Рецензия на дисертационния труд: „**Оценки на разстоянието на Банах-Мазур чрез модули на изпъкналост и гладкост**”, представен от *Росен Асенов Николов* за придобиване на научно образователната степен Доктор в професионално направление 4.5 Математика (Математически анализ)

Доц.д-р Милен Иванов, ФМИ-СУ

20.11.2017

1 Общо представяне на дисертационния труд

Дисертацията е написана на добър български език. Тя се състои от предговор и две глави общо 35 страници и списък с литература от 17 работи. (По-надолу цитатите са според номерацията в този списък.)

Авторът има две публикации по темата, съответстващи на двете глави. Едната в Доклади на БАН, а другата в Годишника на СУ: съответно [18] и [17]. За отбелязване е, че и двете работи са **самостоятелни**.

Резултатите на дисертацията са докладвани на Пролетните Научни Сесии на ФМИ през 2016 и 2017 години.

Дисертацията се занимава с възможно най-добри оценки на равномерната близост до елипса на двумерните сечения на дадено банахово пространство в зависимост от модулите му на гладкост и изпъкналост. По-точно, предполага се, че прстранството има степенна оценка от ред 2 на тези модули и константата пред тази оценка е главният параметър. Поради дуалността между изпъкналост и гладкост резултатите се прехвърлят лесно от единия модул към другия. Ясно е, че разглежданията се свеждат до случая на двумерно пространство, но получените геометрични задачи са нестандартни и много трудни технически.

Написано с формула, $\mathcal{X}_a$ е класът от банахови пространства X, за които модулът на гладкост $\rho_X(\tau)$ изпълнява

$$\rho_X(\tau) = \frac{1+a}{2}\tau^2 + o(\tau^2).$$

Известно е, че колкото е по-близо до нулата положителният параметър a, толкова по-”хубави” са пространствата в смисъл, че метричните им свойства са близки до тези на хилбертовото пространство. Един начин за измерване на тази близост е чрез величината

$$d_2(X) := \sup\left\{d(Y, l_2^{(2)}) :\ Y \subset X,\, \dim Y = 2\right\},$$

където d означава разстоянието на Банах-Мазур между нормирани пространства, т.е. (в случая) най-малката норма на изоморфизъм с обратен с норма единица. Геометрично, във всяко двумерно сечение на сферата на X може да се впише елипса, така че хомотертичната ѝ с коефициент $d_2(X)$ ще бъде описана.

Известно е, че d_2 зависи от параметъра a по-горе по смислен начин и тази връзка може да се конкретизира. Обикновено това се прави не като се разглежда най-добрата възможна елипса, а тази, която е вписана и има максимален обем. Това е традиционно още от основополагащата статия на Джон и след това е набрало инерция. Т.е. разглежда се по-слаба задача.

Тази по-слаба задача е формализирана на стр.2 от дисертацията, където функцията $g(a)$ е дефинирана като най-голямото разстояние от всяка елипса на Джон във всяко двумерно сечение на пространство от $\mathcal{X}_a$. Известно е, че

$$g(a) \leq 1 + \frac{a}{\sqrt{2} + (1+\sqrt{2})a}.$$

Смисълът на функцията в дясната страна на неравенството е, че тя е 1 при $a = 0$ и клони към $\sqrt{2}$ при $a \to \infty$, като при това накнонът е "правилен" в смисъл, че оценката е асимптотично точна и в двата края.

Тази оценка обаче не е "съвсем" точна и - нещо повече - основният резултат на първата глава на дисертацията е, че методът, използван за получаването ѝ, не може да произведе точна оценка, защото при необходимите за него опростявания се губи точност. Това е направено като е анализирана двумерна сфера, показана на стр.7.

При пресмятането на диференциалния израз, използван в [4], за тази конкретна сфера са преодолени значителни технически трудности, а още по-големи при фактическото пресмятане на най-доброто a, за което сферата е в $\mathcal{X}_a$, понеже модулът на гладкост е нелокален в смисъл, че при промяна в малка околност на точка от сферата може да се промени поточковият модул в отдалечени части от нея.

Преминавайки към дуалния модул на изпъкналост, аналогията на $\mathcal{X}_a$ е класът $\mathcal{Y}_p$ от банахови пространства Y, за които модулът на изпъкналост изпълнява

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_Y(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \geq \frac{p-1}{8}.$$

Да положим

$$D_p := \sup \left\{ d_2(Y) : \ Y \in \mathcal{Y}_p \right\}.$$

Като се използва $l_p^{(2)}$, може да се покаже, че

$$D^p \geq 2^{\frac{2-p}{2p}}.$$

В Глава 2 с помощта на интерполация между $l_2^{(2)}$ и $l_\infty^{(2)}$ е доказана подобрена оценка

$$D^p \geq \sqrt{\frac{2}{p}}.$$

Модулът на изпъкналост на интерполационното пространство е пресметнат за всички малки епсилони, което - строго погледнато - не е необходимо, защото е важна само асимптотиката, но е постижение само по себе си, за което са преодолени значителни трудности.

2 Оценка на структурата и съдържанието на дисертационния труд

Дисертантът е положил значителни усилия за преодоляване на сериозни технически трудности и за излагането на своите открития във вид удобен за четене. Дисертацията е добре подредена и лесна за проследяване. Тя добавя съществен принос към тематиката, в контекста на която е написана.

3 Заключение

От гореизложеното е безспорно очевидно, че предложеният дисертационен труд покрива всички критерии за присъждане на заявената степен Доктор.

Оценката ми на дисертационния труд е положителна и подкрепям получаването на ОНС "доктор" от Росен Асенов Николов.

Подпис:...