферата е дадена информация, че са известни 157 цитирания на статиите, върху които е основана дисертацията. От тези цитирания 96 са в статии, публикувани в списания с импакт фактор, 12 са в монографии и 9 са в дисертационни и хабилитационни трудове. Силно впечатление ми направи факта, че статии на доцент Златева са цитирани от известни съвременни математици, работещи в областта на вариационния анализ, като A.V. Arutyunov, J.-P. Aubin, J.M. Borwein, H. Frankowska, A.D. Ioffe, B.S. Mordukhovich, J.P. Penot, R.-T. Rockafellar и други. А това несъмнено говори за качествата на публикациите на доцент Златева.

10. Заключение. В дисертационния труд са получени и изложени по подходящ начин нови и съществени научни резултати. Използвани са съвременни методи на вариационния анализ, като са преодолени значителни трудности от идейно и техническо естество.

Нямам критични бележки по същество по дисертационния труд и автореферата. Според мен, авторефератът правилно отразява резултатите на дисертационния труд. Считам, че дисертационния труд на доцент д-р Надя Пейчева Златева удовлетворява изискванията на ЗРАС, ППЗРАС, както и специфичните изисквания в правилниците на ФМИ и на СУ „Св. Климент Охридски".

Предвид казаното по-горе, **препоръчвам** на доцент д-р Надя Пейчева Златева да бъде присъдена научната степен **„Доктор на науките"** в област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, по научна специалност Изследване на операциите.

Рецензент:

20.12.2017 г.
София

/проф. дмн Михаил Кръстанов/