Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Факултет по математика и информатика

Автореферат

на дисертация

за придобиване на ОНС доктор

докторска програма „Изследване на операциите“

професионално направление 4.5. Математика

Субдиференциален анализ на функции, подобни на изпъкналите (Subdifferential analysis of convex-like functions)

Матей Боянов Константинов

научен ръководител: проф. Надя Златева

София, 2023

Дисертацията е написана на английски език и се състои от 79 страници, от които 5 страници са библиография, съдържаща 55 заглавия.

Съдържание

Увод

Необходимостта от изучаване на негладки функции, негладки оптимизационни задачи и множества с негладък контур се появява съвсем естествено с развитието на съвременната математика. Областите, които изучават тези обекти са например *варационен анализ* и *изследване на операциите*. Понятия като функция разстояние, множество от решения, множество от метрични проекции, индикаторни функции, нормални конуси, тангенциални конуси и субдиференциали заемат централно място в развитието на тези клонове на математиката, но всички те са неизбежно негладки. Като пример, нека разгледаме следната реалнозначна фунцкия $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := |x| = \max\{x, -x\}.$$

Тази функция f е максимума на две диференцируеми функции, но не е диференцируема в $x = 0$. Поради това нейната графика не притежава единствена допирателна в $(0, 0)$, а цяла фамилия от допирателни. Понятието субдиференциал може да послужи за характеризирането на тази фамилия от допирателни. В смисъла на *изпъкналия анализ* имаме, че *изпъкналият субдиференциал* $\partial f(x)$ за функцията f в точката x е множеството

$$\partial f(x) := \{p \in \mathbb{R} : f(x) + p(y - x) \leq f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}\}.$$

Може да интерпретираме предходното като множеството от всички градиенти на линейни фунции, чиито графики се допират в точката $(x, f(x))$ към графиката на функцията f и са винаги под нея. Може да се покаже, че

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\}, & x < 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \\ \{1\}, & x > 0. \end{cases}$$

и че ако $p_0 \in \partial f(0)$, то векторът $(p_0, -1)$ е нормален вектор към една от допирателните към графиката на функцията f в $(0, 0)$.

Този пример не е изкуствен. Максимумът на две линейни функции се появява в някои видове *задачи за линейно разкрояване*, които имат голямо приложение в оптимизационни проблеми, идващи от индустрията.

За банахово пространство X изпъкналият субдиференциал на функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в точка $x \in \operatorname{dom} f := \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\}$ е множеството

$$\partial f(x) := \{p \in X^* : \langle p, y - x \rangle \leq f(y) - f(x),\ \forall y \in X\}.$$

Изпъкналите субдиференциали имат много свойства, които много приличат на класически свойства на производните. Може да се каже, че те са обобщение на производните. Например имаме, че ако $0 \in \partial f(x)$, то в точката x функцията f достига глобален минимум, множеството $\partial f(x)$ се свежда до едноточковото множество $\{f'(x)\}$, когато функцията f е диференцируема в x. Съществуват правила за субдиференциал на сума от функции

$$\partial(f + g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x),$$

където функциите f и g са от подходящ вид и много други.

Разбира се, има и други субдиференциали освен изпъкналия субдиференциал. Например, *субдиференциалът на Dini*, *субдиференциалът на Clarke* и *субдиференциалът на Michel-Penot*, чиито дефиниции зависят от съответните обобщени производни на *Dini*, *Clarke* and *Michel-Penot*, виж [16, Chapter 6]. Възможно е също така един субдиференциал да бъде дефиниран аксиоматично като абстрактен субдиференциал, виж [50].

Нека C е изпъкнало подмножество на реално векторно пространство. Функцията $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ се нарича изпъкнала, ако е в сила неравенството

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

за всички $x, y \in C$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Функцията f се нарича строго изпъкнала ако предходното неравенство е строго за всички $x, y \in C$ и $\lambda \in (0, 1)$.

Геометричната интерпретация на тази дефиниция е, че за произволни и фиксирани x и y от C графиката на функцията f в отсечката $[x, y]$ лежи под отсечката, свързваща точките от графиката ѝ $(x, f(x))$ и $(y, f(y))$.

Да забележем, че тази дефиниция не зависи от производни, въпреки че има класически резултати на необходими и достатъчни условия една диференцируема функция да бъде изпъкнала, които използват производни. Например, една диференцируема функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е изпъкнала тогава и само тогава, когато нейната производна f' е монотонно растяща в $\mathbb{R}$.

Още един начин да характеризираме една изпъкнала функция $f : C \to \mathbb{R}$, където множеството C е изпъкнало подмножество на реално векторно пространство, е чрез нейната епиграфика (надграфика), която е множеството

$$\operatorname{epi} f := \{(x, r) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

Имаме, че функцията f е изпъкнала тогава и само тогава, когато нейната епиграфика $\operatorname{epi} f$ е изпъкнало множество в $C \times \mathbb{R}$, т.е.

$$\lambda(x_1, r_1) + (1 - \lambda)(x_2, r_2) \in \operatorname{epi} f$$

за всеки $(x_1, r_1), (x_2, r_2) \in \operatorname{epi} f$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Това необходимо и достатъчно условие ни дава още една важна връзка между изпъкналите функции и техните епиграфики и също така ни дава още една добра геометрична интерпретация.

Няма дебат за това, че изпъкналите функции играят ключова роля в много оптимизационни задачи благодарение на широкия си набор от удобни свойства. Например, ако една строго изпъкнала функция има точка, в която достига своята минимална стойност, то тази точка е единствена. Въпреки това, намирането на нови резултати за *функции, подобни на изпъкналите* е от съществено значение. Под *функции, подобни на изпъкналите* разбираме функции, имащи свойства подобни на тези на изпъкналите функции, но самите те не са задължително изпъкнали. Един такъв клас от функции е класът на *функции с квадратична оценка отдолу*, който е въведен от Poliquin през 1991 в [41] и оттогава е широко поле за изследване, например в [42, 43, 27, 9, 52, 36]. В [41] Poliquin показва, че функциите с квадратична оценка отдолу, разглеждани в крайномерно пространство, могат да бъдат напълно характеризирани от техния *субдиференциал на Clarke*. Нека отбележим, че няма само един начин да се дефинират функции с квадратична оценка отдолу. Например, Ivanov и Zlateva в [27] доказват еквивалентността на две дефиниции на функции с квадратична оценка отдолу разглеждани в β гладки банахови пространства. В последствие Ivanov и Zlateva показват в [28], че *проксималният субдиференциал* и *субдиференциалът на Clark* за функция с квадратична оценка отдолу, дефинирана върху β гладко банахово пространство, съвпадат. Този резултат подсказва, че класът на функции с квадратична оценка отдолу не зависи от суфдиференциала, с който се дефинира, стига той да е достатъчно добре подбран. След този резултат изниква следния много интересен въпрос: Възможно ли е да характеризираме функции с квадратична оценка отдолу без да използваме субдиференциали?

В Глава 2 показваме, че функции с квадратична оценка отдолу дефинирани върху хилбертово пространство, удовлетворяват следното свойство: За всеки $a, b \in \operatorname{dom} f$ такива, че

$$\sqrt{\|a-b\|^2 + (f(a) - f(b))^2} < 2r$$

и всяко $\lambda \in [0, 1]$ съществува $u \in \operatorname{dom} f \cap B[\lambda a + (1-\lambda)b), \varphi(\lambda)]$ такова, че или

$$f(u) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$

или

$$\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) < f(u) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) + \varphi(\lambda),$$

където

$$\varphi(\lambda) := r - \sqrt{r^2 - \lambda(1-\lambda)\|a-b\|^2}.$$

Откъдето следва, че

$$\inf_{B[\lambda a + (1-\lambda)b), \varphi(\lambda)]} f \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) + \varphi(\lambda).$$

Нека да отбележим, че това свойство не включва субдиференциали. За да го докажем, представяме и изучаваме свойство, което наричаме *епи проксимална регулярност* на *епиграфно множество*, което слабо се различава от добре известното свойство за *проксимална регулярност* на множества. Поемаме по този път, защото функциите с квадратична оценка отдолу са тясно свързани с *проксимално регулярни* можества. Действително, в хилбертово пространство едно множество е проксимално регулярно тогава и само тогава, когато индикаторната му функция е с квадратична оценка отдолу, виж [44, Proposition 2.1].

Нека отбележим, че проксимално регулярните множества и изпъкналите множества имат някои сходни свойства. Например, функцията разстояние е диференцируема и липшицова върху подходящо избрана туба около множеството, с което е дефинирана, както за проксимално регулярни множества, така и за изпъкнали множества. Но не е вярно, че сечението на две проксимално регулярни множества е проксимално регулярно.

В Глава 1 даваме ново доказателство на едно присъщо свойство на проксимално регулярно множество, дефинирано върху хилбертово пространство. Терминът проксимална регулярност е въведен от Poliquin и Rockafellar в [43]. Те дефинират термина за множества и функции и развиват техните свойства първо в $\mathbb{R}^n$. В [44, Theorem 4.1] Poliquin, Rockafellar и Thibault дават редица различни характеризации на равномерно проксимално регулряни множества дефинирани върху хилбертово пространство. Всяка една от тези характеризации използва функцията разстояние, множеството от метрични проекции или проксималния нормален конус по някакъв начин. Характеризацията, която доказваме по нов начин, не ги използва и е следната:

За всеки $a, b \in C$ такива, че $\|a - b\| < 2r$ и всяко $\lambda \in (0, 1)$ за

$$x_\lambda := \lambda a + (1 - \lambda)b$$

съществува $u_\lambda \in C$ такова, че

$$\|x_\lambda - u_\lambda\| \le r - \sqrt{r^2 - \lambda(1 - \lambda)\|a - b\|^2}.$$

Тази характерзиация е първоначално доказана от G. E. Ivanov, в [26, Lemma 4.2] с помощта на свойства на множества $\Delta_r(a, b) := \bigcap_{d:\{a,b\}\in B[d,r]} B[d, r]$, въведени от J.-P. Vial в [53]. Методите, използвани в нашето доказателство, ни помагат да получим резултатите в Глава 2.

В Глава 3 доказваме по нов начин теоремата на *Moreau-Rockafellar*, която гласи, че една собствена, полунепрекъсната отдолу и изпъкнала функция, дефинирана върху банахово пространство, се определя с точност до константа от нейния субдиференциал.

За тази цел разработваме вариант на епсилон субдиференциалния метод (ЕСМ) [12, 13].

Съществена разлика между нововъведения и класическия ЕСМ е, че класическият апроксимира минимум на разглежданата функция като прави епсилона в метода все по-малък всеки път, когато $0 \in \partial_\varepsilon f(x_i)$, където x_i е генерирано в предишната итерация на метода, докато нововъведеният ЕСМ намира ε-минимум за предварително фиксирано положително ε, т.е. той спира, когато $0 \in \partial_\varepsilon f(x_i)$ и x_i е последната точка намерена от него. Намирането само на ε-минимум е напълно достатъчно, за да докажем по нов начини известната формула на *Rockafellar*, (виж [45],[46] и [29, Theorem 1.2]). По този начин получаваме ново доказателство за теоремата на *Moreau-Rockafellar*, (виж [45, 46]).

Исторически първото пълно доказателство на Теоремата на *Moreau-Rockafellar* в банахово пространство е направено от Rockafellar в [46]. Това доказателство обаче използва аргументи за двойственост. По-просто доказателство, което не използва двойственост е направено от Ivanov и Zlateva в [29], което наподобява доказателството, че една монотонна функция е интегрируема по Риман (класически резултат от *математическия анализ*). За тази цел те доказват формулата на *Rockafellar*, използвайки [29, Lemma 3.3], която доказват с помощта на варационния принцип на Ekeland. Тъй като доказателството на [29, Lemma 3.3] използва варацинния принцип на Ekeland, връзката между x_i и p_i не е непълно изяснена. Един от основните приноси на нововъведения ЕСМ е частично да изясни връзката помежду им. Това е постигнато без използването на *варационни принципи*.

Глава 1

Едно присъщо свойство на прокримално регулярни множества в хилбертови пространства

Проксималната регулярност е въведена като ново и важно регулярно свойство във *вариационния анализ* от Poliquin и Rockafellar в [43]. Те дефинират това понятие за функции и множества и развиват темата в $\mathbb{R}^n$. Редица значими характеризации на проксимална регулярност на затворено множество C в хилбертово пространство в точка $\overline{x} \in C$ са получени от Poliquin, Rockafellar и Thibault в [44] с помощта на функцията разстояние d_C и множеството от метрични проекции P_C, т.е. d_C да бъде непрекъснато диференцируема извън множеството C в околност на точката $\overline{x}$ или P_C да бъде еднозначно и по норма непрекъснато върху същата околност.

В тази глава с H означаваме реално хилбертово пространство, породено от скаларното произведение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$$

и асоциираната с него норма

$$\| \cdot \| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}.$$

Отворено (съотв. затворено) кълбо в H с център $x \in H$ и радиус $t > 0$ означаваме с

$$B(x,t) := \{y \in H : \|y - x\| < t\} \text{ (съотв. } B[x,t] := \{y \in H : \|y - x\| \le t\}).$$

Когато разглеждаме затвореното единично кълбо, ще използваме означението

$$\mathbb{B} := B[0;1].$$

В следващите означения множеството C е непразно подмножество на H.

Функцията разстояние

$$d_C : H \to \mathbb{R}_+,$$

се дефинира посредством

$$d_C(x) := \inf_{y \in C} \|x - y\|, \quad \text{за всяко } x \in H.$$

За $\varepsilon \geq 0$ имаме, че множеството от ε-минимумите на функцията разстояние $\varepsilon-\mathrm{argmin}$ се дефинира като

$$\varepsilon-\mathrm{argmin}\, d_C(x) := \{y \in C : \|x - y\| \leq d_C(x) + \varepsilon\}.$$

За реалното число $r \in (0, +\infty]$ чрез функцията разстояние, дефинираме (отворената) r-туба около множеството C като

$$T_C(r) := U_C(r) \setminus C,$$

където $U_C(r)$ е (отвореното) r-уголемяване на C

$$U_C(r) := \{x \in H : d_C(x) < r\}.$$

Многозначното изображение $P_C : H \rightrightarrows H$, което дава множеството от всички най-близки точки в множеството C до точката $x \in H$ се дефинира посредством

$$P_C(x) := \{y \in C : d_C(x) = \|x - y\|\}, \quad \text{за всяко } x \in H.$$

Множеството $P_C(x)$ е множеството от проекциите на точката x върху множеството C.

Когато за някое $\overline{x} \in H$ предходното множество съдържа само един елемент, т.е.

$$P_C(\overline{x}) = \{\overline{y}\},$$

точката $\overline{y} \in H$ се означава като $p_C(\overline{x})$.

Проксимално нормалният конус на множеството C в точката $x \in H$ се означава с $N_C(x)$ и се дефинира като, виж [47],

$$N_C(x) := \{p \in H : \text{ съществува } r > 0 \text{ такова, че } x \in P_C(x + rp)\}.$$

По правило, $N_C(x') = \varnothing$ за всяко $x' \notin C$. Елементите на проксималния нормален конус $N_C(x)$ се наричат *проксимални нормали* към множеството C в точката x.

Лесно може да бъде показано, че $p \in N_C(x)$ тогава и само тогава, когато съществува реално число $\sigma > 0$ такова, че

$$\langle p, x' - x \rangle \leq \sigma \|x' - x\|^2 \quad \text{за всяко } x' \in C. \tag{1.1}$$

Нека да отбележим, че $\sigma > 0$ в (1.1) зависи както от x, така и от p.

Следващата дефиниция разглежда такива непразни и затворени подмножества на H, за които $\sigma > 0$ в (1.1) остава едно и също за всичките проксимални нормали взети в $x \in C$.

Дефиниция 1.1.2. *Нека C е непразно и затворено подмножество на H и $r \in (0, +\infty]$. Ще казваме, че C е r проксимално регулярно (или равномерно проксимално регулярно с константа r), когато за всяко $x \in C$ и $p \in N_C(x) \cap \mathbb{B}$ е изпълнено, че $x = p_C(x + rp)$, т.е. x е единствената най-близка точка на $x + rp$ в множеството C.*

1.1 Едно присъщо характеризационно свойство на проксимално регулярни множества

Теорема 1.1.1 описва едно присъщо характеризационно свойство на r проксимално регулярните множества, което доказваме по нов начин:

Теорема 1.1.1. *За дадени реално число $r > 0$ и непразно и затворено множество C в хилбертово пространство H имаме, че следните твърдения са еквивалентни:*

(а) C е r проксимално регулярно.

(б) За всеки $a, b \in C$ такива, че $\|a - b\| < 2r$ и всяко $\lambda \in (0, 1)$ за

$$x_\lambda := \lambda a + (1 - \lambda)b$$

съществува $u_\lambda \in C$ такова, че

$$\|x_\lambda - u_\lambda\| \leq r - \sqrt{r^2 - \lambda(1 - \lambda)\|a - b\|^2}.$$

(в) За всеки $a, b \in C$ такива, че $\|a - b\| < 2r$ съществува $z \in C$ такова, че

$$\left\| \frac{a + b}{2} - z \right\| \leq r - \sqrt{r^2 - \frac{\|a - b\|^2}{4}}.$$

Глава 2

Характеризация на равномерно регулярни отдолу функции чрез тяхната епиграфика (надграфика)

Понятието функция с квадратична оценка отдолу е въведен от Poliquin в [41], където е доказано, че субдиференциалът на Clark и проксималният субдиференциал на функция с квадратична оценка отдолу, дефинирани върху крайномерно пространство, съвпадат. В [41] Poliquin доказва, че тези функции в $\mathbb{R}^n$ се характеризират напълно с техния субдиференциал на Clark. Това е първият голям клас от полунепрекъснати отдолу функции с това свойство, които не са изпъкнали.

Съвпадането на проксималния субдиференциал и субдиференциала на Clark на функциите с квадратична оценка отдолу, дефинирани върху хилбертово пространство е доказано от Levy, Poliquin и Thibault в [35]. В последствие Ivanov и Zlateva в [28] показват, че субдиференциалът на Clark и проксималният субдиференциал на функция с квадратична оценка отдолу, дефинирана върху β гладко банахово пространство, съвпадат. Резултатът, получен в [28], показва, че класът на функции с квадратична оценка отдолу е възможно да не зависи от субдиференциал, с който се дефинира, стига той да е достатъчно добре подбран.

След пионерската работа на Poliquin [41] функциите с квадратична оценка отдолу са били изследвани в серия публикации, като например [42, 43, 27, 9, 52, 36]. Тези функции са тясно свързани с проксимално регулярните множества. Наистина, едно множество в хилбертово пространство е проксимално регулярно точно когато неговата индикаторна функция е с квадратична оценка отдолу, виж [44, Proposition 2.1].

Дефиницията на равномерно проксимално регулярно множество в H е добре известна, виж [44, 10, 11]. Едно непразно и затворено подмножество C на H е *равномерно проксимално регулярно*, ако съществува $r > 0$ такова, че за всяко $x \in C$ и $p \in N_C(x) \cap \mathbb{B}$

имаме, че
$$\langle p, x' - x\rangle \le \frac{1}{2r}\|x' - x\|^2, \quad \forall x' \in C.$$
Лесно се установява, че тази дефиниция е еквивалента на:

Дефиниция 2.1.1. *Едно непразно и затворено подмножество C на H е равномерно проксимално регулярно, ако съществува $r > 0$ такова, че за всяко $x \in C$ и $p \in N_C(x) \cap \mathbb{B}_H$ имаме, че*
$$\langle p, x' - x\rangle \le \frac{1}{2r}\|x' - x\|^2, \quad \forall x' \in B(x, 2r) \cap C.$$

Ако едно множество $C \subset H$ удовлетворява Дефиниция 2.1.1, за някое $r > 0$, казваме, че C е r проксимално регулярно (пропускайки „равномерно“ за краткост).

Работим с пространството
$$\overline{H} := H \times \mathbb{R},$$
снабдено с нормата
$$|||(x, r)||| := \sqrt{\|x\|^2 + r^2},$$
за $(x, r) \in \overline{H}$. $(\overline{H}, |||\cdot|||)$ е хилбертово пространство.

Нека $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е функция. *Епиграфиката* на f е множеството
$$\operatorname{epi} f := \{(x, r) \in \overline{H} : r \ge f(x)\}.$$
Функцията f е *собствена* точно когато $\operatorname{dom} f \ne \varnothing$ и f е *полунепрекъсната отдолу* в H точно когато $\operatorname{epi} f$ е затворено множество в $\overline{H}$.

Проксималният субдиференциал на f в $x \in \operatorname{dom} f$ се дефинира като множеството
$$\partial^p f(x) := \{p \in H | (p, -1) \text{ е проксимална нормала към } \operatorname{epi} f \text{ в } \big(x, f(x)\big)\},$$
докато $\partial^p f(x) = \varnothing$ за $x \notin \operatorname{dom} f$, виж [11, p. 2216].

Една собствена и полунепрекъсната отдолу функция $f : H \to \mathbb{R}$ е *с равномерна квадратична оценка отдолу*, ако съществуват $\rho > 0$ и $\theta > 0$ такива, че за всяко $t \ge \theta$ и за всяко $p \in \partial^p f(x)$ такова, че $\|p\| \le \rho t$,
$$f(x') \ge f(x) + \langle p, x' - x\rangle - \frac{t}{2}\|x' - x\|^2, \quad \text{за всяко } x' \in H, \tag{2.1}$$
виж [11, p. 2226].

От дефиницията става ясно, че ако f е с равномерна квадратична оценка отдолу за някакви положителни константи ρ и θ, то тя ще бъде такава и за всеки $\rho' < \rho$ и $\theta' > \theta$. Това означава, че вземайки достатъчно малко ρ и в последствие $\theta = \rho^{-1}$ получаваме следната еквивалентна дефиниция: една собствена и полунепрекъсната отдолу функция $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е с равномерна квадратична оценка отдолу, ако съществува $\rho > 0$, такова че за всяко $t \geq \rho^{-1}$ и за всяко $p \in \partial f(x)$, такова че $\|p\| \leq \rho t$, (2.1) е в сила. Когато последното е изпълнено за f за някое $\rho > 0$ казваме, че функцията f е с ρ квадратична оценка отдолу (пропускайки „равномерно“ за краткост).

Дефиницията на равномерно епи регулярна отдолу функция е по-обща.

Дефиниция 2.1.2. *Една собствена и полунепрекъсната отдолу функция $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е равномерно епи регулярна отдолу, ако съществува $\rho > 0$ такова, че за всяко $t \geq \rho^{-1}$ и за всяко $p \in \partial^p f(x)$ такова, че $\|p\| \leq \rho t$ е изпълнено, че*

$$\alpha' \geq f(x) + \langle p, x' - x \rangle - \frac{t}{2}\|x' - x\|^2,$$

$$\textit{за всяко } (x', \alpha') \in B((x, f(x)), 2\rho) \cap \operatorname{epi} f.$$

Ако функцията f удовлетворява Дефиниция 2.1.2 за някое $\rho > 0$, то казваме, че f е епи ρ регулярна отдолу (пропускайки „равномерно“).

Едно непразно и затворено множество $C \subset \overline{H}$ ще наричаме *епиграфно множество* или *епиграфика* ако $C \equiv \operatorname{epi} f$, където $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена и полунепрекъсната отдолу функция.

За епиграфно множество в $\overline{H}$ въвеждаме термина *равномерна епи проксимална регулярност*, който слабо се различава от добре познатия термин равномерна проксимална рагулярност на множество в $\overline{H}$.

Дефиниция 2.1.3. *Нека C е епиграфно множество в $\overline{H}$. C е равномерно епи проксимално регулярно множество, ако съществува $r > 0$ такова, че за всяко $(x, \alpha) \in C$ и $(q, \eta) \in N_C\big(x, \alpha\big) \cap \mathbb{B}_{\overline{H}}$ е изпълнено, че*

$$\big\langle (q, \eta), (x' - x, \alpha' - \alpha) \big\rangle \leq \frac{1}{2r}\|x' - x\|^2, \tag{2.2}$$

$$\textit{за всяко } (x', \alpha') \in B((x, \alpha), 2r) \cap C.$$

Ако една епиграфика C удовлетворява Дефиниця 2.1.3 за някое $r > 0$, казваме, че C е епи r проксимално регулярно множество (пропускайки „равномерно“).

2.1 Връзка между равномерно регулярни отдолу функции и техните епиграфики

Теорема 2.2.1 и Теорема 2.2.2 дават връзката между епи регулярните отдолу функции и техните епиграфики.

Теорема 2.2.1. *Ако* $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *е епи* ρ *регулярна отдолу функция, тогава* $C \equiv \operatorname{epi} f$ *е епи* ρ *проксимално регулярно множество в* $\overline{H}$.

Теорема 2.2.2. *Ако епиграфното множество* $C \equiv \operatorname{epi} f$ *в* $\overline{H}$ *е епи* r *проксимално регулярно, то съответстващата му функция* $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *е епи* ρ *регулярна отдолу функция за*

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

2.2 Свойства на равномерно епи проксимално регулярните множества

Доказваме следните рерзултати.

Теорема 2.3.1. *Нека* $C \subset \overline{H}$ *е епи* r *проксимално регулярно множество в* $\overline{H}$. *Нека* $(a, \alpha), (b, \beta) \in C$ *са такива, че*

$$|||(a, \alpha) - (b, \beta)||| < 2r.$$

Тогава за всяко $\lambda \in [0, 1]$ *и* $(x_\lambda, \gamma_\lambda)$, *където*

$$x_\lambda := \lambda a + (1 - \lambda)b \text{ и } \gamma_\lambda := \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta$$

съществува $(u_\lambda, \xi_\lambda) \in C$ *такова, че*

$$d_C(x_\lambda, \gamma_\lambda) = |||(x_\lambda, \gamma_\lambda) - (u_\lambda, \xi_\lambda)||| \leq \varphi(\lambda), \tag{2.3}$$

за

$$\varphi(\lambda) := r - \sqrt{r^2 - \lambda(1 - \lambda)\|a - b\|^2}.$$

Теорема 2.3.2. *Нека* $C \subset \overline{H}$ *е епиграфно множество. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*
(а) C *е епи* r *проксимално регулярно;*
(б) *За всеки* $(a, \alpha), (b, \beta) \in C$ *такива, че* $|||(a, \alpha) - (b, \beta)||| < 2r$ *е в сила*

$$d_C\big(\lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta\big) \leq r - \sqrt{r^2 - \lambda(1 - \lambda)\|a - b\|^2};$$

(в) *За всеки* $(a, \alpha), (b, \beta) \in C$ *такива, че* $|||(a, \alpha) - (b, \beta)||| < 2r$ *е изпълнено, че*

$$d_C\big(\lambda a + (1 - \lambda)b, \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta\big) \leq \frac{1}{2r} \min\{\lambda, 1 - \lambda\}\|a - b\|^2.$$

2.3 Характеризация на епи проксимална регулярност

Теорема 2.4.1. *Нека $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена и полунепрекъсната отдолу функция. Ако f е епи r регулярна отдолу, тогава*
(i) *за всеки (a, α), $(b, \beta) \in \operatorname{epi} f$ такива, че*

$$|||(a, \alpha) - (b, \beta)||| < 2r$$

и всяко $\lambda \in [0, 1]$ съществува $(u_\lambda, \xi_\lambda) \in \operatorname{epi} f$ такова, че

$$\|u_\lambda - (\lambda a + (1 - \lambda)b)\|^2 + |\xi_\lambda - (\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta)|^2 \le \varphi^2(\lambda), \tag{2.4}$$

където

$$\varphi(\lambda) = r - \sqrt{r^2 - \lambda(1 - \lambda)\|a - b\|^2}.$$

И обратно, ако (i) *е в сила, то f е епи ρ регулярна отдолу за $\rho = \frac{r}{\sqrt{2}}$.*

Вземайки $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ в Теорема 2.4.1 получаваме

Следствие 2.4.2. *Ако $f : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е епи r регулярна отдолу функция, тогава за всеки $a, b \in \operatorname{dom} f$ такива, че $|||(a, f(a)) - (b, f(b))||| < 2r$ и всяко $\lambda \in [0, 1]$ съществува $u \in \operatorname{dom} f \cap B[\lambda a + (1 - \lambda)b), \varphi(\lambda)]$ такова, че или*

$$f(u) \le \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b),$$

или

$$\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) < f(u) \le \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) + \varphi(\lambda),$$

където $\varphi(\lambda) = r - \sqrt{r^2 - \lambda(1 - \lambda)\|a - b\|^2}$.

В частност,

$$\inf_{B[\lambda a + (1-\lambda)b, \varphi(\lambda)]} f \le \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) + \varphi(\lambda).$$

Теорема 2.4.1 показва, че *функции, подобни на изпъкналите* f такива, че за някое $r > 0$ е в сила, че за всеки $(a, \alpha), (b, \beta) \in \operatorname{epi} f$ такива, че $||||(a, \alpha) - (b, \beta)|||| < 2r$ и $\lambda \in (0, 1)$ съществува $(u_\lambda, \xi_\lambda) \in \operatorname{epi} f$ такова, че

$$\|u_\lambda - (\lambda a + (1 - \lambda)b)\|^2 + |\xi_\lambda - (\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta)|^2 \le \varphi^2(\lambda),$$

където

$$\varphi(\lambda) = r - \sqrt{r^2 - \lambda(1 - \lambda)\|a - b\|^2}$$

са точно функциите с проксимален субдиференциал, удовлетворяващи за някое $r > 0$ свойството

$$\alpha' \ge f(x) + \langle p, x' - x\rangle - \frac{t}{2}\|x' - x\|^2$$

за всеки $(x', \alpha') \in \mathbb{B}((x, f(x)), 2\rho) \cap \operatorname{epi} f$, където $t \ge r^{-1}$ и $p \in \partial^p f(x)$.

Глава 3

Епсилон субдиференциален метод и интегруемост

Термините, използвани в тази глава са стандартни. С $(X, \|\cdot\|)$ означаваме реално банахово пространство, т.е. пълно нормирано пространство над $\mathbb{R}$. Дуалното простанство X^* на X е банаховото пространство, състоящо се от всички непрекъснати линейни функционали p от X в $\mathbb{R}$. Нормата в X^* отново е означена с $\|\cdot\|$. Стойността на $p \in X^*$ в $x \in X$ е означена с $\langle p, x\rangle$. За $\varepsilon \geq 0$ ε-субдифиренциалът на собствена, полунепрекъсната отдолу и изпъкнала функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в $x \in \operatorname{dom} f$ е множеството

$$\partial_\varepsilon f(x) := \{p \in X^* \,:\, -\varepsilon + \langle p, y - x\rangle \leq f(y) - f(x), \quad \forall y \in X\}$$

и $\partial_\varepsilon f(x) = \varnothing$ за $x \in X \setminus \operatorname{dom} f$. Разбира се, за $\varepsilon = 0$ множеството $\partial_0 f(x)$ съвпада със субдиференциала на f в x в смисъл на *изпъкналия анализ* $\partial f(x)$. *Домейнът* на ε-субдифиренциал се бележи с $\operatorname{dom} \partial_\varepsilon f$ и се състои от всички точки $x \in X$ такива, че $\partial_\varepsilon f(x)$ е непразно. Въпреки, че $\partial f(x)$ може да бъде празното множество, то за $\varepsilon > 0$ множествата $\partial_\varepsilon f(x)$ са непразни ако $x \in \operatorname{dom} f$.

Епсилон субдиференциалния метод е добре известен и широко използван за минимизирането на изпъкнали функции, виж [12, 13]. В тази глава въвеждаме и развиваме вариант на епсилон субдиференциалния метод (ЕСМ).

ЕСМ се прилага за дадена собствена, полунепрекъсната отдолу и изпъкнала функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, дефинирана върху банахово пространство X, такава че

$$0 = f(0) = \min_{x\in X} f(x)$$

с предварително фиксирани параметри $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \varepsilon)$.

Започвайки в произволно $x_0 \in \operatorname{dom} f$, за $i = 0, 1, \ldots$

- ако $0 \in \partial_\varepsilon f(x_i)$, то КРАЙ;

- ако $0 \notin \partial_\varepsilon f(x_i)$, за
$$\varphi_{x_i}(K) := \inf_{x \in X} F_{x_i}(K, x),$$
  където
$$F_{x_i}(K, x) := f(x) - f(x_i) + \varepsilon + K\|x - x_i\|,$$
  намираме $K_i > 0$ такова, че $\varphi_i(K_i) = 0$.

  Избираме произволно x_{i+1}, удовлетворяващо неравенствата
$$0 \le f(x_{i+1}) - f(x_i) + \varepsilon + K_i\|x_{i+1} - x_i\| \le \delta.$$

В крайномерно прострaнтво е възможно $\delta = 0$ и ECM е много по-опростен. В този случай x_{i+1} е единственото решение на уравнението
$$f(x_{i+1}) - f(x_i) + \varepsilon + K_i\|x_{i+1} - x_i\| = 0.$$

Връщайки се към банаховия случай, ако за някое $c > 0$ функцията f удовлетворява
$$f(x) \ge c\|x\| \text{ за всяко } x \in X,$$
параметарът δ е подходящо избран и началната точка $x_0 \in \operatorname{dom} \partial f$, то броят на итерациите n на ECM може да бъде оценен посредствам
$$n\sqrt{\varepsilon} \le \text{const}.$$
За доказателството на тази оценка се използва Лема 3.1.5. Ще отбележим, че директната оценка, която следва от класическия метод е
$$n\varepsilon \le \text{const}.$$
Тъй като получената от нас оценка влече, че $n\varepsilon$ клони към 0, когато ε клони 0, можем да представим ново доказателство на теоремата на *Moreau-Rockafellar*:

Теорема 3.1.1. *[45, 46] Нека X е банахово пространство. Нека g и h са собствени, полунепрекъснати отдолу и изпъкнали функции от X в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ако*
$$\partial g \subset \partial h,$$
то
$$h = g + \text{const}.$$

Използваме ECM, за да докажем по нов начин следната

Теорема 3.1.2 (Rockafellar [45, 46], виж също [29] Theorem 1.2)**.** *Нека*

$$g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

е собствена, полунепрекъсната отдолу и изпъкнала функция. Нека $\bar{x} \in \operatorname{dom} \partial g$ *и* $\bar{p} \in \partial g(\bar{x})$*. Тогава за всяко* $x \in X$

$$g(x) = g(\bar{x}) + R_{\partial g,(\bar{x},\bar{p})}(x),$$

където

$$R_{\partial g,(\bar{x},\bar{p})}(x) := \sup \Big\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle q_{i+1}, x_i - x_{i+1} \rangle :$$

$$x_0 = x,\ x_n = \bar{x},\ q_n = \bar{p},\ q_i \in \partial g(x_i), n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

За да оценим броя на итерациите на ЕСМ, доказваме

Лема 3.1.5. *Нека* $n \in \mathbb{N}$ *и* $A > 0$, $B > 0$, $\varepsilon > 0$ *са реални числа. Ако съществуват реални числа* $a_1, \ldots, a_n$ *и* $b_1, \ldots, b_n$*, удовлетворяващи следните условия*

$$a_i > 0 \text{ и } b_i > 0 \text{ за всяко } i \in \{1, \ldots, n\},$$
$$a_i\, b_i \geq \varepsilon \text{ за всяко } i \in \{1, \ldots, n\},$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq A,\ \sum_{i=1}^{n} b_i \leq B,$$

тогава е в сила неравенството

$$n \leq \sqrt{\frac{AB}{\varepsilon}}.$$

3.1 Вариант на епсилон субдиференциален метод (ЕСМ)

Разглждаме някои от свойствата на ЕСМ, работейки със собствена, полунепрекъсната отдолу и изпъкнала функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, такава че

$$\min_{x \in X} f(x) = f(0) = 0,$$

и фиксирани $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon > \delta > 0$.

Следващият резултат показва какво се случва в една от итерациите на ЕСМ.

Лема 3.2.1. *Нека* $x_0 \in \operatorname{dom} f$*. Функцията* $\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *дефинирана като*

$$\varphi_{x_0}(K) := \inf_{x \in X} F_{x_0}(K, x),$$

където

$$F_{x_0}(K, x) := f(x) - f(x_0) + \varepsilon + K\|x - x_0\|,$$

е строго монотонно растяща и локално липшицова в интервала $(0, \infty)$.

Ако $0 \notin \partial_\varepsilon f(x_0)$, *то*

(i) *съществува* $K_0 > 0$, *такова, че* $\varphi_{x_0}(K_0) = 0$;

(ii) *за всяко* $x_1 \in X$ *такова, че*

$$0 \leq f(x_1) - f(x_0) + \varepsilon + K_0\|x_1 - x_0\| \leq \delta,$$

съществуа $p_1 \in \partial_\delta f(x_1)$ *такова, че*

$$K_0 \geq \|p_1\| - \delta,$$

и

$$\langle p_1, x_1 - x_0 \rangle \leq f(x_1) - f(x_0) + \varepsilon + \delta.$$

Освен това,

$$K_0 \leq \min\{\|p\| : p \in \partial_\varepsilon f(x_0)\},$$

и ако $p_0 \in \partial_\delta f(x_0)$, *то*

$$\varepsilon \leq (\|p_0\| - \|p_1\|)\|x_1 - x_0\| + \delta \left(2 + \frac{f(x_0)}{K_0}\right).$$

В контекстът на ЕСМ Лема 3.2.1 гарантира съществуването на $K_i > 0$. Тъй като x_{i+1} може да бъде произволен δ-минимум, т.е. такова, че

$$0 \leq f(x_{i+1}) - f(x_i) + \varepsilon + K_i\|x_{i+1} - x_i\| \leq \delta.$$

От Лема 3.2.1 следва, че съществува $p_{i+1} \in \partial_\delta f(x_{i+1})$ такова, че

$$K_i \geq \|p_{i+1}\| - \delta,\ i \geq 0,$$

$$\langle p_{i+1}, x_{i+1} - x_i \rangle \leq f(x_{i+1}) - f(x_i) + \varepsilon + \delta,\ i \geq 0,$$

и освен това

$$\varepsilon \leq (\|p_i\| - \|p_{i+1}\|)\|x_{i+1} - x_i\| + \delta \left(2 + \frac{f(x_i)}{K_i}\right),\ i \geq 1.$$

Следващата Лема 3.2.2 показва, че ЕСМ е приключва за краен брой итерации.

Лема 3.2.2. *ЕСМ приключва след краен брой итерации* n, *където* $n \leq \dfrac{f(x_0)}{\varepsilon - \delta} + 1$ *в точка* x_{n-1} *на* ε-*минимум на* f.

Лема 3.2.3. *Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена, полунепрекъсната отдолу и изпъкнала функция, такава че $f(x) \geq 2c\|x\|$ за всяко $x \in X$ и някое $c > 0$.*

Приложен за f с $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такива, че

$$\delta \leq \frac{c}{2}, \quad \delta \leq 1, \quad \delta\left(1 + \frac{f(x_0)}{c}\right) \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

ЕСМ приключва след n на брой итерации и

$$\sum_{i=0}^{n-2} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \frac{2f(x_0)}{c}.$$

Освен това за броя на итерациите n имаме оценката

$$n \leq 2\sqrt{\frac{f(x_0)(\|p_0\| + 1)}{c\varepsilon}} + 2, \tag{3.1}$$

където $p_0 \in \partial_\varepsilon f(x_0)$ е произволен субградиент.

Нека обърнем внимание, че p_0 в (3.1) като елемент на $\partial_\varepsilon f(x_0)$ зависи от ε. Но когато точкаата $x_0 \in \operatorname{dom} \partial f$ субградиентът p_0 може да бъде взет от $\partial f(x_0)$ и в този случей оценката за броя на итерациите на ЕСМ е от вида $n\sqrt{\varepsilon} \leq \text{const}$.

С помощта на Лема 3.2.3 доказваме по нов начин Теорема 3.1.2.

Заключение

Основни приноси

В Глава 1 е дадено ново доказателсво на едно присъщо свойство на проксимално регулярните множества, дефинирани в хилбертово пространство. В доказателството се използват основно методи от *математическия анализ*.
В Глава 2 е представена характеризцията на равномерно регулярни отдолу функции, дефинирани върху хилбертово пространство. Въведено и изследвано е понятие, наречено *епи проксимална регулярност* на епиграфно множество, което слабо се различава от добре известното свойство проксимална регулярност на множество.
В Глава 3 представяме вариант на класическия епсилон субдиференциален метод. Използваме този вариант, за да докажем по нов начин теоремата на *Moreau-Rockafellar*, че една собствена, полунепрекъсната отдолу и изпъкнала функция, дефинирана върху банахово пространство, се определя с точност до константа от нейния субдиференциал.

Публикации, свързани с дисертацията

- M. Konstantinov and N. Zlateva, *Epsilon subdifferential method and integrability*, Journal of Convex Analysis **29** (2021), 571–582.
- M. Konstantinov, N. Zlateva, *Direct proofs of intrinsic properties of prox-regular sets in Hilbert spaces*, Journal of Applied Analysis (2023)(to appear).
- M. Konstantinov, N. Zlateva, *Epigraphical characterization of uniformly lower regular functions in Hilbert spaces*, Journal of Convex Analysis (2023)(to appear).

Апробация

Някои от резултатите, съдържащи се в дисертацията, са представени от автора на следните конференции:

- M. Konstantinov and N. Zlateva, *Epsilon Subdifferential Method And Integrability*, 15-th International Workshop on Well-Posedness of Optimization Problems and Related Topics, June 28–July 2, 2021, Borovets, Bulgaria, http://www.math.bas.bg/~bio/WP21/;
- M. Konstantinov and N. Zlateva, *Direct proofs of intrinsic properties of prox-regular sets in Hilbert spaces*, Spring Scientific Session, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University “St. Kliment Ohridski”, 26 March, 2022, Sofia, Bulgaria, https://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/proletna-nauchna-sesiya-na-fmi-2022/;
- M. Konstantinov and N. Zlateva, *Epsilon Subdifferential Method and Integrability*, 10-th International Conference on Numerical Methods and Applications, August 22–26, 2022, Borovets, Bulgaria, http://www.math.bas.bg/~nummeth/nma22/index.html.

Декларация за автентичност

Авторът декларира, че дисертацията съдържа оригинални резултати, получени от него или в сътрудничество с неговия научен ръководител. Използваните резултати на други учени са цитирани коректно.

Благодарности

Искам да изкажа огромни благодарности на научния си ръководител проф. Надя Златева за помощта, насоките, организационните техники, работната етика и всичко друго, което тя ми даде без каквито и да е колебания. Нейната подкрепа бе незаменима както за моето развитие като математик, така и за да успея да се докосна до изкуството да правиш научни изследвания в областта на математиката. Също така искам да благодаря на д-р Милен Иванов, който също работи с мен, помагаше ми и ми отвори очите за геометричните интерпретации в математиката. Милен, Надя отново ви благодаря за всичко, което направихте за мен!

Библиография

[1] S. Adly, F. Nacry and L. Thibault, *Preservation of prox-regularity of sets with applications to constrained optimization*, SIAM J. Optim. **26** (2016), 448–473.

[2] S. Adly, F. Nacry and L. Thibault, *Discontinuous sweeping process with prox-regular sets*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **23** (2017), No 4, 1293–1329.

[3] S. Adly, F. Nacry and L. Thibault, *Prox-regularity approach to generalized equations and image projection*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **24** (2018), 677–708.

[4] S. Adly, F. Nacry and Lionel Thibault, *Prox-regular sets and Legendre-Fenchel transform related to separation properties*, Optimization (2020), DOI: 10.1080/02331934.2020.1852404

[5] S. Adly, F. Nacry and L. Thibault, *New metric properties for prox-regular sets*, Mathematical Programming **189** (2021), No 1, 7–36.

[6] M. V. Balashov and G. E. Ivanov, *Weakly convex and proximally smooth sets in Banach spaces*, Izv. Math. **73** (2009), 455–499.

[7] S. Bartz, H. H. Bauschke, J. M. Borwein, S. Reich, X. Wang, *Fitzpatrick functions, cyclic monotonicity and Rockafellar's antiderivative*, Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications **66** (2007), No 5, 1198–1223.

[8] F. Bernard and L. Thibault, *Prox-regular functions and sets in Banach spaces*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 25–47.

[9] F. Bernard, L. Thibault and D. Zagrodny, *Integration of primal lower nice functions in Hilbert spaces*, J. Optimization Theory Appl. **124** (2005), No. 3, 561–579.

[10] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, *Characterizations of prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces*, J. Convex Anal. **13** (2006), 525–559.

[11] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, *Prox-regular sets and epigraphs in uniformly convex Banach spaces: various regularities and other properties*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 2211-2247.

[12] D. Bertsekas, S. Mitter, *Steepest Descent for optimization problems with nondifferentiable cost functionals*, In: Proc. 5th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems, Princeton, N.J., (1971), 347–351.

[13] D. Bertsekas, S. Mitter, *A descent numerical method for optimization problems with nondifferentiable cost functionals*, SIAM Journal on Control **11** (1973), No. 4, 637–652.

[14] J. M. Borwein, *A note on ε-subgradients and maximal monotonicity*, Pac. J. Math. **103** (1982), 307–314.

[15] J. M. Borwein and J. R. Giles, *The proxima normal formula in Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **302** (1987), 371–381.

[16] J. M. Borwein, A. S. Lewis, *Convex analysis and nonlinear optimization Theory and Examples*, 2nd ed., Springer, New York (2006).

[17] J. M. Borwein and H. M. Strójwas, *Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space. I. Theory*, Canad. J. Math. **38** (1986), No 2, 428–472.

[18] A. Brøndsted, R. T. Rockafellar, *On the subdifferentiability of convex functions*, Proc. Am. Math. Soc. **16** (1965), 605–611.

[19] F. H. Clarke, R. J. Stern and P. R. Wolenski, *Proximal smoothness and the lower-C^2 property*, J. Convex Anal. **2** (1995), 117–144.

[20] G. Colombo and L. Thibault, *Prox-regular sets and applications*, In: Handbook of nonconvex analysis and applications, (2010), Int. Press, Somerville, MA, 99–182.

[21] C. Combari, A. Elhilali Alaoui, A. Levy, R. A. Poliquin and L. Thibault, *Convex composite functions in Banach spaces and the primal-lower-nice property*, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), 3701–3708.

[22] R. Correa, A. Jofré and L. Thibault, *Characterization of lower semicontinuoud convex fuctions*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 61–72.

[23] H. Federer, *Curvature measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 418–491.

[24] V. Goncharov and G. E. Ivanov, *Strong and weak convexity of closed sets in a Hilbert space*, Operations Research, Engineering, and Cyber Security, Springer Optimization and Its Application series **113** (2017), 259-297.

[25] A. D. Ioffe, *Proximal analysis and approximate subdifferentials*, J. London Math. Soc. **41** (1990), 175–192.

[26] G. E. Ivanov, *Weak convexity in the sense of Vial and Efimov-Stechkin*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **69** (2005), 35–60 (in Russian); English tanslation in Izv. Math. **69** (2005), 1113–1135.

[27] M. Ivanov and N. Zlateva, *On primal lower-nice property*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. **54** (2001), No 11, 5–10.

[28] M. Ivanov and N. Zlateva, *Subdifferential characterization of primal lower-nice functions on smooth Banach spaces*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. **57** (2004), No 5, 13–18.

[29] M. Ivanov, N. Zlateva, *A new proof of the integrability of the subdifferential of a convex function on a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **136**, 2008, No 5, 1787–1793.

[30] I. Kecis and L. Thibault, *Subdifferential characterization of s-lower regular functions*, Applicable Anal., **94** (2015) Issue 1, 85–98.

[31] I. Kecis and L. Thibault, *Moreau envelopes of s-lower regular functions*, Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., **127** (2015), 157–181.

[32] M. Konstantinov and N. Zlateva, *Epsilon subdifferential method and integrability*, J. Convex Anal. **29** (2022), No 2, 571-582.

[33] M. Konstantinov and N. Zlateva, *Direct proofs of intrinsic properties of prox-regular sets in Hilbert spaces*, J. Appl. Anal. (2023) (to appear).

[34] M. Konstantinov and N. Zlateva, *Epigraphical characterization of uniformly lower regular functions in Hilbert spaces*, J. Convex Anal. (2023) (to appear).

[35] A. Levy, R. A. Poliquin and L. Thibault, *Partial extension of Attouch's theorem with applications to proto-derivatives of subgradient mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 1269–1294.

[36] M. Mazade and L. Thibault, *Primal lower nice functions and their moreau envelopes*, In: Computational and Analytical Mathematics: In Honor of Jonathan Borwein's 60-th Birthday, David H. Bailey, Heinz H. Bauschke, Peter Borwein, Frank Garvan, Michel Théra, Jon D. Vanderwer, Henry Wolkowicz Editors, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **50** (2013), 521–553.

[37] J.-J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace hilbertien*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 273–299.

[38] J.-J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France (1966–1967).

[39] F. Nacry and L. Thibault, *Regularization of sweeping process: old and new*, Pure Appl. Funct. Anal. **4** (2019), 59–117.

[40] R. R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, 2nd ed. Lecture Notes in Mathematics. 1364. Berlin: Springer-Verlag (1993).

[41] R. A. Poliquin, *Integration of subdifferentials of nonconvex functions*, Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl. **17** (1991), 385–398.

[42] R. A. Poliquin, *An extension of Attouch's Theorem and its application to second-order epidifferentiation of convexly composite functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), 861–874.

[43] R. A. Poliquin and R. T. Rockafellar, *Prox-regular functions in variational analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 1805–1838.

[44] R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar and L. Thibault, *Local differentiability of distance functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), No. 11, 5231–5249.

[45] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pac. J. Math. **17** (1966), 497–510.

[46] R. T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pac. J. Math. **33** (1970), 209–216.

[47] R. T. Rockafellar and R.J.-B. Wets, *Variational analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, New York **317** (1998).

[48] P. D. Taylor, *Subgradients of a convex function obtained from a directional derivative*, Pac. J. Math. **44** (1973), 739–747.

[49] L. Thibault, *Limiting convex subdifferential calculus with applications to integration and maximal monotonicity of subdifferential*, In: Constructive, experimental, and nonlinear analysis. Selected papers of a workshop, Limoges, France, September 22–23, (1999) (M. Théra ed.), Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), publ. for the Canadian Mathematical Society. CMS Conf. Proc. **27** (2000), 279–289.

[50] L. Thibault, D. Zagrodny, *Integration of subdifferentials of lower semicontinuous functions on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **189** (1995), No. 1, 33–58.

[51] L. Thibault, *Unilateral variational analysis in Banach spaces. Part I: General Theory. Part II: Special Classes of Functions and Sets* (2022) ISBN: 978-981-125-816-9, World Scientific Pub Co Inc, (2023)

[52] L. Thibault and D. Zagrodny, *Integration of subdifferentials of lower semicontinuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **189** (1995), 33–58.

[53] J.-P. Vial, *Strong and weak convexity of sets and functions*, Math. Oper. Res. **8** (1983), 231–259.

[54] C. Zalinescu, *Convex analysis in general vector spaces*, Singapor, World Scientific (2002).

[55] N. Zlateva, *Integrability through infimal regularization*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. **68** (2015), No. 5, 551–560.