Р Е Ц Е Н З И Я

на дисертационен труд
за придобиване на образователната и научна степен "Доктор"

Област: 4. "Природни науки, математика и информатика"

Научно направление: 4.5. "Математика"

Тема: "Тороидални компактификации на дискретни фактори на комплексното двумерно кълбо"

Автор: Панчо Георгиев Бешков

Тема на дисертационния труд

Представеният дисертационен труд е посветен на задача, която може да бъде отнсена към областта на алгебричната геометрия и алгебричната топология. Основните проблеми, които се разглеждат в този труд, се състоят в изследване на тороидални компактификации на дискретни фактори на двумерното комплексно кълбо. Задачата е от определен интерес, тъй като факторите на 2-кълбото и техните компактификации обобщават по естествен начин римановите повърхнини от род поне 2.

Работата систематизира и обобщава изследванията на автора през последните няколко години.

Литературен обзор

Общото ми впечатление е, че дисертантът познава отлично съвременното състояние на разглежданите проблеми. Голяма част от изследванията му са върху кръг от задачи и хипотези от алгебричната геометрия и алгебричната топология, считани за значими в теоретичен план. Докторантът демонстрира задълбочено познаване на областта на изследванията и възможности творчески да прилага знанията си.

Методика

В изследванията си докторантът използва широк арсенал от математически средства, които могат да бъдат причислени най-вече към алгебричната геометрия, алгебричната топология и теория на групите.

Съдържание и резултати на дисертационния труд

Дисертационният труд е в обем от 123 нестандартни машинописни страници и се състои от увод, четири глави и списък на използваната литература, включващ 50 заглавия.

По-долу ще изложа накратко съдържанието на отделните глави от дисертацията.

Глава 1 съдържа кратко изложение на по-важните дефиницииии и теоретични факти, използвани в дисертационния труд. В нея се дават предварителни сведения като класификацията на Енрикес-Кодаира на минималните комплексни проективни повърхнини, числа на Чърн на гладки комплексни проективни повърхнини, логаритмично равенство на Богомолов-Мияока-Яу, описващо гладките тороидални компактификации и техните тороидални компактифициращи дивизори.

Глава 2 е посветена на описание на конструкция на тороидалната компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ на двумерното комплексно кълбо по решетка $\Gamma < U(1,2)$. В нея, изхождайки от действието на $U(1,2)$ върху 2-кълбото, границата му и останалата част от $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, се стига до определяне на тороидалната компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$. В главата са описани и допълнителни въпроси, отнасящи се до индексите на пресичане $L_i \cdot D$.

Оригиналните приноси на автора се съдържат в глави 3 и 4.

Глава 3 е посветена на наситеност и примитивност на тороидални компактификации. В нея се установява взаимноеднозначно съответствие между крайните неразклонени покрития $(X, D, E(\rho))$ и $(\rho(X), \rho(D), \rho(E(\rho))$. Тук $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация на фактор на комплексното 2-кълбо, D е торидалният компактифициращ дивизор, $\rho : X \to y$ е композиция на свивания на (-1)-криви към минимална повъхнина Y и $E(\rho)$ е изключителният дивизор на ρ. Основните резултати се съдържат в серия от твърдения в раздел 3.3 – това са твърдения 3.16–3.20 и 3.22. Всички те се отнасят до наличие на свойствата примитивност и наситеност на гладки торидални компактификации на фактор на комплексното 2-кълбо с размерност на Кодаира $\kappa(X) \leq 0$.

В глава 4 отново се разглежда гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ на дискретен фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ на двумерното кълбо и свиване на (-1)-криви към минимална линейчата повърхнина с елиптична база. Целта тук е да се изрази логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яу за (X, D) чрез индексите на пресичане на неприводимите компоненти на изключителния дивизор на β и гладките неприводими компоненти на тороидалния компактифициращ дивизор D.

Главата започва с две леми (4.1 и 4.2). В първата се доказва, че β-образите на елиптичните компоненти на тороидалния компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$ са гладки елиптични криви. Ако за индексите на пресичане е изпълнено $L_i \cdot C_j \geq 2$, то кривата C_j е особена. Така от тази лема следва че индексите са 0 или 1. Във втората лема се разглежда линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B и две гладки елиптични криви C_1, C_2, върху които r се ограничава до неразклонено покритие от степен d_i. Тогава ако индексът на самопресичане е 0 или 1, то $C_1 \sim B_o + a_1 F$ е числово пропорционална на каноничния дивизор K_Y на Y или е сечение на r с a_1. Последното е в сила и когато индексът на самопресичане е по-малък от 0. Освен това се доказва, че е в сила и равенството $d_1 d_2 (C_1^2 + C_2^2) = 2 C_1 C_2$.

Основен резултат в тази глава е Теорема 1. В нея отново се разглежда свиване $\beta : X \to Y$ на (-1)-криви L_i, $i = 1, \ldots, s$, върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B и тороидален компактифициращ дивизор $D = \sum\limits_{j=1}^{k} D_j$. Доказано е, че:

(1) каноничният дивизор на X е

$$K_X = \beta^{-1}(K_Y) + \sum_{i=1}^{s} L_i$$

(2) логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яу приема вида

$$\sum_{i=1}^{s} (L_i \cdot D - 4) = \sum_{i=1}^{k} C_j^2.$$

От Теорема 1 са получени три следствия (4.3–4.5), в които са доказани интересни резултати. Така, например, ако индексът на пресичане B_o^2 е $\delta < 0$ или $\delta \in \{0, 1\}$, то факторът $\mathbb{B}/\Gamma$ има поне 15 параболични точки; по-нататък ако броят на параболичните точки е $15 \leq k \leq 62$, то $\mathbb{B}/\Gamma$ има поне две ненапълно геодезични пунктирани сфери $L_i \setminus D$ като точния брой на сферите е конкретизиран в таблица 4.2 (следствие 4.4). По подобен начин, ако $\delta \in \{0, 1\}$

и съществува крива C_j, за която $d_j \geq 2$, то $\mathbb{B}/\Gamma$ има поне 12 параболични точки като в случая, когато този брой е между 12 и 44, съществуват поне две ненапълно геодезични пунктирани сфери (следствие 4.5). Точните стойност са представени в таблица 4.4.

Приноси на дисертационния труд

По мое мнение по-важните приноси в дисертационния труд се свеждат до следното:

(1) Представена е конструкция на взаимно еднозначно съответствие между крайните неразклонени покрития на гладка тороидална компактификация X на фактор на двумерното комплексно кълбо и крайните неразклонени покрития $Y_1 \to Y$ на минимален модел Y на X.

(2) Направена е характеризация на наситените и примитивните гладки тороидални компактификации с неположителна размерност на Кодаира.

(3) Доказани са резултати за групата от автоморфизми $\mathrm{Aut}(X, D)$ на гладка тороидална компактификация.

(4) Изразен е в явен вид логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яу чрез индексите на пресичане $L_i \cdot D$.

(5) Намерени са долни граници за броя на параболичните точки на фактор-кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$, който съвпада с броя на гладките елиптични неприводими компоненти на тороидалния компактифициращ дивизор D.

(6) Доказано е съществуването на ненапълно геодезична пунктирана сфера, възникваща от гладка неприводима рационална (-1)-крива.

Забележки и коментари по дисертационния труд

Във връзка с дисертационния труд имам следните въпроси, забележки и коментари:

(1) Защо се налага основният резултат от глава 4 да е номериран като Теорема 1, а не следва общото правило за номериране с номер на глава, пореден номер на твърдение?

(2) На стр. 116: Lemma $\to$ Лема.

(3) Печатн грешка в заглавието на глава 4: ма → на; същата печатна грешка и в главата на страниците от глава 4.

(4) Не е ли русизъм понятието линейчата повърхнина? Не се ли използва на български линейна повърхнина"?

(5) Струва ми се, че в Следствие 4.5 условието да бъде $d_j := \deg[r|_{C_j} : C_j \to B] \geq 2$? Същия въпрос за същото условие в принос 8 от авторефрата.

(6) В принос 5 от автореферата става въпрос за глава 5. Струва ми се, че авторът има предвид теорема 1 от глава 4.

(7) Някои от резултатите са обозначени като твърдения, а други като теореми. Каква е разликата между твърдение и теорема?

(8) Резултатите от дисертационния труд са докладвани на два семинара по теория на кодирането и две пролетни сесии на ФМИ. Пожелателно е те да се докладват и на специализирани конференции по алгебрична геометрия, където биха получили по-съдържателна и задълбочена оценка.

Публикации по дисертационния труд

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в 2 статии, които са излезли от печат. Списанията, в които са отпечатени тези работи са следните:

- Annuaire Universite de Sofia – 1 статия

- Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences - 1 статия
  IF 0.378(2020), SJR 0.24(2020)

Една от статиите е с импакт-фактор, а другата е реферирана в Math Reviews и Zentralblatt.

Една от представените статии е с един и една е с двама съавтори.

Авторство на получените резултати

Тъй като познавам научните интереси на докторанта и следя работата му в последните години, за мен няма съмнение, че приносът му е равностоен на този на останалите автори. Публикациите удовлетворяват минималните изисквания в Закона за развитие на академичния състав в Република България, Правилника за прилагането му и Правилника на СУ "Св. Кл. Охридски".

Цитирания на публикациите от дисертационния труд

Дисертантът не е приложил списък на цитирания на статиите, въз основа на които е написан дисертационният труд. Тъй като работите, съдържащи резултатите от дисертационния труд са се появили от печат непосредствено преди представянето му, нямам съмнение, че такива ще се появят в близко бъдеще.

Автореферат и авторска справка

Авторефератът в обем от 19 страници е направен съгласно изискванията и отразяват правилно резултатите и приносите в дисертационния труд.

Заключение

Считам, че представеният дисертационен труд **"Тороидални компактификации на дискретни фактори на комплексното двумерно кълбо"** с автор **Панчо Георгиев Бешков** съдържа интересни резултати, които представляват оригинален принос в алгебричната геометия и алгебричната топология. Докторантът показва задълбочени теоретични познания в тези области и с това отговаря на изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България, Правилника за неговото прилагането и Правилника на СУ "Св. Климент Охридски" за присъждане на образователната и научна степен "Доктор". В дисертационния труд и свързаните с него публикации няма установено плагиатство.

Изложеното по-горе ми дава основание да дам **положителна оценка** на представения дисертационен труд и да препоръчам на Уважаемото Жури да присъди на Панчо Георгиев Бешков образователната и научна степен "Доктор"в област 4. "Природни науки, математика и информатика", научно направление 4.5 "Математика".

София, 09.05.2022 г.　　　　Рецензент:

(проф. д.м.н. Иван Ланджев)