

Софийски университет “Св. Климент Охридски”
Физически факултет
Катедра “Теоретична физика”



Радостина Жекова Желева

Структура и астрофизика на самогравитиращи обекти в
мултискаларни теории

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация за присъждане на образователната и научна степен
„ДОКТОР“

Професионално направление 4.1 Физически науки
Научна специалност: 01.03.01 Теоретична и математическа физика

Научен ръководител:
чл-кор. проф. дфзн Стойчо С. Язаджиев

СОФИЯ • 2022

Докторантът е зачислен в редовна докторантура към катедра Теоретична физика при Физически факултет на СУ “Св. Климент Охридски”. Изследванията по дисертацията са проведени във Физическия факултет на Софийски Университет.

Дисертационната работа е съставена от 73 страници разделени в 3 глави. Съдържа 17 фигури, а библиографията обхваща 136 заглавия.

Дисертационният труд е обсъден на заседание на катедрен съвет в катедра Теоретична физика на Физически факултет, СУ “Св. Климент Охридски”, проведено на 14.12.2022 г., и насочен за обсъждане от Факултетен съвет за защита пред научно жури в състав:

проф. дмн Анжела Славова Попиванова, ИМИ-БАН,
доц. дфзн Лилия Кирилова Ангелова, ИЯИЯЕ-БАН,
доц. д-р Сава Димитров Донков, ИА с НАО-БАН,
проф. дфзн Радослав Христов Рашков, Физически факултет на “Св. Климент Охридски”,
доц. д-р Галин Николаев Гюлчев, Физически факултет на “Св. Климент Охридски”.

Съдържание

1	Квазипериодични осцилации от акреционен диск около въртящи се про-	
	ходими пространствено-времеви тунели	3
1.1	Въртящи се пространствено-времеви тунели	4
1.2	Кръгови орбити в екваториалната равнина	5
1.3	Стабилност на кръговите орбити в екваториалната равнина	6
1.4	Свойства на епицикличните честоти	8
1.5	Нелинейни резонанси	11
1.6	Заклучение	17
2	Скаларизирани черни дупки в мултискаларната	
	Айнщайн-Гаус-Боне гравитация	18
2.1	Мултискаларна-Айнщайн-Гаус-Боне гравитация	18
2.2	Размерно редуцирани уравнения за скаларизирани черни дупки	18
2.3	Числена постановка и резултати	21
2.3.1	Черни дупки със скаларна коса – линейно и експоненциално куплиране	21
2.3.2	Решения описващи спонтанно скаларизирани черни дупки	23
2.3.3	Първа куплираща функция	23
2.3.4	Втора куплираща функции	25
2.4	Заклучение	27
3	Неутронни звезди в мултискаларната теория	
	на Гаус-Боне	28
3.1	Размерно редуцирани уравнения за скаларизирани неутронни	28
3.2	Числена постановка и резултати	29
4	Заклучение	31

Актуалност на темата, цел и задачи на дисертационния труд

Скорошните директни детектирания на гравитационни вълни от различни бинарни източници проправиха път към гравитационно-вълновата астрономията, която от своя страна комбинирана с електромагнитните наблюдения оформя мултимесинджър астрономията. Мултимесинджър астрономията е могъщо средство за изучаване на Вселената, на което се възлагат големи надежди за разбулване на много загадки в Природата, като тъмната материя и тъмната енергия, както и за търсене на нови фундаментални полета и нови екзотични обекти. Въпреки че общата теория на относителността е в блестящо съгласие с всички наблюдения до момента, има причини да отидем отвъд приетия модел на гравитацията в търсене на нова фундаментална физика. Именно скаларите полета са най-прости за разглеждане и те се появяват естествено в разширенията на Стандартния модел във физиката на елементарните частици и в алтернативните теории за гравитацията. В тези теории гравитацията се описва както от метричния тензор така и от едно или няколко скаларни полета. От голям интерес за съвременната физика са теории със скаларни полета куплирани към кривината на пространство-времето, към които спадат и мултискаларните теории на Гаус-Боне. Тези теории предсказват съществуването на нови явления, като спонтанна скаларизация на черни дупки и неутронни зезди, а така също и на нов тип обекти като пространствени тунели без необходимост от екзотична материя. Това от своя страна поражда нова интересна астрофизика свързана с тези обекти. Целта на настоящата дисертация е да покаже съществуването на скаларизирани самогравитиращи компактни обекти поддържащи нетривиални скаларни полета в мултискаларните теории на гравитацията и специално в Айнщайн-Гаус-Боне гравитацията, където скаларните полета взаимодействат с пространствено-времевата кривина посредством топологичния инвариант на Гаус-Боне. По-специално в настоящата дисертация числено е показано съществуването на скаларизирани черни дупки и неутронни звезди с бързо намаляваща "скаларна коса" в мултискаларните Гаус-Боне теории, чиито скаларно пространство е максимално симетрично тримерно риманово пространство. Конструирването на тези решения дава възможност да се изследва астрофизиката около тях с цел да се търсят астрофизични ефекти с ясно изразена сигнатура на скаларните полета, която би могла да се наблюдава със следващото поколение гравитационни детектори и/или електромагнитни телескопи. Като явен пример са изследвани квазипериодичните осцилации от акреционни дискове около въртящи се пространствени-тунели като са анализирани разликите с подобни осцилации за черни дупки на Кер, които биха помогнали да се разграничат двата типа сомогравитиращи обекти при бъдещите наблюдателни мисии. В момента се подготвя ново поколение спектрометри като мисиите eXTP (Китай), STROBE-X (NASA) и LOFT (ESA) , които ще притежават изключително висока точност при измерването на честотите на квази-периодичните осцилации и ще са напълно способни да засекаят ясни знаци за съществуването на фундаментални скаларни полета и нови екзотични обекти.

Структура и обем на дисертацията

В Глава 1 са представени резултатите от изследването на квазипериодичните осцилации от акреционни дискове около въртящи се пространствено-времеви тунели. Дискутирана е стабилността на кръговите орбити в екваториалната равнина и са представени аналитични формули за епицикличните честоти. Направен е сравнителен анализ със случая на черни дупки на Кер.

В Глава 2 се въвежда мултискаларната Айнщайн-Гаус-Боне гравитация чрез нейното действие. След това са представени размерно редуцираните полви уравнения описващи черни дупки в теорията при съответните предположения. Дадени са също и числено конструирани решения описващи черни дупки както и техни физични характеристики като площ на хоризонта, ентропия и радиусът на фотонната сфера.

Глава 3 е посветена на неутронните звезди в мултискаларната Айнщайн-Гаус-Боне гравитация. Представени са размерно-редуцираните полви уравнения описващи структурата на неутронните звезди в теорията. Представени са също и числените решения за неутронни звезди и осовните зависимости като маса-централна плътност, маса-радиус на звездата и енергия на свързване-барионна маса.

1 Квазипериодични осцилации от акреционен диск около въртящи се проходими пространствено-времени тунели

Рентгеновата спектроскопия е обещаващ инструмент за тестване на гравитацията в режим на силни полета като изучава емисиите от акреционни дискове около компактни обекти. Различни характеристики на рентгеновия поток ще бъдат измерени с голяма точност чрез следващото поколение рентгенови спътници като LOFT [1], eXTP [2], или STROBE-X [3], в частност квази-периодичните осцилации (КПО) на акреционния поток. Квази-периодичните осцилации са експериментално засечени в рентгеновия поток от редица нискомасивни бинари системи, включително неутронни звезди или черни дупки, както и няколко свръхмасивни активни галактически ядра. Те представляват редица характерни пикове, появяващи се в рентгеновия спектър от компактният обект, включително нискочестотен сигнал с ниска честота (Hz) и двойка високочестотни (kHz) трептения.

Точният физически механизъм за образуване на квази-периодичните осцилации в момента е неизвестен, но някои характеристики предполагат, че те са хидродинамично явление, а не проява на кинематични ефекти в акреционния диск като модулацията на Доплер на потоци от изолирани горещи петна. Такъв пример е откриването на корелацията между ниско и високочестотните квази-периодичните осцилации, което води до това, че съотношението им остава стабилно сред различни рентгенови източници [4]-[5]. Това мотивира разработването на дискови сеизмологични модели, които обясняват КПО посредством определени уловени моди на трептенията на диска [6, 7, 8]. Освен това наблюденията показват, че високочестотната скала на КПО е обратно пропорционална на масата на компактният обект и че двойката пикове следват постоянно съотношение $3 : 2$. По този начин получаваме индикации, че високочестотните КПО са причинени от релативистичните ефекти, така че да представляват подходяща сонда на фоновото пространство-време. Характерното честотно съотношение на две цели числа допълнително предполага, че източникът на квази-периодичните осцилации може да бъде някакъв нелинеен резонансен процес, протичащ във вътрешния диск.

За тънки акреционни дискове са разработени приблизителни резонансни модели, които могат да дадат обяснение за наблюдаваните високочестотни КПО [9, 10, 11, 12]. Ако приемем, че траекториите на флуида в акреционния диск следват приблизително кръгови геодезични орбити, разположени в една равнина, можем да свържем две епициклически честоти с тяхната динамика. Те описват колебанията съответно на кръгово движение в радиални и вертикални посоки. При линейно приближение радиалните и вертикални колебания могат да се считат за независими и могат да бъдат представени като две декуплирани хармонични трептения. Нелинейните ефекти обаче предизвикват взаимодействия между двата режима на трептене и различните видове резонанси могат да бъдат предизвикани, когато епициклически честоти или линейни комбинации от тях са в съотношение на две цели числа. В зависимост от физическия процес, протичащ в акреционния диск, резонансите могат да бъдат причинени и от куплирането на орбиталното и от едно от епициклическите движения.

Квази-периодичните осцилации се използват също и като инструмент за тестване на гравитационни теории в редица скорошни научни работи [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. Свойствата на епициклическите честоти зависят силно от структурата на пространство-времето и могат да доведат до наблюдателни ефекти, които могат да разграничат алтернативните теории за гравитацията в режим на силни полета. Ако данните от наблюдението са моделирани правилно, КПО могат да предоставят доказателства за съществуването на по-екзотични компактни обекти като пространствено-времени тунели и голи сингулярности. Целта на нашата работа е да изследваме квази-периодичните осцилации за клас

въртящи се проходими пространствено-времени тунели чрез прилагане на резонансните модели и да преценим някои от техните характеристики, което може да бъде важно за наблюденията.

Пространствено-времените тунели са едно от значимите предсказания на гравитационните теории, което все още не е потвърдено наблюдателно. В класическата Обща теория на относителността съществуването на проходими пространствено-времени тунели изисква нарушаването на изотропното енергетично условие [22, 23, 24]. Въпреки това, в квантовата гравитация този проблем се решава естествено, тъй като квантовите полета могат да осигурят по естествен начин необходимата отрицателна плътност на енергията. Алтернативно, проходими пространствено-времените тунели възникват в някои модифицирани теории за гравитацията като в теорията на Гаус-Боне или $f(R)$ теории, където енергетичните условия са нарушени от самото гравитационно взаимодействие без нужда от допълнителни полета и материя [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]. Те могат да съществуват и в смесена система с друг компактен обект като бозонна или неутронна звезда [33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40]. По този начин, идеята, че пространствено-времените тунели могат да се образуват в природата е разумно добре подкрепена от теоретични аргументи, и една от целите на следващото поколение гравитационни експерименти е да се търсят доказателства за тяхното съществуване.

Целта на тази глава е да изследва допълнителни наблюдаеми ефекти в електромагнитния спектър, които могат да разграничат пространствено-времените тунели от други компактни обекти, чрез изучаване на високочестотните квази-периодични осцилации в пространството на тунела. За целта разглеждаме клас геометрии, конструирани от Тео, който описват общ стационарен и аксисиметричен пространствено-времени тунел [24]. Геометрията на въртящия се пространствено-времени тунел на Тео е обобщение на статичния сферично симетричен пространствено-времени тунел на Морис-Торн [41], следващщата идея.

1.1 Въртящи се пространствено-времени тунели

Общият клас геометрии, който описва стационарен аксисиметричен пространствено-времени тунел е получен от Тео във формата [24]

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 K^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2], \quad (1)$$

където всички метрични функции зависят само от сферичните координати r и θ , и са регулярни върху оста на симетрията $\theta = 0, \pi$. Метричната функция N е свързана с гравитационното червено отместване, K е мярка за радиалното разстояние по отношение на координатното начало, ω се свързва с въртенето на пространствено-времения тунел, докато b определя формата на гърловината на пространствено-времения тунел.

Тук ще разгледаме класа на геометриите, където метричните функции N , K , b и ω зависят само от радиалната координата. Този случай е от особено физическо значение, тъй като геодезичните уравнения, които определят разпространението на частиците и светлината стават интегрируеми. За да илюстрираме някои характерни ефекти за геометриите на пространствено-времения тунел, избираме определен показател, който е достатъчно прост, но все още представителен за класа. Задаваме функцията на формата и функцията за радиално разстояние да бъдат равни на константите, докато за останалата част от метричните функции приемаме

$$N = \exp\left(-\frac{r_0}{r}\right), \quad \omega = \frac{2J}{r^3}, \quad b = r_0, \quad K = 1. \quad (2)$$

По този начин масата на пространствено-времевия тунел е равна на $M = r_0$. Можем допълнително да въведем параметър на въртене $a = J/M^2$ и да представим показателя в безизмерна форма, като направим конформната трансформация и премащабираме

$$dS^2 = r_0^{-2} ds^2, \quad t \rightarrow r_0 t, \quad r \rightarrow r_0 r.$$

По този начин получаваме решение на пространствено-времевия тунел с единица маса и гърловина, разположена при $r = 1$.

1.2 Кръгови орбити в екваториалната равнина

За всяка стационарна и аксисиметрична метрика можем да изведем някои общи изрази, които определят кинематичните величини на кръговите орбити в екваториалната равнина. Нека разгледаме общата форма на метриката

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2, \quad (3)$$

и означим специфичната енергия и ъгловия момент на частиците съответно E и L . Тъй като имаме два Килингови вектора по отношение на времевите трансляции и ротации около оста на симетрията, енергията и ъгловият момент се запазват върху геодезичните. В допълнение, на всяка геодезична траектория имаме ограничението $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \epsilon$, където ϵ взема стойността $\epsilon = -1$ за времеподобна геодезична, и $\epsilon = 0$ за изотропна геодезична. Избирайки афинен параметър τ можем да изразим времеподобните геодезични уравнения в екваториалната равнина като

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= \frac{Eg_{\phi\phi} + Lg_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= -\frac{Eg_{t\phi} + Lg_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \\ g_{rr} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 &= -1 + \frac{E^2 g_{\phi\phi} + 2ELg_{t\phi} + L^2 g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}. \end{aligned} \quad (4)$$

В последното уравнение можем да въведем ефективен потенциал V_{eff} даден от

$$V_{eff} = -1 + \frac{E^2 g_{\phi\phi} + 2ELg_{t\phi} + L^2 g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}. \quad (5)$$

Качественото поведение на радиалното движение се определя напълно от свойствата на ефективния потенциал. По-специално кръговите орбити съответстват на неподвижните му точки

$$V_{eff}(r) = 0, \quad V_{eff,r}(r) = 0, \quad (6)$$

където запетаята означава производна по отношение на радиалната координата. Решавайки тази система от уравнения можем да получим формули за специфичната енергия и ъглов момент върху кръговите орбити, а именно

$$E = -\frac{g_{tt} + g_{t\phi}\omega_0}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\omega_0 - g_{\phi\phi}\omega_0^2}}, \quad (7)$$

$$L = \frac{g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\omega_0}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\omega_0 - g_{\phi\phi}\omega_0^2}}. \quad (8)$$

За ъглова скорост съответно получаваме

$$\omega_0 = \frac{d\phi}{dt} = \frac{-g_{t\phi,r} \pm \sqrt{(g_{t\phi,r})^2 - g_{tt,r}g_{\phi\phi,r}}}{g_{\phi\phi,r}}, \quad (9)$$

където знаците $+/-$ съответстват на орбитално движение в посока на въртене на компактният обект или в противоположна посока.

Времениподобни кръгови орбити съществуват в областта, където енергията и ъгловият импулс са добре дефинирани. Кривите, където стават разходящи, съответстват на местоположението на нулевите кръгови орбити, т.е. фотонните пръстени. Те дават границата на областта на съществуване на времениподобните кръгови орбити. Ако е налице само нестабилен фотонен пръстен, областта на съществуване на времениподобните кръгови орбити е едносвързана и за асимптотично плоско пространство-време местоположението на фотонния пръстен дава долната ѝ граница в радиална посока. Ако има множество фотонни пръстени, областта на съществуване може да се състои от няколко несвързани части, т.е. кръговите орбити ще бъдат разположени в няколко пръстеновидни области с интервали между тях.

Като пресметнем кинематичните характеристики за пространството на проходим пространствен-времени тунел (1), получаваме изразите

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega + \frac{r^2 K^2 \omega_{,r} \pm \sqrt{N_{,r}^2 (r^2 K^2)_{,r} + r^4 K^4 (\omega_{,r})^2}}{(r^2 K^2)_{,r}}, \\ E &= \frac{N^2 + r^2 K^2 \omega (\omega_0 - \omega)}{\sqrt{N^2 - r^2 K^2 (\omega_0 - \omega)^2}}, \\ L &= \frac{r^2 K^2 (\omega_0 - \omega)}{\sqrt{N^2 - r^2 K^2 (\omega_0 - \omega)^2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

където имаме знака $+/-$ орбити в посока на въртенето на компактният обект или противоположна. В региона съществуват времеви кръгови орбити, за които е удовлетворено неравенството $N^2 - r^2 K^2 (\omega_0 - \omega)^2 > 0$.

На Фигура 1 показваме областта на съществуване на кръговите орбити за конкретното решение за пространствен-времени тунел, дадено от (2). Въртящото се решение на пространствен-времени тунел съществува за всякакви стойности на параметъра на въртене. Въпреки това, тъй като целта ни е да направим сравнение с черната дупка на Кер, ограничаваме се до интервала $a \in [0, 1]$. За да илюстрираме поведението на кръговите орбити в посока противоположна на въртенето на компактният обект, включваме отрицателни стойности на параметъра на въртене $a \in [-1, 0)$. Съвъртящите се кръговите орбити съществуват в цялото пространство около гърловината на пространствен-времени тунел. От друга страна, контравъртящите се частици се изтласкват от въртящия се компактен обект и могат да достигнат само до определено радиално разстояние, оставяйки регион около гърловината на пространствен-времени тунел, където не се допускат контравъртящите кръгови орбити.

1.3 Стабилност на кръговите орбити в екваториалната равнина

Разглеждаме геодезичните уравнения в екваториалната равнина

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0, \quad (11)$$

и правим малка пертурбация на кръговото движение $\tilde{x}^\mu(s) = x^\mu(s) + \xi^\mu(s)$, където $x^\mu(s)$ обозначава кръговата орбита и s е афинния параметър върху геодезичната. Работейки в

линейното приближение можем да получим следната система за отклонението $\xi^\mu(s)$ [42], [43]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi^\mu}{dt^2} + 2\gamma_\alpha^\mu \frac{d\xi^\alpha}{dt} + \xi^b \partial_b \mathcal{V}^\mu &= 0, \quad b = r, \theta \\ \gamma_\alpha^\mu &= [\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\beta (u^0)^{-1}]_{\theta=\pi/2}, \\ \mathcal{V}^\mu &= [\gamma_\alpha^\mu u^\alpha (u^0)^{-1}]_{\theta=\pi/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

където $u^\mu = u^0(1, 0, 0, \omega_0)$ е векторът на 4-скоростта, ω_0 е орбиталната честота.

От уравненията за пертурбациите на кръговите орбити можем да получим епицикличните честоти за въртящите се проходими пространствено-времени тунели

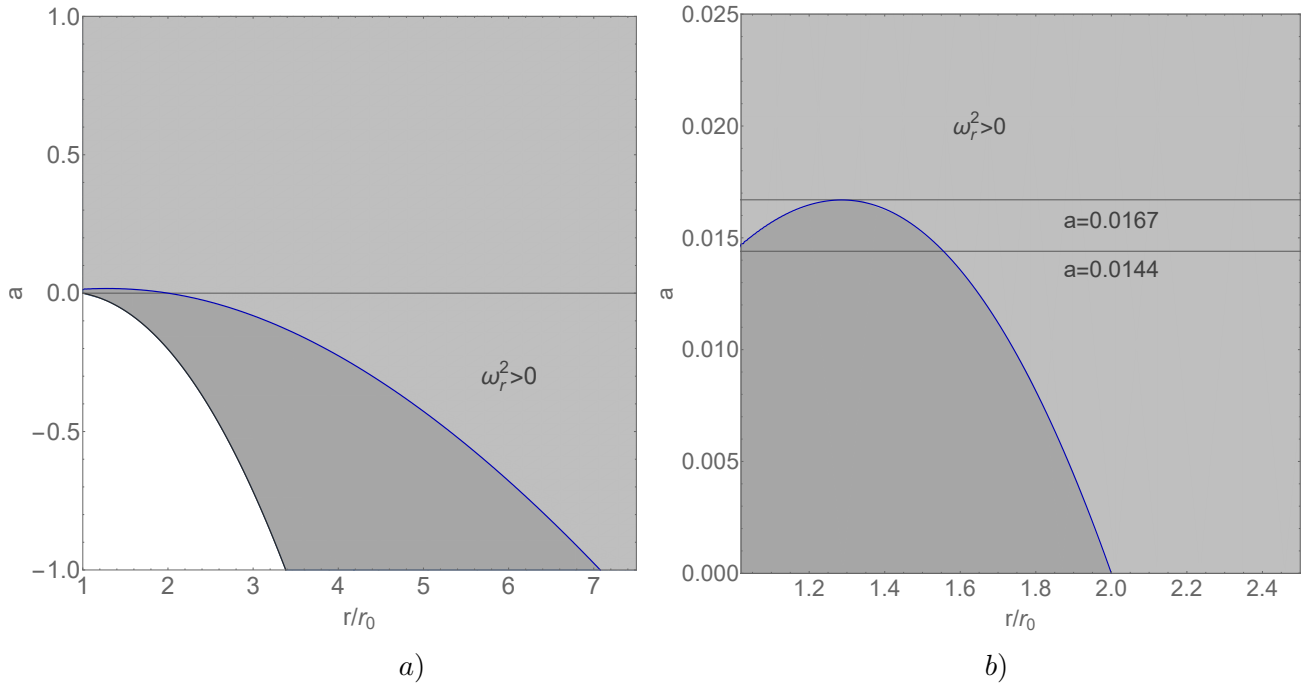
$$\begin{aligned} \omega_\theta^2 &= (\omega_0 - \omega)^2, \\ \omega_r^2 &= \frac{(b-r)}{rN^2} [\omega_\theta^2 r^4 K^4 \omega_{,r}^2 + rK^2(\omega_0 - \omega)(2r(N^2\omega_{,r})_{,r} - 3N^2(r\omega_{,r})_{,r})] \\ &\quad + \omega_\theta^2 (b-r) \left[\frac{K}{r} (r^2 K_{,r})_{,r} - 3K_{,r} (rK)_{,r} \right] \\ &\quad - \frac{(b-r)}{r^2} [3NN_{,r} + rNN_{,rr} - 3r(N_{,r})^2], \end{aligned} \quad (13)$$

където се ограничаваме до класа решения с метрични функции N , K , b и ω в зависещи само от r , а орбиталната честота ω_0 се дава от eq. (10).

От тези изрази можем да извлечем някои общи свойства на разглежданите геометрии на пространствено-времевия тунел. Виждаме, че за всички решения на тунела вертикалната епициклична честота винаги е положителна, така че кръговите орбити винаги са стабилни по отношение на вертикални пертурбации. По този начин линейната стабилност се определя само от радиалната епициклична честота, подобно на случая за черната дупка на Кер. В статична граница получаваме, че вертикалната епициклична честота съвпада с орбиталната честота, подобна на черната дупка Шварцшилд. По този начин кръговото движение се характеризира само с две независими величини.

За да получим допълнителна интуиция за поведението на кръговите орбити, разглеждаме региона на стабилност за конкретното решение на тунела, дадено от уравнение (2). На Фигура 1 представяме кривата, върху която се нулира радиалната епициклична честота, като по този начин се отделя регионът на стабилност на кръговите орбити. В региона над кривата и от дясната ѝ страна неравенството $\omega_r^2 > 0$ е удовлетворено, така че тази част от пространство-времето представлява региона на стабилност на времепопните кръгови орбити в екваториалната равнина.

Виждаме, че за повечето от параметрите на въртане в интервала $a \in [0, 1]$ орбитите въртящи се по посока на тунела са стабилни в цялото пространство. За малък ъглов момент на пространствено-времевия тунел обаче получаваме качествено различна ситуация. Кривата $\omega_r^2 = 0$ притежава максимум при $a = 0,0167$ и пресича гърловината на тунела при $a = 0,0144$. Тогава, в интервала $a \in (0,0144, 0,0167)$ регионът на стабилност се състои от две разединени части, разделени от регион, където кръговите орбити стават нестабилни. За всеки параметър на въртане $a \in (0,0144, 0,0167)$ регионът на нестабилност е ограничен от две маргинално стабилни кръгови орбити, разположени на радиуси, които съответстват на решенията на уравнението $\omega_r^2 = 0$. С увеличаването на ъгловият момент регионът на нестабилност става по-малък, докато при $a = 0,0167$ изчезва напълно. Тези конфигурации имат астрофизични приложения, тъй като водят например до прекъсване в акреционния диск в рамките на модела на тънкия диск. В този случай дискът на акреция се състои от два пръстеновидни региона, разделени от пролука.



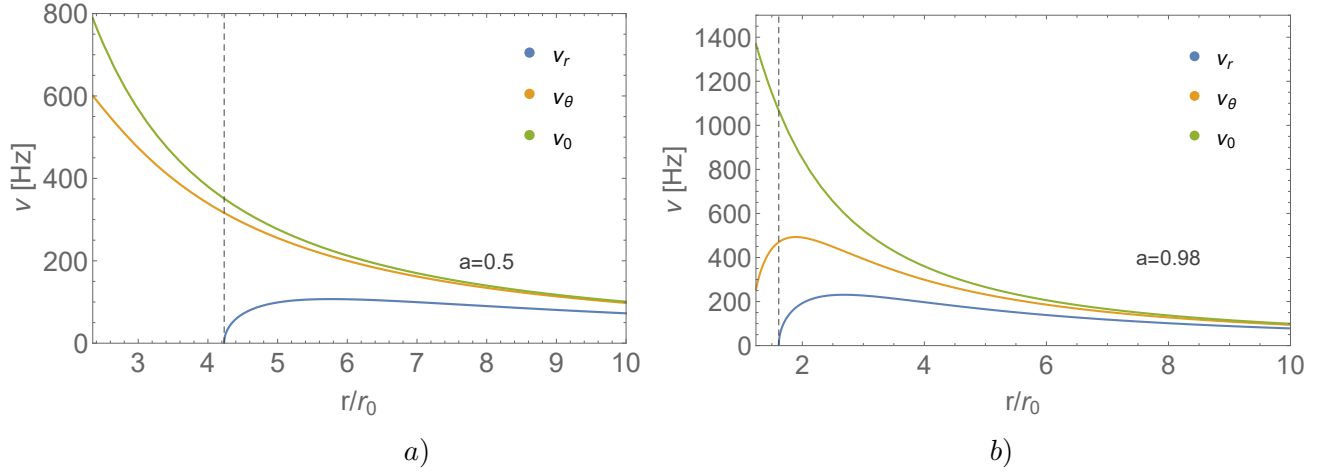
Фигура 1: Съществуване и стабилност на кръговите орбити в екваториалната равнина за въртящи се проходими пространствено-времеви тунели. Сивата крива обозначава местоположението на изотропните кръгови орбити, докато върху синята крива е удовлетворено $\omega_r^2 = 0$. Времени подобни кръгови орбити съществуват в сивия регион, и те са стабилни в светлосивата област, ограничена от синята крива. Положителните стойности на параметъра на въртене представляват съвъртащите се кръгови орбити, докато отрицателните съответстват на контравъртащите се.

За контра-въртащите се орбити, както и за статичното решение за пространствено-времеви тунел региона на стабилност прилича на случая на черната дупка Кер. Има най-вътрешна стабилна кръгова орбита (ISCO), разположена на радиалното разстояние r_{ISCO} , където радиалната епициклова честота става нула, а всички орбити при по-високи стойности на радиалната координат са стабилни. ISCO заема най-близката си позиция до гърловината на пространствено-времеви тунел в статична граница, разположена при $r/r_0 = 2$. Когато ъгловият момент на тунела се увеличава, тя се отдалечава към по-големи радиуси.

1.4 Свойства на епицикличните честоти

Епицикличните и орбиталните честоти са основните величини, които се използват при разработването на геодезични модели за квазипериодичните колебания от акреционния диск като моделът на орбиталната прецесия и резонансните модели. Следователно техните свойства определят важни характеристики на модела като възможните типове резонанси, които могат да бъдат възбудени, радиалното разстояние от компактия обект, където протича резонансният процес, и стойностите на наблюдаваните пикови честоти.

В този раздел ще изследваме епицикличните честоти на пространствено-времеви тунел, правейки сравнение с черната дупка на Кер. За черната дупка на Кер наблюдаваме само лека вариация в поведението на характерните честоти в целия диапазон на параметъра на въртене $a \in [0, 1]$. Орбиталната честота е монотонно намаляваща функция за всяка стойност на параметъра на въртене и радиалната координата. Радиалната епициклична честота винаги притежава един-единствен максимум, докато вертикалната е монотонно намаляваща функция за бавно въртене и получава единствен максимум за бързо въртящи се черни дупки. В допълнение, за всяка стойност на параметъра на въртене орбиталната



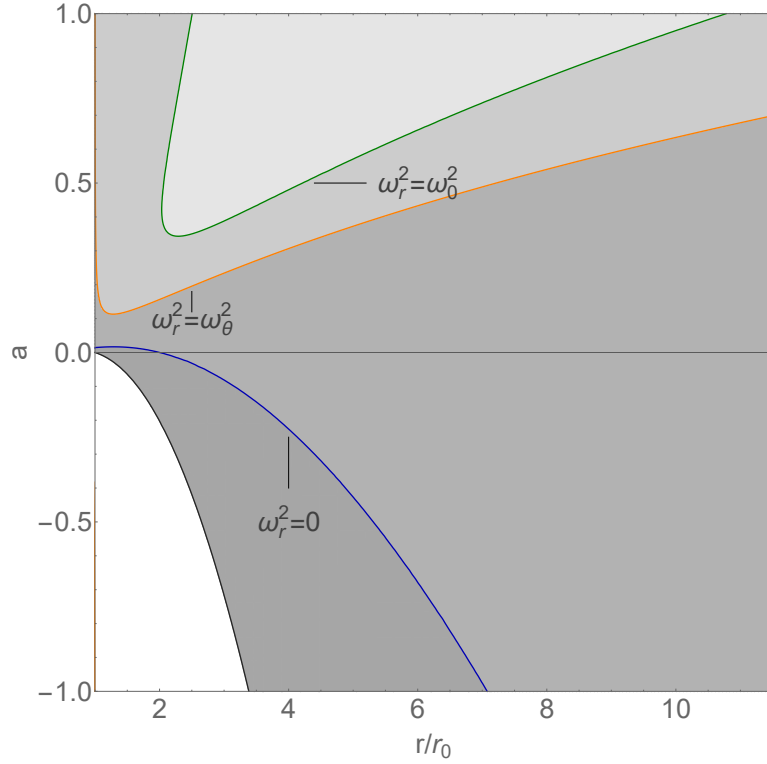
Фигура 2: Примери за качествено различните видове поведение на епициклични честоти за черната дупка на Кер. За бавно въртене вертикалната епициклова честота е монотонно намаляваща функция, докато за по-бързи въртения притежава един единствен максимум. Радиалната координата взема стойности по-големи от фотонната орбита, а местоположението на ISCO е дадено с пунктирна линия.

честота винаги е по-голяма от вертикалната епициклична честота, която от друга страна е по-голяма от радиалната. По този начин имаме $\omega_0^2 > \omega_\theta^2 > \omega_r^2$ за целия диапазон на радиалната координата над фотонната орбита. Поведението на честотите за черната дупка на Кер се демонстрира на Фигура 2 за някои характерни стойности на параметъра на въртене за двата качествено различни случая.

Освен, че споделят някои прилики с черната дупка на Кер, епицикличните честоти за пространствено-времеви тунел показват и големи различия. Една от важните разлики е, че могат да се реализират различни подредби на орбиталните и епициклични честоти. Това дава възможност за много по-разнообразни сценарии на резонансно възбуждане, някои от които водещи до по-силни наблюдаеми сигнали. Във Фигура 3 илюстрираме възможните случаи за конкретното решение на пространствено-времеви тунел (2), като представяме кривите $\omega_r^2 = \omega_\theta^2$ и $\omega_r^2 = \omega_0^2$. В горния регион, ограничен от всяка от кривите неравенствата $\omega_r^2 > \omega_\theta^2$ и $\omega_r^2 > \omega_0^2$ са удовлетворени. От изразите за епицикличните честоти (3) можем да видим, че за свъртящи се орбити имаме $\omega_\theta^2 < \omega_0^2$, докато за насрещно въртящи се орбити обратния случай $\omega_\theta^2 > \omega_0^2$ се реализира. Този резултат е по-скоро общ за проходимите пространствено-времеви тунели, тъй като се прилага за целия клас пространствено-времеви тунели с метрична функция N , ω , b и K зависещи само от r .

Анализът базиран на Фигура 3 показва, че случаят с контравъртящите се орбити прилича на черната дупка на Кер, тъй като притежава еднородна честотна подредба $\omega_\theta^2 > \omega_0^2 > \omega_r^2$ за целия диапазон на радиалната координатна $r \in (r_{ISCO}, \infty)$. За свъртящи се орбити имаме различни сценарии. В региона над кривата $\omega_r^2 = \omega_0^2$ имаме $\omega_r^2 > \omega_0^2 > \omega_\theta^2$, под кривата $\omega_r^2 = \omega_\theta^2$ е удовлетворено неравенството $\omega_0^2 > \omega_\theta^2 > \omega_r^2$, докато между двете криви имаме $\omega_0^2 > \omega_r^2 > \omega_\theta^2$. В статична граница получаваме изродения случай $\omega_\theta^2 = \omega_0^2 > \omega_r^2$ подобно на черната дупка на Шварцшилд. В следващия раздел ще проучим последиците от тези видове честотно подреждане при възможностите за образуване на различни резонанси.

Следващата стъпка е да изучим поведението на орбиталните и епициклични честоти като функция на радиалната координатна r за различни параметри на въртене a . За контравъртящи се орбити наблюдаваме отново последователно поведение за целия диапазон на $a \in (0, 1]$, докато за свъртящи се орбити имаме различни възможности в зависимост от скоростта на въртене на пространствено-времевия тунел. В контравъртящия се случай радиалната епициклична честота винаги има един единствен максимум, докато вертикал-



Фигура 3: Подреждане на орбиталната и епициклични честоти за въртящи се проходими пространствено-времени тунели. Кривата $\omega_r^2 = \omega_\theta^2$ е начертана в оранжево, докато кривата $\omega_r^2 = \omega_\theta^2$ е представена в зелено. В региона над оранжевата крива имаме $\omega_r^2 > \omega_\theta^2$, а между нея и зелената крива $\omega_r^2 > \omega_\theta^2$ е удовлетворено. За насрещни въртящи се орбити с $a < 0$ е изпълнено, че $\omega_\theta^2 > \omega_r^2$, докато в съвъртящия се случай $a > 0$ имаме обратното неравенство. Сивите и сините криви са границите съответно на регионите на съществуване и стабилност на времевите кръгови орбити.

ната е монотонно намаляваща функция на r . По този начин, за контравъртящи се орбити тунелът прилича на бавно въртящата се черна дупка на Кер. В съвъртящия се случай можем да класифицираме решенията на пространствено-времевия тунел по отношение на поведението на епицикличните честоти в следните категории:

- I. $a \in [0, 0.0144)$: Регионът на стабилност на кръговите орбити е едносвързан. Радиалната епициклична честота ω_r има един единствен максимум, докато ω_θ е монотонно намаляваща функция.
- II. $a \in [0.0144, 0.0167]$: Регионът на стабилност на кръговите орбити се състои от две разединени части. Във всеки от регионите на стабилни орбити радиалната епициклична честота ω_r притежава един-единствен максимум. Вертикалната епициклична честота ω_θ е монотонно намаляваща функция.
- III. $a \in [0.0167, 0.025]$: Регионът на стабилност на кръговите орбити е едносвързан. Радиалната епициклична честота ω_r има два максимума и минимум, докато ω_θ е монотонно намаляваща функция.
- IV. $a \in [0.025, 0.029)$: Регионът на стабилност на кръговите орбити е едносвързан. Радиалната епициклична честота ω_r има два максимума и минимум, докато ω_θ притежава един максимум.
- V. $a \in [0.029, 1]$: Регионът на стабилност на кръговите орбити е едносвързан. Както радиалните, така и вертикалните епициклични честоти притежават един-единствен максимум.

Виждаме, че епицикличните честоти за контравъртящия се случай и много бавно съвъртящият се случай I. се държат като бавно въртящата се черна дупка на Кер, тъй като статичната граница прилича на черната дупка на Шварцшилд. Освен това, имаме някои екзотични региони в параметричното пространство II., III. и IV. с многосвързан регион на стабилност на кръговите орбити или множество екстремуми на радиалната епициклична честота, които не съществуват за черната дупка на Кер. С увеличаването по-нататък на параметъра на въртене в регион V. епицикличните честоти започват да се държат като за бързо въртящата се черна дупка на Кер. Орбиталната честота винаги е монотонно намаляваща функция на радиалната координата както за ко- така и за контравъртящи се орбити.

На Фигура 4 представяме анализа на поведението на епицикличните честоти като функция на r за различни стойности на параметъра на въртене чрез кривите $\partial_r \omega_r = 0$ и $\partial_r \omega_\theta = 0$, така също и вторите производни $\partial_r^2 \omega_r = 0$, и $\partial_r^2 \omega_\theta = 0$. Регионите на качествено различните видове поведение са ограничени от хоризонтални линии, съответстващи на характерните стойности на параметъра на въртене, където настъпват преходите. Допълнително демонстрираме примери за всеки от класовете I. - IV. във Фигура 5, където използваме честотите $\nu_r = \omega_r/2\pi$, $\nu_\theta = \omega_\theta/2\pi$ и $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ за някои определени стойности на параметъра на въртене.

1.5 Нелинейни резонанси

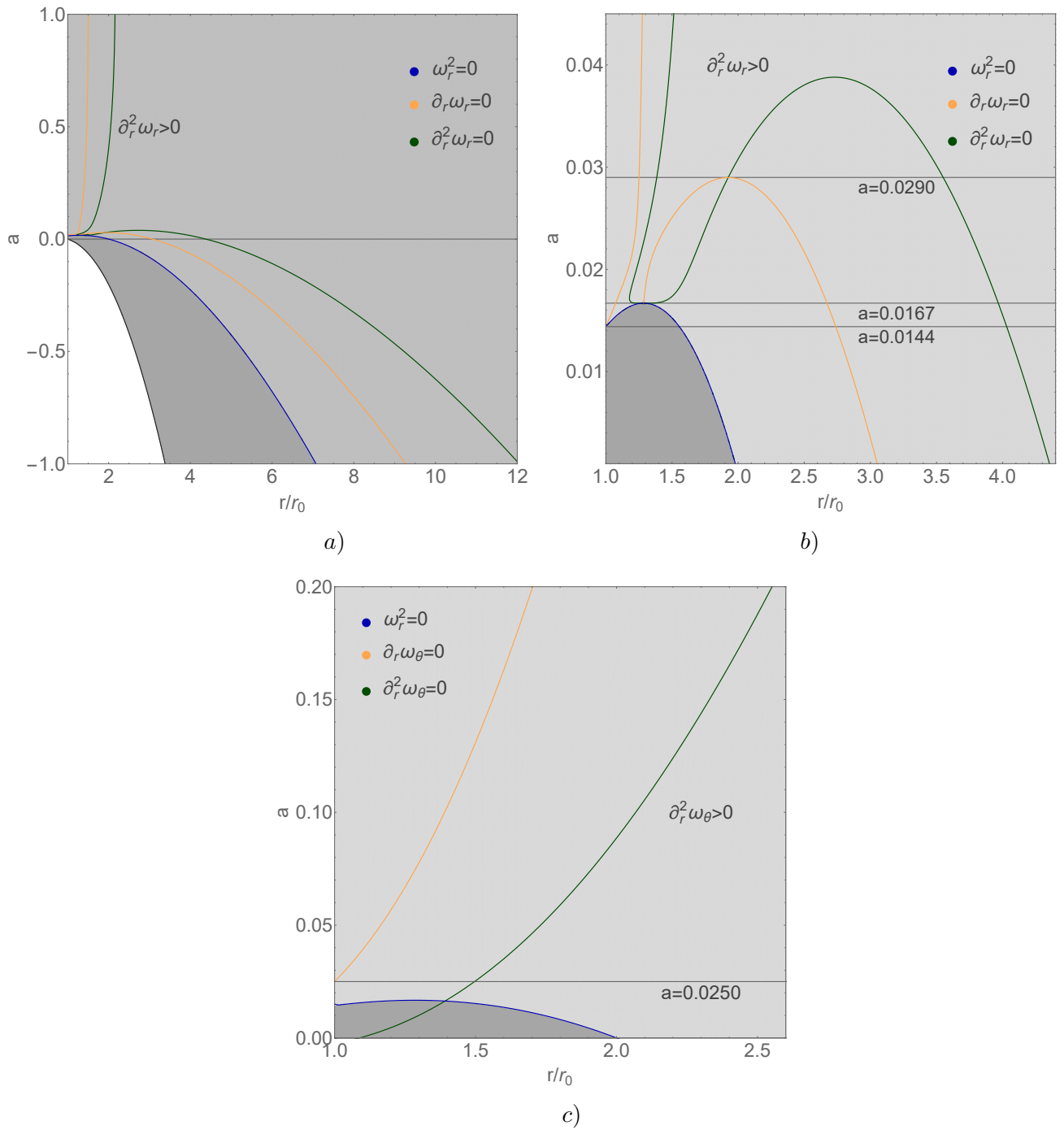
При линейно приближение малките отклонения от кръговото геодезическо движение са описани от две независими хармонични трептения със собствени честоти, наречени радиални и вертикални епициклични честоти. Въпреки това, по-реалистично описание на процесите в акреционния диск изисква да се включат допълнителни нелинейни членове в пертурбационните уравнения. Те дават информация за различни сили, които действат в акретиращия флуид като налягане, вискозитет, магнитни полета и т.н., и водят до куплиране на двата епициклични режима. Обикновено такова взаимодействие между собствените честоти е предпоставка за възбуждането на резонансите в динамичните системи, които се реализират, когато системата достигне подходящи условия.

Понастоящем физическите процеси, които вземат участие в акреционния диск, не са разбрани достатъчно добре. Следователно е трудно да се изведат строги изрази за нелинейните членове, управляващи поведението на малките пертурбации. Разумен подход е да се разгледат някои основни видове взаимодействия, които са достатъчно сходни, за да възникнат в много физически ситуации за широк спектър от особени процеси. Например, можем да разгледаме нелинейни корекции на пертурбационните уравнения, описващи малкото отклонение от геодезически кръгово движение във формата

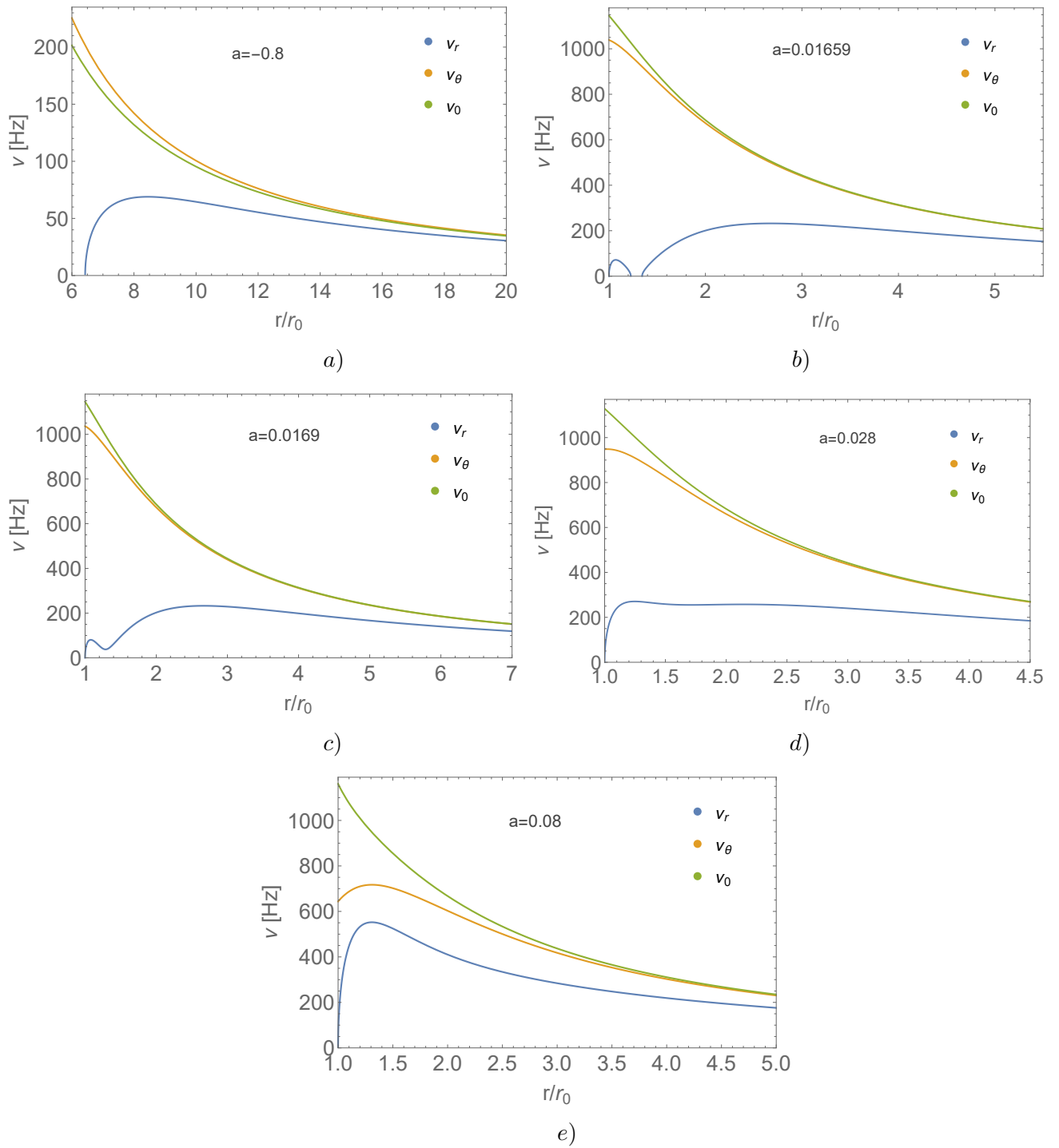
$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi^r}{dt^2} + \omega_r^2 \xi^r &= \omega_r^2 f_r \left(\xi^r, \xi^\theta, \frac{d\xi^r}{dt}, \frac{d\xi^\theta}{dt} \right), \\ \frac{d^2 \xi^\theta}{dt^2} + \omega_\theta^2 \xi^\theta &= \omega_\theta^2 f_\theta \left(\xi^r, \xi^\theta, \frac{d\xi^r}{dt}, \frac{d\xi^\theta}{dt} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

където f_r и f_θ са нелинейни функции. Специфичната форма на тези функции следва да се определи от свойствата на физическия модел на потока на акреция. Въпреки това, без да прибягваме до определен модел, можем да предложим някои прости случаи, които вероятно ще възникнат в много сценарии и ще изследваме поведението им. Една от най-простите ситуации е да се предположи, че $f_r = 0$ и $f_\theta = h$, $\xi^r \xi^\theta$, където h е константа на куплиране. Уравнението за вертикалните трептения е във формата

$$\frac{d^2 \xi^\theta}{dt^2} + \omega_\theta^2 \xi^\theta = -\omega_\theta^2 h \cos(\omega_r t) \xi^\theta. \quad (16)$$



Фигура 4: Поведение на радиалната епициклична честота а) и б), и вертикалната епициклична честота в) като функция на радиалната координата. Кривите $\partial_r \omega_r = 0$ и $\partial_r \omega_\theta = 0$ са представени в оранжево, докато вторите производни $\partial_r^2 \omega_r = 0$ и $\partial_r^2 \omega_\theta = 0$ са представени в зелено. Функциите $\partial_r^2 \omega_r$ и $\partial_r^2 \omega_\theta$ са положителни по-горе и от дясната страна на зелените криви. В увеличението участък б) илюстрираме регионите с различни видове поведение на радиалната епициклична честота за бавно въртене, където обозначаваме преходните стойности на параметъра на въртене с хоризонтални линии. Допълнително показваме границите на областта на съществуването и стабилността съответно на кръговата геодезична със сиви и сини линии.



Фигура 5: Примери за качествено различните видове поведение на епициклични честоти за въртящи се проходими пространствено-времени тунели.

По този начин получаваме уравнението на Матиьо, за което е известно, че описва параметрични резонанси за съотношения на честотите

$$\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \frac{2}{n}, \quad (17)$$

където n е положително цяло число (вижте напр. [44]). Когато куплирането е слабо, или $h \ll 1$, най-малката възможна стойност на n съответства на най-силния резонанс. Въпреки че параметричните резонанси са получени чрез приемане на анзац за честотното куплиране, доказано е, че те са математическо свойство на тънки, квази-Кеплерови дискове [10], [45], [46].

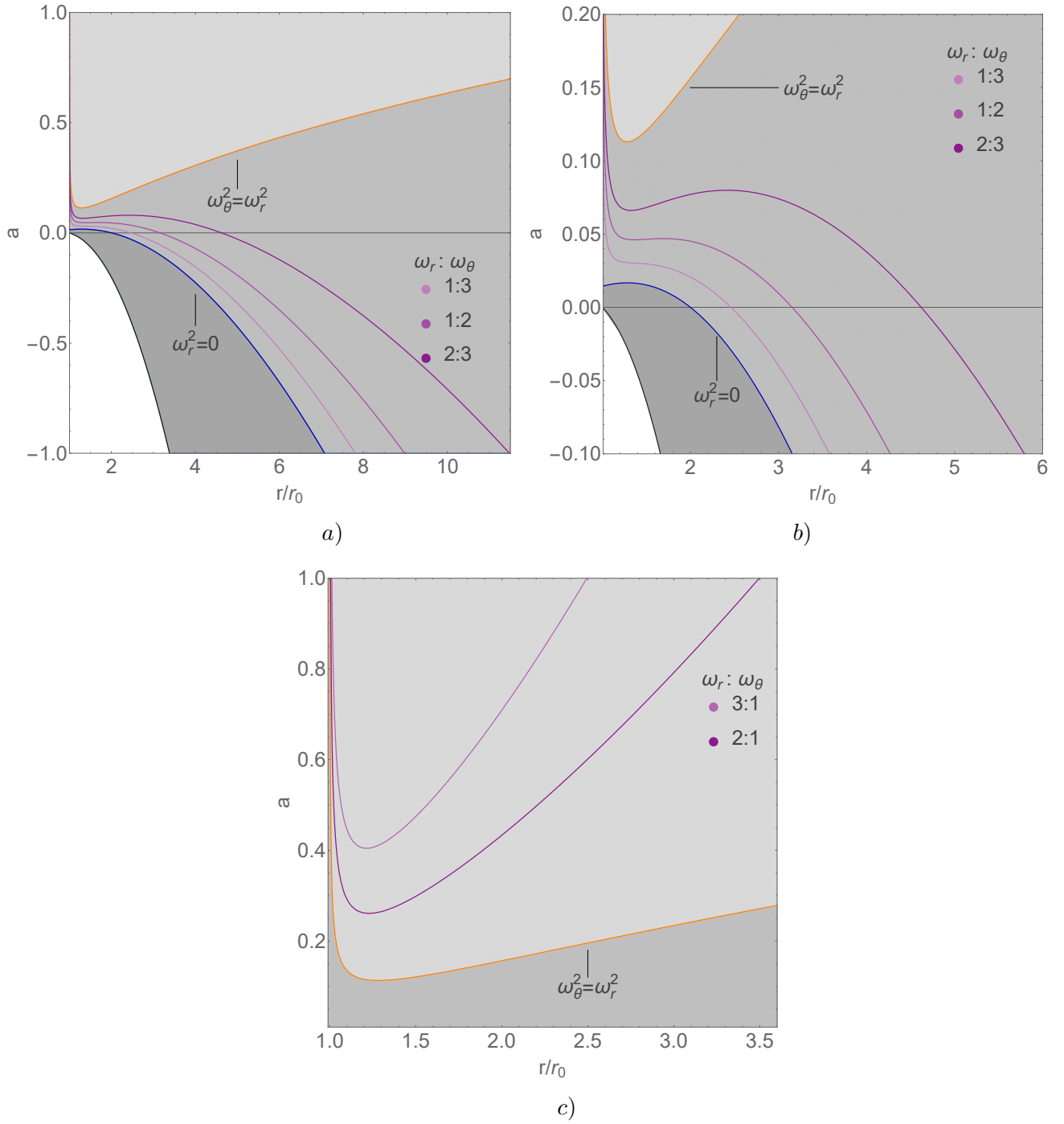
Друга обща динамична система, която проявява резонанстно поведение, е принуденият нелинеен осцилатор. В това отношение е предложено, че нелинейните ефекти в пертурбациите на кръглите орбити могат да бъдат описани чрез включване на периодична радиална сила в уравнението за вертикалните трептения с честота, равна на радиалната епициклична честота. Така уравнението за вертикалните трептения става

$$\frac{d^2\xi^\theta}{dt^2} + \omega_\theta^2\xi^\theta + [\text{non linear terms in } \xi^\theta] = h(r)\cos(\omega_r t). \quad (18)$$

Резонансите се възбуждат, когато епициклични честоти са целочислени съотношения $\omega_\theta = n\omega_r$. Тъй като уравнението е нелинейно, резонантното решение може да съдържа и линейни комбинации от епициклични честоти, което дава допълнителни възможности за работа с честотите на квазипериодните осцилации.

По-нататък ще дискутираме как описаните резонансни явления могат да обяснят наблюдаваните двупикови честоти в рентгеновия поток от акретиращи компактни обекти при условие, че компактният обект е моделиран като въртящ се проходим пространствено-времеви тунел. В резонансните модели честотите с два пика се обясняват, като ги идентифицират с подходящи комбинации от резонансни честоти, така че да бъде удовлетворено наблюдателното съотношение между ниските (ν_L) и високите (ν_U) честоти, т.е. $\nu_U : \nu_L = 3 : 2$. По принцип се предпочитат идентификации с честоти, съответстващи на резонансите от по-нисък ред, тъй като те водят до по-големи амплитуди на наблюдавания сигнал. За параметричния резонанс това може да стане директно, като се направи отъждествяването $\nu_U = \nu_\theta = \omega_\theta/2\pi$ и $\nu_L = \nu_r = \omega_r/2\pi$. В случая на черната дупка на Кер това е най-ниският ред параметричен резонанс, тъй като параметричните резонанси $n = 1, 2$ не съществуват. Ако разгледаме принудените резонанси, трябва да идентифицираме наблюдаваните честоти с линейни комбинации от епициклични честоти, за да постигнем съотношението $3 : 2$. За черната дупка на Кер възможно най-ниският ред принудени резонанси са $n = 2$ и $n = 3$, когато епициклични честоти са свързани като $\omega_\theta : \omega_r = 2 : 1$ и $\omega_\theta : \omega_r = 3 : 1$. Наблюдателното съотношение може да се получи, като се направят идентификациите $\nu_U = \nu_\theta + \nu_r = (\omega_\theta + \omega_r)/2\pi$ и $\nu_L = \nu_\theta$, и $\nu_U = \nu_\theta$ и $\nu_L = \nu_\theta - \nu_r = (\omega_\theta - \omega_r)/2\pi$, съответно. Най-простите случаи на резонанси на Кеплер, които са възможни в пространство-време на черната дупка на Кер са $\omega_0 : \omega_r = 3 : 2$, $\omega_0 : \omega_r = 2 : 1$, или $\omega_0 : \omega_r = 3 : 1$, и по същия начин, ако разгледаме куплирането между вертикалните епициклични и орбиталните честоти.

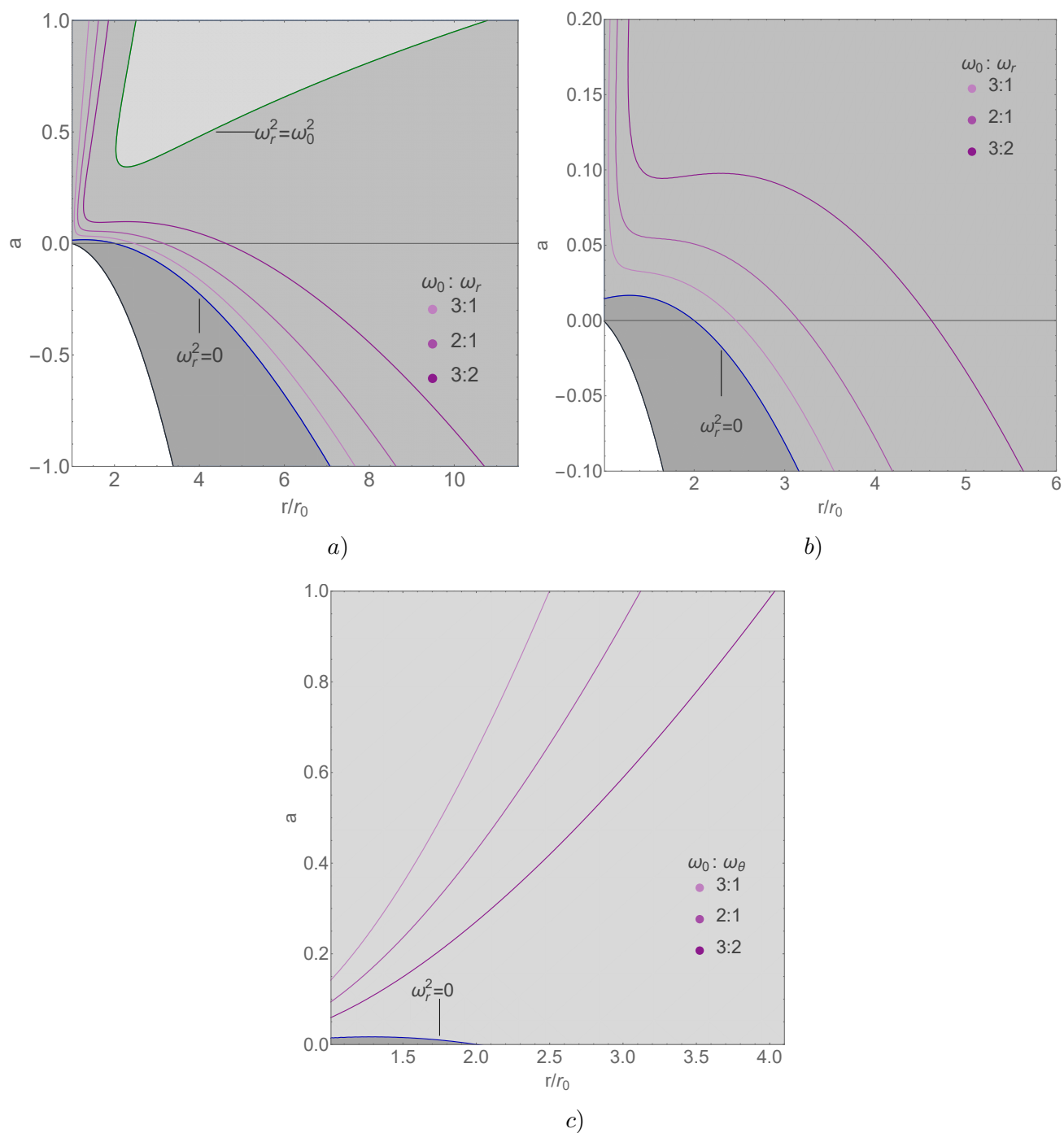
В пространство-времето на пространствено-времевия тунел получаваме много по-богата картина на възможните резонансни явления. Една от най-отличителните черти в сравнение с черната дупка на Кер е, че различни видове подреждане на орбиталните и епициклични честоти се срещат в различните региони на параметричното пространство. Това дава възможност за възбуждане на по-разнообразни видове резонанси, които не съществуват в пространство-времето на Кер. За черната дупка на Кер винаги имаме неравенството $\omega_\theta > \omega_r$. Това предотвратява възбуждането на параметричните резонанси от по-нисък ред $n = 1$ и $n = 2$, т.е. $\omega_r = 2\omega_\theta$ и $\omega_r = \omega_\theta$, които биха притежавали и най-високи



Фигура 6: Местоположение на параметричните и принудените резонанси в зависимост от параметъра на въртене на пространствено-времевия тунел. В а) и б) представляваме случая, когато епицикличните честоти удовлетворяват неравенството $\omega_r < \omega_\theta$, докато в с) имаме подреждането $\omega_r > \omega_\theta$. В уголемения участък б) можем да видим местоположението на резонансите за статичен пространствено-времеви тунел.

амплитуди. За разлика от това, при въртящия се тунел, даден от (2), параметричните резонанси $n = 1$ и $n = 2$ са възможни за всяка стойност на параметъра на въртене $a \in [0, 1]$. Наблюдаваното съотношение 3 : 2 между двупиковите честоти може да се обясни, като се идентифицират ниските и високите наблюдаеми честоти ν_L и ν_U като $\nu_U = \nu_\theta + \nu_r$ и $\nu_L = \nu_r$ в случая $n = 1$, а $\nu_U = 3\nu_\theta = 3\nu_r$ и $\nu_L = 2\nu_r = 2\nu_\theta$ в случая $n = 2$.

За възбуждането на принудените резонанси от най-нисък ред получаваме нови възможности, когато епицикличните честоти удовлетворяват съотношенията $\omega_\theta : \omega_r = 1 : 2$ и $\omega_\theta : \omega_r = 1 : 3$. Те водят до наблюдаемите честоти $\nu_U = \nu_\theta + \nu_r$, $\nu_L = \nu_r$, и $\nu_U = \nu_r$,



Фигура 7: Местоположението на резонансите на Кеплер в зависимост от параметъра на въртене на тунела. В а) и б) (увеличения участък) изучаваме резонансите, дължащи се на куплирането между радиалната епициклична и орбиталните честоти, докато при в) куплирането е между вертикалните епицикличните и орбиталната честота. Най-ниският ред Кеплеровите резонанси не съществуват в регионите в параметричното пространство, където $\omega_0 < \omega_r$ или $\omega_0 < \omega_\theta$ е удовлетворено.

$\nu_L = \nu_r - \nu_\theta$, съответно. Резонансите на Кеплер могат да бъдат наблюдавани за комбинации като $\omega_0 : \omega_r = 3 : 2$ ($\nu_U = \nu_0, \nu_L = \nu_r$), $\omega_0 : \omega_r = 2 : 1$ ($\nu_U = 3\nu_r, \nu_L = \nu_0$), или $\omega_0 : \omega_r = 3 : 1$ ($\nu_U = \nu_0, \nu_L = 2\nu_r$) в регионите, в които подреждането $\omega_0 > \omega_r$ е валидно, и съответните случаи с куплиране между вертикалната епициклична и орбиталните честоти, когато $\omega_0 > \omega_\theta$. Нашите изследвания показват, че най-ниският ред Кеплерови резонанси със съотношения между орбиталната честота и една от епицикличните честоти $m : n$, където $m, n = 1, 2, 3$ не съществуват, когато имаме подреждане $\omega_0 < \omega_r$ или $\omega_0 < \omega_\theta$.

Местоположението на описаните резонанси като функция на параметъра на въртене е илюстрирано на фигурите 6-7. За свързвателните се орбити резонансите се възбуждат в непосредствена близост до гърловината на пространствено-времевия тунел, т.е. в региона с много силно гравитационно поле. Освен това, това поведение се наблюдава не само за бързо въртящи се пространствено-времеви тунели, но за широк спектър от стойности на параметъра на въртене на пространствено-времевия тунел. По този начин, квазипериодичните осцилации в пространство-времето на тунела могат да бъдат ценна сонда за силния режим на гравитацията. Друга характерна особеност е, че за фиксирана стойност на параметъра на въртене същият вид резонанс се случва за няколко различни радиуса. В случая с черната дупка на Кер резонансните криви са монотонни и такова поведение е изключено. Това явление е особено интересно, тъй като радиусът, където резонансът е възбуден, е свързан със свойствата на физическия процес, който го причинява. По този начин, за пространство-времето на тунела можем да имаме един и същ вид резонанс възбуден едновременно в различни региони в акреционния диск, вероятно причинени от различни физически процеси.

1.6 Заключение

В тази глава изследвахме как можем да интерпретираме високочестотните квазипериодични осцилации от акреционния диск в рамките на резонансните модели, ако приемем, че централният компактен обект представлява пространствено-времеви тунел вместо черната дупка на Кер. Направихме систематично изследване на съществуването и стабилността на времеподобните кръгови геодезични в екваториалната равнина. В резултат на това изведохме аналитични изрази за епицикличните честоти, които управляват еволюцията на малки отклонения от кръговото движение, които са валидни за общ клас проходими пространствено-времеви тунели с интегрируеми геодезични уравнения. Виждаме, че за големи класове пространствено-времеви тунели вертикалната епициклична честота е винаги положителна, което гарантира, че кръговите орбити винаги са стабилни по отношение на малки смущения във вертикална посока. В това отношение пространствено-времевите тунели са подобни на черната дупка на Кер, тъй като стабилността се определя само от радиалната епициклична честота.

В други аспекти квазикръговото екваториално движение в пространство-времето на тунели показва значителни разлики. Основно разграничение е, че епицикличните и орбиталните честоти могат да се подчиняват на различни видове подреждане в различните области на параметричното пространство. За разлика от тунелите, за черната дупка на Кер те поддържат постоянна връзка за всеки радиус и параметър на въртене. Това свойство позволява проявлението на по-богат клас резонансни явления в пространство-времето на тунелите, отваряйки нови възможности за обяснение на наблюдаваните квазипериодични трептения от акреционния диск. По-специално, възможни са параметрични и принудени резонанси от по-нисък порядък, което ще доведе до по-силни наблюдаеми сигнали. За широк диапазон от параметри на въртене резонансите могат да бъдат възбудени в близкото съседство на гърловината на тунела, изследвайки областта на силно гравитационно взаимодействие. В допълнение, един и същи тип резонанс може да се осъществи едновременно на няколко различни радиални разстояния, което може да постави някои

ограничения върху физическите процеси в акреционния диск, определящи произхода на резонансните явления.

2 Скаларизирани черни дупки в мултискаларната Айнщайн-Гаус-Боне гравитация

2.1 Мултискаларна-Айнщайн-Гаус-Боне гравитация

Мулти-скаларната Айнщайн-Гаус-Бонне (МСАГБ) теория на гравитацията се дефинира по следния начин. Разглеждаме 4-мерно пространство-време \mathcal{M} снабдено с пространствено-времева метрика $g_{\mu\nu}$ и N допълнителни скаларни полета φ^a , които могат да се разглеждат като координати върху на N -мерно Риманово многообразие \mathcal{E}_N (т.н. скаларно пространство) с метрика $\gamma_{ab}(\varphi)$ [47, 48]. От глобална гледна точка φ^a е изображение $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}_N$ и кинетичния член за скаларните полета, даден по-долу, е точно линейния елемент на \mathcal{E}_N изтеглен върху пространство-времето. Действието в МСАГБ гравитация се дава от

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - 2g^{\mu\nu} \gamma_{ab}(\varphi) \nabla_\mu \varphi^a \nabla_\nu \varphi^b - V(\varphi) + \lambda^2 f(\varphi) \mathcal{R}_{GB}^2 \right], \quad (19)$$

където R е скаларът на Ричи спрямо пространствено-времевата метрика $g_{\mu\nu}$, $V(\varphi)$ е потенциалът на скаларните полета $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^N)$, $f(\varphi)$ е куплираща функция, зависеща само от φ , λ е Гаус-Боне куплиращата константа имаща размерност *дължина* и \mathcal{R}_{GB}^2 е инвариантът на Гаус-Боне ¹.

В настоящата дисертация разглеждаме пространството на скаларните полета като 3-мерно максимално симетрично риманово пространство, т.е. \mathbb{S}^3 , \mathbb{H}^3 или \mathbb{R}^3 с метрика

$$\gamma_{ab}(\varphi) d\varphi^a d\varphi^b = a^2 \left[d\chi^2 + H^2(\chi) (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2) \right], \quad (20)$$

където $a > 0$ е константа и Θ и Φ са стандартните ъгливи координати върху 2-двумерната сфера \mathbb{S}^2 . Като допълнение трябва да определим $V(\varphi)$ и куплиращата функция $f(\varphi)$.

Трите възможности за пространство на скаларните полета са дадени от метричните функции $H(\chi): H(\chi) = \sin \chi$ за сферична геометрия, $H(\chi) = \sinh \chi$ за хиперболична геометрия и $H(\chi) = \chi$ за плоска геометрия. Параметърът a е свързан с кривината κ на \mathbb{S}^3 и \mathbb{H}^3 , и имаме $\kappa = 1/a^2$ за сферична и $\kappa = -1/a^2$ за хиперболична геометрия. В добавка ще разгледаме теории за които куплиращата функция $f(\varphi)$ и потенциала $V(\varphi)$ зависят от χ само. Това позволява уравненията за Θ и Φ да се разделят от основната система.

2.2 Размерно редуцирани уравнения за скаларизирани черни дупки

Вместо да направим най-простия избор, за който всички скаларни полета зависят само от радиалната координата r , избираме нетривиалното изображение $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}_N$ дефинирано както следва. Предполагаме, че полето χ зависи само от радиалната координата r , т.е. $\chi = \chi(r)$, и полетата Θ и Φ са независими от r и се дават от $\Theta = \theta$ и $\Phi = \phi$ [49]. Нашия анзац е съвместим със сферичната симетрия и може да се провери, че уравненията за Θ и Φ са удовлетворени.

Ще разгледаме статични и сферично симетрични решения за черни дупки на уравненията в МСАГБ гравитацията с метрика

$$ds^2 = -e^{2\Gamma} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (21)$$

¹Инвариантът на Гаус-Боне се дефинира като $\mathcal{R}_{GB}^2 = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$, където R е скалара на Ричи, $R_{\mu\nu}$ е тензора на Ричи и $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ е тензорът на Риман

където Γ и Λ зависят само от радиалната координата r .

За простота, в това което следва ще разгледаме случаят с $V(\varphi) = 0$. С описания анзац за скаларни полета и използвайки формата на метриката по-горе, получаваме следните редуцирани полски уравнения

$$\begin{aligned} \frac{2}{r} \left[1 + \frac{2}{r}(1 - 3e^{-2\Lambda})\Psi_r \right] \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{(e^{2\Lambda} - 1)}{r^2} - \frac{4}{r^2}(1 - e^{-2\Lambda})\frac{d\Psi_r}{dr} \\ - a^2 \left[\left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 + 2e^{2\Lambda} \frac{H^2(\chi)}{r^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{r} \left[1 + \frac{2}{r}(1 - 3e^{-2\Lambda})\Psi_r \right] \frac{d\Gamma}{dr} - \frac{(e^{2\Lambda} - 1)}{r^2} \\ - a^2 \left[\left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 - 2e^{2\Lambda} \frac{H^2(\chi)}{r^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Gamma}{dr^2} + \left(\frac{d\Gamma}{dr} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} \right) + \frac{4e^{-2\Lambda}}{r} \left[3\frac{d\Gamma}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} - \frac{d^2\Gamma}{dr^2} - \left(\frac{d\Gamma}{dr} \right)^2 \right] \Psi_r \\ - \frac{4e^{-2\Lambda}}{r} \frac{d\Gamma}{dr} \frac{d\Psi_r}{dr} + a^2 \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\chi}{dr^2} + \left(\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{2}{r} \right) \frac{d\chi}{dr} - \frac{2\lambda^2}{a^2 r^2} \frac{df(\chi)}{d\chi} \left\{ (1 - e^{-2\Lambda}) \left[\frac{d^2\Gamma}{dr^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d\Gamma}{dr} \left(\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} \right) \right] + 2e^{-2\Lambda} \frac{d\Gamma}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} \right\} - \frac{2}{r^2} H(\chi) \frac{dH(\chi)}{d\chi} e^{2\Lambda} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

където

$$\Psi_r = \lambda^2 \frac{df(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dr}. \quad (26)$$

За да описва тази система черна дупка следните гранични условия и условия за регулярност трябва да бъдат удовлетворени. Както обикновено налагаме условието за асимптотически плоско пространство-време, а именно

$$\Gamma|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Lambda|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \chi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (27)$$

Самото съществуване на хоризонт на черна дупка при $r = r_H$ изисква

$$e^{2\Gamma}|_{r \rightarrow r_H} \rightarrow 0, \quad e^{-2\Lambda}|_{r \rightarrow r_H} \rightarrow 0. \quad (28)$$

Освен това, изискването скаларното поле и неговите производни да бъдат регулярни върху хоризонта на събитията води до набор от съотношения, свързващи стойностите на скаларното поле, неговите производни и метричните функции върху хоризонта. След подходящи манипулации, подобно на [50], можем да получим едно уравнение за първата производна на скаларното поле върху хоризонта $(d\chi/dr)_H$, а именно

$$\begin{aligned}
& \left(4\lambda^2 \left(a^2 H(\chi_H)^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{df(\chi_H)}{d\chi} \right) r_H^3 + 8H(\chi_H) \left(\frac{dH(\chi_H)}{d\chi} \right) \left(\frac{df(\chi_H)}{d\chi} \right)^2 \lambda^4 r_H \right) \left(\frac{d\chi}{dr} \right)_H^2 \\
& + \left((2a^2 H(\chi_H)^2 - 1) r_H^4 + 8H(\chi_H) \left(\frac{dH(\chi_H)}{d\chi} \right) \left(\frac{df(\chi_H)}{d\chi} \right) \lambda^2 r_H^2 \right. \\
& + 16\lambda^4 a^2 \left(a^2 H(\chi_H)^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{df}{d\chi} \right)_H^2 H(\chi_H)^2 \left. \right) \left(\frac{d\chi}{dr} \right)_H + 2H(\chi_H) \left(\frac{dH(\chi_H)}{d\chi} \right) r_H^3 \\
& - \left(\frac{df(\chi_H)}{d\chi} \right) \lambda^2 \left((2a^2 H(\chi_H)^2 - 1)^2 - 2(2a^2 H(\chi_H)^2 - 1) \right) = 0
\end{aligned} \tag{29}$$

Реален корен за $(d\chi/dr)_H$ съществува, ако дискриминантата е положителна, което води до следното неравенство

$$\begin{aligned}
& \left(a^2 H^2(\chi_H) - \frac{1}{2} \right)^2 \left(a^4 H^4(\chi_H) \left(\frac{df}{d\chi} \right)_H^4 \lambda^8 + \frac{3}{2} H(\chi_H) \frac{dH(\chi_H)}{d\chi} \left(\frac{df}{d\chi} \right)_H^3 \lambda^6 r_H^2 + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \left(a^2 H^2(\chi_H) - \frac{3}{4} \right) \lambda^4 r_H^4 \left(\frac{df}{d\chi} \right)_H^2 + \frac{1}{64} r_H^8 \right) \geq 0,
\end{aligned} \tag{30}$$

където лявата страна в неравенството е дискриминантата на уравнението (29). Следователно, неравенството служи като условие за съществуване на черна дупка и се оказва, че практически за някои Гаус-Боне куплиращи функции това въвежда минимален радиус на хоризонта, под който няма решения за черните дупки. Лесно се показва, че за плоска геометрия на скаларното пространство, неравенството се редуцира до уравнението за съществуване на черна дупка на Гаус-Боне с едно скаларно поле ([50]).

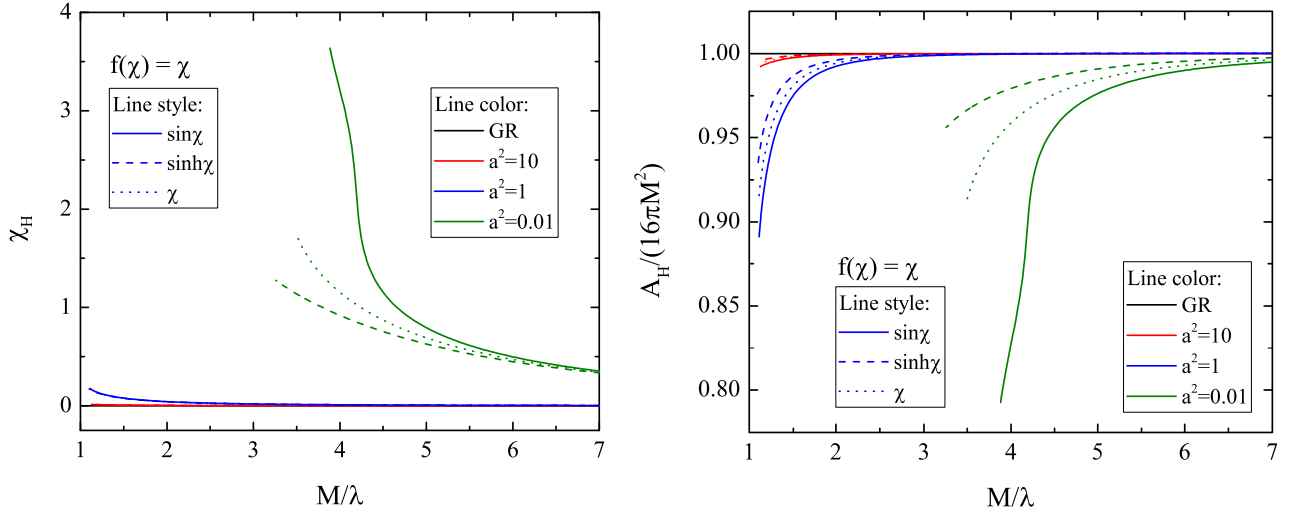
Функциите Γ и Λ имат обичайната асимптотика на безкрайност и по-специално

$$\Lambda \approx \frac{M}{r} + O(1/r^2), \quad \Gamma \approx -\frac{M}{r} + O(1/r^2), \tag{31}$$

където M е масата на черната дупка. Асимптотическото поведение на скаларното поле χ може да бъде получено от линеализираното уравнение за χ далеч от черната дупка и намираме

$$\chi \sim \frac{1}{r^2}. \tag{32}$$

Тази необичайна асимптотика има сериозни физически последици. Това значи, че скаларния заряд, асоцииран с χ е нула, което означава, че скаларната диполна радиация е строго подтисната. Това е много важно, предвид факта, че може би едно от най-силните ограничения върху гравитационните теории със скаларни степени на свобода, идващи от индиректните наблюдения на излъчване на гравитационни вълни от бинарни неутронни звезди [51, 52, 53]. В Гаус-Боне теориите, притежаващи едно скаларно поле вече е показано, че скаларизирани неутронни звезди могат да съществуват [54] и това е вярно и за мулти-скаларните теории на Гаус-Боне като ще видим в следващата глава. Скаларното поле при неутронните звезди има същата асимптотика като за случая на черна дупка, което означава, че за бинарни пулсари няма излъчване на скаларна диполна радиация и няма ограничения, които да бъдат поставени върху теорията на базата на тези наблюдения. Този факт показва, че разглежданите теории се допускат много по-широки отклонения от ОТО.



Фигура 8: *Ляво* Стойност на скаларното поле върху хоризонта като функция на нормализираната маса на черната дупка. *Дясно* Нормализирана към границата на Шварцшилд площ на хоризонта на черната дупка $A_H/(16\pi M^2)$, като функция на нормализираната маса. Куплиращата функция е $f(\chi) = \chi$ и различните цветове и стилове на линиите съответстват на различни избори на a^2 и $H(\chi)$ съответно. Последователностите от черните дупки свършват в точката, където условието за съществуване е нарушено.

2.3 Числена постановка и резултати

Численото решаване на системата уравнения (22)–(25) се базира на метода на претрелката с подходящите гранични условия на безкрайността и условията за регулярност върху хоризонта, както е дискутирано по-горе. Освен това имаме и условие за съществуване на черни дупки, (30). Пресмятанията са извършени използвайки няколко различни форми на куплираща функция $f(\chi)$, която допуска съществуването на черни дупки със скаларна коса, включвайки спонтанно скаларизирани черни дупки, за три възможни форми на функцията $H(\chi)$.

2.3.1 Черни дупки със скаларна коса – линейно и експоненциално куплиране

Без ограничение на общността можем да наложим следното условие върху куплиращата функция, а именно условието $f(0) = 0$. Това може да бъде направено, защото полевите уравнения са инвариантни спрямо трансформацията $f(\chi) \rightarrow f(\chi) + const$. В този подраздел ще дискутираме резултатите за две куплиращи функции, представляващи линейно куплиране

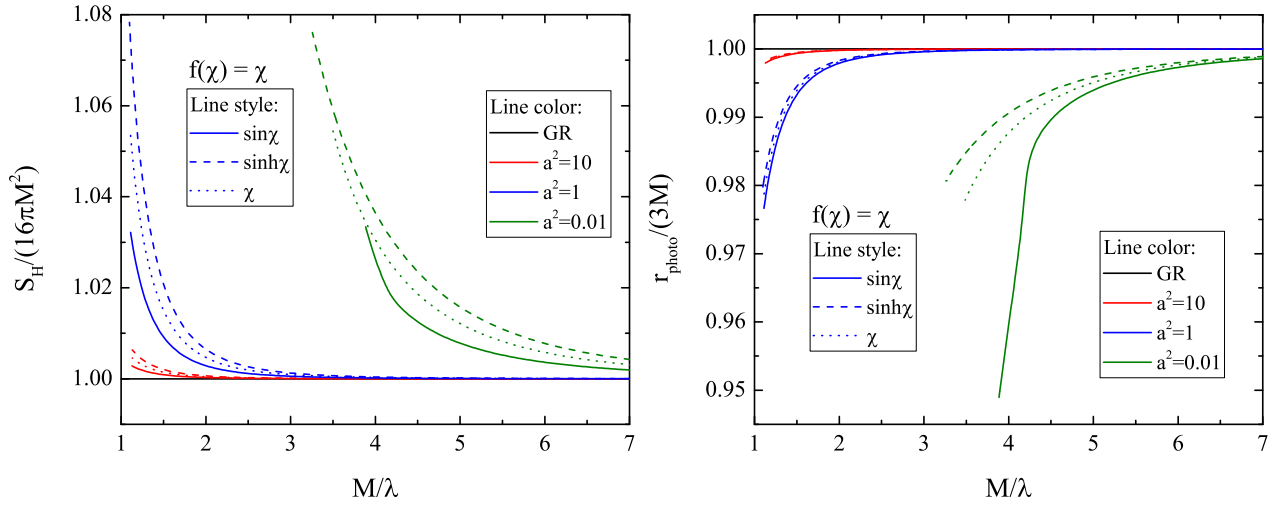
$$f(\chi) = \chi \quad (33)$$

и експоненциална функция

$$f(\chi) = e^{\alpha\chi} - 1, \quad (34)$$

където α е константа. Такава форма на куплиращата функция е използвана и в Айнщайн-дилатон-Гаус-Боне гравитацията с едно скаларно поле [55]. В този случай решенията за черни дупки, когато те съществуват, са винаги, надарени със скаларна коса и нулевото скаларно поле не е решение на полевите уравнения, за разлика от скаларизацията, дискутирана в следващия раздел.

В интерес на истината двете куплиращи функции са еквивалентни при малки скаларни полета χ с точност до мултипликативна константа. Както се очаква, на базата на опита с Айнщайн-дилатон-Гаус-Боне гравитацията, качественото поведение на решенията е много сходно за двата случая - дори и за големи χ и резултатите не се различават



Фигура 9: *Ляво* Нормализирана към границата на Шварцшилд ентропия на черната дупка $S_H/(16\pi M^2)$ като функция на нормализираната маса. *Дясно* Нормализираният спрямо Шварцшилд радиус на фотонната сфера като функция на нормализираната маса на черната дупка. Куплиращата функция е $f(\chi) = \chi$ и означенията са същите като на Фиг. 8

качествено. Ето защо тук ще представим резултати само за линейно куплиране (33) и където е необходимо ще коментираме случая с експоненциалното куплиране (34). Величините представени по-горе са мащабирани спрямо куплиращата константа λ по подходящия начин, което ефективно ни оставя един свободен параметър в теорията в случая на линейно куплиране, т.е. a^2 .

Скаларното поле върху хоризонта χ_H , като функция на нормализираната (относно λ) маса на черна дупка за линейно куплиране (33) е представено в левия панел на Фигура 9 за различни комбинации на параметъра a^2 и различни функции $H(\chi)$. Скаларното поле е силно за малки маси, докато за големи M бързо клони към нула. Освен това, по-малките стойности на a^2 водят до съществено намаление на χ_H . За фиксирано a^2 , по-големи стойности на χ_H са постигнати за $H(\chi)$, описващо сферична геометрия, докато най-малките стойности на χ_H са за хиперболична геометрия. Естествено, по-големи χ_H ще водят до по-големи отклонения за ОТО и това може да бъде наблюдавано в десния панел на Фигура 9, където нормализираната площ на хоризонта е представена като функция на масата. Нормализацията на A_H е относно площта на хоризонта на черната дупка на Шварцшилд от ОТО, която съответства на хоризонталната удебелена линия $A_H/(16\pi M^2) = 1$. Последователностите от решения на черни дупки свършват при някаква фиксирана маса, където условието за съществуване на черна дупка (30) е нарушено и общо взето, по-високи a^2 водят до по-малка гранична маса. За фиксиран клон от решения, най-голямото отклонение се постига в близост до тази гранична маса и за разглеждания диапазон от a^2 , като разликата с площта на хоризонта на Шварцшилд е до 20%, но нараства за по-малки a^2 . За по-големи стойности на M клоновете черни дупки с нетривиално скаларно поле практически се сливат с тези на Шварцшилд. Числените изследвания са направени за много по-широк диапазон на a^2 и специално $a^2 \in [10^{-4}, 10^2]$, и качественото поведение остава същото – отклоненията от Шварцшилд нарастват (намаляват) за по-малки (по-големи) a^2 . Нашите изследвания показват ката цяло, това че Гаус-Боне гравитацията с едно скаларно поле и същата куплираща функция създават отклонение, което е от същия порядък като представените на фигурите.

Ентропията на черна дупка може да бъде пресметната като се използва добре познатата формула на Уолд [56],

$$S_H = \frac{1}{4}A_H + 4\pi\lambda^2 f(\chi_H). \quad (35)$$

Ентропията, нормализирана към границата на Шварцшилд $4\pi M^2$, е показана в левия панел на Фигура 9. Вижда се, че Черна дупка със скаларна коса винаги има ентропия по-висока в сравнение с тази на Шварцшилд.

Друга величина, която е важна характеристика на черната дупка, е радиусът на фотонна сфера r_{ph} , дефиниран като точка, където следното равенство е удовлетворено

$$\left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=r_{\text{ph}}} - \frac{1}{r_{\text{ph}}} = 0. \quad (36)$$

Радиусът на фотонната сфера r_{ph} е директно свързан с много наблюдателни свойства на черните дупки както честотите на квази-нормалните моди, сянката на черната дупка и силния гравитационен лензинг. Радиусът на фотонната сфера е представен в десния панел на Фигура 9, където r_{ph} е нормализирано спрямо радиуса на фотонната сфера на Шварцшилд. Може да се види, че дори когато площта на хоризонта може да се различава значително от тази на Шварцшилд в ОТО, отклонението в радиуса на фотонната сфера е доста умерено, грубо около 5%. Както коментирахме, все пак, по-малки стойности a^2 ще водят до по-голяма разлика с решението на Шварцшилд и това може да предизвика потенциални наблюдателни ефекти.

2.3.2 Решения описващи спонтанно скаларизирани черни дупки

В този раздел изучаваме решенията на черни дупки в мулти-скаларните теории на Гаус-Боне, които допускат съществуването на решение с нулево скаларно поле (т.е. решението на Шварцшилд) за всички стойности на параметрите. Черните дупки на Шварцшилд, обаче могат да станат нестабилни под определена маса (над определена кривина на пространство-времето) и може да се наблюдава спонтанна скаларизация, т.е. нови клонове от черни дупки с нетривиално скаларно поле бифруктиращи от тези в ОТО. За да има спонтанна скаларизация, следните условия трябва да бъдат удовлетворени

$$\left. \frac{df}{d\chi} \right|_{\chi=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2f}{d\chi^2} \right|_{\chi=0} > 0. \quad (37)$$

Ще дискутираме две куплиращи функции, удовлетворяващи тези условия.

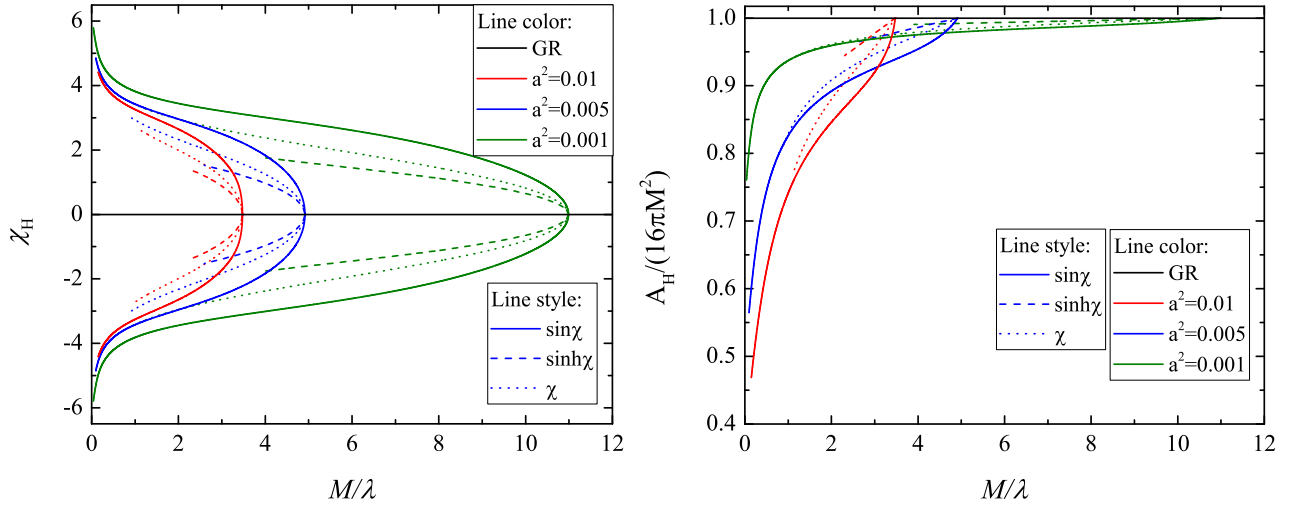
2.3.3 Първа куплираща функция

Първата куплираща функция е

$$f(\chi) = \frac{1}{2\beta} \left(1 - e^{-\beta\chi^2} \right), \quad (38)$$

където сме фиксирали $\beta = 0.5$. Това е точно куплиращата функция, използвана в началото за изучаване на спонтанно скаларизираната Гаус-Боне черната дупка [50] (с едно скаларно поле). Тази куплираща функция води до добре дефинирани клонове от скаларизирани черни дупки достигащи близо до $M = 0$ границата.

На лявия панел на Фигура 10 е показано скаларното поле върху хоризонта на черната дупка като функция на нормализираната маса за няколко различни стойности на a^2 и различни форми на функцията $H(\chi)$. Решението на Шварцшилд е изобразено с удебелена черна линия в $\chi_H = 0$ и то съществува за целия набор от параметри. При някои стойности на масата, все пак, решението на Шварцшилд става нестабилно и нови клонове от решения с нетривиално скаларно поле бифруктират от него. Трябва също да се отбележи, че повече от един клон скаларизирани решения може да съществува и тези допълнителни клонове могат да бъдат класифицирани от броя на нулите на скаларното поле. Само първият клон,



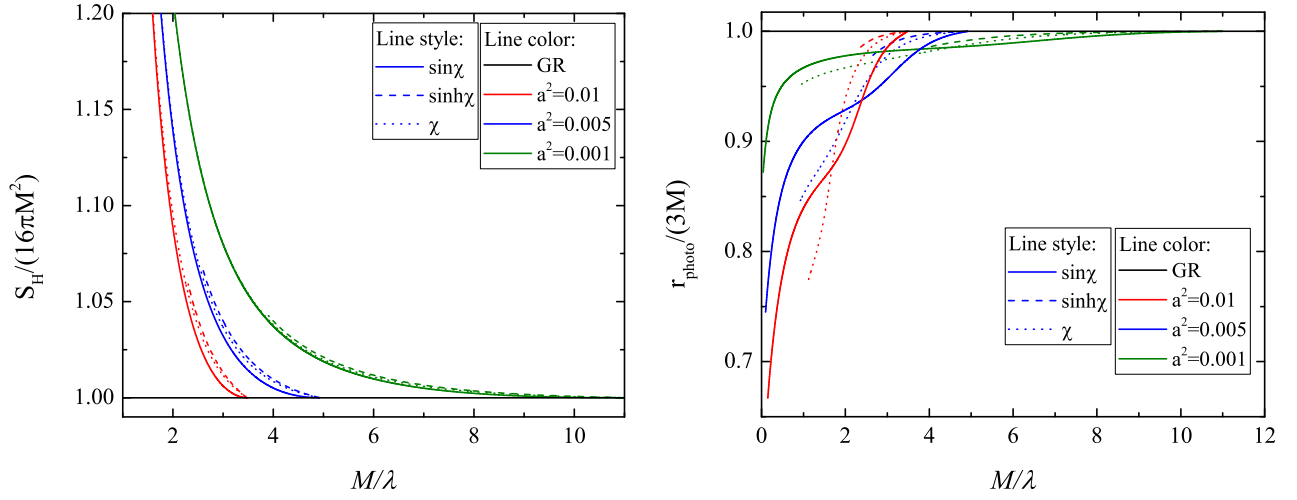
Фигура 10: *Ляво* Стойността на скаларното поле върху хоризонта, като функция на нормализираната маса на черната дупка. *Дясно* Нормализираната на границата на Шварцшилд площ на хоризонта на черната дупка. Куплиращата функция е $f(\chi) = \frac{1}{2\beta} (1 - e^{-\beta\chi^2})$, където $\beta = 0.5$, и различните цветове и стилове на линиите съответстващи на различните избори на a^2 и $H(\chi)$ съответно.

който няма възли на скаларното поле, може да бъде потенциално стабилен [57, 58] и за това ще се фокусираме само върху тези решения.

Фигура 10 показва, че с нарастването на параметъра a^2 , прагът на масата, под която се наблюдава скаларизация се измества към по-високи стойности на M . Отклонението на скаларизираните черни дупки спрямо тези от ОТО може да бъде по-добре видно на дясното панел на фигурата, където нормализираната площ на хоризонта е представена като функция на масата. Разликите с ОТО нарастват с нарастването на масата. Последователностите от решения свършват или защото условието (30) нарушено, или заради някои числени трудности – за малки маси уравненията стават много твърди и не може да се надхвърли определена точност. В повечето случаи обаче решенията описващи черни дупки изчезват, поради нарушаване на условието за съществуване (30). Ситуацията е подобна и в чистата Гаус-Боне гравитация с едно скаларно поле [50]. Основната разлика между резултатите за различни функции $H(\chi)$ е прагът на масите, над който няма скаларизирани решения. Най-големи разлики с ОТО се наблюдават за хиперболична геометрия на скаларното пространство.

Следващия важен въпрос е дали новите клонове от скаларизирани решения са стабилни или не. Дори без динамичен анализ, само на базата на термодинамични съображения може качествено да предвидим статбилността. Добър индикатор за стабилността на решенията е ентропията – решенията с по-голяма ентропия са термодинамично предпочитани и нормално те са по-стабилните². Нормализираната ентропия е показана на левия панел на Фигура 11. Както може да се види черната дупка на Шварцшилд има винаги по-ниска ентропия от черните дупки със скаларна коса, което дава сериозна индикация, че скаларизиращите решения са стабилни. На десния панел на Фигура 11 е показан радиуса на фотонната сфера. Разликите с ОТО могат да бъдат значителни за малки маси и малки стойности на a^2 . Това може потенциално да води до силен отпечатък на скаларни полета в астрофизичните наблюдения (квазинормални моди, гравитационен лензинг, образи на черната дупка и други). Резултатите до сега са за $\beta = 0.5$. Изследвани са и други стойности на β като резултатите, остават качествено непроменени. Основната разлика е

²Сходни заключения са направени за чистата Гаус-Боне гравитация с едно скаларно поле, където стабилните скаларизирани решения имат също по-голяма ентропия отколкото това на Шварцшилд [50, 57].



Фигура 11: *Ляво* Нормализираната към границата на Шварцшилд ентропия на черната дупка $S_H/(4\pi M^2)$, като функция на нормализираната маса. *Дясно* Нормализираният към Шварцшилд радиус на фотонната сфера като функция на нормализираната маса на черната дупка. Куплиращата функция е $f(\chi) = \chi$ означенията са същите както на in Фигура 10.

количественото отклонение от ОТО. По-точно казано по-малко β създава по-големи разлики с решението на Шварцшилд за фиксирана маса на черната дупка и фиксиран a^2 .

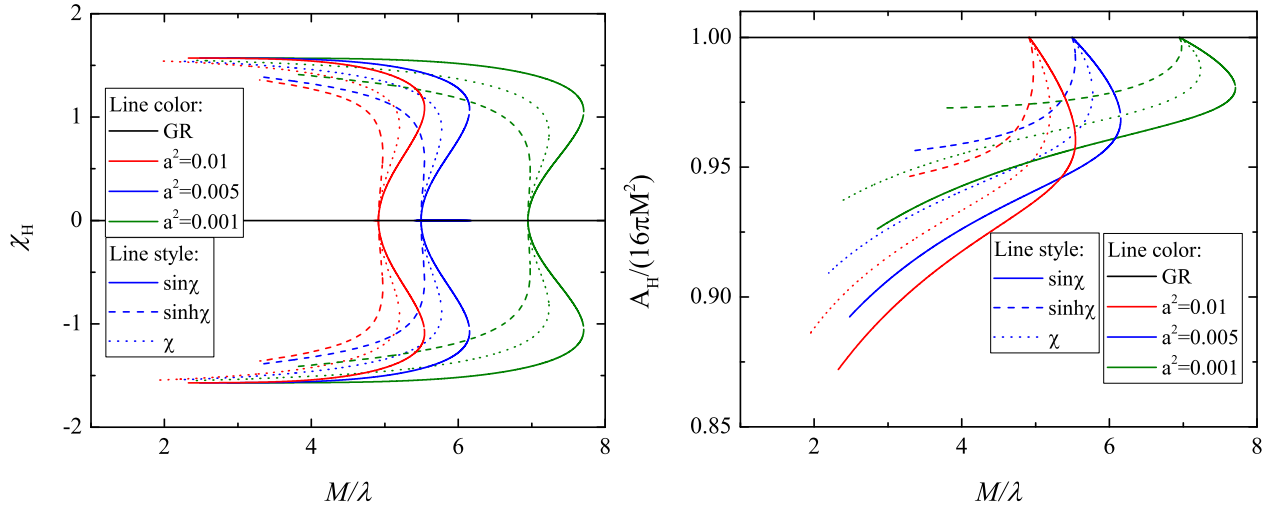
2.3.4 Втора куплираща функции

В този подраздел ще се фокусираме върху втора куплираща функция, която води до скаларизация, а именно

$$f(\chi) = \frac{1}{\beta} \left(e^{\beta \sin^2 \chi} - 1 \right). \quad (39)$$

Резултатите представени по-долу са за случая $\beta = 1$, но са коментирани и други стойности на параметъра β .

Стойността на скаларното поле върху хоризонта и нормализираната площ на хоризонта са представени на Фигура 12. Наблюдава се много интересно поведение на скаларизираните клонове – след бифуркацията, масата на черната дупка със скаларна коса първо нараства след това достига максимум и намалява. Клоновете завършват в $\chi_H \rightarrow \pi/2$, тъй като в тази точка условието за съществуване на скаларизирани решения (29) се нарушава. Тогава, за маса на черната дупка между точката на бифруктация и максимума на масата за скаларизирания клон, съществуват три решения за черни дупки – самото решение на Шварцшилд и две скаларизирани решения. Подобно поведение се наблюдава за първи път за скаларизирани заредени черни дупки с нелинейна електродинамика [59, 60] и наскоро също за Гаус-Боне черна дупка с едно скаларно поле [61], където куплиращата функция е куплираща функция с член от 4-ти ред. Резултатите представени тук, все пак, показват ясно появата на малка област, където две скаларизирани решения с една и съща маса съществуват едновременно и най-важния въпрос, който трябва да зададем е за тяхната стабилност. Както коментирахме в предишните подраздели, изучаването на ентропията на черната дупка (35) може да даде информация за стабилността на клоновете. Нормализираната ентропия е представена в левия панел на Фигура 13, като функция на масата. За малки маси скаларизираните клонове имат ентропия по-голяма от тази при Шварцшилд и на тази база очакваме, че трите решения (за трите различни функции $H(\chi)$) са стабилни. С нарастването на масата на скаларизираните клонове достигат максимум, където на $S_H(M)$ -диаграмата се появява касп, който е сигнал за промяна на стабилността. От този момент нататък скаларизираният клон най-вероятно е нестабилен, нещо повече ентропия

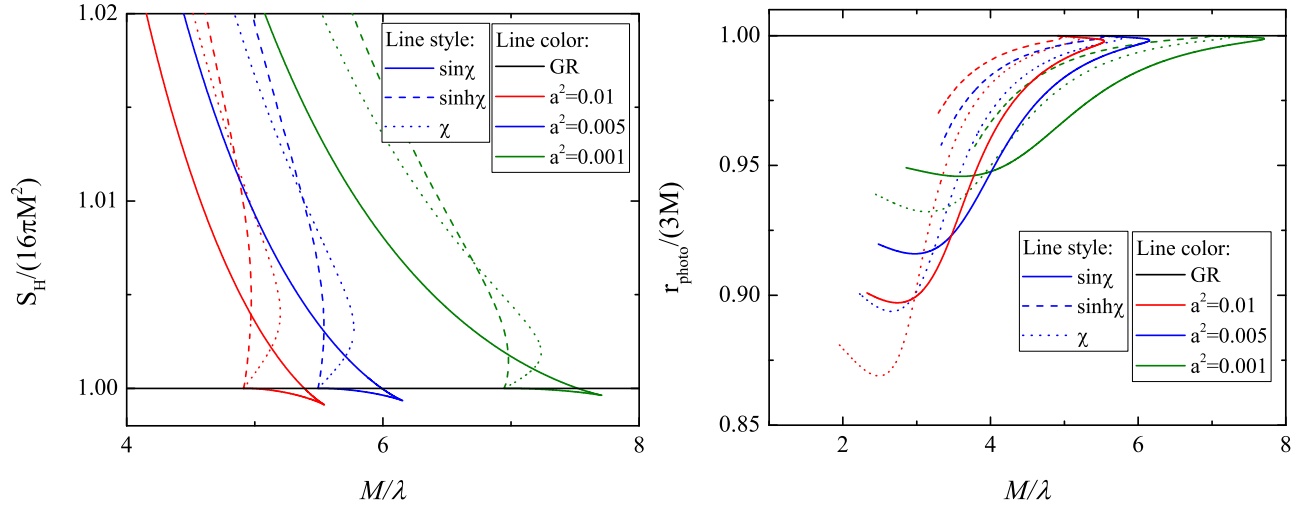


Фигура 12: *Ляво* Стойността на скаларното поле върху хоризонта, като функция на нормализираната маса на черната дупка. *Дясно* Нормализираната площ на хоризонта на черната дупка, към границата на Шварцшилд $A_H/(16\pi M^2)$, като функция на масата. Куплиращата функция е $f(\chi) = (1/\beta)(e^{\beta \sin^2 \chi} - 1)$, където $\beta = 1$, и различните цветове и стилове на линиите съответстват на различни избори на a^2 и $H(\chi)$ съответно.

по-ниска от тази в ОТО. Това съвпада с наблюдаваното за заредените скаларизирани черни дупки в [59]. Съществува и още един интересен регион, близо до максимума на масата, където потенциално стабилната част от скаларизирания клон има за малък диапазон от маси по-ниска ентропия от този на Шварцшилд. Освен това решението на Шварцшилд най-вероятно е стабилно навсякъде по пътя до точката на бифуркация. Това е много интересен регион и въпросът за на стабилността може да се отговори строго само ако се направи линеен анализ на стабилността, това ще бъде направено в бъдеща публикация.

Нормализираният радиус е изобразен на дясното табло на Фигура 11. Разликата с Шварцшилд е очаквано по-голяма за по-малки маси и достига до 10%. Това ще зависи разбира се от избора на параметрите β и a^2 . Ако предположим че средата на клона (между точката на бифруктация и максимума на масата) е наистина нестабилен, явно ще има скок между последния стабилен модел на Шварцшилд и стабилната скаларизирана черна дупка със същата маса. Това потенциално може да доведе до интересни наблюдателни ефекти в сценарии, включващи процес на скаларизация, като при сливащи се компактни обекти [62, 63, 64].

Интересно е дали такова странно поведение може да се наблюдава при чистата Гаус-Боне гравитация с едно скаларно поле. Нашите резултати показват, че за функцията на куплиране (39) и правилно избрани стойности на β , масата на скаларизираните черни дупки започва да нараства след бифуркацията точка, но съответното условие за съществуването на скаларизирани черни дупки ((30) бързо се нарушава и клоновете свършват преди да се достигне ясен максимум на масата. Разбира се, внимателно регулиране на параметъра β и/или функцията на куплиране може да доведе до желан ефект, освен това такова поведение (но не толкова силно изразено) вече е наблюдавано за функция на куплиране с квартичен член в скаларното поле [61]. В края на раздела нека коментираме зависимостта на резултатите от параметъра β в функция на куплиране (39). Оказва се, че интересното поведение, което наблюдавахме по-горе, изчезва за достатъчно малко β , докато за голямо β обхватът на масите между точката на бифуркация и максималната маса за скаларизираните решения се увеличава. В случай, че неединствеността на скаларизирания клон изчезва, поведението на решенията е качествено същото като за куплиращата функция (38) и затова няма да я коментираме повече.



Фигура 13: *Ляво* Нормализираната към границата на Шварцшилд, ентропия на черната дупка $S_H/(4\pi M^2)$, като функция на нормализираната маса. *Дясно* Нормализираният към Шварцшилд радиус на фотонната сфера, като функция на масата на черната дупка. Куплиращата функция е $f(\chi) = (1/\beta)(e^{\beta \sin^2 \chi} - 1)$, където $\beta = 1$ и означенията са същите като на Фигура 12.

2.4 Заключение

В тази глава разгледахме мултискаларно разширение на ОТО, а именно гравитацията на Гаус-Боне и се фокусирахме върху модели, чието скаларно пространство \mathcal{E}_N е 3-мерно максимално симетрично пространство, т.е. S^3 , \mathbb{H}^3 или \mathbb{R}^3 . Ние се ограничихме до статичния и сферично симетричен случай с изображение $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}_3$ експлицитно дадено от $\varphi = (\chi(r), \Theta = \theta, \Phi = \phi)$, което е съвместимо със сферичната симетрия. Предполагайки също, че куплиращата функция зависи само от χ доказваме числено съществуването на черни дупки в мулти-скаларниге-Айнщайн-Гаус-Боне теории. Важно свойство за тези решения е това, че скаларното поле има в безкрайност асимптотика $1/r^2$, което води до нулев скаларен заряд и пренебрежимо малка диполна радиация. По този начин не можем да наложим строги наблюдателни ограничения върху параметрите, базирани върху индиректното наблюдение на гравитационни вълни от пулсари в бинарни системи.

Концентрирахме се върху различни куплиращи функции, водещи до черни дупки със скаларна коса. За всички изучени случаи на черни дупки със скаларна коса откриваме, че в границата $a^2 \rightarrow \infty$ резултатите се доближават до тези в ОТО, и най-високи отклонения се наблюдават за малки стойности на a^2 . Въпреки това, съществува крайна маса, под която не съществуват решения за черни дупки, която зависи от параметъра a^2 и нараства с намаляване на a^2 . Относно зависимостта на резултатите от функцията $H(\chi)$, най-високо отклонение от ОТО се наблюдава за сферична геометрия и най-малко за хиперболична такава. Спонтанно скаларизираните черни дупки притежават стандартни характеристики – при някои маси нови класове от решения с нетривиално скаларно поле бифруктират от това на Шварцшилд. Точката на бифруктация се движи към по-малки маси с нарастване a^2 . Отклоненията от ОТО са силно зависими от избора на параметри и по-големи отклонения се наблюдават за по-малки a . Клоновете или достигат нулева маса, което води до силно нарастване на скаларното поле и по-големи разлики спрямо Шварцшилд за малки M , или завършват в някаква крайна маса заради нарушаване на условието за съществуване на черни дупки. За една от тези куплиращи функции, която разгледахме, се наблюдава много интересен феномен – скаларизираният клон се премества първо към по-големите маси и след това достига максимум за M , масата започва да намалява. По този начин могат да се разграничат два подклона – среден, между точката на бифуркация и максимална маса, и външен клон след максимума на масата. Въз основа на термодинамични

проучвания, можем да заключим, че най-вероятно средният клон е нестабилен, докато външният клон е стабилен.

Ако приемем, че приблизителният анализ на термодинамичната стабилност съвпада с все още неизследвана линейна стабилност на решенията, тогава ще има интересни последиствия, особено за явления, включващи динамична скаларизация на черните дупки. Причината е, че няма да имаме плавен преход между скаларизирани и нескаларизирани решения, като е в стандартния случай, при който скаларизираните клонове са потенциално стабилни точно от точката на бифуркация, където скаларното поле клони към нула. За разлика от това ще имаме скок между последната черна дупка на Шварцшилд и стабилен скаларизиран клон на черна дупка. Освен това може да има а регион в пространството на параметрите, където стабилните черни дупки на Шварцшилд съжителстват със стабилни скаларизирани черни дупки. В резултат на това може да се наблюдава скок между скаларизираното и нескаларизирани решения. Например, това може да се прояви като внезапна промяна в честотите на гравитационните вълни по време на сблъсък.

Освен това изследвахме пространство-времето около получените решения за черни дупки и по-точно радиуса на фотонната сфера, който е пряко свързан с различни астрофизични прояви на черните дупки. Във всички случаи установихме, че отклоненията от ОТО са по-значителни за по-малки маси на черни дупки. За изследваните форми на куплиращата функция и стойности на параметрите, най-големи разлики с черната дупка на Шварцшилд се достигат при скаларизираната решения с максимално отклонение от приблизително 30%. Тази стойност потенциално би се увеличила, ако разгледаме за по-малки a^2 .

3 Неутронни звезди в мултискаларната теория на Гаус-Боне

3.1 Размерно редуцирани уравнения за скаларизирани неутронни

Тук ще се разглеждаме само статичните и сферично-симетрични решения за неутронни звезди удовлетворяващи уравненията на МСАГБ гравитация с метрика

$$ds^2 = -e^{2\Gamma} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (40)$$

където Γ и Λ зависят само от радиалната координата r .

Геометричната постановка следва напълно постановката за черни дупки със същите анзаци за скаларните полета. По този начин получаваме следните редуцирани поледи

уравнения:

$$\frac{2}{r} \left[1 + \frac{2}{r}(1 - 3e^{-2\Lambda})\Psi_r \right] \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{(e^{2\Lambda} - 1)}{r^2} - \frac{4}{r^2}(1 - e^{-2\Lambda}) \frac{d\Psi_r}{dr} - a^2 \left[\left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 + 2e^{2\Lambda} \frac{H^2(\chi)}{r^2} \right] = 8\pi\rho e^{2\Lambda}, \quad (41)$$

$$\frac{2}{r} \left[1 + \frac{2}{r}(1 - 3e^{-2\Lambda})\Psi_r \right] \frac{d\Gamma}{dr} - \frac{(e^{2\Lambda} - 1)}{r^2} - a^2 \left[\left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 - 2e^{2\Lambda} \frac{H^2(\chi)}{r^2} \right] = 8\pi p e^{2\Lambda}, \quad (42)$$

$$\frac{d^2\Gamma}{dr^2} + \left(\frac{d\Gamma}{dr} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} \right) + \frac{4e^{-2\Lambda}}{r} \left[3 \frac{d\Gamma}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} - \frac{d^2\Gamma}{dr^2} - \left(\frac{d\Gamma}{dr} \right)^2 \right] \Psi_r - \frac{4e^{-2\Lambda}}{r} \frac{d\Gamma}{dr} \frac{d\Psi_r}{dr} + a^2 \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 = 8\pi p e^{2\Lambda}, \quad (43)$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left(\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{2}{r} \right) \frac{d\chi}{dr} - \frac{2\lambda^2}{a^2 r^2} \frac{df(\chi)}{d\chi} \left\{ (1 - e^{-2\Lambda}) \left[\frac{d^2\Gamma}{dr^2} + \frac{d\Gamma}{dr} \left(\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} \right) \right] + 2e^{-2\Lambda} \frac{d\Gamma}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} \right\} = \frac{2}{r^2} H(\chi) \frac{dH(\chi)}{d\chi} e^{2\Lambda}, \quad (44)$$

където

$$\Psi_r = \lambda^2 \frac{df(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dr}, \quad (45)$$

а ρ и p са плътността на енергията и налягането на материята в неутронната звезда.

По-горните размерно редуцирани поледи уравнения трябва да допълним с уравнението за хидростатично уравнение на флуида:

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{d\Gamma}{dr}. \quad (46)$$

3.2 Числена постановка и резултати

В настоящия труд представяме резултати за реалистично уравнение на състоянието (УнС), наречено МРА1 [65]. Това УнС допуска максимални маси на неутронните звезди по-големи от 2 слънчеви маси и то е в съгласие с ограниченията, поставени от наблюденията на сливането на двойни неутронни звезди [66]. За числените пресмятания ние приемаме неговата политропна апроксимация [67]. Ще разгледаме различни куплиращи функции $f(\chi)$, които допускат спонтанна скаларизация, т.е. изпълняват условието $\frac{df}{d\chi}(0) = 0$. Като пример ще разгледаме следната куплираща функция

$$f(\chi) = -\frac{1}{2\beta} \left(1 - e^{-\beta\chi^2} \right), \quad (47)$$

където β е положителен параметър. Куплиращата константа λ е представена в безразмерни единици

$$\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{R_0}, \quad (48)$$

където $R_0 = 1.476$ km е половината от гравитационния радиус на Слънцето.

Численото намиране на скаларизираните решения и изчисляването на скаларизираните клонове е труден и времеемък процес. Ето защо ще се ограничим само с едно УнС и една куплираща функция, като основната ни задача е да конструираме представителни решения и определим тяхните основни свойства и зависимост от параметрите на теорията. Редуцираните полеви уравнения (41)-(44) и уравненията за хидростатично равновесие (46) са решени числено с естествените гранични условия - регулярност в центъра на звездата и асимптотически плоски в безкрайност:

$$\Lambda(0) = 0, \quad \frac{d\Gamma}{dr}(0) = 0, \quad \chi(0) = 0, \quad (49)$$

и

$$\Lambda|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Gamma|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \chi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (50)$$

Асимптотическото поведение на скаларното поле, както в случая на черни дупки, може да се получи при линеаризация на полевите уравнения в асимптотичната област, което дава $\chi \sim 1/r^2$. Тази асимптотика показва, че скаларното поле не притежава скаларен заряд. Това има важни физически следствия за теорията. Отсъствието на скаларен заряд означава, че диполната скаларна радиация в бинарната система ще бъде силно подтисната, следователно няма силни ограничения, които могат да бъдат наложени върху параметрите на теорията от наблюденията на бинарни пулсари.

За куплиращата функция, която използваме, тривиалното скаларно поле $\chi = 0$ винаги е решение на уравненията на полето (41)-(44) и резултатите съвпадат с тези на общата теория на относителността. Отсега нататък тривиалните решения и ОТО решенията ще се използват взаимозаменяемо. Ще претърсим триизмерното пространство на параметрите (a^2, λ, β) за бифуркационни точки, от които нови клонове на решения с нетривиално скаларно поле излизат от тривиалния клон. Тази задача се оказва нетривиална. От една страна е броят на свободните параметри в теорията, а от друга - сериозните числени трудности, възникващи от самата система (41)-(44).

Що се отнася до различните скаларни пространства, намерихме решения и за трите. Разликите между тях обаче са пренебрежимо малки и не могат да се видят при сравняване на резултатите на фигурите. Липсата на отклонения обясняваме с малките стойности на скаларното поле. Установихме, че дори за максималните наблюдавани стойности на скаларните полета, стойностите на метричните функции $H(\chi) = \sin(\chi)$, $H(\chi) = \chi$ и $H(\chi) = \sinh(\chi)$ са практически неразличими. Ето защо избрахме да представим само резултатите за сферичното скаларно пространство с $H(\chi) = \sin(\chi)$.

На Фиг. 14 представяме масата на звездата, в слънчеви маси, като функция на нейния радиус даден в km. В левия панел стойността на a^2 е фиксирана и се изучават различни комбинации от λ и β . В десния панел λ и β са фиксирани и се изучават различни стойности за a^2 . И от двата панела е ясно, че резултатите са качествено подобни на резултатите в чистата гравитация на Гаус-Боне, представени в [68]. Нетривиалните решения излизат от точките на бифуркация и клоновете свършват или след като достигнат максимална маса, или при някаква по-малка маса поради числени трудности. За всички набори от параметри изчислителната процедура става по-чувствителна към началните условия с увеличаването на централната плътност на енергията и времето за изчисление за отделните модели непрекъснато се увеличава по клона. Следователно, някои от клоните бяха прекратени преди максималната маса, в някакво разумно изчислително време. Максималната маса, когато се достигне, винаги е по-ниска от ОТО. Открихме обаче, че за същия набор от параметри, λ и β , може да бъде избрана стойност за a^2 (по-малка от единица), така че решенията ГБТ и МСАГБТ да бифуркират за една и съща централна плътност. В този случай МСАГБТ неутронните звезди имат по-малка маса в сравнение с ГБ.

В левия панел на фигурата може да се види, че за фиксирана стойност на a^2 точката на бифуркация се премества към по-високи маси (еквивалентно – централни плътности)

с намаляване на λ . При фиксиран λ клонът на нетривиалното решение става по-дълъг и клони към ОТО с нарастване на β (точката на бифуркация не се движи). В граничния случай $\beta \rightarrow \infty$ нетривиалното разклонение ще съвпадне с тривиалното. В десния панел може да се види, че при фиксирани λ и β точката на бифуркация се премества към по-високи маси, а клонът става по-дълъг с увеличаване на a^2 .

Поведението, описано по-горе, може да постави някои ограничения върху свободните параметри в теорията. Ако уравнението на състоянието позволява максимални маси, по-високи от две слънчеви маси в ОТО, параметрите на теорията трябва да бъдат избрани по такъв начин, че максималната маса да е над две слънчеви маси. Това обаче не е много ограничително, тъй като два от параметъра позволяват значителни отклонения в точката на бифуркация и случаят $\beta \rightarrow \infty$ винаги клони към тривиалното решение, независимо какви са стойностите на другите два параметъра. Освен това не всички клонове достигат максимални маси.

За всички представени комбинации от параметри успяхме да намерим клонове на решения с различен брой нули на скаларното поле – без нули, една нула и т.н. Открихме, че точката на бифуркация се премества към по-високи маси и клонът става по-къс с увеличаване на броя на нулите на полето. Представените в тук резултати са само за решения без нули. Тези решения, както е обяснено по-долу, са стабилни.

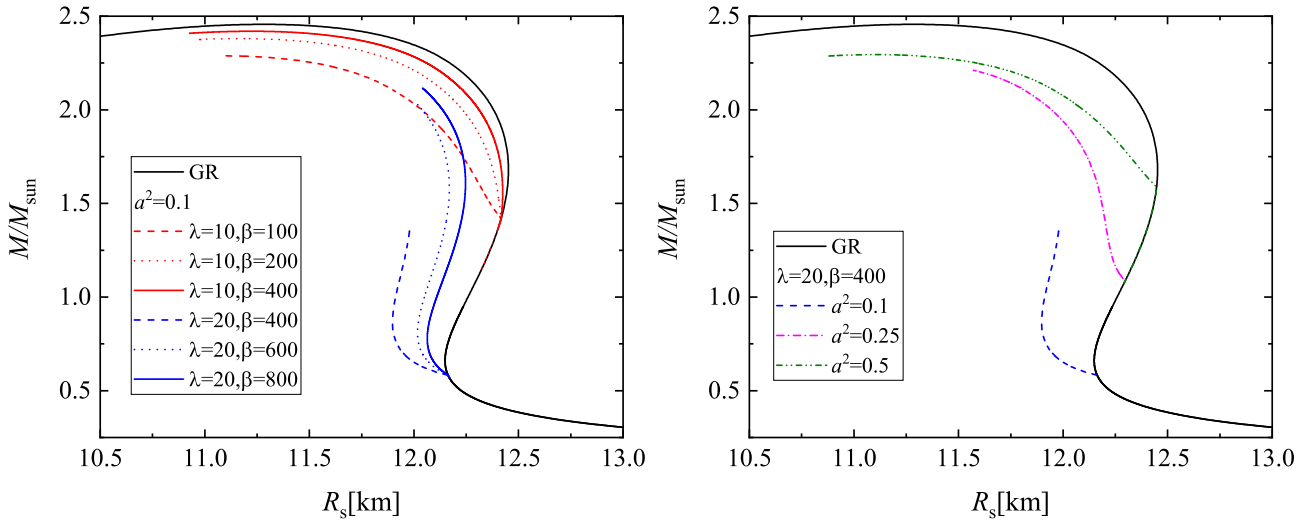
На Фиг. 15 представяме масата на неутронните звезди като функция на централната плътност. Представените модели в левия и десния панел съответстват на тези на Фиг. 14. За всички модели отклоненията от ОТО са относително малки.

Поради липсата на скаларен заряд, на Фиг. 16 начертахме стойността на скаларното поле на повърхността χ_S на звездата като функция на масата на неутронната звезда. χ_S винаги е по-високо за по-малки стойности на λ и намалява с увеличаване на β . В същото време a^2 няма значителен ефект върху максималната стойност на χ_S .

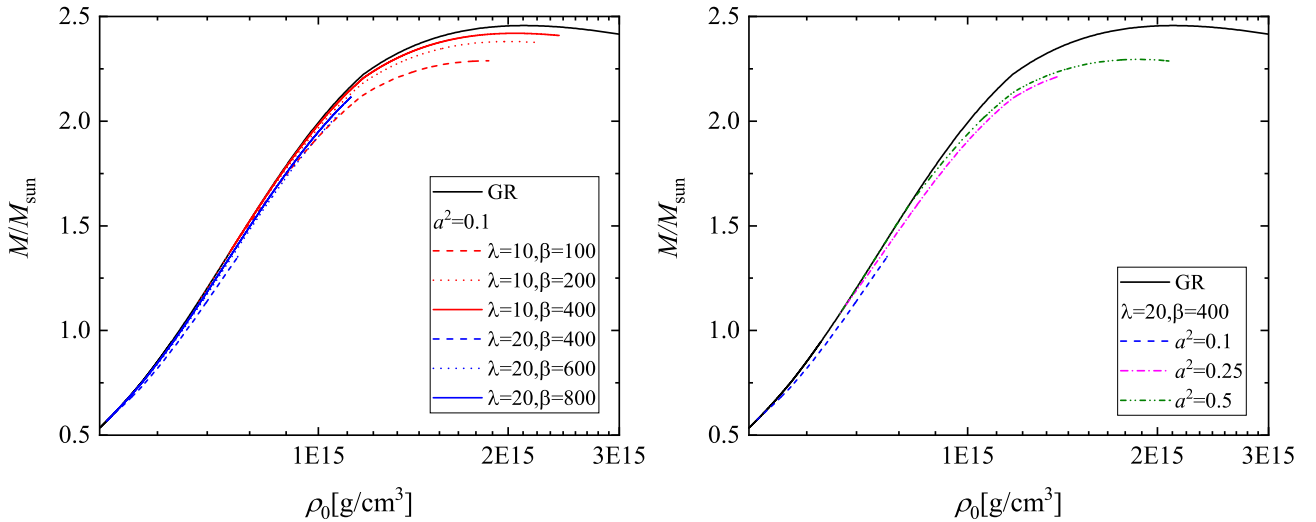
Като индикация за стабилността на решенията за неутронни звезди, на фиг. 17 представяме енергията на свързване на звездата, $1 - \frac{M_0}{M_{\text{sun}}}$, като функция от M_0/M_{sun} , където M_0 е барионната маса на звездата. За по-добра визуализация са представени само някои от параметрите, разгледани по-горе. Решенията в МСАГБТ имат по-висока (по абсолютна стойност) енергия на свързване в сравнение с ОТО, което ги прави енергийно по-изгодни. Върхната точка в решението от ОТО маркира нестабилните модели в зависимостта масата от плътност. В случая на МСАГБТ такъв праг е налице и за наборите от параметри, за които може да се достигне максималната маса. Моделите с нули на скаларното поле имат по-ниска (по абсолютна стойност) енергия на свързване в сравнение със съответните без нули. Следователно, по аналогия с други СТТ, решенията с нули на скаларното поле са нестабилни.

4 Заключение

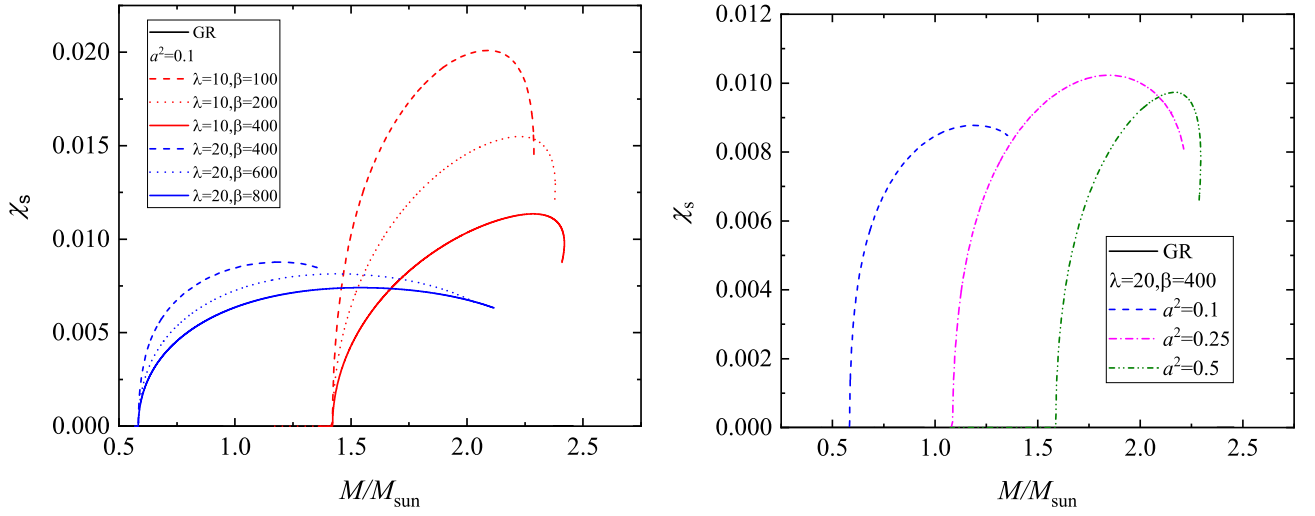
В тази глава конструирахме скаларизирани неутронни звезди в мултискаларни теория на Гаус-Боне с максимално симетрично скаларно пространство и нетривиална изобразение $\varphi : spacetime \rightarrow target\ space$, съвместима със сферична симетрия и явно дадено от $\varphi = (\chi(r), \Theta = \theta, \Phi = \phi)$. Изследвахме най-простите три възможни избора за максимално симетрично скаларно пространство, а именно \mathbb{S}^3 , \mathbb{H}^3 и \mathbb{R}^3 . Моделите, които изследвахме, имат нулево скаларно поле в центъра на звездата, а представените резултати са за куплираща функция, която позволява скаларизация. По отношение на скаларното пространство не се наблюдават разлики между решенията в трите случая. Това лесно се обяснява с ниските стойности на скаларното поле, което прави метричната функция $H(\chi)$, която определя целевото пространство, ефективно неразличима между трите случая. Следователно представените резултати са само за скаларно пространство със сферична геометрия.



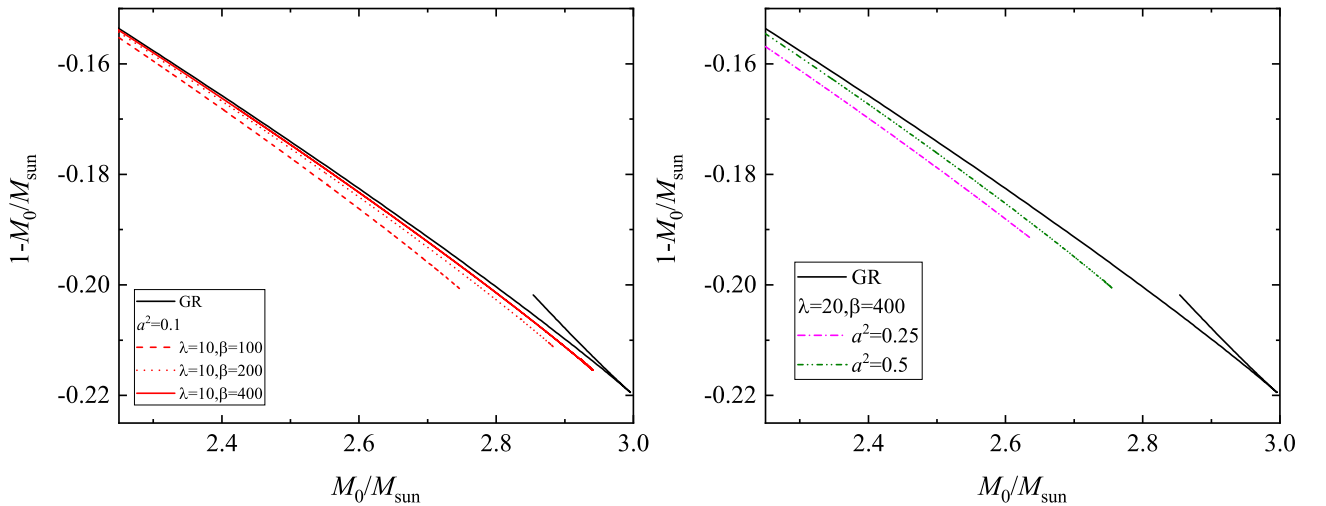
Фигура 14: Връзката маса-радиус за модели с различни стойности на параметрите. *Ляво* Фиксирана стойност на a^2 и различни стойности на λ и β . *Дясно* Фиксирана стойност на λ и β и различни стойности на a^2 . Масата на звездата е в слънчеви маси и радиусът – в километри.



Фигура 15: Масата на звездата като функция на централната плътност за модели с различни стойности на параметрите. *Ляво* Фиксирана стойност за a^2 и различни стойности за λ и β . *Дясно* Фиксирана стойност за λ and β и различни стойности за a^2 . Масата на звездата е в слънчеви маси и енергийната плътност в g/cm^3 .



Фигура 16: Стойността на скаларното поле върху повърхността на звездата като функция на масата на звездата. *Ляво* Фиксирана стойност за a^2 и различни стойности за λ и β . *Дясно* Фиксирана стойност за λ и β и различни стойности за a^2 . Масата на звездата е в слънчеви маси.



Фигура 17: Енергията на свързване $1 - M_0/M_{\text{sun}}$ като функция на масата на покой на звездата M_0 . *Ляво* Фиксирана стойност за a^2 и различни стойности за λ и β . *Дясно* Фиксирана стойност за λ и β и различни стойности за a^2 . Масата на покой на звездата е в слънчеви маси.

Получените решения на неутронни звезди изглеждат качествено подобни на решенията за неутронни звезди в чистата ГБ гравитация. Клоновете с нетривиално скаларно поле се разклоняват от тривиалното решение, а максималната маса на скаларизираните решения винаги е по-малка от тази в ОТО. За едни и същи набори от стойности за параметрите в теорията съществуват множество клонове на решения, характеризирани се с броя нули, които скаларното поле има. Точката на бифуркация обаче зависи силно от стойността на константата на куплиране λ , параметъра a^2 в метриката на скаларното пространство и броя на нулите на скаларното поле. Максималната маса на решенията в МСАГБТ винаги е по-ниска в сравнение с ОТО, което може да позволи налагането на някои ограничения върху параметрите на теорията. В същото време обаче поради числени трудности не всички клонове на решения достигат максимална маса.

За да получим някои индикации за стабилността на скаларизираните модели, ние изследвахме енергията на свързване на звездата $1 - M_0/M_{sun}$. Скаларизираните решения имат по-висока (по абсолютна стойност) енергия на свързване от ОТО, което ги прави енергетично предпочитани. Що се отнася до клоновете с различен брой нули на скаларното поле, клонът без нули има най-висока (по абсолютна стойност) енергия на свързване, поради което този клон е стабилен, а останалите клонове – нестабилни. Това заключение се основава на енергията на свързване и поведението на решенията за неутронни звезди в подобни теории. За окончателен отговор относно стабилността на моделите обаче трябва да се изследват радиалните пертурбации.

Приноси на дисертационния труд

- Изследвани са квазипериодичните колебания от акреционния диск около въртящи се проходими пространствени тунели с помощта на резонансните модели. Изследвана е също линейната стабилност на кръговите геодезични орбити в екваториалната равнина за общ клас от геометрии на пространствени тунели и са изведени аналитични изрази за епициклически честоти. Тъй като пространствените тунели често могат да имитират черни дупки в астрофизичните наблюдения, ние анализираме свойствата на квазикръговите осцилиращи движение в сравнение с черната дупка на Кер. Показваме, че пространствените тунели притежават отличителни характеристики, които могат да бъдат важни за наблюденията. Характерно за черните дупки на Кер е, че орбиталната и епициклическата честота се подчиняват на постоянно подреждане в целия диапазон на параметъра на въртене. За разлика от тях, при пространствените тунели можем да имаме различни видове подреждания между честоти в различните региони на параметричното пространство. Това позволява възбуждането на много по-разнообразни видове резонанси, включително параметрични и принудени резонанси от по-нисък порядък, което може да доведе до по-силни видими сигнали. В допълнение, за еднакво въртящи се орбити резонансите могат да бъдат възбудени в много близо околност на гърлото на тунела за широк диапазон от стойности на ъгловия момент, което прави пространствените тунели ценна лаборатория за тестване на силната гравитация.
- Числено е доказано съществуването на черни дупки в мултискаларните теории на Гаус-Боне с максимално симетрично скаларно пространство за няколко куплиращи функции, включително случая на спонтанна скаларизация. Направено е също систематично изследване на различни характеристики на черните дупки и пространство-времето около тях, като площта на хоризонта, ентропията и радиуса на фотонната сфера. Едно от най-важните свойства на получените решения е, че скаларният заряд е нула и по този начин скаларното диполно излъчване се потиска, което води до много по-слаби наблюдателни ограничения в сравнение с повечето модифицирани теории, притежаващи скаларна степен на свобода. За една от куплиращите функции са намерени клонове на скаларизирани черни дупки, които имат нетривиална структура - има неединственост на скаларизирани решения.
- Числено са конструирани решения описващи спонтанно скаларизирани неутронни звезди в мултискаларните теории на Гаус-Боне с максимално симетрично скаларно пространство. Построени са зависимостите $M(\rho)$ и $M(R)$, а също така и зависимостта на енергията на свързване от барионната маса, които носят информации за стабилността на неутронните звезди.

Публикации в реферирани списания включени в дисертацията

Публикации в международни реферирани списания

A1. Efthimia Deligianni, Jutta Kunz, Petya Nedkova, Stoytcho Yazadjiev, and Radostina Zheleva, Quasiperiodic oscillations around rotating traversable wormholes, Phys. Rev. D 104, 024048 – Published 19 July 2021.

A2. Daniela D. Doneva, Kalin V. Staykov, Stoytcho S. Yazadjiev, and Radostina Z. Zheleva, Multiscalar Gauss-Bonnet gravity: Hairy black holes and scalarization, Phys. Rev. D 102, 064042 – Published 15 September 2020.

A3. Staykov, K.V., Zheleva, R.Z., Scalarized non-topological neutron stars in multi-scalar Gauss-Bonnet gravity, Eur. Phys. J. C 82, 108 (2022) – Published 04 February 2022.

Благодарности

Благодаря на научния ми ръководител чл.-кор.проф. дфзн Стойчо С. Язаджиев за възможността да работя в тази област от теоретичната физика и в тази високо квалифицирана научна група.

Благодаря на колегите ми д-р Калин Стайков и д-р Петя Недкова за съвместната ни работа.

Изразявам огромната си благодарност и признателност на колегата ми доц. д-р Галин Гюлчев за незаменимата му помощ при писането и техническото оформление на дисертационния труд, както и помоща му през всичките ми години на обучение в групата по Гравитация и моралната му подкрепа.

Благодаря на доц. д-р Димитър Младенов за голямата му помощ по всякакви въпроси и при всякакви ситуации през всичките ми години на обучение. Без неговата помощ не бих стигнала до тук. Имах късмета да попадна на такъв съвестен и отговорен човек, който винаги е готов да помогне с каквото може.

Благодаря на всичките ми преподаватели от катедрата по Теоретична физика за положените усилия за моето обучение.

Благодаря на София Искренова и Лидия Славова за съдействието и помоща им за административни въпроси и документи.

Благодаря на семейството ми за подкрепата им, най-вече на сестра ми, която винаги ми е помагала.

Литература

- [1] M. Feroci and al. The LOFT mission concept: a status update. In Jan-Willem A. den Herder, Tadayuki Takahashi, and Marshall Bautz, editors, *SPIE Proceedings*. SPIE, jul 2016.
- [2] S. N. Zhang and al. eXTP: Enhanced x-ray timing and polarization mission. In Jan-Willem A. den Herder, Tadayuki Takahashi, and Marshall Bautz, editors, *SPIE Proceedings*. SPIE, jul 2016.
- [3] Wilson-Hodge and al. STROBE-X: X-ray timing and spectroscopy on dynamical timescales from microseconds to years. January 2017.
- [4] Dimitrios Psaltis, Tomaso Belloni, and Michiel van der Klis. Correlations in quasi-periodic oscillation and noise frequencies among neutron star and black hole x-ray binaries. *The Astrophysical Journal*, 520(1):262–270, jul 1999.
- [5] Christopher W. Mauche. Correlation of the quasi-periodic oscillation frequencies of white dwarf, neutron star, and black hole binaries. *The Astrophysical Journal*, 580(1):423–428, nov 2002.
- [6] Shoji Kato and al. *Trapped Radial Oscillations of Gaseous Disks around a Black Hole*. Publications-Astronomical Society of Japan, 1980.
- [7] Shoji Kato. Resonant excitation of disk oscillations by warps: A model of kHz QPOs. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 56(5):905–922, oct 2004.
- [8] L. Rezzolla, S'i. Yoshida, T. J. Maccarone, and O. Zanotti. A new simple model for high-frequency quasi-periodic oscillations in black hole candidates. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 344(3):L37–L41, sep 2003.
- [9] M. A. Abramowicz and W. Kluźniak. A precise determination of black hole spin in GRO j1655-40. *Astronomy and Astrophysics*, 374(3):L19–L20, aug 2001.
- [10] Marek A. Abramowicz, Vladimir Karas, Wodzimierz Kluźniak, William H. Lee, and Paola Rebusco. Non-linear resonance in nearly geodesic motion in low-mass x-ray binaries. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 55(2):467–471, apr 2003.
- [11] W. Kluźniak and M. A. Abramowicz. Resonant oscillations of accretion flow and khz QPOS. *Astrophysics and Space Science*, 300(1-3):143–148, nov 2005.
- [12] G. Török, M. A. Abramowicz, W. Kluźniak, and Z. Stuchlík. The orbital resonance model for twin peak kHz quasi periodic oscillations in microquasars. *Astronomy and Astrophysics*, 436(1):1–8, may 2005.
- [13] Luigi Stella and Mario Vietri. kHz quasiperiodic oscillations in low-mass x-ray binaries as probes of general relativity in the strong-field regime. *Physical Review Letters*, 82(1):17–20, jan 1999.
- [14] Zdeněk Stuchlík and Andrea Kotrlová. Orbital resonances in discs around braneworld kerr black holes. *General Relativity and Gravitation*, 41(6):1305–1343, nov 2008.
- [15] Alikram N Aliev, Göksel Daylan Esmer, and Pamir Talazan. Strong gravity effects of rotating black holes: quasi-periodic oscillations. *Classical and Quantum Gravity*, 30(4):045010, jan 2013.

- [16] Tim Johannsen and Dimitrios Psaltis. Testing the no-hair theorem with observations in the electromagnetic spectrum. iii. quasi-periodic variability. *The Astrophysical Journal*, 726(1):11, dec 2010.
- [17] Andrea Maselli, Leonardo Gualtieri, Paolo Pani, Luigi Stella, and Valeria Ferrari. Testing gravity with quasi-periodic oscillations from accreting black holes: the case of the Einstein-Dilaton-Gauss-Bonnet theory. *The Astrophysical Journal*, 801(2):115, mar 2015.
- [18] F H Vincent. Testing chern–simons gravity with black holes? *Classical and Quantum Gravity*, 31(2):025010, dec 2013.
- [19] Andrea Maselli, Paolo Pani, Leonardo Gualtieri, and Valeria Ferrari. Rotating black holes in einstein-dilaton-gauss-bonnet gravity with finite coupling. *Physical Review D*, 92(8):083014, oct 2015.
- [20] Andrea Maselli, Paolo Pani, Roberto Cotesta, Leonardo Gualtieri, Valeria Ferrari, and Luigi Stella. Geodesic models of quasi-periodic-oscillations as probes of quadratic gravity. *The Astrophysical Journal*, 843(1):25, jun 2017.
- [21] Cosimo Bambi. Probing the space-time geometry around black hole candidates with the resonance models for high-frequency QPOs and comparison with the continuum-fitting method. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(09):014–014, sep 2012.
- [22] David Hochberg and Matt Visser. Null energy condition in dynamic wormholes. *Physical Review Letters*, 81(4):746–749, jul 1998.
- [23] David Hochberg and Matt Visser. Dynamic wormholes, antitrapped surfaces, and energy conditions. *Physical Review D*, 58(4):044021, jul 1998.
- [24] Edward Teo. Rotating traversable wormholes. *Physical Review D*, 58(2):024014, jun 1998.
- [25] David Hochberg. Lorentzian wormholes in higher order gravity theories. *Physics Letters B*, 251(3):349–354, nov 1990.
- [26] Hiroki Fukutaka, Kazuo Ghoroku, and Khoichi Tanaka. Wormholes solutions in higher derivative gravity. *Physics Letters B*, 222(2):191–194, may 1989.
- [27] Kazuo Ghoroku and Teruhiko Soma. Lorentzian wormholes in higher-derivative gravity and the weak energy condition. *Physical Review D*, 46(4):1507–1516, aug 1992.
- [28] Francisco S. N. Lobo and Miguel A. Oliveira. Wormhole geometries in $f(r)$ modified theories of gravity. *Physical Review D*, 80(10):104012, nov 2009.
- [29] Panagiota Kanti, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Wormholes in dilatonic einstein-gauss-bonnet theory. *Physical Review Letters*, 107(27):271101, dec 2011.
- [30] Panagiota Kanti, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Stable lorentzian wormholes in dilatonic einstein-gauss-bonnet theory. *Physical Review D*, 85(4):044007, feb 2012.
- [31] Georgios Antoniou, Athanasios Bakopoulos, Panagiota Kanti, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Novel einstein–scalar-gauss-bonnet wormholes without exotic matter. *Physical Review D*, 101(2):024033, jan 2020.
- [32] Rustam Ibadov, Burkhard Kleihaus, Jutta Kunz, and Sardor Murodov. Wormholes in einstein-scalar-gauss-bonnet theories with a scalar self-interaction potential. *Physical Review D*, 102(6):064010, sep 2020.

- [33] Vladimir Dzhunushaliev, Vladimir Folomeev, Christian Hoffmann, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Boson stars with nontrivial topology. *Physical Review D*, 90(12):124038, dec 2014.
- [34] Christian Hoffmann, Theodora Ioannidou, Sarah Kahlen, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Spontaneous symmetry breaking in wormholes spacetimes with matter. *Physical Review D*, 95(8):084010, apr 2017.
- [35] Christian Hoffmann, Theodora Ioannidou, Sarah Kahlen, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Wormholes immersed in rotating matter. *Physics Letters B*, 778:161–166, mar 2018.
- [36] Christian Hoffmann, Theodora Ioannidou, Sarah Kahlen, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Symmetric and asymmetric wormholes immersed in rotating matter. *Physical Review D*, 97(12):124019, jun 2018.
- [37] Vladimir Dzhunushaliev, Vladimir Folomeev, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. A star harbouring a wormhole at its core. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(04):031–031, apr 2011.
- [38] Vladimir Dzhunushaliev, Vladimir Folomeev, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Mixed neutron-star-plus-wormhole systems: Equilibrium configurations. *Physical Review D*, 85(12):124028, jun 2012.
- [39] Vladimir Dzhunushaliev, Vladimir Folomeev, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Mixed neutron-star-plus-wormhole systems: Linear stability analysis. *Physical Review D*, 87(10):104036, may 2013.
- [40] Ascar Aringazin, Vladimir Dzhunushaliev, Vladimir Folomeev, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Magnetic fields in mixed neutron-star-plus-wormhole systems. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(04):005–005, apr 2015.
- [41] Michael S. Morris and Kip S. Thorne. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, 56(5):395–412, may 1988.
- [42] A. N. Aliev and D. V. Galtsov. Radiation from relativistic particles in nongeodesic motion in a strong gravitational field. *General Relativity and Gravitation*, 13(10):899–912, oct 1981.
- [43] A. N. Aliev, D. V. Gal'tsov, and V. I. Petukhov. Negative absorption near a magnetized black hole: Black hole masers. *Astrophysics and Space Science*, 124(1):137–157, 1986.
- [44] L. Landau and E. Lifshitz. *Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1976.
- [45] Paola Rebusco. Twin peaks kHz QPOs: Mathematics of the 3:2 orbital resonance. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 56(3):553–557, jun 2004.
- [46] Jiří Horák, Marek A. Abramowicz, Vladimír Karas, and Włodzimierz Kluźniak. Of NBOs and kHz QPOs: a low-frequency modulation in resonant oscillations of relativistic accretion disks. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 56(5):819–822, oct 2004.
- [47] T Damour and G Esposito-Farese. Tensor-multi-scalar theories of gravitation. *Classical and Quantum Gravity*, 9(9):2093–2176, sep 1992.

- [48] Michael Horbatsch, Hector O Silva, Davide Gerosa, Paolo Pani, Emanuele Berti, Leonardo Gualtieri, and Ulrich Sperhake. Tensor-multi-scalar theories: relativistic stars and $3 + 1$ decomposition. *Classical and Quantum Gravity*, 32(20):204001, sep 2015.
- [49] Daniela D. Doneva and Stoytcho S. Yazadjiev. Topological neutron stars in tensor-multi-scalar theories of gravity. *Physical Review D*, 101(6):064072, mar 2020.
- [50] Daniela D. Doneva and Stoytcho S. Yazadjiev. New gauss-bonnet black holes with curvature-induced scalarization in extended scalar-tensor theories. *Physical Review Letters*, 120(13):131103, mar 2018.
- [51] Paulo C. C. Freire et al. The relativistic pulsar-white dwarf binary PSR J1738+0333 – II. the most stringent test of scalar-tensor gravity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423(4):3328–3343, jun 2012.
- [52] John Antoniadis et al. A massive pulsar in a compact relativistic binary. *Science*, 340(6131), apr 2013.
- [53] Lijing Shao, Noah Sennett, Alessandra Buonanno, Michael Kramer, and Norbert Wex. Constraining nonperturbative strong-field effects in scalar-tensor gravity by combining pulsar timing and laser-interferometer gravitational-wave detectors. *Physical Review X*, 7(4):041025, oct 2017.
- [54] Daniela D. Doneva and Stoytcho S. Yazadjiev. Neutron star solutions with curvature induced scalarization in the extended gauss-bonnet scalar-tensor theories. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(04):011–011, apr 2018.
- [55] Paolo Pani, Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Jocelyn Read. Compact stars in alternative theories of gravity: Einstein-Dilaton-Gauss-Bonnet gravity. *Physical Review D*, 84(10):104035, nov 2011.
- [56] Robert M. Wald. Black hole entropy is the noether charge. *Physical Review D*, 48(8):R3427–R3431, oct 1993.
- [57] Jose Luis Blázquez-Salcedo, Daniela D. Doneva, Jutta Kunz, and Stoytcho S. Yazadjiev. Radial perturbations of the scalarized einstein-gauss-bonnet black holes. *Physical Review D*, 98(8):084011, oct 2018.
- [58] Jose Luis Blázquez-Salcedo, Daniela D. Doneva, Sarah Kahlen, Jutta Kunz, Petya Nedkova, and Stoytcho S. Yazadjiev. Axial perturbations of the scalarized einstein-gauss-bonnet black holes. *Physical Review D*, 101(10):104006, may 2020.
- [59] Ivan Zh. Stefanov, Stoytcho S. Yazadjiev, and Michail D. Todorov. Phases of 4D scalar – tensor black holes coupled to born – infeld nonlinear electrodynamics. *Modern Physics Letters A*, 23(34):2915–2931, nov 2008.
- [60] Daniela D. Doneva, Stoytcho S. Yazadjiev, Kostas D. Kokkotas, and Ivan Zh. Stefanov. Quasinormal modes, bifurcations, and nonuniqueness of charged scalar-tensor black holes. *Physical Review D*, 82(6):064030, sep 2010.
- [61] Hector O. Silva, Caio F.B. Macedo, Thomas P. Sotiriou, Leonardo Gualtieri, Jeremy Sakstein, and Emanuele Berti. Stability of scalarized black hole solutions in scalar-gauss-bonnet gravity. *Physical Review D*, 99(6):064011, mar 2019.

- [62] Carlos Palenzuela, Enrico Barausse, Marcelo Ponce, and Luis Lehner. Dynamical scalarization of neutron stars in scalar-tensor gravity theories. *Physical Review D*, 89(4):044024, feb 2014.
- [63] Masaru Shibata, Keisuke Taniguchi, Hirotada Okawa, and Alessandra Buonanno. Coalescence of binary neutron stars in a scalar-tensor theory of gravity. *Physical Review D*, 89(8):084005, apr 2014.
- [64] Mohammed Khalil, Noah Sennett, Jan Steinhoff, and Alessandra Buonanno. Theory-agnostic framework for dynamical scalarization of compact binaries. *Physical Review D*, 100(12):124013, dec 2019.
- [65] H. Mütter, M. Prakash, and T.L. Ainsworth. The nuclear symmetry energy in relativistic brueckner-hartree-fock calculations. *Physics Letters B*, 199(4):469–474, dec 1987.
- [66] B.P. Abbott et al. GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, 119(16):161101, oct 2017.
- [67] Jocelyn S. Read, Benjamin D. Lackey, Benjamin J. Owen, and John L. Friedman. Constraints on a phenomenologically parametrized neutron-star equation of state. *Physical Review D*, 79(12):124032, jun 2009.
- [68] Daniela D. Doneva, Stella Kiorpelidi, Petya G. Nedkova, Eleftherios Papantonopoulos, and Stoytcho S. Yazadjiev. Charged gauss-bonnet black holes with curvature induced scalarization in the extended scalar-tensor theories. *Physical Review D*, 98(10):104056, nov 2018.