Георги Чобанов

ИНСТИТУЦИОНАЛЕН АНАЛИЗ НА ПРЕХОДА КЪМ ПАЗАРНО СТОПАНСТВО

Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Стопански факултет

Георги Чобанов

ИНСТИТУЦИОНАЛЕН АНАЛИЗ НА ПРЕХОДА КЪМ ПАЗАРНО СТОПАНСТВО

Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Стопански факултет
София, 2020

Научни рецензенти
Проф. Теодор Седларскки
Доц. Боряна Богданова

Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Стопански факултет

ISBN 978-954-9399-64-6

Съдържание

Увод

Предлаганата монография има за цел да предложи концепция за икономическата политика в периода на преход към пазарно стопанство, основана на институционалния подход в икономическия анализ.

Несигурността и неопределеността, нестабилността е същностна характеристика на всеки преход и е невъзможно да бъде изцяло преодоляна или премахната. ***Нестабилността на стопанската система, обаче може и трябва да бъде намалена до нивото на стабилно или частично стабилно динамично равновесие, което да позволява да се контролират и направляват процесите на прехода***.

Несигурността и нестабилността в период на преход от една към друга обществена система може да бъде намалена, ако наред либерализацията и разрушаването на институциите на старата се изграждат и временни или постоянни институции на новата система, които да повишат или поне да възпрепятстват доколкото е възможно спада в доверието и да осигурят поне относителна стабилност и предвидимост в дейностите и действията на стопанските субекти. Това е ***първия основен принцип на една основана на стабилно динамично равновесие икономическа политика на прехода***. Тя означава да се възприеме нео институционалния подход в прехода.

В процеса на преход настъпва изменение в стойността на благата, факторите на производство и парите. Тъй като ***основна функция на парите е да служат за съхраняване на стойност, то съхраняването на стойността на парите е основен компонент на стабилността на всяка стопанска система.*** В период на преход, стопанската система се нуждае поне от относителна стабилност на своята валута. Не може да не се съгласим с Валтер Ойкен (Walter Eucken, 1952/1990), един от най-видните следвоенни немски икономисти, създали теоритичната основа на прехода на Германия към пазарна икономика, който счита че:

"Всички усилия за установяването на икономически ред биха били безполезни, ако не се осигури поне относителна стабилност на парите. Затова стабилността е приоритет на паричната политика."

Осигуряването и поддържането на състояние на стабилно динамично равновесие на количеството на парите и на нивото на цените е втория основен

принцип на една основана на стабилно динамично равновесие икономическа политика на прехода.

Икономическата концепция на прехода се разглежда в светлината на ***основната дилема на прехода към пазарно стопанство: пазар или институции***. Основният проблем на прехода е, как да се създаде пазар в едно общество без никакви пазарни правила и институции: първо да се създаде пазар без каквито и да било или с минимални пазарни регулации и след това всички необходими правила и институции да бъдат наложени като следствие от нуждите на самия пазар чрез процес на самоорганизиране, или първо да се създадат всички необходими пазарни правила и след това да се създаде пазар. Тази дилема на прехода е еквивалентна на дилемата кое е първично, кокошката или яйцето. Икономическата теория не дава ясен отговор на въпроса, кое е първично, пазара или институциите. Съществуват две направления в икономическата теория, неокласическото и неоинституционалното, които дават противоположни отговори на този въпрос.

Икономическата реформа в Източна Европа се базираше главно на неокласическата парадигма за конкурентните пазари и бе привеведена в изпълнение чрез един списък от предписанията за икономическата политика, наречен Вашингтонски консенсус. ***Преходът в Източна Европа започна с почти еднакво бърз темп на разрушаване на институции и създаване на свободен пазар във всички икономики в преход, но само някои от тях като Чехия, Унгария, Полша и Естония успяха да изградят и новите институции на пазарното стопанство.***

На неоинституционалната алтернатива на прехода е посветена първата част на предлагания труд.

В ***първа глава*** са изложени принципите на стопанския ред на обществото, определен като система от правни и поведенчески норми. Стопанският ред предполага съществуването на институции, които действайки в рамките на правните норми синхронизират индивидуалните дейности и действия на отделните стопански субекти за постигане на общи цели и предимства, съответстващи на ценностната система на обществото. Несигурността, случайните събития в природата и обществото, неопределеността в поведението на стопанските субекти пораждат необходимостта от създаването и поддържането на институции и въвеждането на правила и норми на поведение. За създаването, поддържането и функционирането на институциите се правят разходи.

На ***разходите за функционирането на стопанската система и за спазването на правните и поведенческите норми*** е посветена ***втора глава***.

Как бихме могли да измерваме разходите за функционирането на една стопанска система е показано в ***трета глава.***

В четвърта глава, за ***измерване на транзакционните разходи в България*** е приложена ***методологията Уолис и Норт***, която ги свежда до разходите на ***транзакционния сектор***. Пресметнати са транзационните разходи за стопанската система на България за периода (1997-2003) като са ***анализирани тенденциите на тяхното нарастване в периода на прехода към пазарно стопанство, обяснено главно с изграждането на нови институции и несъответствието между правните и поведенческите норми в периода на преход***.

Втората част на предлаганата монография е посветена на ***икономическата политика в системата на валутен борд***.

Ролята на системата на валутния борд за ***институционалното развитие, за намаляването на несигурността в обществото, за финансовата стабилност и икономическия растеж в периода на преход*** е разгледана в ***пета глава,*** където е изведено ***основното равновесно уравнение на валутния борд***, свързващо ***платежния баланс на страната*** с паричната база и ***паричното предлагане.*** Анализирани са ***структурните особености и буферите на стабилност на българския валутен борд.***

В шеста глава, ***равновесната статика и динамика е използвана като методологична основа за провеждане на икономическа политика в системата на валутен борд***. С помощта на динамичен модел е изследвано ***равновесието и стабилността на паричното предлагане и ценовите равнища, като е изведена възможността*** за провеждане на ***икономическата политика на предлагането*** за постигането на ***икономически растеж при условията на валутен борд, без повишаването на инфлацията***.

Част I.

Неоинституционалната алтернатива на прехода.

Драматичното историческо развитие в Източна Европа след 1989 година повдигна въпроса за това какво трябва да се направи при преминаването от централно планирана или регулирана (непазарна) към пазарна икономика. Въпреки че имаше известен исторически опит за този тип преходи (Германия след Втората световна война, Испания и др.), почти нищо от него не беше използвано, за да се осъществи преходът в Източна Европа по един по-ефективен начин. Икономиките в преход променят всъщност системите си от правила и това естествено води до по-общия въпрос:

Как, защо и кога се създава нова система от социално - икономически правила и кой ги създава?

Системата от правилата на обществото съществува, за да регулира взаимоотношенията между членовете му, така че то да действа като ***единен организъм***, с цел постигане на ***общи цели, предимства или ползи***.

Системата от правилата на обществото се създава, налага и изменя, за да ***обслужва интересите на най-влиятелната доминиращата*** в съответния исторически момент от времето ***група от членове на обществото.*** Дали да се изграждат или да не се изграждат институции, както и какви институции да се изградят, е въпрос на политическа воля на движещите сили в обществото. Трябва да се съгласим с Дъглас Норт (Douglas North, 1991), който посочва, че:

"Институциите не винаги се изграждат според необходимостта да бъдат полезни на обществото, а даже по-скоро те, или поне формалните правила, се създават, за да обслужват интересите на тези, които са с най-голямо влияние за да ги наложат."

Кои са били най-влиятелните при налагането на новите правила в бившите социалистически страни? Един отговор на този въпрос дават Beck, Laeven (2005):

“ По време на началната фаза на прехода в повечето държави в преход, социалистическият елит продължи да бъде влиятелна политическа група, като неговата сила варираше в различните страни в зависимост от степента на окопаването му във властта. Може да се предполага, че управляващият социалистически елит или номенклатурата нямаше особен стимул да създава институции, които да поощряват конкуренцията, тъй като това би намалило икономическата му власт.”

Следователно може да се предположи, че съществува отрицателна зависимост между изграждането на институции и окопаването на социалистическата номенклатура във властта в бившите социалистически държави. Степента на окопаването на социалистическата номенклатура във властта отговаря на нивото на установяване на формалните и неформални правила на социалистическия режим в страната. В Чехия, Унгария, Полша и Естония правилата на социалистическия режим бяха внедрени в по-слаба степен поради факта, че тези страни са били под социалистически режим за по-кратко време и в резултат на отблъскващото влияние на исторически връзки и други фактори.

Социалистическият елит в бившите социалистически страни със сигурност може да се счита за влиятелна сила при осъществяването на прехода към пазарно стопанство, даже нещо повече този елит беше заинтерисован от смяната на обществената система, понеже той нямаше възможност да онаследява придобитите по време на управлението ползи, поради ограниченията в частната собственост. От смяната на правилата на социалистическото общество бяха заинтерисовани и преобладаващата част от другите членове на обществото, които също бяха демотивирани от ограниченията в частната собственост и възможностите за задоволяване на частни интереси и потребности и онаследяването им. Елита и «низините» бяха единодушни относно смяната на обществената система. Именно поради това и социалистическата система рухна мирно за един исторически миг, без някой да се опита да я защити. Нещо повече, въпроса беше, кой и колко може да получи при разпределянето на обществената собственост, понеже всеки чувстваше, че има принос в нея. Поради това и заинтерисованите да няма институции или държава по време на прехода, за да придобият колкото може повече, бяха значително повече от бившия социалистически елит. Съвсем не е случаен факта, че от двата теоретично

възможни подхода за преход към пазарно стопанство: неокласическия и неоинституционалния, се наложи неокласическия.

Проблемът на прехода е всъщност, ***как да се създаде пазар в едно общество без никакви пазарни правила***: ***първо*** да се създаде ***пазар*** без каквито и да било или с минимални пазарни регулации и след това да се изградят всички необходими правила и институции като следствие от нуждите на самия пазар чрез процес на самоорганизация, ***или първо*** да се изградят всички необходими ***пазарни правила*** и след това да се създаде пазар. Този проблем много наподобява дилемата с яйцето и кокошката: дали първо трябва да се създаде яйце и от него да се излюпи кокошка, или първо да се създаде кокошка, която да снесе яйце.

Теоретичните дискусии на тема преход към пазар се свеждат до два възможни подхода, а именно на:

- неокласическата икономическа школа и на
- школата на новата институционална икономика

Според ***неокласическата икономическа школа*** това, с което трябва да се започне, е ***пазарът, след което трябва да се създаде само това което е необходимо на пазара и пазарът сам ще предизвика създаването му, като например само тези правила и институции, които му са необходими***. Свободният пазар се счита за панацея, а правилата, институциите и държавата се пренебрегват или се възприемат по-скоро като пречка за икономическото развитие. ***Този подход има своята логика в процесите на самоорганизация и естествения подбор в природата, но трае дълго и струва скъпо на обществото, понеже не използва историческия опит на човечеството, като преоткрива необходимостта от определени правила и институции, след като историческия опит показва потребността от тях***.

Икономическата реформа в Източна Европа бе проведена главно на основата на неокласическата парадигма за конкурентните пазари, която се свежда до значително свиване на обхвата и размера на правителствените институции и до голямо доверие в ефективността на протичането на пазарните процеси и на дейностите в частния сектор, които се разглеждат като решаващ фактор за стимулирането на икономическия растеж. Основните неокласически принципи бяха приложени на практиката чрез предписването на следния списък от дейности на икономическата политика, наречен Вашингтонски консенсус: (Източник: Williamson 1990, 1994)

• Фискална дисциплина

- Пренасочване на държавните разходи с приоритет към здравеопазването, образованието и инфраструктурата
- Данъчна реформа
- Унифицирани и конкурентни валутни курсове
- Гарантирани права на собственост
- Дерегулиране
- Либерализиране на търговията
- Приватизация
- Стимулиране на преки чуждестранни инвестиции
- Финансова либерализация

По-голямата част от препоръките на Вашингтонския консенсус съдържат важни за ефективното функциониране на пазара икономически предпоставки, без да обръщат особено внимание на правилата и институциите в рамките на които да се осъществят тези препоръки, което ги превръща в безполезни или подвеждащи пожелания. Например, изискването за гарантиране на правата на собственост без изрично да се подчертае, че то е невъзможно да се изпълни без изграждането на безукорно действаща съдебна система. Поради това и предписанията на Вашингтонското споразумение, които бяха приложени в икономики в преход, се оказаха необходими, но не достатъчни и дори подвеждащи в много случаи. Пренебрегването на институционалната среда още в самото начало на прехода доведе до нестабилни очаквания за частните инвеститори и попречи на ефикасното и приемливо за обществото пренасочване на ресурси.

Проблемите при прилагането на програмите за преструктуриране, възникналите съмнения в това, че структурната промяна е достатъчна, за да предизвика бъдещ растеж, както и опитът на държавите в преход, доведоха до преосмисляне на ролята на държавата. Този нов начин на мислене не разглежда пазара и държавата като взаимно изключващи се механизми на разпределение на ресурсите, а по-скоро като взаимно допълващи се. (Виж например Streeten 1993, 1996, Aoki et al., 1997, Evans, 1995 и Grindle, 1996.) Това разбиране за ролята на пазара и държавата доведе икономисти и политици до теоретичните постановки на Новата институционална икономика.

Днес, дори и Световната банка (World bank, 1997) признава, че "***за да има развитие, е необходима ефективна държава, такава, която да катализира и улеснява, да насърчава и допълва дейността на частния бизнес и на индивидите***".

Банката достига до извода, че “***държавно регулираното развитие се провали. Но се провали и развитието без държавна намеса. Историята многократно показа, че доброто управление не е лукс, а жизненоважна необходимост."***

Преходът към пазарно стопанство в Източна Европа започна с почти еднакво бърз темп на разрушаване на институции и създаване на свободен пазар във всички икономики в преход. ***С различна скорост се изграждаха институции***, които подобрят синхрона в действията и дейностите на стопанските субекти и да нямалят степента на неопределеност в поведението на стопанските субекти, по-ефективно да защитават правата на собственост и да създадат по-благоприятна бизнес среда за насърчаването на инвестиции. Различията в степента и скоростта на адаптирането на правилата и институциите намира своето обяснение в парадигмата на институционализма, като до голяма степен се свежда до историческото развитие на националните стопанства и историческата им памет, обусловена от продължителността на наличие на пазарна стопанска система и степента на етаблиране на пазарните норми на поведение в стопанските субекти. Подобно виждане прокарват Хоф и Стиглиц в (Hoff, Striglitz, 2002).

Съществуват емпирични доказателства (Виж Beck и Laeven, 2005), че ***има положителна зависимост между изграждането на институции и икономическия растеж в бившите социалистически държави.***

Институционалното развитие се измерва със средното от шест основни индикатора: гласност и прозрачност, ефективност на управление, върховенство на закона, качество на нормативната уредба, отсъствие на корупция и политическа стабилност. Хоф и Стиглиц в (Hoff, Striglitz, 2002) изследват пречките за налагането на върховенството на закона в пост - комунистическите общества.

За да вникнем по-дълбоко в процесите на смяната на правилата и институциите на обществото, ние ще изложим съвсем накратко тяхната същност

Глава 1. Правила и институции на обществото.

Човешкото общество и смисъла от стопанска дейност.

Човекът е обществено същество, което означава, че той е създаден за да живее в група от хора. В група от поне двама души, човекът може да се възпроизвежда и да осигурява основните си потребности от храна, облекло, жилище, отглеждане на деца.

Смисълът от стопанската дейност е задоволяването на потребностите на човека от блага. Една част от благата са в природата, като примерно дивите плодове, друга част от благата човекът произвежда. Задоволяването на потребностите на хората става чрез стопански дейности, които се изразяват в добиването, производството, разпределението на благата и потреблението им. Ако благата съществуваха в неограничени количества, без необходимостта да бъдът добивани, произвеждани, транспортирани и разпределяни за потребление, нямаше да съществува необходимост от стопански дейности. Такъв въображаем свят е раят, където не е необходимо да бъдат извършвани абсолютно никакви стопански дейности и където всяка погребност се задоволява мигновенно само чрез поискване. В такъв свят няма да съществува и нищо свързано със стопанска дейност, като изучаването на икономика например. Нобеловият лауреат по икономика за 1975 година Пол Самюелсън пише в тази връзка следното:

“Ако всички източници на стопански блага бяха неограничени, то нямаше да съществуват и стопански проблеми. Въпросът какво, как и за кого да се произвежда никога нямаше да бъде поставян. Всяко благо щеше да може да бъде произвеждано в произволно количество. Човешките желания щяха да бъдат задоволявани напълно. При тези обстоятелства, нямаше да е проблем, ако от дадена стока е било произведено прекалено много. Също толкова малко щеше да бъде и вредата, ако икономически нерационално се съчетаваха трудови ресурси и материали. Въпреки това, всеки би получавал това, което би пожелал. Поради това би било без значение как доходите и благата биха се разпределяли на членовете на обществото. Следователно, няма повече да има и никакви стопански блага, т.е. на блага с ограничени количества. Няма да съществува и никаква необходимост от изучаването на стопанските науки или даже някакъв стремеж към “стопанисване”. Всички блага биха били безплатни, толкова безплатни, колкото днес са само водата и въздуха. ”

Дейностите, които членовете на група от хора извършват за задоволяване на потребностите им от блага, са колективни или индивидуални. При индивидуалните действия индивидът, който ги предприема, се опитва да постигне собствени цели или лични изгоди. Индивидуалните действия могат да бъдат съвместими или в разрез с колективните действия. Колективните дейности се осъществяват за постигане на общи за членовете на групата цели или ползи. Координираните колективни, съвместни действия на членовете на една общност могат да доведат до постигането на резултати, които не биха могли да бъдат постигнати от никой отделен член на общността, поради което принадлежат на общността и формират обществените и блага. Възможно е някой член на групата да има опортюнистично поведение, което означава да осъществява дейности или действия, които да са в противоречие с колективните действия и да накърнява по този начин стремежа на другите членове на групата към общите цели или изгоди на групата. За да се синхронизират действията и дейностите на членовете на групата за постигането на общи цели и изгоди, задоволяващи както общи така и индивидуални потребности в групата от хора се установяват поведенчески норми.

Правни и поведенчески норми на човешкото общество.

Общността представлява група от хора (индивиди), които по правило действат или си взаимодействат съгласно набор от поведенчески норми за координация и прилагане на санкции върху поведението на членовете на групата с цел постигане на определени преимущества.

Всяка група от хора с общи интереси, нужди или *потребности* може да образува общност. Типични примери за общности са образувания като орда, нация, семейство, клуб, религиозна общност. Първоначално хората са живели в общности като ордата, основани на неформални норми на поведение. По-късно се създават ***институциите и организациите, които се базират на формални правила, и общността се превръща в общество***.

Правилата в едно общество би могло да бъдат два вида: (1) конституционни правила и (2) договорни правила.

Конституционните правила създават обществени структури, наречени институции. Типичен пример за институция е ***държавата***. Нейната система от конституционни правила съдържа всички правни норми на обществото. Правните норми са задължение за всеки член на обществото и те трябва да се спазват при всяко негово действие. Конституционните правила могат да бъдат: (1) законодателни (създаване на регулации), (1) изпълнителни (изпълнение на регулациите) и (3) съдебни (следят за изпълнението на регулациите).

Една организация се създава за част от членове на обществото чрез система от непротиворечиви договорни правила с или без ограничения във времето и за осъществяването на определени действия или дейности в рамките на обществото. Те могат да бъдат формални или неформални. Пример за ***формална организация*** **е** ***предприятието*.** Системата от формалните му правила представлява неговия статут. ***Неформална организация***, изградена от неформални правила, е ***общността***. Неформалните правила са всички норми на поведение на индивидите, установени от обществото и допълващи формалните правила.

Системата от правила, изграждаща организацията, може да се изрази в писмена форма и да се превърне в съвкупност от формални правила за участниците. Членовете на организацията могат неформално, в устна форма или по друг доброволно избран начин, да приемат да действат в съответствие с техните правила на поведение и без да създават формални правила. Това означава, че една организация може да бъде създадена като формална или неформална, например семейството може да бъде неформално, както и да бъде формализирано.

Съществува взаимодействие между институциите, организациите и индивидите. Налагането на система от юридически предписания и институции в обществото може да доведе до формиране и установяване на нови норми на поведение и нови организации в обществото и обратно, съвместните действия на индивидите според собствените им правила могат да доведат до въвеждането на нов закон.

Институциите, изградени от система от конституционни правила, координират, контролират и санкционират поведението, действията и взаимодействията между членове на общността за постигане на общи цели, предимства или изгоди. Конкретни цели биха могли да бъдат например: увеличаване на националното богатство, защита от вътрешни и външни врагове, произвеждане на обществени или частни блага, отглеждане на деца, и др. За постигане на тези конкретни цели в обществото се създават институции и организации като: държава, полиция, армия, предприятия, семейства, и т.н.

В обществените правила съществува определена йерархия. Това означава, че всеки две правила, например *А* и *Б,* от системата могат да се сравняват според техния приоритет. Трябва да е ясно дали *А* има приоритет пред *Б*, или *Б* има приоритет пред *А*, или *А* и *Б* са с еднакъв приоритет. Правила с един и същ приоритет не бива да си противоречат. Ако две правила с различна степен на приоритет са несъвместими, се прилага правилото с по-висока степен на приоритет. Правилата с по-висок приоритет се смятат за по-значими, по-съществени от тези с по-нисък приоритет. Конституционните правила са с по-голяма важност от договорните.

Ние ще считаме, че ***институциите в една общност, се определят от система от формални конституционни правила***. Douglas North определя институциите като набор от формални правила и неформални ограничения:

"Институциите са ограничения, изобретени от самите хора, които структурират взаимодействието между икономическите агенти. Те са изградени посредством набор от формални правила (правила, закони, конституции), неформални ограничения (норми на поведение, конвенции, самоналожени кодове на поведение) и механизми за тяхното принудително спазване. Общо те определят системата от стимули на обществото и в частност на икономиката."

Институциите, организациите и индивидите в едно общество могат да комуникират помежду си и да предприемат различни действия и дейности. Поведението на членовете на обществото е ограничено от обществените регулации. Както в една игра, те регулират обществения живот. По-точно те определят:

1. Кои действия и за кои индивиди, организации или институции са позволени, задължителни или забранени.
2. Какви последици има нарушаването на регулациите.
3. Как могат да се променят правилата на поведение и кой има правомощието да ги променя.

Формалните правила и неформалните норми на поведение ограничават действията на индивидите, организациите и институциите и те са длъжни да остават в рамките на тези ограничения. Членовете на обществото могат обаче, да се съобразяват с регулациите, но могат също така и да не ги спазват или да ги нарушават.

Движещи сили на стопанската система.

В стремежа си да опознае обкръжаващия го свят, човекът разчленява, детайлизира разглеждания обект, като обикновено го свежда до една система от компоненти с определена структура, които са подчинени на определени връзки и взаимодействия под въздействието на специфични за системата движещи сили. Този подход, макар и не единствен, се утвърди като най-масов и до голяма степен общоприет в съвременната наука под наименованието ***системен подход***, като хронологически първоначално бе възприет от природните, а по-късно и от обществените науки.

В природните науки, в частност във физиката се изследват системи, компонентите на които са елементарни на определено ниво частици, взаимодействащи си под въздействието на сили на привличане и отблъскване в един ансамбъл, в една система, която като цяло, на макро ниво може да представлява някакво твърдо тяло, флуид или газ. В биологията, всеки жив организъм, като човешкия например, се разчленява като се свежда до една йерархична система от компоненти, елементи, подсистеми, които си взаимодействат под въздействието на определени сили в едно хармонично единство.

В икономиката, системният подход бе въведен от физиократите на Франсоа Кене. Самият Франсоа Кене е лекар по професия и пренася биологичната представа за човешкия организъм в икономиката, като разглежда стопанството като една система, разбира се със специфични за него структура и движещи сили .

Човешкото общество е организъм и като всеки организъм има същност, смисъл на съществуване, концепция, структура и механизми, движещи сили и управление.

Тъй като стопанските дейности се осъществяват от хора, ***движещите сили на стопанската система са заложени в поведението на човека***, като главно действащо лице в театъра на стопанската система. Поведението на всеки човек се определя от поведенческите му норми. Те или са генетично заложени в него кодове, които ще наричаме инстинкти или са придобити в резултат от външни въздействия от заобикалящата индивида среда или или от здравословното му състояние. Основните заложени човешката природа ***инстинкти, са инстинкта за самосъхранение (страх, предимно от смъртта), към възпроизвеждане (секс), към консервация (вечен живот), към доминация***. ***Външно придобити са нормите на поведение***, които индивидът сам си е наложил по внушение на събития от заобикалящата го среда или са му били наложени от общността в която живее като ***морал, етика, религия, всякакъв вид догми, навици, обичаи, традиции***. Системата от норми на поведение на един индивид играе определяща роля в процеса на вземането на решение за осъществяване на определени стопански дейности, като намира конкретен израз в неговите ***склонности*** (стремежи, желания, амбиции) ***към предприемане на определени стопански дейности или действия, или предпочитания при избор на алтернативни възможности при удовлетворяване на потребностите от блага***.

Несигурност в обществото.

Дали един член на обществото ще действа съобразно правилата или не, не е известно предварително. Въобще казано, всичко действие на индивид, организация или институция може да се счита за несигурно, което ще означава, че предварително не можем да сме сигурни дали това действие ще бъде предприето или не, дали ще се действа по правилата или те ще бъдат нарушени.

Едно ***събитие*** се смята за ***несигурно,*** ако не може да се намери алгоритъм, чрез който да се определи кой от потенциално възможните изходи ще се случи. Ако е възможно да се намери алгоритъм, който да определя при какви обстоятелства всеки от възможните изходи ще се реализира, тогава събитието ще се превърне от несигурно в сигурно събитие. Дали едно събитие е сигурно или несигурно, е въпрос на познание.

В човешката история непрекъснато се правят опити за превръщане на несигурни събития в сигурни. Безброй несигурни събития са били превърнати в сигурни благодарение на научни изследвания и практически проучвания, но не по-малко събития си остават несигурни. Можем ли да се надяваме, че някой ден всички събития ще бъдат сигурни? Докъде всъщност се простира човешкото познание? Възможно ли е някои несигурни събития никога да не бъдат превърнати в сигурни? Несигурните събития, които не могат да бъдат превърнати в сигурни, се наричат ***случайни.***

Съществуват ли случайни събития е въпрос, който човечеството си задава от древни времена, но все още няма ясен отговор за него. Научните постижения, особено в областта на микро – физиката, обаче ни навеждат на предположението, че в света, в който живеем, има събития, които са случайни, т.е. не-познаваеми по природа. Това ни подсказва, че може да разглеждаме два типа причини, които предопределят несигурните събития:

- причини, които не могат да се избегнат поради тяхната непознаваема природа
- причини, породени от липсата на информираност или поради недостатъчната информираност на членовете на обществото

Следователно, несигурността в обществото се състои от два компонента:

- ***екзогенна несигурност*** - дължи се на причини извън обществото, на непознаваемата природа, на случайната компонента,
- ***ендогенна несигурност*** – дължи се на причини в самото общество като липса на информация, недостатъчна познавателна способност, на непредвидимо поведение на

член на обществото, на субективни действия на ***обществените икономически агенти*** (индивидите, организациите и институциите).

С цел да се намали несигурността в поведението на икономическите агенти в обществото, се упражнява контрол и се налагат санкции от правната система, от институциите или дори от индивидите.

Стопански дейности, действия, операции и длъжности.

Стопанска дейност формално се осъществява чрез последователност от ***стопански операции***, наричани още ***стопански действия***. Стопанска дейност е например производството на хляб. То е дълга и разклонена последователност от стопански операции. Стопанските операции са два вида: производствени и транзакционни.

Производствена е всяка ***стопанска операция***, които променя стопанския обект върху който се прилага, добавяйки му стойност. Мелничарят, който смила пшеница на брашно извършва производствена стопанска операция, която превръща пшеницата в брашно, като и добавя и стойност. Автомонтьорът, който ремонтира повреден автомобил, отстранява повредата, променя състоянието на автомобила и по този начин извършва производствена операция.

Транзакционна е всяка ***стопанска операция***, които не променя самия стопанския обект, но може да промени други негови характеристики като собственост или местоположение. Покупката на брашно, транспортирането на хляб, администриращите стопанските дейности операции са транзакционни. ***Стопанска транзакция или сделка*** означава преминаването на един стопански обект (благо, фактор на производство или документ съдържащ стойност) от един стопански субект към друг стопански субект чрез промяната на свойството собственост или право на ползване на стопанския обект.

Транзакциите биват едностранни или двустранни. Едностранна или еднопосочна е транзакцията когато един стопански субект прехвърля на друг стопански субект някакъв стопански обект, без да получава нищо в замяна. Едностранни транзакции са даренията, държаните субсидии за предприятията, социалните помощи за домакинствата. Двустранна или двупосочна е транзакцията при която стопанският субект, който прехвърля стопански обект на друг стопански субект, получава от него за компенсация друг стопански обект. Двустранни транзакции са покупко-продажби или натурални замени. Различните видове стопански транзакции са представени в клетките на табица 1. от позицията на единият от двамата участници в транзакцията, като еднопосочните транзакции са включени в схемата като случаи при които срещу благо или иск се получава нищо.

		ПОЛУЧАВАМ		
		БЛАГО	ИСК	НИЩО
ДАВАМ	БЛАГО	ББ		
	ИСК	ИБ	ИИ	
	НИЩО	НБ	НИ	

Таблица 1. Видове стопански транзакции.

ББ) Давам БЛАГО получавам БЛАГО е стопанска транзакция , която се нарича натурална замяна.

ИБ) Давам ИСК получавам БЛАГО е стопанска транзакция, която е покупка за купувача и продажба на продавача, поради което транзакцията е всъщност покупко-продажба.

ИИ) Давам ИСК получавам ИСК е стопанска транзакция при която става покупко-продажба на искове, например на ценни книжа, акции, облигации срещу пари, на една валута срещу друга валута.

НБ) Давам НИЩО получавам БЛАГО е еднопосочна транзакция, която се нарича дарение на благо.

НИ) Давам НИЩО получавам ИСК е еднопосочна транзакция, която се нарича дарение на финансови активи.

Освен разгледаните дотук форми на транзакции, различаваме още пазарни и непазарни транзакции. Обикновено, транзакциите са пазарни. Съществуват и транзакции, които не са пазарни. Те имат междинен, допълващ характер и формално не минават през пазара. Непазарна транзакция е производството на блага или производствени мощности за самозадоволяване. Производството се отчита като транзакцията покупка, понеже то увеличава дълготрайните материални активи на предприятието и в двата случая, когато са произведени за самозадоволяване или когато са придобити чрез пазара. Изграждането на жилище от частно домакинство се отчита като производствена дейност на предприятие, макар че производствената дейност не е типична за домакинствата и също се счита за транзакция покупка. За частните домакинства е транзакция наемането на жилище, т.е. покупка на правото за ползване на жилище.

Стопанският субект осъществява своята ***стопанска дейност*** посредством ***последователност от стопански операции***, които са определящи за неговата ***професионална дейност***.

Длъжност или щат ще наричаме професионална заетост, която се определя от списък от стопански операции наричан още ***длъжностна характеристика***, които един стопански субект се задължава да изпълнява като ***участник в стопанския процес***.

По правило, всеки работещ в едно предприятие е назначен на определена длъжност, което означава, че в рамките на работното време той изпълнява операции вписани в длъжностната му характеристика. Работното време O на всеки работещ в едно предприятие, което примерно е осем часа дневно, се разпределя по естествен начин на n подинтервали от време $O_1, O_2, ..., O_n$ в които той извършва съответната стопанска операция. В една част, например k на брой интервали от време с номера $t_1, t_2, ..., t_k$ работещият извършва транзакционни операции, а в останалите интервали с номера $p_1, p_2, ..., p_{n-k}$, работещият извършва производствени операции. Общото време O_T, което работещият извършва транзакционни операции може да се пресметне по формулата:

$$O_T = O_{t_1} + O_{t_2} + ... + O_{t_k} \qquad (1)$$

Дела (частта) от работното време R_T, в което работещият извършва транзакционни операции е равен на:

$$R_T = \frac{O_T}{O} \qquad (2)$$

Частта W_T от общата заплата W за работното време R_T за извършени транзакционни операции, която се пресмята по формулата:

$$W_T = R_T W = \frac{O_T}{O} W \qquad (3)$$

Глава 2. Разходи за функционирането на стопанската система и за спазване на правните и поведенческите норми.

Стопанската система е сложен конгломерат от стопански субекти, които извършват съгласувани стопански дейности върху стопански обекти за постигане на определени стопански цели. За постигане на целите, които си поставя обществото е необходимо стопанската система да функционира като единен организъм, което означава, че всеки стопански субект следва да извършва точно определена стопанска дейност на точно определено място в точно определено време. ***Поради съществуването и действието на обективни случайни фактори в света в който живеем и поради наличието субективната неопределеност в поведението на стопанските субекти, синхронът в действието стопанската система може да бъде нарушен. За да бъде осигурено функционирането на стопанската система като цяло, за постигане на целите и, се правят разходи, които се наричат транзакционни*. *Идеята, че обществото е необходимо да прави разходи за да фунционира добре обществената система, присъства още в трудовете на класиците на съвременната икономическа теория.***

Адам Смит в основополагащата си книга «Богатството на народите» (Adam Smith, 1776/1937) разглежда пазара като основен движещ механизъм (мотор) на стопанството, който като "невидима ръка" регулира и оптимизира производството и разпределението на блага и свързаните с тях цени и ресурси, както и какви блага и в какви количества да се произвеждат и как да се разпределят между производители и потребители.

Механизма на пазара се задвижва като с гориво от стремежите, склонностите, нагона на стопанските субекти, които стимулират разделението на труда и преследвайки индивидуални или колективни цели в крайна сметка могат да доведат до постигането на стопанско изобилие:

«Разделението на труда, от което се получават толкова много предимства, не е резултат от някаква човешка мъдрост, която да предвижда и да урежда общото изобилие за което то (разделението на труда) предоставя възможност. Това е необходимия, макар и много бавен и постепенен резултат от една определена склонност в човешката природа, която не се води от такава екстензивна утилитарност, това е ***склонността на човека*** да търгува, да прави бартер, да заменя едно неща за друго.» (Adam Smith, 1776/1937, p. 13)

Пазарът функционира поставен на фундамента на институциите и организациите, формалните и неформалните правила на обществото, на стопанския ред, които осигуряват вътрешния и външния ред и сигурност на стопанската система основана на разделението на труда и на правата на собственост. За поддържането на институциите и организациите, обществото прави разходи, които всъщност са транзакционни разходи и на които Адам Смит посвещава обширни части от своя труд. Част III от глава I на книга V е наречена „За разходите за държавни дейности и държавни институции." (Of the Expence of public Works and public Institutions) Adam Smith, 1776/1937], pp. 681-766.)

Макар че транзакционните разходи са заложени съвсем ясно и недвусмислено във фундаменталния труд на Адам Смит, икономистите и то главно негови последователи, дълго време ги пренебрегваха, не ги вземаха под внимание, като отдаваха почти абсолютен приоритет на пазара, водени от принципа, че ако нещо е необходимо, то пазърът ще си го набави. Едва неотдавна, след почти два века, икономистите започнаха да отчитат факта, че използването на пазарния механизъм има транзакционни разходи, които се увеличават с задълбочаващото се разделение на труда водещо до усложняване икономическите процеси и пораждащо разходи, които могат да затруднят пътя към общото изобилие, както си пролича от стопанските депресии през последните няколко столетия.

Коуз (Coase, 1937) възприемайки идеята, че свободната пазарна размяна води до оптимално разпределение на ресурсите, забелязва че само с нея е трудно да се обяснят други форми на икономическата организация, по-специално на фирмата. Той нарича разходите за използването на пазарната система "транзакционни разходи" (transaction costs). В процеса на осъществяването на дейността си, всяка фирма се стреми да реализира сделки, които да и осигуряват приходи, а това съвсем не е нито просто, нито безплатно: "За да се осъществи една пазарна сделка е необходимо да се установи кой иска да осъществи сделка, да се информират останалите, че някой иска да осъществи сделка и при какви условия, да се проведат преговори, които да доведат до споразумение, да се състави договор, да се извърши проверка, за да се подсигури, че условията на договора се спазват, и т.н.". ***Новата институционална икономика за разлика от неокласическата теория предполага положителни транзакционни разходи.*** Тя разширява условието за "максимизиране на полезността" чрез възможността за "опортюнистично поведение" на икономическите агенти, преследващи собствени интереси. Опортюнистичното поведение на икономическите агенти е една от причините за наличието на положителни транзакционни разходи. Според (Richter и Bindseil, 1995) обекта за изследване на новата институционална икономика е “организацията на икономиката”. (Виж. Richter and Furubotn, 2003 и Blum, Dudley, Leibbrand, Weiske, 2005.)

Глава 3. Измерване на разходите за функциониране на стопанската система.

3.1. Разнообразие в определенията за транзакционни разходи

Според Коуз (Coase, 1937) най-важните пазарни транзакционни разходи са разходите за определяне на цената на продукт или услуга, разходите за преговори и създаване на договор и разходите, породени от информационните проблеми на размяната. Не е възможно всеки човек във всеки момент от времето да разполага с цялата информация за състоянието на вселената. Ограничени са и способностите на отделния човек да възприема и обработва информация. Поради това и различните стопански субекти разполагат с различни количества информация, които обикновено са част от цялата съществуваща информация. Стопанските субекти взаимодействат помежду си въз основа на различна информация, което означава, че те са несимитрично или асиметрично информирани. Именно тази асиметрия или липсата на информация поражда проблеми при сключването на сделки, много често поради възможността едната от страните да се възползва от неинформираността на другата. За набавянето на необходимата информация се правят разходи.

Дълго време пренебрегвани идеите на Коуз станаха актуални през седемдесетте години на миналия век, когато привлякоха вниманието на редица икономисти. Многото трудове посветени на теоретичните проблеми, свързани с транзакционните разходи обаче не дадоха особено добри резултати. Нещо повече, преобладаваха критиките още при опитите да се даде ясна и приложима за пресмятания дефиниция на транзакционните разходи. Тук ще се спрем съвсем накратко на някои схващания за транзакционните разходи, за да имаме по-ясна представа за използването им за нашите изследвания, като препоръчаме за повоче подробности обзори от типа на Рихтер, Фуруботн (Richter, Furubotn, 2003). Първо, разходите на една компания, например могат да бъдат разделени на две категории: производствени разходи и транзакционни разходи. По-познати и по-изследвани са производствените разходи. Това са всички разходи, които са свързани пряко с производствени дейности като производство, логистика и развитие на продуктите. Транзакционните разходи, от друга страна, са онези разходи, свързани с организизацията на икономическата дейност. Поради това те са различни за различните форми на организация. Според Кенет Ероу (Kenneth Arrow, 1969), "разликата между транзакционните разходи и производствените разходи е, че първите могат да се променят с промяната в начина на разпределение на ресурсите, докато последните зависят единствено от технологията и вкусовете и биха могли да бъдат едни и същи във всички пазарни стопанства."

"Транзакционните разходи са разходите за поддържане на функционирането (включващи и: организация, функциониране, утвърждаване) на една икономическа система." (Kenneth Arrow, 1969)

Разходите, които се правят за поддържане на функционирането на стопанската система служат и за защитата на правата на собственост на участниците в системата. Транзакционните разходи се правят, за да се намали на риска и неопределеността при осъществяването на икономическите сделки и за защита на правата на собственост на участниците в тези сделки. Опортюнистичното поведение, изразяващо се в непълно или незадоволително изпълнение на договора, несъобразяване с една или повече негови клаузи или некачествено изпълнение на възприето с договора задължение, изисква наказателни мерки. Разходите за налагането на наказателните мерки са транзакционни разходи. Те имат за цел да санкционират подобно поведение, като договорните санкции биха могли да имат ефект върху опортюнизма, който би възникнал в бъдеще. Тези разходи имат за цел по скоро да предотвратят евентуален бъдещ опортюнизъм, отколкото да въздействат върху вече проявения такъв от някоя от страните по договора. При осъществяването на сключена сделка е възможно да възникнат конфликти между договорилите се страни. Конфликтите може да са в резултат на несъвпадащи интереси, различия в позициите на договарящите се страни. За уеднаквяване на тези позиции или за разрешаване на възникналите конфликти се правят разходи, които отново са транзакционни разходи. Особено големи са постоянните транзакционни разходи, необходими за постигането на институционални споразумения. Те произтичат от разногласия и конфликти, които могат да възникнат, примерно между учредители на фирма и се измерват с разходите за изглаждане на споровете и постигане на окончателното споразумение.

Според Рихтер и Фуруботн (Richter, Furubotn, 2003): "Транзакционните разходи включват разходите за ресурси, използвани за създаването, поддръжка, използване, промяна и т.н. на институции и организации. Когато се разглеждат във връзка със съществуващи имуществени и договорни права, транзакционните разходи се състоят в определянето и измерването на ресурси или искове, плюс разходите по действието и прилагането на съответните права. Те разделят транзакционните разходи на разходи за използване на пазара (пазарни или маркетингови транзакционни разходи), на разходи за упражняване на правото да се дават нареждания на други в рамките на фирмата (управленски транзакционни разходи) и разходи за действието и приспособяването на институционалната рамка на една фирма (политически транзакционни разходи). За всеки един от тези три вида транзакционни разходи могат да се различат два варианта: (1) "фиксирани" транзакциони разходи, т.е. специфичните инвестиции, направени за създаването на институционалните разпоредби; и (2) "променливи" транзакционни разходи, а именно разходи, които зависят от броя или обема на транзакциите.

Въпреки обемната литература по нова институционална икономика, все още не е постигнат теоретичен консенсус за това, какво представляват транзакционните разходи. Няма дори единно мнение за това какво би представлявал един свят с нулеви транзакционни разходи. За повечето икономисти, "света на Валрас" е този с нулеви транзакционни разходи. Според други, транзакционни разходи съществуват навсякъде освен в пазарното стопанство, съставено от един човек, на Робинзон Крузо. Според Коуз, едно изцяло комунистическо общество е мястото, където транзакционните разходи биха били нулеви. Според нас, стопанска система без транзакционни разходи е невъзможно да съществува реално в света в които живеем, понеже всяка стопанска система съществува при условията на трите ограничения: (I) ограничено количество блага (II) ограничено количество ресурси (III) ***ограничения налагани от правилата и институциите на обществото. Транзакционните разходи произтичат от третото ограничение в икономиката*. *Правилата и институциите*** са необходими на обществото, за да се преодолее неопределеността, непредвидимоста в поведението на стопанските субекти, да се намали и въздействието на случайните явления в заобикалящия ни свят, за да може обществената система да функционира като единен механизъм.

Ролата на транзакционните разходи във функционирането на стопанската система е двуяка. От една страна транзакционните разходи, които се правят учредяването, поддръжката и експлоатацията имат положителен стопански ефект , от друга страна високите транзакционни разходи имат възпиращо въздействие върху икономическия растеж и развитие. Дъглас Норт (Douglas North, 1994) твърди, че «институционалната и организационна структура на една страна е основният източник за икономически растеж и развитие. Икономически растеж може да се постигне, ако политическите или икономически институции са в състояние да осигурят сравнително ниски транзакционни разходи в неперсонализираните пазари, да намалят потенциалните опасности за производството и търговията (като бягане от отговорност и опортюнизъм), да улеснят акумулирането и мобилността на капитала, да направят възможна оценката и поделянето на рисковете и да насърчат сътрудничеството”.

3.2. Проблеми при измерването на транзакционните разходи. Взаимовръзка между транзакционните и производствените разходи

Измерването на транзакционните разходи е сложна и трудна задача. ***Трудностите в измерването произхождат главно от неопределеността, а от там и в многообразието в определенията на понятието транзакционни разходи.*** Дефинициите на понятието транзакционни разходи имат в повечето случаи обяснителен, пожелателно, насочващ, а не конструктивен характер и трудно биха могли да послужат за измерване на транзакционни разходи. От дефиницията на Кенет Ероу, че транзакционни са “разходите, необходими за оперирането на икономическата система”, например съвсем не е ясно, как могат да се измерват тези разходи. ***Друга причина за проблематичността на оценяването е това, че производствените и транзакционните разходи се определят взаимосвързано***. Това води до сериозни трудности при самостоятелното оценяване на транзакционните разходи. Транзакционните разходи се правят за по-голяма специализация, която води до повишаване на производителността на труда и може да доведе до намаляване на производствените разходи и увеличена продукция. Промените в производствените разходи също така имат влияние върху транзакционните разходи.

По-голямата част от литературата за транзакционните разходи е описателно-аналитична. Въпреки значимостта на транзакционните разходи за икономическата действителност и теория, в само една сравнително по-малка част от литературата се прави опит за емпирично измерване на транзакционните разходи (сравни с обзора на Wang, 2003). Въпреки че при не малко стопански сделки транзакционните разходи съставляват най-голямата част от всички разходи, малко автори до сега са се опитвали да отчитат и да измерват транзакционните разходи на националното стопанство като цяло. Въпросът за ***измерването на транзакционните разходи на едно национално стопанство*** е сложен и труден. От една страна причината за това, че въобще е трудно да се дефинират транзакционните разходи, защото това понятие има много и различни по смисъл начини на употреба. От друга страна, причината е, че подходящите данни могат да се набавят от официалната статистика непряко и само частично или изобщо не са в наличност понеже въобще не се събират. Правени са опити да се измерят транзакционните разходи на Австралия, САЩ, Полша, Германия, Франция, Япония, Аржентина и др. Уолис и Норт (Wallis & North, 1986) развиват ***концепцията за транзакционния сектор*** и показват, че този сектор се е разрастнал в американската икономика за период от 100 години. Тази статия често се цитира като пример ***за промяната в транзакционните разходи по време на процеси на развитие***, въпреки критиките срещу нея.

3.3 Първи опити за измерване на транзакционните разходи на едно национално стопанство.

Измерване на транзакционните разходи на едно национално стопанство за първи път правят Уолис и Норт (Wallis & North, 1986). Те се опитват да измерят част от транзакционните разходи на американската икономика за периода 1870-1970г. За тази цел, те въвеждат понятието транзакционен сектор (*transaction sector*), което въобще не съществува в системата на националните сметки, като използват концепцията за транзакционните услуги (*transaction services*), която обхваща в едно цяло силно различаващи се дефиниции за транзакционните разходи и ги приобщава в една обща концепция. Концепцията за измерването се базира на данни, които преобладаващо произхождат от официалната статистика. Този опит да се измерват общите транзакционните разходи на националното стопанство беше остро критикуван от Дейвис (Davis, 1986). Основната критика на Дейвис (Davis, 1986, стр. 52) се състои в това, че официалните статистики се събират за други цели, а не за измерване на транзакционни разходи и поради това не могат да бъдат използвани за тази цел без изменение или безкритично. Може би именно критиката на Davis е причината за това концепцията на Уолис и Норт да бъде разпространена върху други национални стопанства с голямо закъснение във времето. Едва през 1998 г. Долери и Леонг (Dollery & Leong, 1998) отразяват развитието на транзакционните разходи на австралийското стопанство посредством едно дългогодишно изследване от 80 години, през 1999 г. Даняно-Пасторе и Фарина (Dagnino–Pastore & Farina, 1999) правят подобни изследвания за аржентинското национално стопанство, а Гертман (Ghertman, 1998) се опитва да измерва транзакционния сектор на стопанствата на Франция, Германия, Япония и САЩ.[1]

Davis не само критикува интерпретацията на резултатите, но също очертава няколко проблема, свързани с предложената концепция за измерване. Неговата критика може да бъде резюмирана както следва. Първият проблем според него е класификацията. Вторият проблем е компилирането на статистическите данни. Третият проблем се отнася към предположението, че дейностите на един индивид (според неговата професия) могат да се отнесат изцяло към транзакционните или към нетранзакционните дейности. Четвърти проблем, който е споменат и от самите Уолис и Норт (Wallis & North 1986, стр. 99), е, че единствено разходите за пазарната размяна са отразени в транзакционния сектор.

3.4 Сравнително проучване на пазарната икономика на страните в преход.

Докато предишните проучвания се съсредоточават върху страни с традиция в пазарна икономика, голяма стъпка напред е да се приложи подхода към страна в преход. Трансформацията на източноевропейските национални стопанства е свързана с дълбоки институционални изменения. Трансформационните процеси представляват всъщност радикални институционални изменения. Във връзка с по-ефективното функциониране на пазарния механизъм може да се приеме, че транзакционният сектор в източно и югоизточноевропейските страни в преход от началото на деветдесетте години значително е нараснал и още ще нараства. На базата на тази идея Сулевич и Граса (Sulejewicz & Graca, 2005) правят опит да анализират транзакционния сектор в Полша за периода 1996-2002г. За разлика от предишни проучвания, те разглеждат по-къс период от време, т.е. периода на преход на полската икономика. При това един от техните главни приноси е приспособяването на класификацията, използвана от Долери и Леонг (1998) към стандартната класификация на NACE[2], и по този начин става възможно прилагането на тяхното проучване с идентични класификации на промишлености и дейности за други страни от Европейскиyт съюз. Резултатът на тяхното проучване показва драстично увеличение на транзакционните разходи (като % от БВП) за сравнително кратък период

[1] Benham & Benham (2000 г.) предлагат алтернативен подход на подхода Wallis & North за измерване на транзакционните разходи. За сравнение на транзакционните разходи между различни страни и по-специално между Бразилия и Чили, сравни освен това и с Stone, Levy & Paredes (1996 г.).
[2] NACE: Nomenclature statistique des Activités économiques dans la Communauté Européenne.

от време. Те достигат до изводи относно нарастването на транзакционните услуги за полското национално стопанство, сходни с тези на Уолис и Норт Разрастването на пазара и безличната размяна, преобразуването на голям брой социални взаимооотношения в такива, основани на пари и договорни споразумения, увеличават разходите за защита на правата на собственост. Поради това разходите за съставянето и прилагането на договори започват да придобиват по-голямо значение с разрастването на полския пазар. За Сулевич и Граса е трудно да определят влиянието на технологичния прогрес, но притокът на чужд капитал според тях е засилил тенденцията, споделена от Уолис и Норт.

В своето проучване Хернандо де Сото (Hernando de Soto, 1989) документира огромните разходи за извършване на търговия формално, т.е. разходите за посрещане на правните изисквания за започване и развитие на бизнес, и разходите за извършване на бизнес неформално в Перу. Ако както признават Уолис и Норт (1986, стр. 99), транзакционният сектор обхваща само онази част от транзакционните разходи, които преминават през пазара, то новаторското проучване на de Soto (1989г.) се съсредоточава върху това, което е пропуснато в Уолис и Норт (Wallis & North 1986), т.е."непазарните транзакционни разходи" (North, 1987), като ресурси, изразходвани в чакане, получаване на разрешителни за бизнес, бюрокрация, подкупване на чиновници и т.н. Тези непазарни транзакционни разходи са разпространени в развиващи се пазарни стопанства и пазарни стопанства в преход, въпреки че размерът на официалния транзакционен сектор е малък (вижте например проучването на Dagnino & Farina, 1999) за Аржентина).

Александра и Лий Бенам правят сравнителен анализ на разходите за размяна в различни страни. Основен резултат от тяхното изследване е, че законът за единната цена обикновено не важи. Като пример се посочва факта, че реалната цена за включване на телефон варира от 130$ в Малайзия до 6000$ в Аржентина (Benham and Benham, 1998, стр. 7).

3.5 Концепция за транзакционния сектор на Уолис и Норт.

Уолис и Норт в своята статия (Wallis, North, 1986) се опитват да постигнат една твърде амбициозн цел, като развият една обща концепция за транзакционните разходи, която да обединява в едно, разнородни определения и да вградят тази концепция за транзакционния сектор в системата на националните сметки, понеже вграждането на транзакционния сектор в системата на националните сметки, би станало възможно да се отразяват процесите на развитие на националните стопанства от гледна точка на транзакционните разходи. Тази обща концепция за транзакционните разходи на едно национално стопанство до въвеждането на понятието транзакционен сектор. Основополагащата идея на Уолис и Норт е съвсем проста. ***Транзакционните разходи се дефинират като разходите, свързани с осъществяването на размяната в една икономика*** (Wallis & North, 1986, стр. 97). Всички икономически дейности и агенти, свързани с тях, се разделят на две категории: тези, които са свързани с размяна, образуват ***"транзакционния сектор"*** и тези, които не са, образуват ***"нетранзакционния сектор "*** (наречен ***"трансформационен сектор"*** от Уолис и Норт). Или ***всички разходи, които възникват в едно национално стопанство, могат да бъдат разделени на производствени разходи (наречени от тях трансформационни разходи) и транзакционни разходи***.

Следователно, всички икономически дейности и всички икономически агенти принадлежат към един от двата сектора. В резултат на това разделяне на стопанството тези два сектора, се измерва всъщност частта на всеки от тези двата сектора от БВП. Идеята за транзакционния сектор може да бъде формулирана съвсем просто, но нейното изпълнение съвсем не е толкова просто. Усложненията възникват при опитите да бъдат създадени критерии за определяне кои дейности и работници да бъдат отнесени към транзакционния сектор. Те се свеждат до отнасянето на части от икономическите сектори и икономическите дейности на националното стопанство, отчитани по каноните на системата на националните сметки на транзакционния сектор. (В термините на системата на националните сметки, понятието икономически сектор няма нищо общо с понятието транзакционен сектор. Икономически сектори в смисъла на системата на националните сметки са: Селско и горско стопанство, индустрия, услуги.) Транзакционните разходи на едно национално стопанство могат да бъдат намерени само косвено, защото в системата на националните сметки се дават само данни за производството. Концепцията Уолис и Норт за измерването на транзакционния сектор се базира на данни, които преобладаващо произхождат от официалната статистика. Опита на Уолис и Норт да измерват транзакционните разходи на националното стопанство по този начин е подложен на остра критика, особено от Дейвис (Davis, 1986). Той не само критикува интерпретацията на резултатите, но също очертава няколко проблема, свързани с предложената концепция за измерване. Неговата критика може да бъде резюмирана както следва:

Първият проблем е класификацията. Спорно е разделянето на отраслите на транзакционни и нетранзакционни, както и класифицирането на обществените услуги.

Разделянето на професиите в нетранзакционните отрасли, на транзакционни и нетранзакционни, е също съмнително. Дейвис (Davis, 1986, стр. 152) отбелязва, че резултатите от пресмятанията силно зависят от класификацията, като даже малки промени в дефинициите биха довели до значителни изменения в резултатите. Вторият проблем е компилирането на статистическите данни. Данните, които Уолис и Норт използват за техните оценки, са събрани с доста различно предназначение и това може да доведе до значителни грешки при измерването на транзакционния сектор.[3] Третият проблем се отнася до предположението, че дейностите на един индивид в зависимост от неговата професия могат да се отнесат изцяло към транзакционните или към нетранзакционните дейности. В действителност лицата от всички професии извършват и двата вида дейности, т.е. един фермер е производител, както и мениджър в същото време (Davis, 1986, стр. 152-155). Четвърти проблем, който е споменат и от самите Уолис и Норт (Wallis & North, 1986, стр. 99), е, че в транзакционния сектор единствено са отразени. единствено разходите за пазарната размяна. Транзакционните разходи на нерегистрираните дейности не са отчетени в този подход.

Първият от гореспоменатите проблеми най-вече е проблем на дефиниция. Необходимо е да се развият концепции, ясно очертаващи “транзакционен сектор” в системата на националните сметки, без да се пренебрегват съществуващите класификации, използвани от официалната статистика. Класификацияна на транзакционния сектор, приложена от Уолис и Норт за икономиката на САЩ, има нужда от адаптация, когато се използва за измерването на транзакционния сектор в други икономики. Тъй като класификацията е просто проблем на дефиниция, ние не го смятаме за неразрешим в контекста на различните икономики. В изследването за България ние следваме, в общи линии, промените в класификациите, развити за полската икономика, прилагани от Сулевич и Граса.

Вторият и третият проблем могат да бъдат решени с усилията на учените от изследователските и статистическите институти, като допълнително се събират данни за измерване на транзакционния сектор. За българското национално стопанство бе предложена концепция за събиране на такива данни на микро ниво, в организациите, с

[3] “While that definition may be intellectually adequate, it is not operationally so, and it can serve as no more than a rough guide for an attempt to actually disaggregate and recombine a myriad of statistics collected with a variety of purposes in mind.” (Davis, 1986, p. 152).

последващо агрегиране данните на макро ниво за цялата икономика.[4] Концепцията цели измерването на процента на транзакционните и нетранзакционни дейности във всички професии. Прави се оценка на частта от работното време, използвано за транзакционни дейности в двата сектора, за различните типове професии.

Четвъртият проблем, а именно измерването на транзакционните разходи от тези дейности, които не се отчитат от официалната статистика, е извън целите на това изследване. Нашето мнение е, че транзакционните разходи в неформалният сектор (Виж De Soto, 1987; Stone, Levy и Paredes, 1996) трябва да се вземат под внимание при измерването на транзакционните разходи на едно национално стопанство. Икономиката в сянка в България в средата на 90-те години е обхващала повече от 32 % от БВП (Schneider, Enste, 2002г., стр. 34; също Johnson, Kaufmann и Shleifer, 1997), което означава, че неформалния сектор е твърде голям и не може да бъде пренебрегван.

Възможно е критиката на Дейвис да е причината за това концепцията на Уолис и Норт да не бъде прилагана от други за известно време. Долери и Леонг (Dollery, Leong, 1998) са първите, които се решават да приложат метода за друга страна. Те показват подобна закономерност на растеж на транзакционния сектор за австралийското национално стопанство за периода 1911-1991г., каквато преди е наблюдавана за САЩ. Те адаптират концепцията на Уолис и Норт към системата на националните сметки и по този начин улесняват прилагането и. Оригиналната идея на Уолис и Норт е взаимствана в още две статии. Гертман (Ghertman, 1998) прави сравнителен анализ на транзакционните сектори на четири развити страни: Германия, Франция, САЩ, Япония за периода 1960-1990г. като обръща внимание на трудностите който възникват при международните сравнения на транзакционните сектори. Диняно-Пасторе и Фарина (Dagnino-Pastore, Farina, 1999) правят подобни изследвания за аржентинското национално стопанство, като показват, че там транзакционният сектор нараства от 25 % от БВП през 1930г. до около 35% през 90-те години на двайсти век.

Тъй като в транзакционния сектор могат да бъдат обхванати само такива разходи, които вече са отразени в други събрани от официалната статистика данни, Уолис и Норт (Wallis & North, 1986) говорят също така и за транзакционни услуги (transaction services). Транзакционните услуги са само наблюдаваната, т.е. обхванатата от официалната статистика част от общите транзакционни разходи на едно национално стопанство. С

[4] Концепцията е очертана в Чобанов, Егберт и Гюреджеклиева (2006г.). За спецификацията на измерването на микро ниво вижте Чобанов, Егберт и Седларски (2006г.).

други думи, това е тази част на всички транзакционни разходи, която възниква при пазарните сделки (пазарния обмен). (Тъй като определянето на транзакционния сектор се свежда до величини като брутен вътрешен продукт, цени, заплати и т.н., то общата критика за статистическите данни се отнася със същата сила и за определянето на транзакционния сектор.) Пресмятането на транзакционните разходи се базира на две измервания:

Първо, отчитат се всички ресурси, които се влагат за подготовка на пазара на транзакционните услуги. При това някои частни стопански дейности се класифицират като транзакционни производства (transaction industries). Според Уолис и Норт, към тях се отнасят например финансите, застраховането, недвижимите имущества, търговията на едро и дребно. Тъй като и държавата извършва транзакционни услуги, разходите за определени държавни дейности, като например сигурност и защита на собствеността, могат да бъдат директно причислени към транзакционния сектор.

Второ, отчитат се транзакционите разходи, които възникват в такива частни предприятия или фирми, които не принадлежат на транзакционните производства (transaction industries), т.е. в предприятия на нетранзакционните производства. Във всяко производствено предприятие има лица, извършващи дейности, които еднозначно съответстват на транзакционните услуги (transaction services) и които се наричат професии от тип I. Това означава, че няма предприятия само с производствени и без никакви транзакционни дейности. Транзакционните разходи се свеждат по този начин до дейностите, които определени лица извършват в производствените отрасли, като се преценява до каква степен тези дейности се отнасят или не се отнасят към транзакционните услуги (*transaction services*). Ако едно лице извършва както транзакционни така и нетранзакционни професионални дейности, то неговата професия ще наричаме професия от тип II.

Като мярка за тези транзакционни разходи се използват заплатите на онези лица, които са привлечени в изпълнението на транзакционна дейност, като сумата от всички заплати в последствие се добавя към транзакционния сектор.

Уолис и Норт (1986, стр. 99) свеждат измерването на транзакционните разходи до това, което те наричат транзакционни услуги. Транзакционните услуги са дейности, които произлизат от използването на пазари, т.е. разходите, отчетени от официална статистика. Транзакционните разходи от дейности, които не се отчитат от официалната статистика, т.е. онези от черния пазар или в неформалната икономика, са изключени от техният подход. С други думи, транзакционният сектор съдържа разходите, свързани със започване и извършване на размяна на услуги и продукти на пазара, но също тези, които са необходими за защита на правата на частна собственост. По-конкретно, транзакционният сектор се разчленява на следните три категории:

- ***Транзакционни производства*** (частен сектор): Това са производства, които Уолис и Норт свързват директно с транзакционни дейности, т.е.:
    - застраховане
    - финанси
    - недвижими имоти
    - търговия.
- ***Транзакционни разходи на фирми от нетранзакционния сектор:*** освен транзакционните производства, транзакционни дейности се извършват в йерархии (фирми) в нетранзакционния сектор. Например, контролът на работници от мениджъри. За да се включат тези дейности в транзакционния сектор, Wallis & North идентифицират специфични професии (наречени "тип I"). Тези професии са, например, мениджъри, съдебни заседатели, счетоводители, пазачи, и т.н. Работната сила, която е наета в гореспоменатите професии, е включена в транзакционния сектор.
- ***Транзакционни услуги (публичен сектор)*****:** услугите, предоставяни от правителството, които позволяват реализирането на размяна, също са включени в транзакционния сектор. Особено трябва да се споменат разходите, които са свързани с формални институции, които гарантират изпълнението на договори и осигуряват права на собственост, т.е. национална отбрана, полиция, комуникация. Но съществуват и други публични разходи, които не могат да бъдат лесно дефинирани като транзакционни услуги, например, образование, здравеопазване, канализация.

Макар че, горната класификация е спорна и дори самите Уолис и Норт отбелязват някои от нейни слабости, тя е първият опит да се развие модел, който може да бъде приложен за оценяване размера на транзакционния сектор на едно национално стопанство. Резултатът на тяхното проучване е, че транзакционният сектор на националното стопанство на САЩ нараства от 26 % от БНП за 1870г. до повече от 54% от БНП през 1970г.

Идеята за формиране и измерване на транзакционен сектор в едно национално стопанство е представена в синтезиран вид на таблица 1. Трудностите бихме могли да групираме в следните области от проблеми:

Таблица 1. Формиране и измерване на транзакционен сектор

<table>
<tr><th>Елементи на транзакционния сектор</th><th>Измерване чрез</th></tr>
<tr><td colspan="2">Частен транзакционен сектор</td></tr>
<tr><td>Транзакционни производства в частния сектор, които произвеждат само транзакционни стоки и услуги
• търговия
• финанси
• застраховане</td><td>Стойността на всички ресурси, използвани в тези производства и разходите за осъществяванеот им</td></tr>
<tr><td colspan="2">Обществен транзакционен сектор</td></tr>
<tr><td>Транзакционни услуги предоставяни от правителството и цялата управленска администрация като обществени блага.
• Външна сигурност, национална отбрана
• Вътрешна сигурност, полиция
• Образование
• Здравеопазване
• Социална осигуреност
• Защита на правата на собственост изпълнение на договори</td><td>Всички ресурси и разходи, използвани от правителството и цялата управленска администрация за предоставянето на тези услуги</td></tr>
<tr><td colspan="2">Транзакционни услуги в производствения сектор</td></tr>
<tr><td>• Транзакционните услуги, които се предлагат в производствения сектор от професии от тип I
• Транзакционните услуги, които се предлагат в производствения сектор от професии от тип II</td><td>Сумата от заплатите на заетите в производствения сектор професии от тип I и транзакционните дялове от заплатите на професиите от тип II</td></tr>
<tr><td>Общо</td><td>Сума от ресурси и разходи на транзакционния сектор</td></tr>
</table>

Източник: Таблица 1 се базира на Wallis & North (1986).

a. Конкретизацията на отнасянето на отделните сектори към транзакционната или към нетранзакционната област. Този проблем преди всичко е въпрос на дефиниция. Смислени основания за отнасянето към едната или другата област във всеки конкретен случай сигурно ще могат да бъдат посочени. Поради това и проблемът не изглежда да е нерешим.

b. Статистически данни има вече както за транзакционните производства (*transaction industries*) в частния сектор, така и за транзакционните услуги (*transaction services*) в обществения сектор. Проблемите тук се свеждат до недостатъчната разчлененост на официалните статистики, което влошава точността на пресмятанията. На този проблем обръщат внимание също така Сулевич и Граса (Sulejewicz & Graca, 2005) в тяхното изследване на транзакционния сектор в Полша.

c. Най-големи са проблемите в областта на нетранзакционните производства (*nontransaction industries*). От една страна е трудно да се състави списък от дейности/професии, които еднозначно могат да бъдат отнесени към транзакционните дейности (*transaction activities*). Тук първата част от проблема се свежда до дефиницията на понятието дейност/професия, поради което и Дейвис в своята работа (Davis 1986) предлага това понятие да се обобщи. Вторият още по-тежък проблем се състои в пресмятането на транзакционните разходи, за които са необходими заплатите на отделните сектори, а освен това е необходимо да се знае как процентно са разпределени транзакционните дейности в професиите на всички работещи по сектори.

3.6. Проблема с причисляването на професиите към транзакционния сектор.

Един централен проблем, на който обръща внимание още Дейвис (Davis 1986), е причисляването на определени професии към транзакционния сектор. Съществуват професии, в които се извършват само транзакционни дейности (професии от тип I) и които може като цяло да бъдат отнесени към транзакционния сектор. В една не малка част от професиите обаче се извършват както дейности, които могат да бъдат отнесени, така и дейности, които не могат да бъдат отнесени към транзакционния сектор (професии от тип II). Това означава, че част от професията може да бъде отнесена към транзакционния, а останалата част към нетранзакционния сектор, което налага за всяка професия да се оценява в проценти дела на дейностите, които се отнасят към транзакционния сектор. За да конкретизираме казаното, на Таблица 2 сме представили произволно избрани професии от Националната класификация на професиите и длъжностите 2005, в сила от 1 януари 2006 година (Милчо Димитров, Иван Нейков, Евгени Евгениев, Мария Антова, Галя Божанова, 2006 г.), като сме отразили вида им и сме се опитали за оценим транзакционните им дялове.

Например, може се счита, че дейността на един юристконсулт обхваща в най-голяма степен дейности, които трябва да бъдат причислени към транзакционния сектор, поради което оценяваме дейностите в професията на юриста като 100% транзакционни и разглеждаме професията на юриста като професия от тип I.

Таблица 2. Примери за процентно разпределение на транзакционните и нетранзакционните дейности.

Номер по НКПД	Профисия по НКПД	Процент от работното време изразходвано за транзакционни дейности	Процент от работното време изразходвано за не-транзакционни дейности	Тип на професията
2429 7007	Юристконсулт	100	0	I
3159 3008	Ръководител движение	80	20	II
4222 3001	Администратор на хотел	50	50	II
6123 2007	Фермер, пчелар	10	90	II
9333 0001	Докер	0	100	II

Професията на ръководен кадър в производствена дейност, включва транзакционни дейности като например контрол на други работници, обмен на информация с по-високопоставени и т.н. от една страна, но от друга страна предполага и поне в известна степен, пряко или косвено, негово участие или роля в производството. Да приемем, че в около 80% от своето работно време той извършва транзакционни действия, което ще означава, че 80% от заплатата му следва да се отчита на сметката на транзакционния сектор, а останалите 20% - да се отчитат за производствена дейност. По подобен начин са дадени и примерни разпределения на транзакционните и нетранзакционните разходи за други типични представители на професии като ръководен кадър в големи промишлени предприятия, ръководен кадър в малки и средни предприятия (администратор на хотел), дребен фермер (пчелар), неквалифициран работник (докер), които са професии от тип II . Открит остава въпроса как да се определи процентното разделяне на дяловете на транзакционни и не-транзакционни дейности в рамките на една професия. За да дадем отговор на този въпрос ще необходимо детайлно изучаване на стопанския процес в термините на системата на националните сметки, което е извън целите на настоящата работа.

Глава 4. Разходите на транзакционния сектор – показател за степента на институционалното изграждане на пазарните механизми в българското национално стопанство за периода (1997 – 2003).

Водещата хипотеза в тази глава е, че транзакционният сектор на една стопанска система се разраства в периода на преход поради увеличаването на пазарни транзакции, на разделението на труда, както и поради интегрирането в международната икономика. В периода на преход се сменят формалните правила и се етаблират, утвърждават се нови норми на поведение, което от своя страна води до спад на доверието, изискващо по-големи разходи за осъществяването на стопански транзакции или сделки. (Виж, например Bjornskov, 2006). Тази хипотеза е подкрепена от данни за българската икономика за периода 1997-2003г. България в преходния период изгради институциите на пазарното стопанство, стана член на ЕС, което доведе до изграждането на допълнителни институции, като например институции необходими за засилване на граничния контрол, понеже част от границите на България станаха част от границите на на ЕС със страни, които не са членки на ЕС, институции свързани с бежанците, институции за връзка на ЕС с други страни. Изграждането и поддържането на институции означава увеличаване на транзакционните разходи. Изграждаме нови институции натоварва страната с допълнителни разходи. Въпросът колко са тези разходи естествено ни води до необходимостта от измерването на транзакционните разходи в България.

За оценка на разходите на транзакционния сектор на българското национално стопанство едно национално стопанство прилагаме концепцията на Уолис и Норт, според която всички стопански дейности и субектите, които ги осъществяват се разделят на две категории – непосредствено свързаните с обмена образуват състава на транзакционня сектор, а останалите – на трансформационния (производствения) сектор. Изчисляването размера на транзакционня сектор се базира на данни от официалната статистика за отчитане на съвкупната стойност на така наречените транзакционни услуги (транзакционни разходи в паричена израз, регистрирани от статистиката) като дял от БВП. В транзакционня сектор са включени следните четири категории транзакционни разходи:

(1) ***Разходи на транзакционните отрасли в частния сектор:*** това са отраслите, заети непосредствено с транзакционни дейности като търговия, финансово посредничество, застрахователно дело, недвижими имоти.

(2) ***Транзакционни разходи в рамките на не-транзакционните отрасли на частния сектор:*** Транзакционни разходи възникват и в не-транзакционните (трансформационните, производствените) сфери на стопанството. Например разходите, необходими за организация, контрол и управление на едно производствено предприятие. Следвайки Уолис и Норт, ние включваме тези разходи в транзакционня сектор като „професии от I-ви тип”, изпълняващи предимно транзакционни дейности и причисляваме заплатите им към съвкупните транзакционни разходи на стопанството. Примери за такива длъжности са управители, бригадири, счетоводители, охранители и т.н.

(3) ***Транзакционни услуги в публичния сектор***: услугите, осигурявани от правителството, които правят размяната възможна в национален план, се включват в транзакционня сектор. Тук се включват разходите на цялата праворaздавателна система - институциите, които съществуват, за да осигуряват вътрешната и външната сигурност на страна, спазването на правилата на общество, правата на собственост, като съдебна система, полиция, армия.

(4) ***Транзакционни разходи в не-транзакционните услуги на публичния сектор*****:** транзакционни дейности в публичния сектор има при не-транзакционните обществени услуги като например образованието, здравеопазването или чистотата. Тези дейности се прибавят към транзакционния сектор чрез разходите за заемането съответните длъжности.

Четирите категории транзакционни разходи, адаптирана за измерването на българския транзакционня сектор по Долери и Леонг (Dollery/Leong, 1998) са представени на таблица 1.

Разходите на транзакционня сектор на българската икономика са пресметнати при условията на схемата, отразена на таблица 2:

а) ***Транзакционни отрасли в частния сектор*:** ***Ресурсите***, изразходени за транзакционни дейности в частния сектор се измерват чрез ***продукта*** на транзакционните дейности в този сектор (срв. с Löchel 1995, S.123).

б) ***Не-транзакционни отрасли (частен сектор) и не-транзакционни услуги (публичен сектор)*****:** За пресмятането на тези разходи се идентифицират длъжностите, които могат да бъдат причислени към транзакционния сектор (професии от I-ви тип)[5]. Броят на заетите с такива длъжности във всеки отрасъл, заедно със средната работна заплата за отрасъла се използват за пресмятането на ***разходите за труд в съответния отрасъл*** и сумарно се причисляват към транзакционните разходи.

Таблица 1. Транзакционни и не-транзакционни отрасли и услуги.

Частен сектор		Публичен сектор	
(1) Транзакционни отрасли	**(2) Не-транзакционни отрасли**	**(3) Транзакционни услуги**	**(4) Не-транзакционни услуги**
Финанси Застрахователно дело Недвижими имоти Търговия на едро Търговия на дребно	Селско стопанство Строителство Добивна промишленост Производство Занаятчийски услуги Транспорт и складиране	Публична администрация Обществен ред Отбрана Пощенски услуги	Образование Здравеопазване Железопътен и въздушен транспорт Комунални услуги Социална защита Съобщения

Източник: по Dollery/Leong (1998, p. 209)

[5] Използвана е Националната класификация на професиите и длъжностите (НКПД) в Република България, която е базирана на Международната стандартна класификация на длъжностите (International Standard Classification of Occupations, ISCO-88) на Международната организация на труда (ILO). Националният статистически институт (НСИ) събира данни за следните девет класа длъжности: (1) Президент, законодатели, висши служители и ръководители, (2) Аналитични специалисти, (3) Техници и други приложни специалисти, (4) Административен персонал, (5) Персонал, зает с услуги за населението, търговията и охраната, (6) Квалифицирани работници в селското, горското, рибното и ловното стопанство, (7) Квалифицирани производствени работници и сродни на тях занаятчии, (8) Оператори на машини и съоръжения и работници по монтаж на изделия и (9) Професии, неизискващи специална квалификация. Първите пет класа длъжности биват приети за част от транзакционния сектор поради преобладаващо транзакционния характер на дейностите, извършвани в тях. Данните по НКПД са комбинирани с информация по линия на Националната класификация на икономическите дейности (НКИД - 2003). НКИД е национална версия на Статистическата класификация на икономическите дейности на Европейския съюз NACE, Rev. 1.1, задължителна за страните-членки на Европейския съюз.

*в) **Транзакционни услуги в публичния сектор***: Транзакционният дял на публичния сектор се пресмята въз основа на данните за разходваните средства.

Таблица 2. Формиране и измерване на транзакционния сектор в България

Елементи на транзакционния сектор	Измерване чрез
Частен транзакционен сектор	
Транзакционни производства в частния сектор (изцяло транзакционна дейност) • Търговия и ремонти • Финансово посредничество • Операции с недвижими имоти	Стойността на всички ресурси, използвани в транзакционните производства
Публичен транзакционен сектор	
Транзакционни услуги, предоставяни от правителството като публични блага[6] • Държавна администрация • Съдебна власт • Отбрана • Полиция, вътрешен ред и сигурност	Всички ресурси, изразходвани за предоставянето на транзакционни услуги
Транзакционни услуги в нетранзакционния сектор (частен и публичен)	
• Транзакционните услуги, които се предлагат в нетранзакционния сектор от „професии от I-ви тип"	Сумата от заплатите на заетите в производствения сектор: „професии от I-ви тип"
Общо	**Сума от разходите в транзакционния сектор**

Източник: по Wallis/North (1986) и Dollery/Leong (1998)

Резултатите от пресмятанията са представени на таблица 3, от която се вижда, че увеличението на българския транзакционен сектор между 1997 г. и 2003 г. е съществено – от под 40% до около 52% . Агрегираният транзакционен сектор нараства бързо от 1997

[6] Самостоятелни данни за пощенските услуги, предоставяни от държавата, не могат да бъдат извлечени от статистиката за отрасъла "Транспорт, складиране и съобщения", поддържана от НСИ. Поради това, те не са включени в стойността на транзакционните услуги на правителството, а попадат в състава на транзакционните разходи в не-транзкционните отрасли, поради което реалният размер на първите за България е подценен, а на вторите - слабо надценен.

до 1999 г., след което динамиката на процеса се забавя и секторът се стабилизира на нива от малко над 50%.

Таблица 3. Транзакционен сектор в българската икономика 1997–2003

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Общо частен сектор	**30.0**	**31.3**	**35.1**	**38.1**	**38.8**	**39.6**	**38.8**
(1) Транзакционни отрасли	28.8	29.6	33.2	35.8	36.4	37.1	36.1
(2) Не-транзакционни отрасли	1.2	1.7	1.9	2.3	2.4	2.5	2.7
Общо публичен сектор	**7.4**	**10.7**	**12.4**	**12.9**	**12.9**	**13.9**	**13.9**
(3) Транзакционни услуги	3.7	6.4	7.9	8.7	8.8	9.7	9.6
(4) Не-транзакионни услуги	3.7	4.3	4.5	4.3	4.1	4.2	4.3
Общо частен и публичен сектор	**37.4**	**41.0**	**47.5**	**51.0**	**51.7**	**53.5**	**52.7**

Източник: Chobanov, Egbert (2007)

Нарастването на транзакционните отрасли на частния сектор е най-силно между 1998 и 2000 г. (вж. Таблица 4). Обяснение на отчетливото увеличение на всичките три отрасъла („Финансово посредничество”, „Търговия и ремонти”, „Операции с недвижими имоти”) може да бъде потърсено в либерализацията на българското стопанство. „Търговия и ремонти” нараства поради започналите през този период инвестиции на големи западни търговски вериги и супермаркети в България. Ключов фактор, допринасящ за увеличението на търговията е обвързването на обменния курс на лева с германската марка и по-късно с еврото. Въвеждането на валутния борд има фундаментално стабилизиращо въздействие върху икономиката и оказва положително влияние върху потока на преки чуждестранни инвестиции, като последните нарастват рязко през 1997 г. в сравнение с 1996 г. Това е времето, когато се увеличава активността и на финансовите посредници в България (главно чуждестранни търговски банки и застрахователни компании).

Сумарното увеличение на дела на не-транзакционните отрасли е от 1,2% от БВП през 1997 г. до 2,7% през 2003 г. (вж. Таблица 5). С изключение на „Селско, горско, ловно и рибно стопанство” всички подотрасли бележат значително нарастване. До голяма степен това се дължи на увеличения брой на „транзакционните” длъжности в резултат на приватизацията на повечето предприятия в тези отрасли.

Таблица 4. Транзакционни отрасли в частния сектор

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Операции с недвижими имоти	15.4	16.8	18.1	17.5	18.0	18.2	17.1
Финансово посредничество	1.8	1.7	2.1	3.1	3.2	4.1	4.5
Търговия и ремонти	11.6	11.1	13.0	15.2	15.2	14.8	14.5
Общо	**28.8**	**29.6**	**33.2**	**35.8**	**36.4**	**37.1**	**36.1**

Източник: Chobanov, Egbert (2007) въз основа на данни от НСИ, 1998-2004.

Таблица 5. Не-транзакционни отрасли в частния сектор.

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Селско, горско, ловно и рибно стопанство	0.15	0.20	0.19	0.18	0.17	0.16	0.15
Строителство	0.08	0.13	0.17	0.19	0.20	0.20	0.23
Добивна промишленост	0.01	0.01	0.02	0.05	0.05	0.06	0.06
Преработваща промишленост	0.77	1.03	1.13	1.34	1.37	1.42	1.47
Транспорт, складиране и съобщения	0.07	0.11	0.14	0.22	0.25	0.28	0.33
Хотели и ресторанти	0.05	0.10	0.13	0.16	0.18	0.18	0.23
Други дейности, обслужващи обществото и личността	0.08	0.11	0.14	0.18	0.19	0.21	0.23
Общо	**1.2**	**1.7**	**1.9**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.7**

Източник: Chobanov, Egbert (2007) въз основа на данни от НСИ, 1998-2004.

Процентът на транзакционните услуги в публичния сектор също се покачва (вж. Таблица 6) – от 3,7% през 1997 г. до 9,6% през 2003 г. Разходите за публична администрация значително нарастват между 1997 и 1999 и остават почти без промяна след това. Обяснението се крие в усилията, които правителството полага за подобряването на държавната администрация в периода на преход. Тези усилия включват създаването на ново министерство (Министерство на държавната администрация), с което се цели повишаването на ефективността на работата на администрацията при прехода към пазарна икономика. Разходите по отбраната се повишават, което може да бъде обяснено с подготовката на страната за членство в НАТО (през 2004 г.). Забавянето на реформата в правосъдието също намира своето отражение в данните: в сравнение с държавната администрация, отбраната и обществения ред, където реформите започват в средата на 1990-те, промените в правната система са отложени. Страната продължава да търпи остри критики заради липсата на напредък в тази сфера.

Таблица 6. Транзакционни услуги в публичния сектор

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Държавна администрация	1.14	2.52	3.52	3.52	3.56	3.55	3.43
Правосъдие	0.16	0.29	0.30	0.39	0.41	0.54	0.54
Отбрана	1.70	2.17	2.46	2.82	2.74	3.09	3.09
Обществен ред и пожарна безопасност	0.73	1.40	1.63	1.95	2.11	2.52	2.54
Общо	**3.7**	**6.4**	**7.9**	**8.7**	**8.8**	**9.7**	**9.6**

Източник: Chobanov, Egbert (2007) въз основа на данни от Министерство на финансите.

Не-транзакционните услуги в публичния сектор остават сравнително стабилни (вж. Таблица 7). Що се отнася до „Транспорт, складиране и съобщения", както и „Други дейности, обслужващи обществото и личността", може да се предположи, че намалението в тези категории се дължи на приватизацията и преместването на длъжности от публичния в частния сектор (вж. увеличението на съответните категории в Таблица 5).

Транзакционен сектор с размер повече от 50% от БВП като българския през 2002 и 2003 г. изглежда типичен резултат за източноевропейска пост-социалистическа страна в преход. Той все още не е достигнал нивата, характерни за страните от Западна Европа като Франция (63% през 1990 г.) или за САЩ (62% през 1990 г.) и Япония (56% през 1990 г.) (срв. с Ghertman, 1998). Транзакционният сектор на българската икономика е по-малък и започва да расте по-късно в сравнение с този на полската (вж. Sulejewicz and Graca, 2005). Това обстоятелство се дължи на забавянето на икономическите реформи в България. При сравняване на годините, през които двете икономики достигат до едни и същи равнища на транзакционния сектор установяваме времеви лаг в размер на приблизително 4-5 години, отразяващ точно разликата между началото на шоковата терапия в Полша и постепенните промени в България. Прилика между двете страни е изключително късият период, в който транзакционния сектор нараства значително.

Таблица 7. Не-транзакционни услуги в публичния сектор

	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Образование	1.32	1.60	1.72	1.79	1.65	1.73	1.76
Здравеопазване и социални дейности	0.92	1.13	1.14	1.04	0.99	1.06	1.17
Транспорт, складиране и съобщения	1.03	1.02	1.01	0.86	0.86	0.82	0.80
Други дейности, обслужващи обществото и личността	0.17	0.21	0.22	0.21	0.21	0.20	0.20
Производство и разпределение на електр. и топлинна енергия, газообразни горива и вода	0.27	0.36	0.40	0.37	0.37	0.35	0.36
Общо	**3.7**	**4.3**	**4.5**	**4.3**	**4.1**	**4.2**	**4.3**

Източник: Chobanov, Egbert (2007) въз основа на данни от НСИ, 1998-2004.

Резултатите от измерването на транзакционния сектор в България, показват, че той нараства в периода на преход.

Отговорът на въпроса защо нараства транзакционния сектор не е еднозначен още в първоначалното изследване на Уолис и Норт (вж. критиката на Davis, 1986).

Според Льохел (Löchel, 1995) нарастването на транзакционния сектор всъщност отразява единствено познатия процес на изместване на заетост от първичния и вторичния сектор към третичния, от който транзакционния сектор е част.

Разрастването на транзакционния сектор се разглежда и като на следствие от по-голямото разделение на труда и по-тясната специализация в резултат на реформите. По този начин, растежът на транзакционния сектор свидетелства за настъпилите съществени промени в този аспект за много кратко време. Бързото нарастване на транзакционния сектор в българското стопанство между 1997 и 2003 г. е индикатор за догонващо развитие: след колебливата и противоречива икономическа политика в началото на 90-те години макроикономическата стабилизация от 1997 г. води до усилено развитие на институционални форми, характерни за новия пазарен ред. Все по-голямата широчина на пазарите и степен на разделение на труда с напредването на пазарната трансформация обуславя нуждата от повече ресурси за реализиране на транзакциите. Разрастването на безличната размяна и на анонимни пазари, според теорията на институционалното развитие на Дъглас Норт, поражда необходимостта от все по-точна предварителна спецификация на имуществените права и договорните клаузи (нарастване на съвкупните транзакционни разходи на стопанството). Безличната размяна е универсална характеристика на пазарната система, явяваща се цел на прехода, т.е. с напредване на реформите транзакционните разходи би следвало да достигат все по-високи нива. Техническият прогрес също непряко води до увеличаване на транзакционните разходи, като допринася за нарастване на разделението на труда. Нараства броя на „стъпките” в производството на все по-сложните блага, необходимостта за координация между тях и обмен на междинните блага. От друга страна по-ефикасните организационни форми, комуникационни и производствени технологии понижават разходите за взаимодействие между икономическите субекти (North, Wallis, 1994). Доколкото втората тенденция надделява над първата тя се явява фактор, разширяваш границите на икономическото развитие и растеж (водещата тенденция може да бъде установена с помощта на емпирични проверки на развитието на транзакционните разходи на микрониво).

Друго обяснение на резултатите е твърдението, че нарастването на транзакционният сектор се дължи на понижената ефективност на променящите се институции, на ресурсите, изразходени от държавата и индивидите за институционалното преобразуване, както и на спада на доверието в обществото поради нестабилната институционална среда. В своето изследване Сулейевич и Граца отдават разширяването на полския транзакционен сектор по време на прехода освен на увеличението на пазарните транзакции, също на мащабното предефиниране на имуществените права, появата на нови социални конструкции, грешките при тяхното въвеждане и резултатните високи разходи за предпазване от измами и налагане на законовия ред (Sulejewicz/Graca, 2005). Специфичен проблем, налагащ ограничения на ефективното функциониране на институциите като координационни механизми на човешкото поведение, е ниската обществена подкрепа за възприеманите като несправедливи (несвойствени за страната) на някои нови правила в периода на преход. Така например бързата промяна на собствеността се сблъсква с реакция в областта на неформалните норми на поведение. Тя води до увеличаване на транзакционните разходи необходими за налагането на частните имуществени права като назначаването на охрана, постоянно наблюдение на работниците, съдебни дела и други мерки на микроикономическо ниво, което намалява възращаемостта от собствеността и поставя под въпрос първоначалната икономическа калкулация на инвестициите.

Значението на различията в неформалните правила при идентичен набор от формални регламентации е илюстрирано от Raiser (1997, p.4) с примера на пътната ситуация в Хелзинки и Рим. Макар правилникът за движение да е на практика един и същ, различният начин, по който гражданите на двата града тълкуват правилата, важността на тяхното спазване, неформално наложените норми при използване на клаксоните, предимството, спирането и потеглянето на светофар едва ли биха оставили у неосведомения шофьор впечатлението за еднаква формална регламентация. Този пример е видимо актуален и в контекста на българската действителност и може без усилие да бъде доразвит също в други области на общественоикономическия живот. „Рутина, навици, традиции и утвърдени практики са думите, които използваме, за да обозначим стабилността на неформалните ограничения" пише Норт (North, 1990, p.98). ***Неподлежащите на бърза промяна неформални норми на поведение се превръщат в основен фактор за зависимостта от пътя*** (path dependence) ***на институционалното развитие, възпрепятстващ налагането на ефективни пазарни решения***. Формалните правила не могат да излязат далеч извън зададените от неформалните норми на поведение граници. Поддържането на подобна система от формални правила е свързано с твърде големи транзакционни разходи. Съответствието между неформални правила и идеологии, от една страна, и формални институции, от друга, е един от главните фактори, влияещи върху размера на съвкупните транзакционните разходи в едно национално стопанство според Норт. Ако икономическите субекти възприемат формалната институционална рамка за справедлива (т.е. в съответствие с господстващата идеология) и в съзвучие с традиционно установените норми (неформални правила), разходите за налагането й ще бъдат значително по-малко отколкото в обратния случай (North, 1990, p.91). При разминаване, членовете на обществото ще вложат допълнителни ресурси в опити за промяна или „заобикаляне" на формалната регламентация, вместо да ги използват производително. Тази аргументация съответства на някои резултати от изследвания в областта на експерименталната икономика. Например експериментите на К. Кофорд (Koford, 2003)[7] регистрират в България по-високи нива на доверието в хоризонтални взаимоотношения и по-ниски във вертикални връзки. Ниските нива на доверие във вертикалните взаимоотношения са причина за увеличаване на споменатите

[7] Репликация на експериментите на Берг, Дикхаут и МакКейб (Berg/Dickhaut/McCabe, 1995) и на Фер и Фолк (Fehr/Falk, 1999).

транзакционни разходи за следене и налагане на изпълнението в рамките на фирмите и за осигуряване на спазването на законите на държавно ниво. Бьорнсков (Bjørnskov, 2006) установява също по-ниски нива на общото доверие с тенденция на спад през 90-те години в посткомунистическите държави в сравнение с останалите общества. Намаленото доверие води до нуждата от заместването му с институционални решения (например различни форми на акредитиви, гаранции, поръчителства), свързани в общия случай с допълнителни транзакционни разходи. От друга страна, съдилищата в Централна и Източна Европа нямат нужните ресурси и инициатива да налагат закона, което води до забавянето на решения и в крайна сметка до често неспазване на закона. Ако съдилищата изпълняват задълженията си, те могат да намалят транзакционните разходи на установените със закон права на собственост и смяна на собствеността, като по този начин могат да повлияят на икономическата активност. Затова е необходимо да бъдат осъзнати икономическите последствия от съдебните решения, както и да бъде избягвано създаването на несигурност около самите законови норми (Coase, 1960). Не само съдебната система, но и държавната администрация, въпреки немалкото изразходени ресурси, отчитани от метода на Уолис и Норт като транзакционни разходи, изглежда не допринася за улесняване на процесите на размяна. Корупционните практики, например при разрешаване достъп до даден пазар, могат да бъдат разглеждани като свидетелство за високия размер на създадените по административен и бюрократичен път частни транзакционни разходи – икономическите субекти са готови да заплатят значителни суми под формата на подкупи, спестявайки така част от иначе забранително високите частни транзакционни, възпиращи размяната.

Част 2.

Икономическа политика в системата на валутен борд.

Глава 5. Институцията валутен борд и финансовата стабилност на стопанската система

1. Правила срещу дискреция за съхраняване на стойността на парите.

Структурата на човешкото общество се определя от система формални правила, които са всъщност всички нормативни актове, като конституция, закони, правилници. Всяка дейност или действие на членовете на обществото може да бъде класифицирана като ***разрешена или неразрешена***. Кой определя дали една дейност или действие е разрешена или неразрешена? Дали една дейност или действие е разрешена може да се определя изрично в нормативен акт, но е възможно нормативен акт да предоставя на администрацията правото да разрешава дадена дейност или действие. Казано с други думи, възможно е правилата да определят дали една дейност или действие е разрешена, или администрацията на обществената система да има свободата или правото да разрешава или да забранява тази дейност или действие. Тези две възможности поставят обществената система пред ***дилемата правила или дискреция, т.е. право на администрацията да решава***. Обикновено, в обществената система, една част от действията и дейностите се разрешават от правилата, останалата част – от администрацията. Естествено възниква въпросът, каква част от действията или дейностите да се разрешават от правилата и каква част – от администрацията? Два са крайните случаи: когато всички дейности и действия се разрешават само от правилата и когато всички дейности и действия се разрешават само от администрацията.

В случая, когато всички действия и дейности се разрешават само от правилата, ролята на администрацията се свежда до това да следи дали се спазват правилата. Това е случая на максимален либерализъм. Мечтата, кредото, идеала, вярата на либералите е всичко да се решава от правилата, а не от администрацията.

В случая, когато всички действия и дейности се разрешават само от администрацията, тя притежава абсолютната, диктаторска власт, която определя както кои да са формалните правила, така и разрешителните и контрола върху спазването им.

Абсолютна власт, която не спазва дори и въведените от самата нея правила се нарича деспотична.

Като прост пример за двете възможности за администриране чрез правила или дискреционна разрешаваща власт, може да послужи регулирането на трафика на едно кръстовище чрез светофар или чрез регулировчик. Светофарът определя разрешително-забранителния режим за преминаване през кръстовището чрез зелена и червена светлина съответно, като ролята на пътния полицай се свежда до това да следи дали се спазва заложеното в светофара правило и да санкционира неизпълнението му. Когато регулировчикът сам регулира кръстовището, той по своя преценка решава, кой поток на движението и за колко време да разреши или да забрани. Предимствата на регулираното със светофар кръстовище са несъмнени, за да се избегне субективността при вземането тна решение, което е една от причините повечето от кръстовищата да се регулират със светофар. Проблемите при регулирането на кръстовището със светофар възникват когато обикновено рязко, шоково се променят условията на трафика, например при пътен инцидент. В такъв случай, обикновено се налага правилата на светофара поне временно да се заменят с правото на пътния полицай да регулира кръстовището.

За да се избегне ***субективността при вземането на решение от администрацията на една обществена система***, по подобен начин, разрешително-забранителния режим при определени дейности или действия се регулира чрез ***система от нарочно въведени правила***. ***Проблема на регулирането чрез правила*** е, че рязко, ***шоково може да се промянят условията*** при които са замислени да действат тези правила и обществената система да изпадне в криза или да стане неуправляема, което да наложи намесата и поемането на тези функции от упълномощена да взема решения административна власт.

Дилемата правила срещу дискреция е вечна и едва ли като цяло някога ще намери оптимално решение. Ние тук ще се спрем на частния случай, отнасящ се за регулирането на количеството на парите в обръщение в една стопанска система.

Два са възможните подходи за ***провеждане на парична политика***, която да доведе до запазване стойността на валутата на страната и те са ***двете възможности на дилемата правила срещу дискреция (свобода на действие) или правила срещу упражняване на власт***. Дискусията или даже борбата между подхода на правилата и подхода на дискрецията при провеждането на парична политика има дълга история и вероятно за първи път е ясно поставен в една класическа статия на Хенри Саймънс (Henry Simons, 1948):

“Проблемът с парите излиза днес на преден план като голямото интелектуално предизвикателство към либералната вяра. Либералното верую изисква организацията на нашия икономически живот да се осъществява до голяма степен чрез индивидуалното участие в игра с определни правила. Дефинитивно, ясно определените, устойчиви, законодателни правила на играта, в частност и по отношение на парите са от огромна важност за оцеляването на една система, която е основана на свободата на предприемачеството.”

Дискусията правила срещу дискреция доведе до оформяне на две школи в централното банкиране: ***валутна школа***, която счита, че Централната банка трябва да провежда политика за запазване на стойността на местната валута, като ограничава действията си в рамките на определени правилата и ***банкова школа***, която счита, че Централната банка трябва да има свободата да се намесва, интервенира на валутния пазар когато реши, че това е необходимо за запазване на стойността местната валута.

Златният стандарт е типичен пример за ***определено от правила централно банкиране***. Той дълго време беше използван за поддържане на стабилност на финансовата система като се прилагаше ***правилото да се покрива валутата със злато***. Предимство на златния стандарт е, че отнема контрола върху количеството на парите от ръцете на властите. Но златният стандарт има два основни недостатъка: при него изменението на паричната база зависи от предлагането на злато, а не на продукция и освен това прави създаването на пари твърде скъпо; отпечатването на парични знаци или електронното съхраняване на стойност е много по-евтино.

Златният стандарт или изпълняваната по определени правила парична политика означава, че макро-икономиката е оставена на авто-пилот. В чистата му форма златният стандарт е напълно автоматизирана финансова система. Принципните постановки на теорията на златния стандарт са положени от Дейвид Хюм (Divid Hume) през 1752 година. Един твърде обстоен анализ на механизмите на златния стандарт е даден от Винер в (Viner, 1956). Виж също Стенли Фишер (Fischer, 1996). Хюм разглежда системата на златния стандарт като “механизъм на златния поток (specie (gold)-flow mechanism) в който паричната наличност (money stock) се регулира, приспособява посредством постъпленията от платежния баланс (balance of payments reveals).

Системата на фиксираните обменни курсове от Бретън Уудс (1946-1973) също е система на правилата.

Монетарният подход приема подхода на правилата при централното банкиране. Той се определя от следните основни предположения:

1. Разглеждат се две стопанства, едно вътрешно и едно външно или останалия свят, в които действат механизмите на пазара, което означава, че цените на благата и на труда се определят от пазара.

2. Разглежданите две стопанства са отворени едно към друго и съществува свободен обмен на блага и труд между тях.

3. Резидентите на страната държат местна валута, резидентите на външната страна - външна валута. Вътрешните и външните резиденти обменят собствената си валута за чужда по определен обменен курс.

4. Изменението в количеството на парите съответства на изменението платежния баланс, което означава, че не се допуска намеса на Националната банка.

5. Стопанството е в състояние на равновесие при пълна заетост.

В най-чист вид подхода на правилата при централното банкиране се прилага в случая на валутен борд.

2. Същност и смисъл на финансовата система валутен борд.

Системата на валутния борд навлиза в практиката чрез въвеждането и през 19 век в бивши британски колонии. Получилите независимост британски колонии въвеждат собствена валута, която обикновено е нестабилна и не се ползува с доверието нито на местните нито на чуждите резиденти. За да стабилизират нововъведената валута и да повишат доверието в нея бившите британски колонии използуват британската лира като "златно покритие" за собствената си валута. За целта те поддържат в обръщение толкова местни пари, колкото по определен фиксиран обменен курс (много често едно към едно) са резервите в британски лири на централната им банка, както обявяват готовността си при поискване да обменят местните пари за британски лири. Това създава у притежателите на местна валута чувството, че притежават всъщност британски лири, като по такъв начин стабилността и доверието към британската лира се пренася върху местната валута.

Такава е всъщност идеята на валутния борд: Доверието и стабилността на една валута да се пренесе върху друга валута, като първата се използува като "златно покритие" на втората.

"Паричната теория на валутния борд е точно теорията на златния стандарт" (Stanly Fischer, 1996).

Таблица 1. Страни с валутен борд.

Страна	Година на въвеждане	Валута-котва
Аржентина	1991	Американски долар
Бермудски острови	1915	Американски долар
Бруней	1967	Сингапурски долар
България	1997	Евро
Гибралтар	1927	Английска лира
Естония	1992	Евро
Кайманови острови	1972	Американски долар
Литва	1994	Американски долар
Фариорски острови	1940	Датска крона
Фолкландски острови	1899	Английска лира
Хонг Конг	1983	Американски долар

Източник: Bofinger,1999 , Williamson 1990, 1994.

Почти забравена през изминалия 20 век системата на валутния борд беше преоткрита през последните години като стабилизационен инструмент за някои от страните в преход. В таблица 1 е даден списък на страни с валутен борд.

Валутният борд всъщност означава, че местната валута се ползва по начин, който позволява във всеки пожелан момент тя да бъде превърната в съответната чужда валута-котва. В тази връзка съвсем естествено възниква въпросът, не е ли по-добре вместо валутен борд, съответната чужда валута-котва да се въведе и да се използва вместо местната. Казано с други думи, какви са предимствата на валутния борд пред въвеждането на еврото например в България вместо българския лев.

Първото предимство има психологически характер: Собствената валута засилва чувството за наличие на национален суверенитет.

Второто предимство има технически характер: Негодните за ползване банкноти се заменят от местните власти, а не се изпращат с такава цел в чужбина.

Третото предимство има икономически характер: Валутните резерви на страната могат да бъдат олихвявани, като по този начин синьоража ще остава в страната, а не в чужбина.

Валутният борд също е система от правила в рамките на която се ограничават действията на централните банкери, като паричната база се покрива с твърда чужда валута (вкл. монетарно злато) вместо с злато, поради което валутният борд има теоретичната рамка на златния стандарт.Правилата и механизмите на валутния борд са изложени например в статията на Осбанд и Вилануева (Osband, Villanueva, 1993).

Валутен борд наричаме следната ***система от правила наложени със закон*** в една страна по които независимата институция за емисия на нейната национална валута, която обикновено е Централната банка осъществява своята дейност:

1. Обменният курс на националната валута на страната е фиксиран спрямо една (или няколко) твърда валута (USD, EURO, BP, JY), която се нарича резервна валута (котва). Националната валута на страната заедно с резервната е плаваща относно всички останали валути.
2. Националната валута на страната и резервната са абсолютно конвертируеми една спрямо друга. Това означава, че по всяко време произволно количество местна валута може да бъде обменено по определения фиксиран курс в резервна валута и обратно. Резервната валута може да служи като абсолютен заместител на националната.
3. Паричната база на страната в национална валута се определя от резервите и в чужда валута превърнати по фиксирания курс в национална валута. Забранено е отпечатването на допълнителни количества пари за финансиране на бюджетен дефицит и фискалната политика на правителството.

Дефиницията на валутен борд формулира определящите го правила в техния първоначален или ортодоксален вид. Тя се отнася за ***ортодоксалния валутен борд***. ***Неортодоксалният валутен борд*** се отличава от ортодоксалния по това, че са отслабени някои от ограниченията, като в неортодоксалния валутен борд се допуска ограничено използване на някои инструменти на паричната политика. Сравнение между тях е направено в таблица 2.

Освен различията в ограниченията между ортодоксалния и неортодоксалния валутен борд съществуват и структурни различия.

В случая на ортодоксалния валутен борд Централната банка може да се състои само от едно отделение – Емисионното и да не се нарича централна банка, а примерно Емисионна агенция, като извън нея се организира отделна Банкова агенция за взаимодействие между Емисионната агенция и търговските банки. Ортодоксалният валутен борд се прилага на практика първо в бившите британски колонии, а по-късно и в други бивши колонии като например Панама.

№	Ортодоксален валутен борд	Неортодоксален валутен борд
1	Предлага банкноти и монети	Предлага банкноти, монети и депозити
2	Не е кредитор от последна инстанция	Силно ограничен кредитор от последна инстанция
3	Не контролира търговските банки	Контролира търговските банки
4	Получава целия си синьораж само от лихвите върху активите си	Получава почти целия си синьораж само от лихвите върху активите си
5	Пълна конвертируемост на текущата и капиталовата сметка	Почти пълна конвертируемост на текущата и капиталовата сметка

Таблица 2. Сравнение между ортодоксален и неортодоксален борд.

При неортодоксалния валутен борд Централната банка обикновено запазва наименованието си, като се преструктурира в три управления: Емисионно, Банково и Банков надзор. Емисионното управление представлява всъщност валутния борд и се занимава с емитиране или унищожаване на местна валута в съответствие с изискванията на закона. Банковото управление осъществява взаимодействието между емисионното управление и търговските банки. Управление Банков надзор контролира търговските банки. Неортодоксалният валутен борд се прилага в по-ново време главно в страни с нестабилна финансова система като например Аржентина и в страните в преход като България, Естония, Литва.

Мненията и оценките на икономистите за ролята валутния борд са доста противоречиви. В тази връзка, бихме препоръчали само някои от многото публикации на тази тема: Минасян, Ненова, Йоцов (1997), Ханке, Шулер (1996), Williamson (1995)

3. Структурни особености и буфери на стабилност на българския валутния борд.

Апогей на хаотичното начало на прехода бе кризата през 1996-1997 година, която доведе до въвеждането на валутен борд в България.

Системата на валутен борд бе въведена от 1 юли 1997 г., с приемането от Народното събрание на Република България, на Закона за Българската народна банка публикуван в Държавен вестник брой 46, 10 юни 1997 и на Закона за търговските банки публикуван в Държавен вестник брой 52, 1 юли 1997, след като през април 1997 г. правителството подписа Петото стабилизационно стенд-бай споразумение с МВФ. С това, България пое ангажимент да подчини работата на Българската народна банка на правилата на валутния борд, да провежда строга фискална политика и политика на доходите, както и да извърши структурни промени в икономиката на страната. С приемането на закона за БНБ през 1997 г. са формулирани основните задачи на централната банка в условията на валутен борд. Това доведе до съществени промени в организационната, управленската и функционалната структура на централната банка, така че тя да работи в съответствие с правилата на паричния съвет. На фигура 1 е показана организационната структура на Българската народна банка към 01.08.2008 г. БНБ има три основни управления: "Емисионно", "Банково" и "Банков надзор". Орган за управлението й е Управителният съвет, който включва седем членове – управителя, трима подуправители – ръководители на трите управления и трима други членове. Членовете на управителния съвет са български граждани. Народното събрание избира управителя и по негово предложение - подуправителите, а другите трима членове на управителния съвет се назначават от президента на републиката. Мандатът на членовете на управителния съвет е шест години.

Управителният съвет има следните основни задължения:

– Обсъжда и приема основните насоки на дейността си, нормативните актове по дейността на банката, както и отчетите за дейността на основните управления, годишния бюджет, годишния счетоводен баланс и др.;

– Определя лихвите, таксите и комисионните във връзка с дейността на банката, процентите на минималните задължителни резерви, които търговските банки трябва да държат, и утвърждава условията и изискванията за изпълнението им;

– Взема решения за въвеждане и преустановяване на отделни дейности на банката, за създаване на други управления, за издаване на нови или за изтегляне на стари банкноти и монети от обръщение, за откриване и закриване на клонове и представителства на банката;

– Приема решения за участие на Българската народна банка в международни организации и в мероприятия и дейности, предприемани от такива организации;

Функции на управление "Емисионно"

Основната функция на управление “Емисионно” е да поддържа пълно валутно покритие на общата сума на паричните задължения на БНБ, като предприема необходимите действия за ефективно управление на брутните международни валутни резерви на банката. По този начин управление “Емисионно” изпълнява функциите на паричен съвет. Тези функции са следните:

– Регулира паричното обръщение, като общата сума на паричните задължения на БНБ не трябва да надхвърля левовата равностойност на международния валутен резерв, определена на базата на фиксирания валутен курс на лева към еврото;

– Провежда емисионната политика на банката, пуска банкноти и монети в обръщение, като БНБ осигурява печатането на банкнотите, сеченето на монетите и тяхното съхраняване ;

– Осигурява неограничена покупко-продажба на левове в евро и обратно, по официалния фиксиран курс при поискване от страна на икономическите агенти. До юни 2004 г., БНБ купува и продава евро по курсове, които се отклоняват максимално до 0.5 % от официалния курс, но след тази дата, обмяната става по фиксирания курс, а именно 1 евро = 1.95583 лева;

– Управлява брутните международни резерви на страната, като извършва покупко-продажби и сключва сделки с чуждестранни валути и монетарно злато. Също така инвестира в чуждестранни ценни книжа и управлява валутните пасиви на БНБ;

– Открива и поддържа разплащателни сметки на търговските банки, по които те държат своите минимални задължителни резерви. Обменя информация с управление “Банково”за тези депозити, за ликвидността на търговските банки, както и за състоянието на финансовите пазари и платежната система;

– Открива и поддържа парични депозити по текущи или срочни сметки на министерства, ведомства, общини, бюджетни организации и др. и извършва плащания от тяхно име и за тяхна сметка;

Функции на управление “Банково”

Основна задача на управление “Банково” е да осигури доверие в банковата ликвидност. То изпълнява следните основни функции:

– Играе ролята на кредитор от последна инстанция на търговските банки при строго определени условия от режима на валутния борд, като се цели предотвратяване на евентуална банкова криза. За да може да отпусне кредит на дадена търговска банка, управление “Банково” разполага с част от брутните валутни резерви, които винаги надвишават стопроцентовото покритие на пасивите. Тези валутни резерви се намират в управление “Емисионно” под формата на депозит;

– Въвежда изискванията за минималните задължителни резерви на търговските банки, определя размера им, условията за плащане на лихва по тях, както и други условия за поддържане стабилността на банковата система;

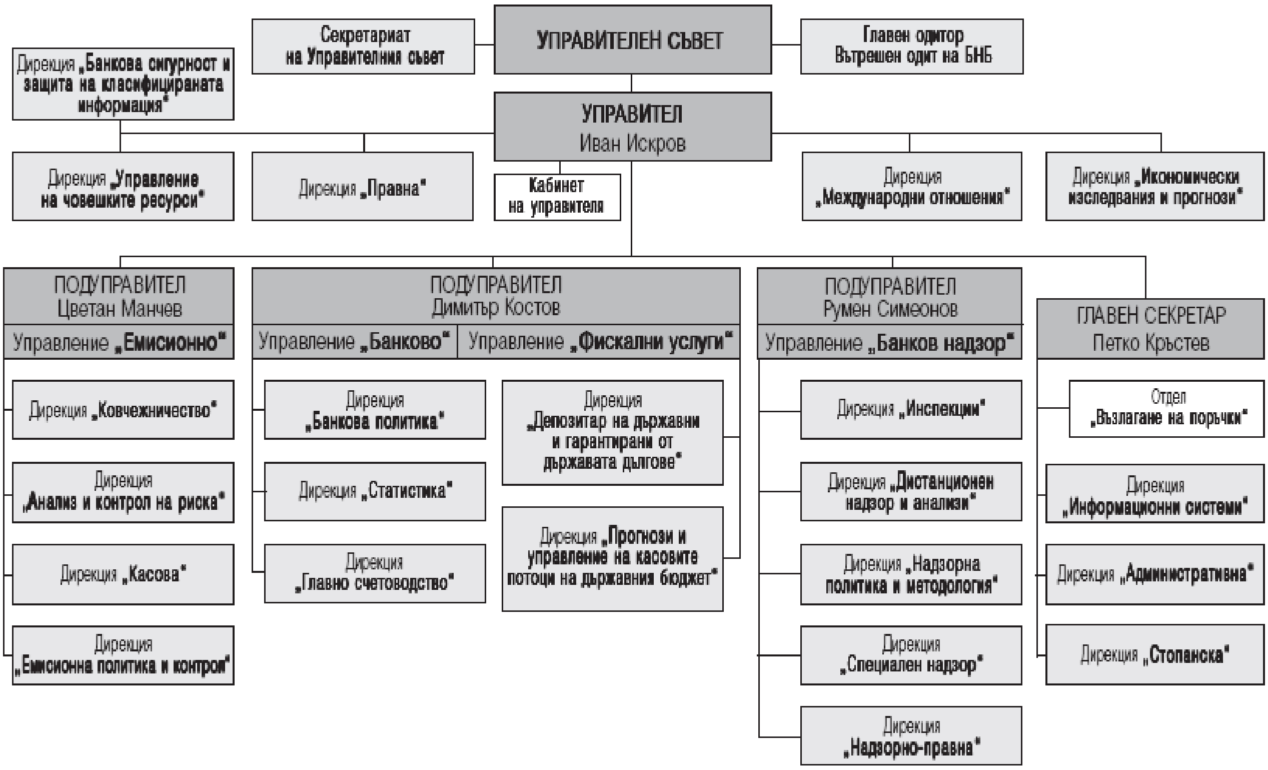
– Предлага методика за формирането на основния лихвен процент и обявява равнището му, като от януари 2005 г. се използва индексът “Леониа”;

– Наблюдава развитието на финансовите пазари в страната, но няма право да търгува на тях, нито да влияе върху цената на финансовите активи или върху лихвените равнища;

Подуправителят, ръководещ управление “Банково”, организира и отговаря за дейността и на управление “Фискални услуги”. Това управление действа като агент по държавни дългове или по дългове, гарантирани от държавата при договорени с министъра на финансите условия.

Функции на управление “Банков надзор”

Основната задача на управление “Банков надзор” е да осъществява надзор върху търговските банки съгласно определен в закона ред и издадените за неговото прилагане нормативни актове с цел поддържане стабилността на банковата система. Основните функции на това управление са: издаване и отнемане на лицензи на търговските банки; изготвяне на методология за надзорната политика; извършване на инспекции на търговските банки и небанковите финансови институции; анализ на състоянието и развитието на банковата система и др. Много важна особеност е, че банковият надзор е независим и не са допустими външни влияния относно решенията на това управление.



* Източник БНБ

Фигура 1. Структура на Българска народна банка към 01.08.2008 г.*

Въпреки споровете и недоволствата около въвеждането на валутен борд, българският валутен борд не само стабилизира финансовата система на страната и осигури необходимата за икономическия растеж стабилност, но преживявайки и предизвикани от външни фактори шокове, се превърна може би в най-успешния валутен борд въвеждан с помощта на Международния валутен фонд. Защо българският валутен борд се оказа толкова стабилен, че устоя на превратностите на времето и не се провали като аржентивския, например. Може би, устойчивостта на българския валутен борд се дължи на жилавия българин, на способността му да оцелява при невъзможни за други народи условия. Съществуват обаче и други предпоставки за стабилността на българския валутен борд, на които ще се спрем съвсем на кратко тук.

При въвеждането на валутния борд в България бяха спазени всички изисквания на неортодоксалния валутен борд.

Правилно бе въвеждането на ***неортодоксален***, вместо ортодоксален валутен борд, както настояваха някои икономисти, понеже неортодоксалният валутен борд има буферни механизми, които го правят по-гъвкав и по-устойчив на външни шокове от ортодоксалния.

Правилно бе ***възприемането на германската марка и в последствие еврото*** вместо долара, поради значително, по-голямата стабилност на германската марка и на еврото в сравнение с долара, както и значително по-големите търговски обеми, които България има в евро, в сравнение с търговския обмен в долари.

Приватизацията на банковия сектор в България се оказа твърде успешна. Българските търговски банки бяха почти изцяло продадени на големи чужди банки, които за продължителен период от време осигуриха добра ***ликвидност на българската банкова система***.

Особено важен фактор за стабилността на българския валутен борд е осигуряване за целия период на ***положителен платежен баланс***, независимо от отрицателната текуща сметка. Този положителен платежен баланс бе поддържан главно чрез ***преките чужди инвестиции, преводите на българите, работещи в чужбина и излишъка в държавния бюджет***.

Може би, най-важния фактор за стабилността на българския валутен борд бе ***икономическия растеж*** от по няколко процента годишно, който доведе до съживяването на българската икономика.

4. Парична база и парично предлагане в системата на неортодоксален валутен борд. Основно уравнение на валутния борд.

В съвременната система на националното стопанство, ***паричните знаци*** под формата на ***банкноти и монети*** се печатат и пускат в обръщение от специално създадена и упълномощена за това ***институция*** или ***емисионна агенция***, която в повечето страни е прието да се нарича ***национална банка, централна банка***, но в някои страни има и друго наименование, като например в Германия – Федерална банка (Bundesbank), в САЩ – Федерален резерв (Federal Reserve). Банкнотите и монетите са кешовата форма на парите и представляват ***паричната база B***. ***Банкнотите и монетите в обръщение C*** и се държат от стопански субекти, като домакинства или предприятия, които ги използват, за да осъществяват стопански транзакции или ги предоставят на търговските банки като спестявания. ***Търговските банки*** са посреднически институции, които основно служат за приемане на ***депозити D*** и предоставяне на ***кредити K*** от и на стопанските субекти, които ще обозначаваме с наименованието ***небанки***. По този начин във финансовата система на всяка страна участват три категории стопански субекти:

I. Централна банка (ЦБ) или емисионна агенция

II. Търговски банки (ТБ)

III. Небанки (НБ)

Всяка от тези три категории стопански субекти има своя агрегиран баланс (активи и пасиви), като трите баланса са свързани поради взаимодействието между тях и образуват балансовата схема на цялата финансова система, която е отразена на таблица 3.

Паричната база B се състои от пасивите на Централната банка, т.е.

$$B=C+R \qquad (1)$$

Търговските банки приемайки депозити и давайки кредити на небанките ***умножават парите в обръщение***, поради което ***паричното предлагане M*** е равно на сумата от парите в обръщение C и депозитите D:

$$M = C + D \qquad (2)$$

Процеса на разширяването на парите от кешовата им форма до цялостното им парично предлагане M е подробно описан и изледван в редица публикации. (Bofinger 1996, 1999, Bordo 1999, Brunner 1990, Papademos 1990.) Ние тук в съвсем сбита форма ще изложим параметрите, съотношенията и механизмите, които участват във формирането на паричното предлагане, с цел да ги използваме при формулирането на следващите модели.

Активи	Пасиви
Централна банка (ЦБ)	
- F чуждестранни резерви, т.е. искове, претенции на ЦБ към чужди ЦБ и финансови институции	C - парите, които ЦБ е пуснала в обръщение, т.е. банкноти и монети
	R - задължителни резерви, които ТБ държат в ЦБ
Търговски банки (ТБ)	
R – Задължителни резерви на ТБ в ЦБ	D – Депозити на небанките в ТБ
K – Кредити от ТБ на НБ	B_0 - Нетно състояние на ТБ (нетен остатък от активите на ТБ)
Небанки (НБ)	
C – парите в обръщение държани от НБ	K –Кредити, които НБ са получили от ТБ

D – Депозити на НБ в ТБ	N_0 - Нетно състояние на НБ (нетен остатък от активите на НБ)

Таблица 3. Балансова схема на финансовата система на една страна.

По закон търговските банки поддържат задължителни минимални резерви R, които са пропорционални, с коефициент на пропорционалност r на депозитите D, което означава, че

$$R = rD \tag{3}$$

или
$$r = \frac{R}{D} \tag{4}$$

Парите в обръщение C държани от небанките са някакъв процент c от паричното предлагане M, което означава, че

$$c = \frac{C}{M} \tag{5}$$

или
$$C = cM \tag{6}$$

Заместваме C и D със равните им от (6) и (4) в (2) и получаваме:

$$M = cM + \frac{R}{r} \tag{7}$$

Заместваме R с равното му от (1) в (7) и C с равното му от (6) получаваме последователно:

$$M = cM + \frac{B-C}{r} = cM + \frac{B}{r} - \frac{C}{r} = cM + \frac{B}{r} - \frac{cM}{r}$$

Следователно

$$\frac{B}{r} = M - cM + \frac{cM}{r} = M(1 - c + \frac{c}{r})$$

$$B = M(r - rc + c)$$

$$M = \frac{1}{r - rc + c} B \tag{8}$$

Множителят $\mu = \dfrac{1}{r - rc + c}$ се нарича паричен мултипликатор, понеже мултиплицира, умножава паричната база *B,* за да я разшири до паричното предлагане M :

$$M = \mu B \tag{9}$$

В случая на ***валутен борд паричната база и паричното предлагане*** са ***ендогенно определени величини*** на базата на дефиниционните условия 1-3 и на другите нормативни актове уточняващи изискванията към финансовата система на страната при условията на валутен борд.

Спецификата на паричната база и на паричното предлагане в условията на валутен борд се определя от структурата на баланса на финансовата система на страната, която е дадена на таблица 4 и която се определя от изискванията на валутния борд.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Емисионно управление</td></tr>
<tr><td align="center">Активи</td><td align="center">Пасиви</td></tr>
<tr><td valign="top">Чужди резерви (F):
- Активи в чужда валута
- Търгуеми чужди ценни книжа
- Монетарно злато
- Специални права на тираж на МВФ</td><td valign="top">Местна валута в обръщение (Монети и банкноти) (C):
- местна валута в Банковото управление (C_{bd})
- местна валута в търговските банки (C_b)
- местна валута в местните небанкови резиденти (C_p)
($C=C_{bd}+C_b+C_p$)
Депозити (D):
- банкови депозити (изискуемите от закона резерви и свръх резервите на търговските банки (D_b)
- правителствени депозити (D_g)
- депозит на банковото управление (нетният остатък на Емисионното упраление) (D_{bd})
($D=D_b+D_g+D_{bd}$)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Банково управление</td></tr>
<tr><td align="center">Активи</td><td align="center">Пасиви</td></tr>
<tr><td>Депозит в Емисионно управление (D_{bd})</td><td>Заеми взети от МВФ (L^{IMF})</td></tr>
</table>

Заеми дадени на търговските банки като силно ограничен кредитор от последна инстанция (L_{LLR})	Капитали и резерви (CR)

Търговски банки	
Активи	Пасиви
Местна валута в търговските банки (C_b) Резерви депозирани в Емисионно управление (D_b) Заеми дадени на небанкови резиденти (L_p) Държавни ценни книжа държани от търговските банки (S_b)	Депозити на небанкови резиденти в търговските банки (D_p) Заеми взети от Банковото управление като силно ограничен кредитор от последна инстанция (L_{LLR})

Небанкови резиденти на страната	
Активи	Пасиви
Местна валута в небанковите резиденти на страната (C_p) Депозити на небанковите резиденти в търговските банки (D_p) Държавни ценни книжа държани от небанковите резиденти (S_p)	Заеми на небанковите резиденти взети от търговските банки (L_p)

Таблица 4. Балансова схема на неортодоксален валутен борд.

Основно уравнение на валутния борд

Основна роля за финансовата стабилност на една стопанска система играе паричното предлагане M. Паричното предлагане M се формира, като паричната база B се умножава, мултиплицира с паричния мултипликатор μ:

$$M = \mu B \tag{1}$$

Вземаме диференциал от двете страни на последното равенство и полученото равенство почленно разделяме на (1):

$$dM = \mu dB + Bd\mu \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{d\mu}{\mu} + \frac{dB}{B} \tag{3}$$

Означаваме $m = \frac{dM}{M}$, $b = \frac{dB}{B}$, $\varepsilon = \frac{d\mu}{\mu}$ и получаваме

$$m = b + \varepsilon \qquad (4)$$

Уравнение (4) показва, че относителното изменение на паричното предлагане е равно на сумата от относителните изменения на паричната база и на паричния мултипликатор. Последното означава, че изменението в паричното предлагане може да се дължи или на изменение в паричната база или на изменение в паричния мултипликатор.

Валутният борд осигурява доверие в националната валута поради дефиниционното условие 3. , което означава, че ***паричната база В на страната е покрита от чуждите и резерви F*** по фиксирания обменен курс:

$$B=F \qquad (5)$$

Уравнението (5) е ***основно уравнение за валутния борд***. От (5) следва, че абсолютното изменението dB на паричната база трябва да е равно на абсолютното изменение dF на чуждите резерви, т.е.

$$dB = dF \qquad (6)$$

Равни ще бъдат и относителните изменения:

$$b = \frac{dB}{B} = \frac{dF}{F} = f \qquad (7)$$

Версиите (6) и (7) на основното уравнение (5) на валутния борд представляват ***предписание за Централната банка***, което и показва, че трябва ***да променя паричната база във същия размер, в който са се променили чуждите резерви***.

Всички участващи в разглежданията величини ще предполагаме, че зависят от времето, което ще означаваме с t.

Абсолютното изменение dF на чуждестранните резерви F на една страна за определен период от време dt е всъщност салдото на платежния баланс BP за същия този период от време:

$$dF = BPdt \qquad (8)$$

Аналогично, за съответните относителни изменения имаме:

$$df(t) = b_p(t)dt \qquad (9)$$

където с $b_p = \frac{dBP}{BP}$ сме означили .

(Дискретен аналог на последното равенство е $f(t) - f(t-1) = b_p(t)$.)

От (9) получаваме

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} = b_p \qquad (10)$$

Равенството (10) показва, че ***скоростта на относителното изменение чуждестранните резерви*** $\dot{f}$ е всъщност ***относителното изменение в салдото на платежния баланс*** b_p.

От (7) и (10) получаваме

$$\dot{b} = b_p \qquad (11)$$

Равенството (11) показва, че ***скоростта на относителното изменение на паричната база*** $\dot{b}$ в условията на валутен борд се определя от автоматично от ***относителното изменение в салдото на платежния баланс*** b_p, а не от Централната банка на страната.

В условията на валутен борд, ***платежният баланс*** на страната играе ***определяща за паричната база и за паричното предлагане роля***.

От (4) и (11) получаваме:

$$\dot{m} - \dot{\varepsilon} = b_p \qquad (12)$$

Ако паричният мултипликатор или е постоянен или се променя бавно с течение на времето (виж израза за паричен мултипликатор), поради което можем да приемем, че абсолютното и относителното му изменение е равно на нула, т.е.

$$d\mu = 0, \qquad (13)$$

$$\dot{\varepsilon} = 0 \qquad (14)$$

Замествайки (14) в (12) получаваме:

$$\dot{m} = b_p \qquad (15)$$

Равенството (15) показва, че ***при условията на валутен борд и при постоянен паричен мултипликатор, скоростта на изменението на паричното предлагане*** $\dot{m}$ ***се определя от относителното изменение на салдото на платежния баланс*** b_p.

Глава 6. Равновесието и стабилността на стопанската система – отправна точка в провеждането на икономическа политика в условията на валутен борд.

Преход от една стопанска система към друга, означава смяна на правилата, преминаване не просто от едно състояние към друго, а дълбоки структурни, институциални, поведенчески изменения. В процеса на преход се сменя и ценностната система на обществото. Колкото по-дълбоки са тези изменеия, толкова по-голяма е несигурността, неопределеността в динамиката на прехода.

Икономическата теория и практика показват, че относителна стабилност на парите може да бъде бъде постигната чрез въвеждането на една временна институция, наречена валутен борд, която всъщност представлява система от правила за определяне на паричната база и оттам и на паричното предлагане. Два са основните проблими на валутния борд.

Първо, както всяка фиксирана система от правила, не позволяваща дискреционна намеса, валутният борд не реагира на резки изменения на екзогенни (външни) за системата параметри, което при определени условия може да доведе до рухването му или до други негативни за стопанската система ефекти. Това налага осигуряването на валутния борд с буферни механизми, които да осигурят относителна гъвкавост и стабилност на самия борд.

Второ, както всяка система от правила, ограничаваща в определени рамки действията на стопанските субекти, валутният борд ограничава възможностите за парична политика и за политика на икономически растеж.

Макроикономическата политика предлага два подхода за постигане на икономически растеж: подхода на търсенето и подхода на предлагането.

Подходът на търсенето не е приложим при условията на валутен борд поради ограниченията, които валутният борд поставя върху паричната политика: паричната база еднозначно да се съгласува с платежния баланс. Паричната база автоматично се определя от чуждите твърди валутни резерви на страната и не може да бъде променяна от властите. ***Единствено приложим при условията на валутен борд е подходът на предлаганито.***

Политиката на предлагането за икономически растеж се базира на нарастването на производствените фактори. Пътищата, каналите, начините чрез които факторите: капитал K_t, работна сила L_t, човешки капитал H_t, ниво на технологиите A_t, обществени правила R_t, влияят върху формирането продукцията Y_t за даден период *t*, се определят от производствена функция F :

$$Y_t = F(K_t, L_t, H_t, A_t, R_t), \qquad (1)$$

Като вземем логаритъм и диференциал от двете страни на (1), получаваме:

$$d\ln Y_t = d\ln F(K_t, L_t, H_t, A_t, R_t)$$

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dF}{FdK}dK + \frac{dF}{FdL}dL + \frac{dF}{FdH}dH + \frac{dF}{FdA}dA + \frac{dF}{FdR}dR$$

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dF}{F}\frac{K}{dK}\frac{dK}{K} + \frac{dF}{F}\frac{L}{dL}\frac{dL}{L} + \frac{dF}{F}\frac{H}{dH}\frac{dH}{H} + \frac{dF}{F}\frac{A}{dA}\frac{dA}{A} + \frac{dF}{F}\frac{R}{dR}\frac{dR}{R}$$

$$\frac{dY}{Y} = \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dK}{K}}\frac{dK}{K} + \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dL}{L}}\frac{dL}{L} + \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dH}{H}}\frac{dH}{H} + \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dA}{A}}\frac{dA}{A} + \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dR}{R}}\frac{dR}{R}$$

$$\frac{dY}{Y} = \eta_{Y(K)}\frac{dK}{K} + \eta_{Y(L)}\frac{dL}{L} + \eta_{Y(H)}\frac{dH}{H} + \eta_{Y(A)}\frac{dA}{A} + \eta_{Y(R)}\frac{dR}{R}$$

$$y = \eta_{Y(K)}k + \eta_{Y(L)}l + \eta_{Y(H)}h + \eta_{Y(A)}a + \eta_{Y(R)}r \qquad (2)$$

Уравнение (2) е основното уравнение на сметководството на растежа и изразява в линейна форма зависимостта на относителното изменение на производството от относителните изменения на факторите: физически капитал $k = \frac{dK}{K}$, работна сила $l = \frac{dL}{L}$, човешки капитал $h = \frac{dH}{H}$, ниво на технологиите $a = \frac{dA}{A}$, обществени правила $r = \frac{dR}{R}$ и еластичностите:

$$\eta_{Y(K)} = \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dK}{K}},\ \eta_{Y(L)} = \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dL}{L}},\eta_{Y(H)} = \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dH}{H}},\eta_{Y(A)} = \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dA}{A}},\eta_{Y(R)} = \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dR}{R}}.$$

Тъй като търсенето на местна продукция $Y^{(d)}$ може да се изрази чрез:

$$Y^{(d)} = C + I + G + Ex - \mathrm{Im}, \qquad (3)$$

за предлагането на местна продукция $Y^{(s)}$ ще имаме:

$$Y^{(s)} = f(K, L, H, A, R) \qquad (4)$$

Ако разгледаме производството като функция само на правилата *R*, фиксирайки всички останали фактори на растежа да са равни на $\overline{K}, \overline{L}, \overline{H}, \overline{A}$, получаваме:

$$Y = f(\overline{K}, \overline{L}, \overline{H}, \overline{A}, R), \qquad (5)$$

или по-кратко:

$$Y = f(R) \qquad (6)$$

Дефинираме ***пределна производителност на регулациите*** (MPR):

$$MPR = \frac{dY}{dR} = f'(R) \qquad (7)$$

Пределната производителност на регулациите измерва какво количество продукция се произвежда в повече при въвеждането на една нова регулация.

Обикновено, $f' > 0$ и $f'' < 0$ (8)

За да се проследи как въвеждането на регулация или изграждането на институция влияе на растежа, трябва да се разгледа пределната й производителност. По-точно, въвеждането на валутен борд се очаква да донесе не само стабилност на валутата, но и икономически растеж, защото валутният борд е институция и въздейства върху икономическата ефективност, както всяка друга институция. Емпирични данни от страни като Аржентина, България, Естония, в които бе въведен валутен борд, показват умерен положителен икономически растеж в краткосрочен план, който се дължи само на валутния борд, защото всички останали фактори всъщност за този период не могат да се променят много и могат да се считат за постоянни. Това означава, че пределната производителност на валутния борд е положителна в краткосрочен план. Пределната производителност на валутния борд се увеличава все по-бавно във времето и може да стане почти постоянна или дори да намалява в дългосрочен план. Затова, умереният положителен икономически растеж, предизвикан от въвеждането на самия валутен борд, не може да бъде запазен за дълго време и трябва да бъде поддържан от други институционални или не-институционални фактори на растежа.

Основен въпрос в полето на икономическия растеж е това защо някои държави са по-бедни от други. Традиционните неокласически модели на растежа (Солоу, Кас, Купманс) обясняват разликите в дохода на глава от населението с различните пътища за акумулиране на фактори на производството. В тези модели тези различия между отделните страни се обясняват с различните темпове на спестяване (Солоу), предпочитания (Кас-Купманс) или с други екзогенни параметри като растежа на общата факторна производителност. Дълго време различни икономисти се опитват да открият фундаментално обяснение за икономическия растеж. Норт и Томас (North, Thomas, 1973) определят нововъведенията, икономиите от мащаба, образованието и акумулирането на капитал не като причини за растежа, а като въплъщение на самия растеж. Според Норт и Томас (North, Thomas, 1971) ***разликите в икономическото развитие се дължат на разликите в изградените институции в различните страни***.

Особено важни за икономическото развитие са обществените икономически институции като правото на собственост и наличието и съвършенството на пазарите. Икономическите институции влияят върху икономическите стимули на обществото. Главно условие за ефективност са институционалните ограничения, които много западни икономисти приемат като даденост. С помощта на определен набор от политически и икономически институции осъществяването на транзакциите става все по-евтино, нараства вероятността от връщането на кредитите и изпълнението на договорните задължения. Освен това набор от институции спомага за ефективността на пазара на стоки и услуги, което лежи в основата на икономическия ръст. Без правата на собственост икономическите агенти няма да имат стимул да инвестират във физически или човешки капитал или да възприемат по-ефективни технологии. Икономическите институции способстват за по-ефективното разпределение на ресурсите, тъй като определят при кого отиват приходите и печалбата, както и правото на контрол. Ефективни пазари се появяват в някакъв момент благодарение на функционирането на институции, които намаляват разходите по сделките и сключването на договорите. Необходими са институции, които биха осигурявали икономическа и политическа гъвкавост за адаптация към нови условия, за нови възможности. Такива адаптивно ефективни институции биха създавали стимули към обучение и знания, биха поощрявали икономическите агенти към иновации, риск и предприемаческа активност. В свят на неопределеност и несъвършена информация никой не знае правилното решение на проблемите. Затова институциите са длъжни да поощряват нововъведенията, стремежа към новото и отстраняването на грешките. Логическият извод е, че е необходимо децентрализирано вземане на решенията, което би позволило на обществото да разглежда, обсъжда и избира най-доброто от няколко алтернативни решения.

Тук ние разглеждаме само институционалния фактор на растежа, понеже другите фактори не са предмет на настоящото изследване. Те са не по-малко важни за растежа при условията на валутен борд и ние нито ги пренебрегваме, нито ги подценяваме, а предлагаме за повече информация, например: Рангелова (2008, 2009), и Симеонова-Ганева (2004, 2005 2007, 2008)

1. Инфлация и растеж в стопанската система.

Количството на парите в стопанската система, на теория, се определя въобще казано от ***основната функция на парите,*** да служат като транзакционно средство, т.е. ***средство за обмен на блага***. Грубо казано, в стопаската система би трябвало да има толкова пари, колкото са благата, за да може да бъде осъществяван при необходимост обмен на блага. Ако количеството на парите в една стопанска система е по-малко от количеството на благата, то това би довело до затруднения в стопанския обмен и би въздействало възпиращо върху икономическия растеж. Наличието на по-голямо количество пари отколкото е количеството на благата, би довело довело до обезценяването им, т.е. до нарастване на инфлацията. ***Паричното предлагане*** е свързано с ***инфлацията и растежа*** в една стопанска система.

Подходът в определянето на паричното предлагане е водораздел в провеждането на макроикономическа политика. Макроикономическата политика предлага два подхода за постигане на икономически растеж: подхода на търсенето и подхода на предлагането.

Подходът на търсенето се свежда до пускането в обръщение на по-голямо количество пари, което да повиши търсенето на блага и да стимулира по този начин производството им, което от своя страна да доведе до оживление в икономиката и до икономически растеж. Повишеното търсене на блага води наред с икономическия растеж и до повишаване на инфлацията. Подходът на търсенето в провеждането на икономическа политика е възможен само в случая когато е възможно провеждане на дискреционна парична политика от страна на Централната банка, т.е. когато на Централната банка е разрешено да разширява паричното предлагане по свое усмотрение. Подходът на търсенето не е приложим в случая например на златния стандарт, тъй като в този случай паричната база и паричното предлагане се определят автоматично от наличните златни резерви. Голямата депресия от 1930 г. бе основният аргумент за спадането на доверието в предимствата на автоматичното действие на златния стандарт и в способността за самоорганизиране на пазарната система. Опит да се преодолеят недостатъците на златния стандарт и провалите пазарния механизъм бе предприет от Кейнс в неговата Обща теория, в която той предлага замяната на някои от правилата с дискреционна икономическа политика. Общата теория създаде теоретичната рамка за по-задълбоченото изучаване на макроикономически връзки като например зависимостта между стабилността на валутата и икономическия растеж. Стабилност на валутата значи стабилност на нивото на цените, т.е. постоянно ниска инфлация. Освен ***стабилността на валутата***, друга не по-малко важна цел е ***икономическия растеж.***

Политиката на предлагането е алтернативата за икономически растеж. Тя се базира на нарастването на производствените фактори. Пътищата, каналите, начините чрез които факторите: капитал K_t, работна сила L_t, човешки капитал H_t, ниво на технологиите A_t, обществени правила R_t, влияят върху формирането продукцията Y_t за даден период *t*, се определят от производствена функция F: $Y_t = F(K_t, L_t, H_t, A_t, R_t)$.

Възможно ли е да се постигнат едновременно и ниска инфлация, и икономически растеж? Тази възможност бе отричана теоретично доста дълго време. Получените въз основа на емпирични данни резултати от последни години показват, че "корелацията между инфлацията и растежа всъщност е отрицателна - поне при двуцифрени нива на инфлация" Виж, например (Fischer 1995, Fischer 1990, Bruno и Easterly 1995, както и Robert Barro 1995. Стенли Фишер (Fischer 1993) установява, че отрицателната връзка продължава да съществува дори и при ниските едноцифрени нива на инфлацията. Това означава, че икономическият растеж сам по себе си не предполага инфлация, или че е възможно да се постигне икономически растеж, запазвайки инфлацията ниска.

Въпросът за връзката инфлация – икономически растеж е интересен не само за системата на валутният борд, но и за всяка друга финансова система, поради което съществуват и доста изследвания на тази тема. Робърт Баро (Robert Barro 1995) прави регресионен анализ на въздействието на инфлацията върху икономическия растеж, като използува емпирични данни от над 100 страни за периода от 1960 до 1990 година. Той показва, че при относително постоянни други макроикономически показатели покачването на инфлацията средно годишно с 10% води до намаляване на годишния растеж на реалния БВП на глава от населението с 0,2-0,3% и на отношението инвестиции/БВП с 0,4-0,6 %. Тъй като регресионната зависимост е статистически значима може да се предполага, че тази зависимост е каузална, т.е., че съществуват икономически фактори, които я обуславят. Едно възможно обяснение на отрицателното въздействие на инфлацията върху икономическия растеж и върху инвестициите е, че предприятията и домакинствата осъществяват своята стопанска дейност по-лошо при условията на висока инфлация и непредвидимост.

Робърт Баро потвърждава част от разултатите на Стенли Фишер в неговата статия (Fischer 1993), където Фишер поставя по-общия въпрос за ролята на макроикономическите фактори за икономическия растеж и на базата на обширен емпиричен материал доказва, че стабилната макрорамка, което означава ниска инфлация и малък бюджетен дефицит водят устойчив икономически растеж. С помощта на основните тъждества на сметководството на растежа е възможно да се идентифицират икономическите механизми чрез които инфлацията намалява растежа и тяхното действие е в унисон с икономическата теория. Инфлацията намалява растежа чрез намаляването на инвестициите и чрез намаляването на скоростта на растежа на производителността. По-големите бюджетни излишъци са силно свързани с по-бърз растеж, посредством по-голямо акумулиране на капитал и по-голям растеж на производителността. Нормално функциониращият валутен пазар също е добър проводник за растежа. С примери е показано, че ниската инфлация и малките бюджетни дефицити са необходимо, но не са достатъчно условие за висок и постоянен икономически растеж, което идва да подскаже, че освен стабилността трябва да бъдат задействани и други фактори на растежа, като например подобряване на качеството на човешкия капитал, чрез инвестиции в образованието.

2. Инфлация и растеж в системата на валутен борд. Равновесие и стабилност на паричното предлагане и ценовите равнища.

Резултатите, които Робърт Баро, Стенли Фишер и редица други автори получават потвърждават факта, че ниската инфлация влияе положително върху икономическия растеж при произволна финансова система. Този резултат остава в сила и в случая, когато финансовата система е валутен борд. Статистическите данни ясно показват, че положителен икономически растеж в България се отчита едва след въвеждането на валутен борд.

Валутният борд е средство за постигане на ниска инфлация, т.е. стабилност на валутата, и обикновено постига тази цел, поне в краткосрочен план и ниската инфлация не влияе негативно на растежа.

Как, обаче растежа се отразява на инфлацията? Възможно ли е нарастването на производството до доведе до увеличаване на инфлацията? С помощта на динамичен модел ще покажем, че при условията на валутен борд, икономическия растеж (нарастването на производството), както и намаляването на държавните (частично транзакционни) разходи води до неинфлационно (нулево нарастване на инфлацията) нарастване на паричното предлагане. Нарастването на паричното предлагане е в хармония с нарастването на продукцията, понеже по-голямо парично предлагане ще е необходимо за обслужване на по-големия брой транзакции, необходим за обмен повишената продукция.

Динамичното поведение на равновесието и стабилността на относителното изменеие m на паричното предлагане M и относителното изменеие p на ценовото равнище P като ендогенни в рамките на динамична система, определена от условията на валутен борд, ще изследваме в зависимост от относителното изменеие y на производството Y, от относителното изменеие g на държавните разходи G и от лихвения процент i, които ще разглеждаме като екзогенни, определяни от външни за системата фактори. Ще проверим как измененията на екзогенните променливи въздействат върху върху равновесието и стабилността на ендогенните.

За изграждане на динамичната система ще използуваме основното уравнение на валутния борд и макроикономически зависимости между параметрите на системата зададени от кривите *IS, LM, AD, BP* получени в част II.

Равенство (6), глава 5, точка 6 ни дава

$$b_p = \alpha(y - y^d) - \beta(e + p - p^*) + \gamma(i - i^*) \qquad (1)$$

където относителните изменения сме означили съответно с: $b_p = \dfrac{dBP}{BP}$ $y = \dfrac{dY}{Y}$,

$y^{(d)} = \dfrac{dY^{(d)}}{Y^{(d)}}$, $e = \dfrac{dE}{E}$, $p = \dfrac{dP}{P}$, $p = \dfrac{dP^*}{P^*}$, а $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ са еластичностите:

$$\alpha = \alpha_{BP(\frac{Y}{Y^{(d)}})} = \frac{\dfrac{dBP}{BP}}{\dfrac{d\dfrac{Y}{Y^{(d)}}}{\dfrac{Y}{Y^{(d)}}}}, \quad \beta = \beta_{BP(\frac{EP}{P^*})} = \frac{\dfrac{dBP}{BP}}{\dfrac{d\dfrac{EP}{P^*}}{\dfrac{EP}{P^*}}}, \quad \gamma = \gamma_{BP(i-i)} = \frac{\dfrac{dBP}{BP}}{i - i^*}.$$

Заместваме в (1) b_p от основното уравнение на валутния борд (15) в предишната глава и получаваме

$$\dot{m} = \alpha(y - y^d) - \beta(e + p - p^*) + \gamma(i - i^*) + \dot{e} \qquad (2)$$

Според равенства (10) и (11), глава 5 на третата част, ще имаме съответно:

$$y^d = \lambda g + \delta(m - p) \qquad (3)$$

където $y^d = \dfrac{dY^d}{Y^d}, g = \dfrac{dG}{G}, \lambda = \lambda_{AD(G)} = \dfrac{\frac{dAD}{AD}}{\frac{dG}{G}}, \delta = \delta_{AD(\frac{M}{P})} = \dfrac{\frac{dAD}{AD}}{\frac{d\frac{M}{P}}{\frac{M}{P}}}$

и

$$\dot{p} = \pi(y^d - y) \qquad (4)$$

(Скоростта $\dot{p}$ на относителното изменение $p = \dfrac{dP}{P}$ на нивото на цените, което всъщност е инфлацията или дефлацията е пропорционална на разминаването между относителното изменение $y^{(d)} = \dfrac{dY^{(d)}}{Y^{(d)}}$ на търсенето на местна продукция $Y^{(d)}$ и относителното изменение $y = \dfrac{dY}{Y}$ на предлагането на местна продукция *Y*, с положителен коефициент на пропорционалност $\pi > 0$)

Заместваме y^d от (3) в уравнения (2) и (4) и получаваме съответно:

$$\dot{m} = \alpha(y - \delta(m - p) - \lambda g) - \beta(e + p - p^*) + \gamma(i - i^*) + \dot{e} \qquad (5)$$

$$\dot{p} = \pi(\delta(m - p) + \lambda g - y) \qquad (6)$$

Чрез прости алгебрични преобразувания получаваме последователно:

$$\dot{m} = \alpha(y - \delta m + \delta p - \lambda g) - \beta e - \beta p + \beta p^* + \gamma(i - i^*) + \dot{e}$$

$$\dot{p} = \pi(\delta m - \delta p + \lambda g - y)$$

$$\dot{m} = \alpha y - \alpha\delta m + \alpha\delta p - \alpha\lambda g - \beta e - \beta p + \beta p^* + \gamma(i - i^*) + \dot{e}$$

$$\dot{p} = \pi\delta m - \pi\delta p + \pi\lambda g - \pi y$$

$$\dot{m} = -\alpha\delta m + (\alpha\delta - \beta)p + \alpha y - \alpha\lambda g - \beta e + \beta p^* + \gamma(i - i^*) + \dot{e} \qquad (7)$$

$$\dot{p} = \pi\delta m - \pi\delta p + \pi\lambda g - \pi y \qquad (8)$$

Уравнения (7) and (8) определят динамичната система задаваща изменението на паричното предлагане и нивото на цените в течение на времето. Тя може да бъде записана в матричен вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{m} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha\delta & \alpha\delta - \beta \\ \pi\delta & -\pi\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha y - \alpha\lambda g - \beta e + \beta p^* + \gamma(i - i^*) + \dot{e} \\ \pi\lambda g - \pi y \end{bmatrix} \tag{9}$$

Равновесно състояние на системата

Равновесните стойности $\overline{m}$ и $\overline{p}$ на m и p съответно определяме по формулите (12) и (13) в глава 4 на втората част, които придобиват вида:

$$\overline{m} = \frac{\det\begin{bmatrix} \alpha y - \alpha\lambda g - \beta e + \beta p^* + (i - i^* + \dot{e} & \alpha\delta - \beta \\ \pi\lambda g - \pi y & -\pi\delta \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} -\alpha\delta & \alpha\delta - \beta \\ \pi\delta & -\pi\delta \end{bmatrix}} = \tag{10}$$

$$= \frac{-\pi\delta(\alpha y - \alpha\lambda g - \beta e + \beta p^* + i - i^* + \dot{e}) - (\pi\lambda g - \pi y)(\alpha\delta - \beta)}{\alpha\pi\delta^2 - \pi\delta(\alpha\delta - \beta)} =$$

$$= \frac{-\alpha\pi\delta y + \alpha\pi\delta\lambda g + \beta\pi\delta e - \beta\pi\delta p^* - \pi\delta(i - i^*) - \pi\delta\dot{e} - \alpha\delta\pi\lambda g + \alpha\delta\pi y + \beta\pi\lambda g - \beta\pi y}{\alpha\pi\delta^2 - \alpha\pi\delta^2 + \beta\delta\pi} =$$

$$= \frac{\beta\pi\delta e - \beta\pi\delta p^* - \pi\delta(i - i^*) - \pi\delta\dot{e} + \beta\pi\lambda g - \beta\pi y}{\beta\delta\pi}$$

$$\overline{p}=\frac{\det\begin{bmatrix}-\alpha\delta & \alpha y-\alpha\lambda g-\beta e+\beta p^{*}+(i-i^{*}+\dot{e}) \\ \pi\delta & \pi\lambda g-\pi y\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}-\alpha\delta & \alpha\delta-\beta \\ \pi\delta & -\pi\delta\end{bmatrix}}= \tag{11}$$

$$=\frac{-\alpha\delta(\pi\lambda g-\pi y)-\pi\delta(\alpha y-\alpha\lambda g-\beta e+\beta p^{*}+i-i^{*}+\dot{e})}{\alpha\pi\delta^{2}-\pi\delta(\alpha\delta-\beta)}=$$

$$=\frac{\alpha\pi\delta y-\alpha\pi\delta\lambda g+\beta\pi\delta e-\beta\pi\delta p^{*}-\pi\delta(i-i^{*})-\pi\delta\dot{e}+\alpha\delta\pi\lambda g-\alpha\delta\pi y}{\alpha\pi\delta^{2}-\alpha\pi\delta^{2}+\beta\delta\pi}=$$

$$=\frac{\beta\pi\delta e-\beta\pi\delta p^{*}-\pi\delta(i-i^{*})-\pi\delta\dot{e}}{\beta\delta\pi}$$

Стабилност на равновесието.

Условията за стабилност на равновесието на една динамична система са дадени във втората част, глава 4, където подробно е анализирана равновесната статика и динамика на два взаимно свързани пазара.

Равновесното състояние на динамичната система с матрица A е:

I. ***Глобално стабилно***, тогава и само тогава когато: $traceA<0$, $\det A>0$

II. ***Глобално нестабилно***, тогава и само тогава когато: $traceA>0$, $\det A>0$

III. ***Център или фокус*** (фазовите траектории са концентрични, затворени криви, обикалящи в орбити около центъра, без да се доближават или отдалечават от него), тогава и само тогава, когато: $traceA=0$, $\det A>0$

IV. ***Седловинно,*** тогава и само тогава, когато: $\det A<0$

За динамичната система (9) с матрица $A=\begin{bmatrix}-\alpha\delta & \alpha\delta-\beta \\ \pi\delta & -\pi\delta\end{bmatrix}$ получаваме:

$$DetA=\alpha\pi\delta^{2}-\pi\delta(\alpha\delta-\beta)=\alpha\pi\delta^{2}-\alpha\pi\delta^{2}+\beta\pi\delta=\beta\pi\delta>0$$

$TraceA=-(\alpha+\pi)\delta<0$ понеже $\alpha>0,\beta>0,\pi>0,\delta>0$

При тези условия ***равновесието на системата е глобално стабилно***.

Стабилността на разглежданата динамична система отразяваща всъщност динамиката на пазара на благата и пазара на парите се дължи от икономическа гледна точка на факта, че тези два пазара се уравновесяват с неголяма разлика в скоростите на сходимост. Пазарът на парите клони към равновесие по-бързо от пазара на благата, но разликата не е голяма и пазарът на благата успява в краткосрочен план да компенсира изпреварването, поради което в дългосрочен план и двата пазара се стабилизират. (Виж Глава 4 Равновесна статика и динамика на два взаимно свързани пазара, част II)

Фазовата диаграма на системата в положение на устойчиво равновесие е показана графично на фигура 3. Демаркационните линии се получават за $\dot{m}=0$ и $\dot{p}=0$ съответно: В (7) полагаме $\dot{m}=0$ и след елементарни алгебрични преобразувания ще получаваме демаркационната права

$$\dot{m}=0: \qquad m=(1-\frac{\beta}{\alpha\delta})p+\frac{1}{\delta}y-\frac{\lambda}{\delta}g-\frac{\beta}{\alpha\delta}e+\frac{\beta}{\alpha\delta}p^{*}+\frac{\gamma}{\alpha\delta}(i-i^{*})+\frac{\dot{e}}{\alpha\delta} \qquad (12)$$

Полагайки $\dot{p}=0$ в (8) по аналогичен начин получаваме демаркационната права

$$\dot{p}=0: \qquad m=p+\frac{1}{\delta}y-\frac{\lambda}{\delta}g \qquad (13)$$

В координатната система *mOp* правата $\dot{p}=0$ има наклон равен на 1, което означава, че пресича оста *Op* под ъгъл 45^0, а кривата $\dot{m}=0$ има наклон $1-\frac{\beta}{\alpha\delta}$, който при положителни стойности на параметрите $\alpha>0,\beta>0,\delta>0$ е различен от единица, което означава правите не са успоредни, а се пресичат в точката $E=(p_E,m_E)$, която е равновесна за системата понеже в тази точка $\dot{m}=0$ и $\dot{p}=0$. За пресмятането на p_E приравняваме (12) и (13):

$$p+\frac{1}{\delta}y-\frac{\lambda}{\delta}g=(1-\frac{\beta}{\alpha\delta})p+\frac{1}{\delta}y-\frac{\lambda}{\delta}g-\frac{\beta}{\alpha\delta}e+\frac{\beta}{\alpha\delta}p^{*}+\frac{\gamma}{\alpha\delta}(i-i^{*})+\frac{\dot{e}}{\alpha\delta}$$

Преобразуваме и получаваме:

$$0=-\frac{\beta}{\alpha\delta}p-\frac{\beta}{\alpha\delta}e+\frac{\beta}{\alpha\delta}p^{*}+\frac{\gamma}{\alpha\delta}(i-i^{*})+\frac{\dot{e}}{\alpha\delta}$$

Следователно

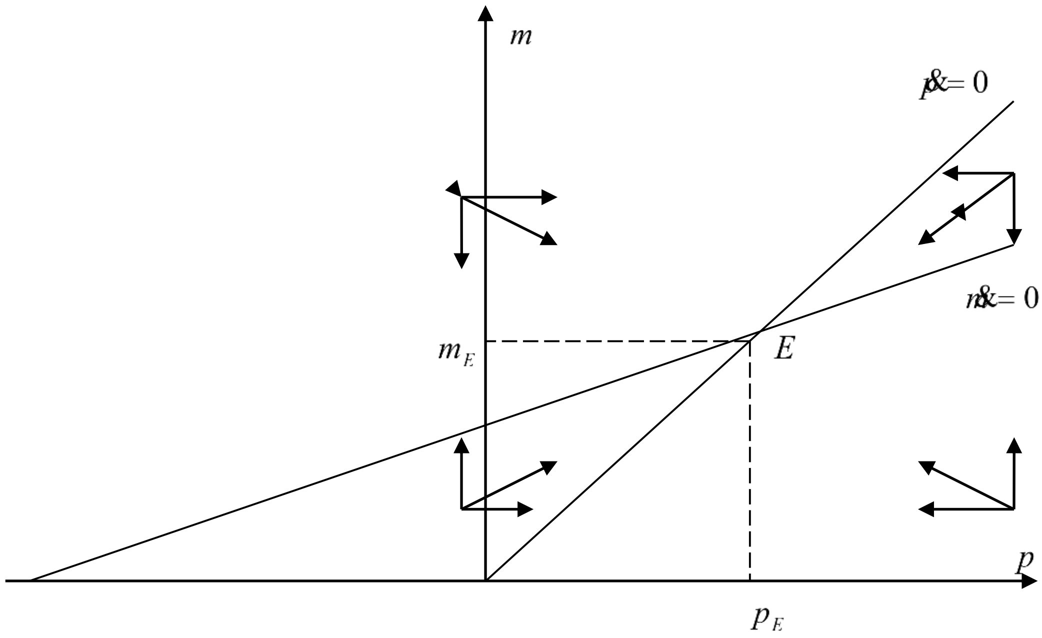
$$p_E=p^{*}-e+\frac{\gamma}{\beta}(i-i^{*})+\frac{\dot{e}}{\beta} \qquad (14)$$

От (13) получаваме

$$m_E=p_E+\frac{1}{\delta}y-\frac{\lambda}{\delta}g \qquad (15)$$

Следователно

$$m_E=p^{*}-e+\frac{\gamma}{\delta}(i-i^{*})+\frac{\dot{e}}{\beta}+\frac{1}{\delta}y-\frac{\lambda}{\delta}g \qquad (16)$$



Фигура 3. Глобана стабилност на равновесието на системата.

Въздействие в изменението на екзогенните променливи

Получения модел ще използуваме, за да проверим какво въздействие оказва изменението на определени екзогенни величини като лихвата, производството, държавните разходи, върху равновесието на ендогенните величини, каквито са парично предлагане и ниво на цените. Изменението на лихвата може да е свързано с нейната либерализация, увеличаването на предлаганата продукция може да е в резултат на либерализацията на производствения процес, като например приватизацията и свързаното с нея повишаване на ефективността на икономиката и накрая може да настъпи изменение и на държавните разходи.

Нарастване на лихвата.

Да предположим, че местната лихва i нараства от i_1 на i_2. Уравнение (13) показва, че кривата $\dot{p} = 0$ няма да се повлияе от това изменение понеже не зависи от i. От уравнение (12) обаче се вижда, че правата $\dot{m} = 0$ ще се премести нагоре, понеже ще нарасне отреза и, както е показано на фигура 4. Отрезите на правата (12) с ординатната ос се получават за съответните стойности на лихвата при $p = 0$:

$$m_1 = \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g + \frac{\beta}{\alpha\delta} e - \frac{\beta}{\alpha\delta} p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i_1 - i^*) \qquad (17)$$

и

$$m_2 = \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g + \frac{\beta}{\alpha\delta} e - \frac{\beta}{\alpha\delta} p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i_2 - i^*) \qquad (18)$$

На основание на $\alpha > 0, \gamma > 0, \delta > 0$:

$$m_1 < m_2 \qquad (19)$$

Точката $E^{(1)} = (p_E^{(1)}, m_E^{(1)})$ на първоначалното равновесно ниво на цените и на паричното предлагане съответстващо на лихвата i_1 получаваме от (14),(15) и (16):

$$p_E^{(1)} = p^* - e + \frac{\gamma}{\beta}(i_1 - i^*) + \frac{\&}{\beta} \qquad (20)$$

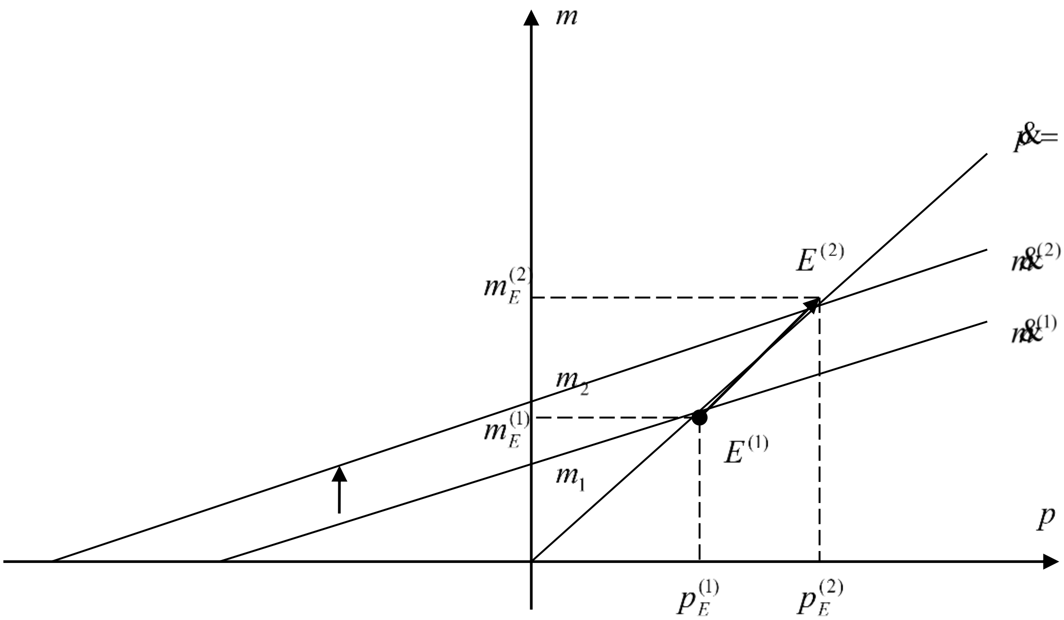
$$m_E^{(1)} = p_E^{(1)} + \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g \qquad (21)$$

Точката $E^{(2)} = (p_E^{(2)}, m_E^{(2)})$ на крайното равновесно ниво цените и на паричното предлагане, съответстващо на лихвата i_2 определяме по аналогичен начин. Получаваме

$$p_E^{(2)} = p^* - e + \frac{\gamma}{\beta}(i_2 - i^*) + \frac{\&}{\beta} \qquad (22)$$

и съответно,

$$m_E^{(2)} = p_E^{(2)} + \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g \qquad (23)$$



Фигура 4. Нарастване на лихвата.

Нарастването на лихвата i от i_1 на i_2 води до нарастване $\Delta m = m_E^{(2)} - m_E^{(1)}$ на паричното предлагане и до нарастване $\Delta p = p_E^{(2)} - p_E^{(1)} = \frac{\gamma}{\beta}(i_2 - i_1)$ на нивото на цените. Следователно, ние можем да запишем следното равенство:

$$\Delta m = \Delta p = \frac{\gamma}{\beta}(i_2 - i_1) \tag{24}$$

Тъй като $\beta > 0, \gamma > 0$, $i_1 < i_2$, то $\Delta m = \Delta p = \frac{\gamma}{\beta}(i_2 - i_1) > 0$, което означава, че в резултат на преминаването от първото равновесие към второто, нараства, както паричното предлагане така и нивото на цените, като това нарастване е пропорционално на нарастването на лихвата. Нарастването на лихвата от i_1 на i_2 е шок, който извежда системата от равновесното състояние $E^{(1)}$, което в модела означава, че демаркационната права $\dot{m} = 0$ се премества нагоре в положение, където търсенето на пари ще бъде по-малко на всяко от ценовите равнища. Намаленото търсене на пари ще означава излишък на предлагането на пари, което от своя страна ще доведе до покачване на нивото на цените. Покачването на нивото на цените ще доведе до намаляване на търсенето на местна продукция, което ще означава превес на предлагането на местна продукция. Увеличеното предлагане на местна продукция води на подобряване на платежния баланс, следователно и до нарастване на паричното предлагане. Макар, че паричното предлагане ще бъде частично намалено под въздействието на покаченото ниво на цените, в крайна сметка в новото равновесно състояние $E^{(2)}$ ще имаме покачване както на нивото на цените, така и на нивото на паричното предлагане. Последното равенство (24) показва, че това нарастване е пропорционално на нарастването на лихвата. Следва да отбележим обаче, че от нарастването на нивото на цените в този случай не следва постоянно нарастване на инфлацията.

Нарастване на продукцията.

Да предположим, че продукцията y нараства екзогенно от y_1 на y_2 под въздействието на външни за динамичната система фактори, например в резултат на подобряването на факторите за производство. Уравненията (12) и (13) на демаркационните прави съдържат в отреза си продукцията y, което означава, че и двете прави трябва да се преместват нагоре (Фигура 5). Демаркационната права $\dot{m} = 0$ се премества от положение

$$\dot{m}^{(1)} = 0: \qquad m = (1 - \frac{\beta}{\alpha\delta})p + \frac{1}{\delta} y_1 - \frac{\lambda}{\delta} g - \frac{\beta}{\alpha\delta} e + \frac{\beta}{\alpha\delta} p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i - i^*) \qquad (25)$$

в положение

$$\dot{m}^{(2)} = 0: \qquad m = (1 - \frac{\beta}{\alpha\delta})p + \frac{1}{\delta} y_2 - \frac{\lambda}{\delta} g - \frac{\beta}{\alpha\delta} e + \frac{\beta}{\alpha\delta} p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i - i^*) \qquad (26)$$

Тъй като $\delta > 0$, за пресечените точки на тези прави с ординатната ос *m*, които са всъщност отрезите на тези прави, ще имаме

$$m_1 = (1 + \frac{\beta}{\alpha\delta})p + \frac{1}{\delta} y_1 - \frac{\lambda}{\delta} g + \frac{\beta}{\alpha\delta} e - \frac{\beta}{\alpha\delta} p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i - i^*) <$$

$$< (1 + \frac{\beta}{\alpha\delta})p + \frac{1}{\delta} y_2 - \frac{\lambda}{\delta} g + \frac{\beta}{\alpha\delta} e - \frac{\beta}{\alpha\delta} p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i - i^*) = m_2 \qquad (27)$$

Нарастването на отреза на демаркационната права $\dot{m} = 0$ означава, че тя се премества нагоре по ординатната ос *m*. Преместването е успоредно понеже очевидно се запазва наклона на правата.

Демаркационната права $\dot{p} = 0$ се премества по подобен начин от положение

$$\dot{p}^{(1)} = 0: \qquad m = p + \frac{1}{\delta} y_1 - \frac{\lambda}{\delta} g \qquad (28)$$

в положение

$$\dot{p}^{(2)} = 0: \qquad m = p + \frac{1}{\delta} y_2 - \frac{\lambda}{\delta} g \qquad (29)$$

Понеже $\delta > 0$, то ще е в сила:

$$m_1' = \frac{1}{\delta} y_1 - \frac{\lambda}{\delta} g < \frac{1}{\delta} y_2 - \frac{\lambda}{\delta} g = m_2' \qquad (30)$$

Последното неравенство показва, че отрезът на демаркационната права $\dot{p} = 0$ също нараства, което означава, че тя се премества по подобен начин успоредно нагоре по ординатната ос *m*.

Точката $E^{(1)} = (p_E^{(1)}, m_E^{(1)})$ на първоначалното равновесно ниво на цените и на паричното предлагане съответстващо на продукцията y_1 е пресечената точка на правите с уравнения (25) и (28).

Точката $E^{(2)} = (p_E^{(2)}, m_E^{(2)})$ на крайното равновесно ниво на цените и на паричното предлагане съответстващо на продукцията y_2 е пресечената точка на правите с уравнения (26) и (29). За пресмятане на стойностите на компонентите на тези точки процедираме по подобен начин.От

$$p+\frac{1}{\delta}y_1-\frac{\lambda}{\delta}g=(1+\frac{\beta}{\alpha\delta})p+\frac{1}{\delta}y_1-\frac{\lambda}{\delta}g+\frac{\beta}{\alpha\delta}e-\frac{\beta}{\alpha\delta}p^*+\frac{\gamma}{\alpha\delta}(i-i^*)$$

следва

$$p_E^{(1)}=p^*-e-\frac{\gamma}{\beta}(i-i^*) \tag{31}$$

и

$$m_E^{(1)}=p_E^{(1)}+\frac{1}{\delta}y_1-\frac{\lambda}{\delta}g \tag{32}$$

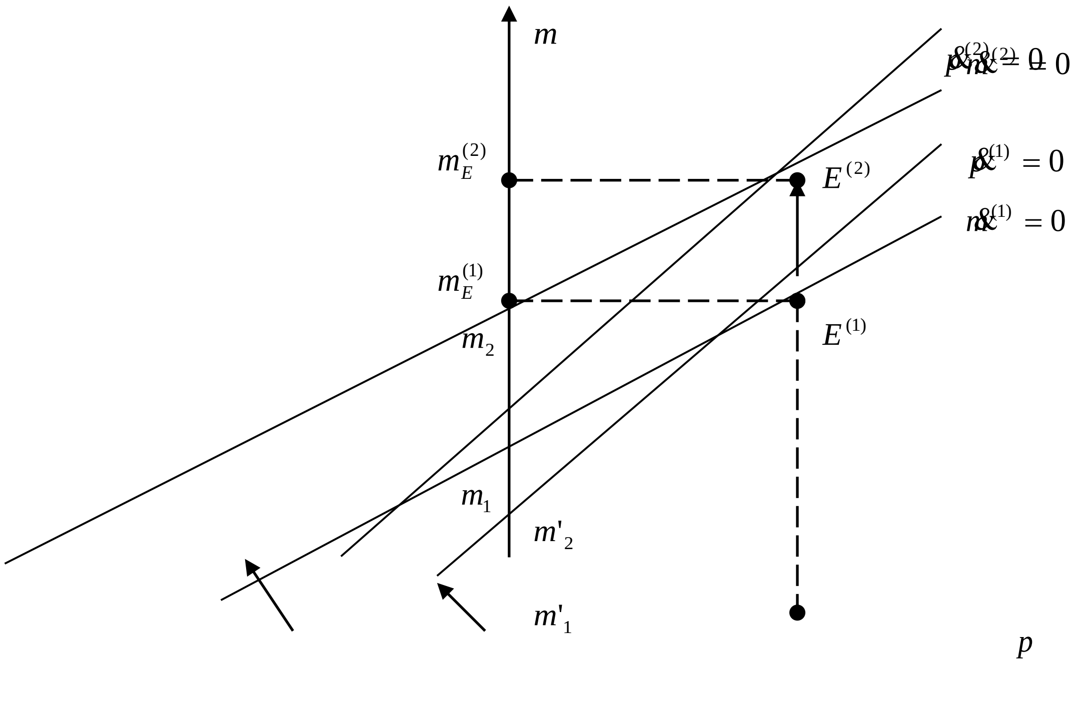
От $p+\frac{1}{\delta}y_2-\frac{\lambda}{\delta}g=(1+\frac{\beta}{\alpha\delta})p+\frac{1}{\delta}y_2-\frac{\lambda}{\delta}g+\frac{\beta}{\alpha\delta}e-\frac{\beta}{\alpha\delta}p^*+\frac{\gamma}{\alpha\delta}(i-i^*)$

получиме

$$p_E^{(2)}=p^*-e-\frac{\gamma}{\beta}(i-i^*) \tag{33}$$

и

$$m_E^{(2)}=p_E^{(2)}+\frac{1}{\delta}y_2-\frac{\lambda}{\delta}g \tag{34}$$



Фигура 5. Екзогенно нарастване на продукцията или намаляване на държавните разходи.

Следователно, нарастването на продукцията y от y_1 на y_2 ще доведе до нарастването $\Delta m = m_E^{(2)} - m_E^{(1)}$ на паричното предлагане и до нарастването $\Delta p = p_E^{(2)} - p_E^{(1)}$ нивото на цените. С прости пресмятания получаваме

$$\Delta p = p_E^{(2)} - p_E^{(1)} = 0 \qquad (35)$$

и

$$\Delta m = m_E^{(2)} - m_E^{(1)} = \frac{y_2 - y_1}{\delta} \qquad (36)$$

Последните равенствата показват, че нарастването на продукцията води до неинфлационно нарастване на паричното предлагане. Непосредственият резултат от нарастването на продукцията е подобряване на платежния баланс, което от своя страна ще доведе до нарастване паричното предлагане. Нарастването на инфлацията може да бъде само в краткосрочен план, до приспособяването на паричния пазар. В новото равновесно състояние инфлацията е нула, понеже в процеса на приспособяването разширяването на паричното предлагане изпреварва (надхвърля) нарастването на нивото на цените.

Намаляване на държавните разходи.

Да предположим, че държавните разходи намаляват например от g_1 на g_2 като $g_1 > g_2$. Тъй като и двете уравнения (12) и (13) на демаркационните прави зависят от g, то те ще се преместят нагоре както това стана в случая когато нарасна продукцията. За да онагледим измененията които стават в модела ние отново ще използуваме графиката на фигура 5. Демаркационната права $\dot{m} = 0$ ще се премести от положение

$$\dot{m}^{(1)} = 0: \qquad m = (1 + \frac{\beta}{\alpha\delta})p + \frac{1}{\delta}y - \frac{\lambda}{\delta}g_1 + \frac{\beta}{\alpha\delta}e - \frac{\beta}{\alpha\delta}p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i - i^*) \quad (37)$$

в положение

$$\dot{m}^{(2)} = 0 \qquad m = (1 + \frac{\beta}{\alpha\delta})p + \frac{1}{\delta}y - \frac{\lambda}{\delta}g_2 + \frac{\beta}{\alpha\delta}e - \frac{\beta}{\alpha\delta}p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i - i^*) \quad (38)$$

За пресечените точки на тези прави с ординатната ос ще получим

$$m_1 = \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_1 + \frac{\beta}{\alpha\delta} e - \frac{\beta}{\alpha\delta} p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i - i^*) <$$

$$(1 + \frac{\beta}{\alpha\delta}) p + \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_2 + \frac{\beta}{\alpha\delta} e - \frac{\beta}{\alpha\delta} p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i - i^*) = m_2 \qquad (39)$$

Правата $\dot{p} = 0$ се премества по подобен начин от положение

$$\dot{p}^{(1)} = 0: \qquad m = p + \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_1 \qquad (40)$$

в положение

$$\dot{p}^{(2)} = 0 \qquad m = p + \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_2 \qquad (41)$$

откъдето получаваме и

$$m_1' = \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_1 < \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_2 = m_2' \qquad (42)$$

Точката $E^{(1)} = (p_E^{(1)}, m_E^{(1)})$ на първоначалното равновесно ниво на цените и на паричното предлагане съответстващо на държавните разходи g_1 е пресечената точка на демаркационните прави с уравнения (37) и (40). Точката $E^{(2)} = (p_E^{(2)}, m_E^{(2)})$ на крайното равновесно ниво на цените и на паричното предлагане съответстващо на държавните разходи g_2 е пресечената точка на демаркационните прави с уравнения (38) и (41). За пресмятане на стойностите на компонентите на тези точки процедираме по подобен начин. От $p + \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_1 = (1 + \frac{\beta}{\alpha\delta}) p + \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_1 + \frac{\beta}{\alpha\delta} e - \frac{\beta}{\alpha\delta} p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i - i^*)$

следва

$$p_E^{(1)} = p^* - e - \frac{\gamma}{\beta}(i - i^*) \qquad (43)$$

а като вземем под внимение (40) получаваме

$$m_E^{(1)} = p_E^{(1)} + \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_1 \qquad (44)$$

От $p + \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_2 = (1 + \frac{\beta}{\alpha\delta}) p + \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_2 + \frac{\beta}{\alpha\delta} e - \frac{\beta}{\alpha\delta} p^* + \frac{\gamma}{\alpha\delta}(i - i^*)$, следва

$$p_E^{(2)} = p^* - e - \frac{\gamma}{\beta}(i - i^*) \qquad (45)$$

и като използваме (41) ще получим

$$m_E^{(2)} = p_E^{(2)} + \frac{1}{\delta} y - \frac{\lambda}{\delta} g_2 \qquad (46)$$

Намаляването на държавните разходи g от g_1 на g_2 води до нарастването $\Delta m = m_E^{(2)} - m_E^{(1)}$ на паричното предлагане и до нарастването $\Delta p = p_E^{(2)} - p_E^{(1)}$ на нивото на цените. С прости пресмятания получаваме

$$\Delta p = p_E^{(2)} - p_E^{(1)} = 0 \text{ и } \Delta m = m_E^{(2)} - m_E^{(1)} = \frac{\lambda}{\delta}(g_1 - g_2) > 0 \qquad (47)$$

Последните две съотношения показват, че намаляването на държавните разходи води до неинфлационно нарастване на паричното предлагане. Формално погледнато в третия случай получаваме същия резултат както и във втория. Процесите които протичат в третия случай обаче са различни от тези във втория. Намаляването на държавните разходи ще доведе до намаляване на търсенето на местна продукция. Намаляването на търсенето на местна продукция ще доведе до намаляването на търсенето на пари, което ще означава превес (увеличаване) на предлагането на пари. Увеличаването на предлагането на пари предизвиква покачването на нивото цените, но това покачване на нивото на цените отново ще бъде изпреварено от процеса на нарастването на паричното предлагане в резултат на излишък в текущата сметка, който се получава от намалените държавни разходи.

В разгледаните три случая се изясняват съществени моменти в механизмите на приспособяване в условията на валутен борд, където цените на пазара на благата се променят сравнително бавно, за да го балансират. Проявява се ефекта на надхвърлянето, изпреварването при който паричните пазари по-бързо се адаптират към цените отколкото пазарите на благата.

Изводи

Първо увеличаването на продукцията и намаляването на държавните разходи води до неинфлационно увеличаване на паричното предлагане.

Второ, покачването на лихвата води до разширяването на паричното предлагане и до нарастването на инфлацията. Нарастването на инфлацията в този случай не води до инфлационна спирала.

Трето, изменението на цените на пазара на благата става по-бавно от цените на финансовите пазари поради което се проявява ефекта на изпреварването или надхвърлянето, който в разгледаните случаи компенсира инфлацията.

Заключение

В икономиката има три основни ограничения:

- ограничено количество блага

- ограничено количество ресурси

- ограничения налагани от правилата и институциите на обществото.

За преодоляването на тези ограничения се правят разходи. Разходите, необходими за производството на блага и набавянето на ресурси се наричат производствени или трансформационни разходи. Разходите, необходими за изграждането и функционирането на институциите и спазването на правилата на обществото са транзакционни разходи. Тъй като основен стремеж в икономиката е минимизирането на разходите и максимизирането на приходите от блага и ресурси, естествено е да се опитваме да намалим доколкото това е възможно и транзакционните разходи.

Транзакционни разходи се отчитат за функционирането стопанската система като цяло или за отделни нейни компоненти. Тези разходи нарастват с усложняването на системата в резултат например от развитието и, поради нарастването на обема на транзакционните дейности на системата. Те могат да нарастват в още по-голяма степен в период на преход, когато се сменят формалните правила на стопанската система и още не са се наложили неформалните норми на поведение, което предизвиква спад на доверието в обществото и води до необходимостта от нови транзакционни разходи.

Резултатите от измерването на общо стопанските транзакционни разходи в България, напълно потвърждават първоначалното очакване, че транзакционният сектор в стопанството на страната нараства при прехода към пазарна икономика. Подобно развитие може да се дължи на две причини: първо, пазарната размяна се интензифицира с преминаването към новата социално-икономическа система; второ, в посткомунистическите общества дълго след началото на реформите се наблюдава разминаване между новите формални институции и наследените неформални норми на поведение, което води до нуждата от повече ресурси за гарантиране на имуществените права и реализиране на транзакциите. Най-общото заключение, което може да се направи въз основа на получените резултати е, че ***нарастването на транзакционния сектор в България се дължи като цяло на обществено-икономическите реформи от централно управлявано към пазарно стопанство, представляващи ускорена институционална промяна***. Същевременно, изследването на транзакционния сектор в българската икономика, използващо метода на

Уолис и Норт, не може да даде яснота по редица от споменатите ключови аспекти на развитието на стойностите на транзакционните разходи в страната. Така например, то не може да даде отговор на въпроса ***доколко нарастването на нивото на съвкупните транзакционни разходи може да се разглежда като пречка пред икономическия растеж, нито дали то се дължи в по-голяма степен на желаното налагане на пазарни отношения или напротив, на негативните последствия от разминаването между формалната и неформална институционална рамка в годините на прехода***. Посочените затруднения налагат необходимостта от бъдещи изследвания в областта на измерването на транзакционните разходи, включително приложението на подобрени методики за тяхното отчитане на микроравнище. Предложеният от Чобанов, Егберт, Седларски (2007) подход е първа стъпка в тази посока.

Анализът на равновесната статика и динамика на стопанската система в ***условията на валутен борд показва***, че е приложима ***политика на предлагането за постигане на икономически растеж***, основана на факторите на растежа, без повишаване на инфлацията. Особено внимание е отделено на ***институционалния фактор на растежа***, без да бъдат пренебрегвани или подценявани другите фактори за икономически растеж. В условията на валутен борд не е възможно да се провежда икономическа политика на търсенето, поради автоматизма в определяне на паричната база. Това е цената, която се плаща, за да се постигне състояние на поне временна, но изключително важна в един период на преход, относителна стабилност на финансовата и на цялата национална стопанска система, за да не се загуби контрола и възможностите за въздействие чрез други механизми на икономическата политика. В икономиката няма безплатен обяд, за всичко се плаща, както в природата, в света в който живеем нищо не може да се получи да се компенсира с нещо друго.

Валутният борд е временно решение. Той осигурява стабилност в краткосрочен план, а в средносрочен и дългосрочен план не е приложим, понеже с течение на времето се натрупват изменения в икономическите параметри, които изискват дискреционна намеса. За България, валутния борд означава натрупване на безценен опит за провеждането на икономическа политика в условията на валутен съюз, в който страната се готви да влезе чрез въвеждането на еврото. Този опит трябва да бъде осмислен и използван, понеже членството в Европейския валутен съюз не дава възможност за провеждане на дискреционна парична политика от националните банки на страните членки. Проблема с определянето на паричното предлагане остава актуален, а може би ще бъде вечно открит.

Литература.

1. Араманович, И. Г., В. И. Левин. Уравнения математической физики. Издательство «Наука», Москва, 1969.
2. Арнольд, В.И.. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. Наука, Москва, 1984.
3. Желязков, Иван. Трептения и вълни. Университетско издателство «Св. Климент Охридски», София, 2000.
4. Плачкова, Стефка; Марийка Мишева. Физика с примери от биологията. Университетско издателство «Св. Климент Охридски», София, 2004.
5. Понтрягин, Лев С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Издательство „Наука", Москва, 1965.
6. Рангелова, Росица. Критика на концепцията и измерителя за общата факторна производителност. Икономическа мисъл, 3, 2008, стр. 30 – 49.
7. Рангелова, Росица. Конвергенцията в неокласическия модел на икономическия растеж. Икономическа мисъл, 6, 2008, стр. 48 – 66.
8. Рангелова, Росица. Променящи се детерминанти на икономическия растеж – теоритични основи и особености на емпириката. Икономически изследвания, година XVIII, 2009, 2, стр. 3 – 32.
9. Ханке, Стив; Курт Шулер. Валутният борд. Начало или край. ИК Барт, 1996.
10. Чобанов, Г., Х. Егберт, А. Гюреджеклиева. Предложения за измерване на транзакционния сектор от официалната статистика. Статистика (НСИ), брой 2, 2006, стр. 49-62.
11. Чобанов, Г., Х. Егберт, Т. Седларски. Методи за статистическо извличане на данни за транзакционните операции на микро-ниво. Статистика (НСИ), брой 1, 2007, стр. 5-14.
12. Aoki, Masahiko; Kevin Murdock; Masahiro Okuno-Fujiwara. Beyond the East Asian Miracle: Introducing the Market-enhancing View. In: M. Aoki, K. Murdock, M. Okuno-Fujiwara (eds.) The Role of Government in East Asian Economic Development. Comparative Institutional Analysis. Oxford, Clarendon Press, 1997, pp. 1-37.
13. Akrigay, A. and G.G. Booth. The stable model of stock returns. J. Bus. Econ. Stat. 6, 51-57, 1988.

14. Arrow, Kenneth J. The Organization of Economic Activity: Issues Pertinent to the Choice of Market Versus Nonmarket Allocation. In: The Analysis and Evaluation of Public Expenditures: The PBB-System, Joint Economic Commettee, 91 st Congress, 1st Session, Volume 1, 1969, Washington.
15. Bachelier, L. Theorie de la speculation. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure 3d ser. 17, 21 – 88, 1900. Translation in: The Random Character of Stock Market Prices, ed. Paul Coonter, pp. 17 - 79. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1964.
16. Bain, A. D. Flow of Funds Analysis: A Survey. The Economics Journal, vol. 83, 1973, pp. 1055-1093, London.
17. Barro, Robert. Inflation and Economic Growth. Bank of England Quarterley Bulletin, Vol. 35, May 1995, pp. 166-176.
18. Barro, Robert and Xavier Sala I Martin. Economic Growth. McGraw-Hill, Inc., New York, 1995.
19. Beck, Thorsten and Laeven, Luc. Institution Building and Growth in Transition Economies. Policy Research Working Paper 3657, The World Bank Development Research Group Finance Team, July 2005.
20. Berg, J., J. Dickhaut, and K. McCabe. Trust, reciprocity, and social history. *Games and Economic Behaviour* 10(1), 1995, 122-142.
21. Bjørnskov, C. Determinants of generalized trust: A cross-country comparison. *Public Choice* 130(1), 2006, 1-21.
22. Blum, Ulrich/Leonard Dudley/Frank Leibbrand/ Andreas Weiske: Angewandte Institutionenökonomik. Theorien-Modelle-Evidenz. Wiesbaden 2005.
23. Bofinger, Peter; Julian Reischle und Andrea Schachter. The money supply process: A model for a large economy. In Schriften des Vereins fuer Sozialpolitik, Band 264, Duncker&Humboldt, Berlin, 1999, pp. 29-54.
24. Bofinger, Peter; Julian Reischle und Andrea Schachter. Geldpolitik. Ziele, Institutionen, Strategien und Instrumente. Verlag Franz Vahlen, Muenchen, 1996, ISBN 3 8006 20 17 0.
25. Bollerslev, T., R. Y. Chow and K. F. Kroner. ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. Journal of Econometrics 52, pp. 5-59, 1992.
26. Bordo, Michael D.; Anna J. Schwartz. Monetary Policy Regimes and Economic Performance: The Historical Record. In Handbook of Macroeconomics, vol. 1A (Eds. J.B.Taylor, M. Woodford), pp. 149-234, North Holland Elsevier, Amsterdam, 1999.

27. Braun, Martin. Differential Equations and Their Applications. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978.
28. Bradford Cornell, W. and J. Kimball Dietrich. The effiency of the market for foreign exchange under floating exchange rates. The Review of Economics and Statistics, Oct. 1976. 1ll — 120.
29. Brown, R. A brief account of microscopical observation made in the months of June, July, August, 1827 on the particles contained in the pollen of plants: and; on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. Phylos. Mag. Ann. of Phylos. New ser., V. 4, p.161- 178. 1828.
30. Bruner, Karl; Alan Metzler. Money Supply. In Handbook of Monetary Economics (Eds. B.M. Friedman, F.H. Hahn) vol. 1, pp. 357-398, North Holland, Amsterdam, 1990.
31. Bruno, Michael and Easterly, William. Inflation, Crises and Long-run Growth. National Bureau of Economic Research Working Paper Series No. 5209, August 1995.
32. Bulgarian National Bank Law. State Newspaper Nr. 46, June 10, 1997. (Bulgarian).
33. Commercial Banks Law. State Newspaper Nr. 52, July 1, 1997. (in Bulgarian).
34. Copeland, M. A. Some Illustrative Analytical Uses of Flow of Funds Data. In: National Bureau of Economic Research, Studies of Income and Wealth, vol. 26, The Flow of Funds Approach to Social Accounting, Princeton University Press, 1962.
35. Chobanov, G. S. Modeling of Financial Asset Returns by Shot Noise Processes. Mathematical and Computer Modelling 29, 1999, p. 17-21.
36. Chobanov, G. The Dynamic Equilibrium Stability of Two Markets. In Sofia Conferences on Social and Economic Development in Europe.
37. George Chobanov, Juergen Ploehn, Horst Schellhaass (eds.), volume 1 “Towards a Knowledge-Based Society in Europe”, 2009, Peter Lang Verlag, Frankfurt am Main, pp. 171-186.
38. Chobanov, G. Walras Law and Flow of Funds Analysis in an Open Economic System. In: George Chobanov, Juergen Ploehn, Horst Schellhaas (eds.) Sofia Conferences on Social and Economic Development in Europe, volume 2, 2009, pp. 25-37, Peter Lang Verlag, Frankfurt am Main.
39. Chobanov, G. The Process of Approaching Market Equilibrium. In: George Chobanov, Juergen Ploehn, Horst Schellhaas (eds.) Sofia Conferences on Social and Economic Development in Europe, volume 3, 2010, Peter Lang Verlag, Frankfurt am Main (in print).

40. Chobanov, G., Henrik Egbert. The Rise of the Transaction Sector in the Bulgarian Economy. Comparative Economic Studies, 2007, 49, pp. 683-698.
41. Chobanov, G. Eric Pentecost. Price and Output Dynamics under Currency Board. The Case of Bulgaria. In: Christos Papazoglou and Eric Pentecost (Eds.) Exchange Rate Policies, Prices and Supply-Side Response. A Study of Transitional Economies. Palgrave, 2001, pp. 91-103.
42. Coase, Ronald H. The Nature of the Firm. Economica N. S., 1937, pp. 386-405.
43. Coase, Ronald H. The Problem of Social Cost. Journal of Law and Economics, 3 (15), 1960, pp. 1-44.
44. Cooper, John C.. World stock markets: some random walk tests. Applied Economics. 1982. 14, 515-532.
45. Christ, Carl F. A model of Monetary and Fiscal Policy Effects on the Money Stock, Price Level and Real Output. Journal of Money, Credit and Banking, vol. 1, Columbus, Ohio, 1969, pp. 683-705.
46. Dicky, David A. and Wayne A. Fuller. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root. Journal of the American Statistical Association, June 1979, vol. 74. Nr 366, p.42~ — 431.
47. Dollery B. E. and W. H.Leong Measuring the transaction sector in the Australian economy 1911-1991. Australian Economic History Review 38, , 3, 1998, pp. 207-231
48. Dornbusch, Rudiger. Open Economy Macroeconomics. Harper International Edition, 1980.
49. Dornbush, Rudiger. Expectations and Exchange Rate Dynamics. Journal of Political Economy, vol. 84, no. 6, December 1976.
50. Eagle, R. F. Autoregresive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the U.K. inflation. Econometrica 50, pp. 987-1008, 1982.
51. Eucken, Walter. Grundsaetze der Wirtschaftspolitik. Tuebingen, Mohr Verlag, 1952 (1990 Sechste Auflage).
52. Evans, Peter B. Embedded Autonomy. States and Industrial Transformation. Princeton, Princeton University Press, 1995.
53. Fair, Ray C. and Dwight M. Jaffe. Methods of Estimation for Market Disequilibrium. Econometrica, vol. 40, New Haven, Conn., 1972, pp. 497-514.
54. Fairly, A. M. And K.-P. Lin. Qualitative Reasoning in Economics, 1990.
55. Fama, E.F. The Behavior of Stock Market Prices. Journal of Business, 1965, 38, pp. 34- 104.

56. Fehr, E. and A. Falk. Wage rigidity in a competitive incomplete contract market. *Journal of Political Economy,* 107(1), 1999, 106-134.
57. Felderer, Bernhard and Stefan Homburg. Makrooekonomik und neue Makrooekonomik. Springer Verlag, Berlin, 1999.
58. Fischer, Stanley. Applied Economics in Action: IMF Programs. The American Economic Review, vol. 87, No 2, Papers and Proceedings of the Hundred and Fourth Annual Meeting of the American Economic Association (May, 1997), pp. 23-27.
59. Fischer, Stanley. Rules Versus Discretion in Monetary Policy. In: Handbook of Monetary Economics. Volume II Edited by B. M. Friedman and F.H. Hahn, Elsevier Science Publisher, 1990, pp. 1155-1184.
60. Fischer, Stanley. The Role of Macroeconomic Factors in Growth. Journal of Monetary Economics, 32, 1993, pp. 485-512.
61. Fischer, Stanley. Maintaining Price Stability. Finance and Development, December 1996, pp. 34-37.
62. Fleming, Marcus J.. Domestic Financial Policies under Fixed and Flexible Exchange Rate. IMF Staff Papers, 9, November 1962, p. 369-79.
63. Friedman, Milton. Essays in Positive Economics. The University of Chicago Press, Chicago, 1953.
64. Frisch, Ragnar. On the Notion of Equilibrium and Disequilibrium. Review of Economic Studies, III, 1936, pp. 100-105.
65. Ghertman, M. Measuring Macro-Economic Transaction Costs: A Comparative Perspective and Possilbe Policy Implications”. Paper presented at the 2nd annual conference of the International Society for New Institutional Economics, Paris, 1998.
66. Giancarlo Gandolfo. Economic Dynamics. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
67. Granger, C. W. J. and Morgenstern 0. Predictibility of Stock Market Prices. Heath Lexington, Massachusetts. 1970.
68. Grindle, Merilee S. Challenging the State. Crisis and Innovation in Latin America and Africa. Cambridge, Cambridge University Press, 1996.
69. Heijdra, Ben J.; Frederick van der Ploeg. The Foundations of Modern Macroeconomics. Oxford University Press, 2002.
70. Hicks, J R. Value and Capital, 1939.[ ] Hobson, E.W. The Theory of Functions of Real Variable and the Theory of Fourier’s Series. Vol. I, II, Dower Publications, New York, 1957).

71. Hobson, E.W. The Theory of Functions of Real Variable and the Theory of Fourier's Series. Vol. I, II, Dower Publications, New York, 1957).
72. Hoff, Carla and Stiglitz, Joseph E. After the Big Bang? Obstacles to the Emergence of the Rule of Law in Post-Communist Societies. Policy Research Working Paper 2934, The World Bank Development Research Group Investment Climate Team, December 2002.
73. Hopf, L. Introduction to Differential Equations of Physics. Dover Publications, New York, 1948.
74. Johnson, S., D. Kaufmann, and A. Shleifer. The unofficial economy in transition. *Brookings Papers on Economic Activity*, 1997(2), 159-239.
75. Johnson, Harry G. The Monetary Approach to Balance-of-Payments Theory. In: Johnson, H. G. (Ed.) Further Essays in Monetary Economics, London, 1972, p. 229-249.
76. Kendall, M. G. The Analysis of Economic Time Series. Journal of the Royal Statistical Society, 116A. 145-173, 1953.
77. Keynes, John Maynard. The General Theory of Employment, Interest and Money. Harcourt Brace Jovanovtch, New York, 1964 (1936).
78. Kragh, Boerje et al. Financial Programming. OECD Publications No 27, 143, Paris, 1970.
79. Koford, K. Experiments on Trust and Bargaining in Bulgaria: The Effects of Institutions and Culture (Paper prepared for presentation at the 7th Annual Conference of the International Society for New Institutional Economics, 2003). (http://www.umbc.edu/economics/seminar_papers/koford_paper.pdf, 01/10/2007)
80. Kornai, Janos. Anti-Equilibrium. In: On Economic Systems Theory and the Task of Research, Amsterdam, London, 1971.
81. Lange, Oskar. Say's Law: Restatement and Criticism. In: O. Lange et al (Eds.) Studies in Mathematical Economics, Chicago, Chicago University Press, 1942.
82. Löchel, H. *Institutionen, Transaktionskosten und wirtschaftliche Entwicklung.* Berlin: Duncker and Humblot, 1995.
83. Mandelbrot, B. B. The variation of certain speculative prices. Journal of Business 26, 394-419, 1963.
84. Marshall, Alfred. The Pure Theory of Domestic Value, 1879.
85. Marshall, Alfred. Principles of Economics. 8th edition, London, Macmillan (1st edition 1890), 1920.

86. Mayer, U. Neue Makrooekonomik. Springer, Berlin, 1983.
87. Mittnik, S. and S. T. Rachev. Modeling asset returns withalternative stable distributions, Economic Reviews, 1993.
88. Mundell, Robert A.. Capital mobility and stabilization policy under fixed and flexible exchange rates. Canadian Journal for Economics and Political Science, 29, November 1963, p. 475-85.
89. Mundell, Robert A.. A reply: Capital mobility and size. Canadian Journal for Economics and Political Science, 30, August 1964, p.421-31.
90. North, Douglass C. Institutions, Institutional Change, and Economic Performance. Cambridge University Press, New York, 1990.
91. North, Douglass C. Towards a theory of institutional change. In: Quarterly Review of Economics and Business 31, 1991, pp. 3-11.
92. North, Douglass C. Economic Performance Through Time. American Economic Review., vol. 84, No 3, 1994, pp. 359-368.
93. North, Douglass C. Some Fundamental Puzzles in Economic History/Development. Washington University, St. Louis: Mimeo, 1995.
94. North, D. C. / R. P. Thomas (1973): The Rise of the Western World. A New Economic History. Cambridge: Cambridge University Press.
95. North, D. C. / R. P. Thomas (1971), "The Rise and Fall of the Manorial System: A Theoretical Model". Journal of Economic History, 31, 777-803.
96. North, D. C. and J. J. Wallis. Integrating Institutional Change and Technical Change in Economic History – A Transaction Cost Approach". Journal of Institutional and Theoretical Economics, 150(4), 1994, 609–624.
97. Obstfield, Maurice and Kenneth Rogoff Foundations of International Macroeconomics. The MIT Press, 1996.
98. Osband, Kent and Villanueva, Delano. Independent Currency Authorities: An Analytic Primer. IMF Staff Papers, Vol. 40, No. 1, March 1993, pp. 202-216.
99. Papademos, Lucas; Franco Modigliani. The Supply of Money and the Control of Nominal Income. In Handbook of Monetary Economics (Eds. B.M. Friedman, F.H. Hahn) vol. 1, pp. 399-494, North Holland, Amsterdam, 1990.
100. Patinkin, Don. Money, Interest and Prices. Harper and Row, New York, 1965.
101. Polak, J.J. and Victor Argy. Credit Policy and Balance of Payments. IMF Staff Papers vol. 18, Washington DC, 1971, pp. 1-24.
102. Polak, J.J. The IMF Monetary Model at Forty. IMF Working Paper, April, 1997.

103. Raiser, M. Informal Institutions, Social Capital and Economic Transition: Reflections on a Neglected Dimension, WP, European Bank for Reconstruction and Development, London, 1997.

104. Richter, Rudolf; Ulrich Bindseil. Neue Institutionenökonomik, WiSt (Wirtschaftswissenschaftliches Studium) 24. Jg. 1995, H. 3, S. 132-140

105. Richter, Rudolf; Eirik G. Furubotn. Neue Institutionenökonomik. Eine Einführung und kritische Würdigung; 3. Auflage, Tübingen 2003

106. Ritschard, G. Computable Qualitative Comparative Static Problems, 1983

107. Samuelson, P. Foundations of Economic Analysis. Cambridge Mass.: Harvard University Press, 1947. По-нова версия: Paul Anthony Samuelson. Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press, Cambridge, 1963.

108. Schaechter, A.. Implementation of Monetary Policy and Central Bank's Balance Sheet. IMF Working Paper, October 2001.

109. Sesselmeier, Werner; Gregor Blauermel. Arbeitsmarkttheorien. Ein Ueberblick. Physika Verlag, Heidelberg, 1998.

110. Simons, Henry C. Rules versus Authorities in Monetary Policy. In: Simons, Henry C. Economic Policy for a Free Society, Chicago, University of Chicago Press, 1948, pp. 160-162.

111. Slutsky, E. On the Theory of the Budget of the Consumer, 1953 (1915).

112. Smith, Adam. An Inquiry into the Nature and Cause of the Wealth of Nations. 1776 [Reprint ed. Max Lerner, The Modern Library Edition, New York, 1937]

113. Sriram, S.. A Survey of Recent Empirical Money Demand Studies. IMF Staff paper, Vol. 47, No 3, 2001.

114. Stone, R. Social Accounting Matrix Models – Framework for Economic Decisions. In: C.M. Berners-Lee (Ed.) Models for Decisions, London, 1965.

115. Stone, R. The Social Accounts from a Consumer's Point of View, Review of Income and Wealth, Series 12, March 1966.

116. Streeten, Paul. Markets and States: Against Minimalism. World Development, 21, 8, 1993, pp. 1281-1298.

117. Streeten, Paul. Governance. In: M.G. Quibria and J.M. Dowling (eds.) Current Issues in Economic Development. An Asian Perspective. Hong Kong, Oxford University Press, 1996, 27-66.

118. Sulejewicz, A. and P. Graca. Measuring the transaction sector in the Polish economy 1996- 2002. Paper presented at the Ninth Annual Conference of the

International Society for New Institutional Economics, Barcelona, 22-25 22-25 September 2005.

119. Takayama, Akira. Analytical Methods in Economics. Harvester Wheatsheaf, New York, 1994.

120. Tinbergen, Jan. Annual Survey: Suggestions on Quantitative Business Cycle Theory. Econometrica, III, 1935, pp. 241-308.

121. Tinbergen, J. A Model for Flow of Funds Analysis of an Open Country, Rivista Internationali di Scienze Economiche e Commerciali, vol. 12, March 1965.

122. Tobin, James. A general equilibrium approach to monetary theory. Journal of Money, Credit and Banking, vol. 1, No 1, Feb., 1969, pp. 15-29.

123. Tucker, Donald P. Macroeconomic Models and the Demand for Money under Market Disequilibrium. Journal of Money, Credit and Banking, vol. 3, Columbus, Ohio, 1971, pp. 57-83.

124. Viner, J. Studies in the theory of international trade. London: George, Allen, and Unwin, 1956.

125. Wallis J.J and D.C. North. Measuring the transaction sector in the American Economy 1870-1970. In: Engermann S. L. and Gallmann R. E. (eds) Long Term Factors in American Economic Growth. University of Chicago Press, Chicago and London, 1986, pp. 95-148.

126. Wang N. Measuring transaction costs: A complete survey. Ronald Cost Insitute Working Papers Nr 2, 2003.

127. Walras, Leon. Elements d'economie politique pure. Lausanne, Corbaz, 1874). По-съвременни издания на тази книга са: Leon Walras. Elements of Pure Economics, 1954 (1926).

128. Williamson, John. What Washington Means by Policy Reform. Institute for International Economics, Washington, D.C., 1990.

129. Williamson, John. The Political Economy of Policy Reform. Institute for International Economics, Washington, D.C., 1994.

130. Williamson, John. What Role for Curreny Boards? Institute for International Economics, Washington, D.C., September, 1995.

131. Willms, Manfred. Intenationale Waehrungspolitik. Verlag Franz Vahlen, Muenchen, 1992.

132. Wong, Chorng-huey and Oystein Pettersen. Financial Programming in the Framework of Optimal Control. Weltwirtschaftliches Archiv, Volume 115, Issue 1, 1979, pp. 20-37.

133. World Bank. World Development Report: The State in a Changing World, New York, Oxford University Press, 1997.

134. World Bank. Transition: The First Ten Years, Analysis and Lessons for Eastern Europe and the Former Soviet Union, Washington, D.C., 2002.

Приложение. Математическа справка

Mathematics is a language.

J. Willard Gibbs

Глава 1. Основни понятия и постановки в теорията на диференциалните уравнения

Безкрайно малките са безкрайно важни.

Математиката стана неразделна част от езика на съвременната наука, с начало поставено от Европейския ренесанс, когато човечеството след стотици години интелектуална летаргия отново усеща потребността от знание за природата и обществото. Знанието се натрупва в резултат на потребността на човека да си отговори на въпросите: как – водещ до технологични знания и на въпроса защо – водещ до разширяване на науката. Уточняващи въпроси като: колко, в каква степен, в какво съотношение водят до количествените аспекти на знанието. Потребността от точно, детайлизирано изразяване на знанието, проверката и прилагането му в практиката, неизбежно води до математическия език за изразяване на знанието и до математическия апарат за задълбочаването му. Когато великите географски открития отвориха очите на човечеството за формата на Земята и възникна потребността от създаването на точни географски карти на земната повърхност, за решаването на тази задача математиката предостави апарата на картографските проекции на сферата върху равнината. Развитието на природните и обществените науки стана стимул за разработването на адекватен математически апарат за съответните научни изследвания.

Математическият инструментариум често се отнася към методологията на научното изследване или към така наречената чиста наука. Според Кант: „Всяка наука има потребност от чиста част.”

В настоящото приложение е включен математическия апарат, необходим за изследване на динамиката, равновесието и стабилността на стопанската система. Математическият апарат за задаване и изследване на динамичните системи са диференциалните уравнения. Диференциалните уравнения са изобретени от Исак Нютън (1642-1727) - един от най-големите учени на всички времена. Съвсем не без основание

Нютън считал, че законите на природата се изразяват с диференциални уравнения. Нютън стига до диференциалните уравнения след като разработва основите на смятането с безкрайно малки величини (диференциално и интегрално смятане) или казано в по-съвременна терминология – математическия анализ. Той въвежда основното за всяка динамична система понятие – производна на функция и съставя таблица от производните на основните елементарни функции, която сега присъствува в почти същия вид в съвременните учебници по математически анализ. Производната на една функция задаваща изменението на една величина в течение на времето е всъщност скоростта на изменение на тази величина във времето.

Най-фундаменталният принос на Нютън в съвременната наука е теорията на движението планетите в Слънчевата система, изложена в «Математичеси начала на натур-философията» (Principea), която е началото на съвременната физика. Нютън открива закона за всемирното привличане заедно с Хук (1635-1703) и други учени. Значим принос във формирането на математическия анализ като самостоятелна научна дисциплина има Готфрид-Вилхелм Лайбниц. Измежду големия брой публикации по диференциални уравнения през 18 век си струва да се отбележат работите на Леонард Ойлер (1707-1783) и Жан-Пиер Лагранж, в които е развита теорията на малките колебания, а следователно и теорията на линейните системи от диференциални уравнения. Съществени приноси в по-нататъшното развитие на теорията на диференциалните уравнения имат Карл Фридрих Гаус (1777-1855), Лиувил (1809-1882), С. Ли (1842-1899), Пуасон (1781-1840), Якоби (1804-1851). Със създаването на качествената теория на диференциалните уравнения от Анри Пуанкаре (1854-1912) започва нов етап в развитието на теорията на диференциалните уравнения. Качествената теория на диференциалните уравнения е най-пряко свързана с използването на диференциалните уравнения не само в естествознанието но и в обществените науки и икономиката. В настоящото приложение излагаме елементи от количествената и качествената теория на диференциалните уравнения, понеже именно теорията на обикновените диференциални уравнения предлага адекватния математически апарат за описание и анализ на еволюционните процеси в естествознанието, в обществените науки, в икономиката. Изложението се придържа към станали класически в тази област книги, като на В. И. Арнольд (1978,1984) Понтрягин (1965), Петровски (1970), както и към математическите приложения на книгите на Фелдерер, Хомбург (Felderer, Homburg, 1994), Такаяма (Takayama, 1994) и други в приложената литература.

Понятието величина е основно за съвременната наука. Процесите и взаимоотношенията в природата и обществото науката изразява чрез величини. Величините могат да имат количествен или неколичествен (качествен) израз. Математиката борави само с количествени величини, като превръща качествените величини в количествени чрез въвеждане на мерни скали за оразмеряването им. Ние ще предполагаме, че всички величини, които разглеждаме в това приложение са количествени, което означава, че възможните им стойности се изразяват с числа.

Множеството от възможните стойности на една величина X наричаме ***пространство от положенията***. Математиците представят нагледно числата като точки на една права линия. Множеството на числата или на всички точки върху правата ще означаваме с $\mathbf{R}$ или $\mathbf{R^1}$. С тези означения, пространството от положенията на една величина X може да бъде правата $\mathbf{R^1}$ или подмножество A, част от нея.

Тъй като положението на една система в природата или обществото се определя обикновено едновременно от стойностите на няколко, примерно n на брой величини $X_1, X_2, ..., X_n$, то ***пространството от положенията на вектора*** $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е n-мерното векторно пространство $\mathbf{R^n}$ или някакво негово подмножество.

Тъй като човекът е тримерно същество, той е възможно да си представя пространства от положения със размерности едно, две и три. За размерности по-големи от три бихме могли само да си създаваме представа, основана на тези три размерности и на допълнителни „ефекти" от аналитично получени резултати.

Съвременната наука разглежда не само положенията на величините и взаимодействия и връзки между тях, но и измененията които стават в системата от величини в течение на времето, което математически означава, че стойностите x на величината X, зависят, функция са на времето t: $x = X(t)$.

Времето, въобще казано, е безкрайно в двете посоки, т.е. $t \in (-\infty, +\infty)$, ние обикновено ще предполагаме, че го отчитаме от някакъв начален момент 0, т.е. $t \geq 0$.

Графично, стойностите на величината $x = X(t)$ в момента от времето t се представят като една траектория, по която нагледно казано се „движи" точката x. Поради това и всяка възможна реализация на функцията $x = X(t)$ ще наричаме траектория или ***траектория на положенията***, понеже с течение на времето тя се „движи" в ***пространството от положенията*** $\mathbf{R^1}$ на величината X. Траекториите от положенията на вектора $(X_1, X_2, ..., X_n)$ се „движат" в n-мерното векторно пространство $\mathbf{R^n}$.

Изменението, което става с величината *X* в интервала от време $[t_0, t_1]$, се изразява чрез разликата $\Delta x = x_1 - x_0 = X(t_1) - X(t_0)$. Дали това изменение е голямо или малко е безсмислен въпрос, понеже големината е относително понятие. Въпросът, дали $\Delta x = x_1 - x_0 = X(t_1) - X(t_0)$ е голямо или малко изменения придобива смисъл, ако бъде отнесено към големината, дължината $\Delta t = t_1 - t_0$ на интервала $[t_0, t_1]$ в течение на който е станало това изменение; отношението $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \dfrac{X(t_1) - X(t_0)}{t_1 - t_0}$ представлява средното изменение на величината *X* в интервала от време $[t_0, t_1]$. Ако желаем да определим степента, скоростта на изменение на величината *X* в момента t_0, трябва да „свием" интервала $[t_0, t_1]$ ида го сведем до точката $t_0 = [t_0, t_0]$, като оставим t_1 да клони, да се доближава до t_0, т.е. $t_1 \to t_0$, което от своя страна ще ни доведе до дефиницията на производна $\dot{X}(t)$ на функцията $x = X(t)$ в точката t_0: $\dot{X}(t_0) = \dfrac{dX(t_0)}{dt} = \lim \dfrac{X(t_1) - X(t_0)}{t_1 - t_0}$, $t_1 \to t_0$. Производната $\dot{X}(t)$ на величината *X* относно времето t изразява математически големината, степента, скоростта на изменение на величината *X* във всеки момент от времето t, поради което се нарича ***траектория на измененията*** или ***траектория на скоростите***.

Множеството от възможните стойности на изменението на величината *X* се нарича ***пространство на измененията*** или ***пространство на скоростите.***

Състоянието на една динамична система в даден момент от времето се определя от ***положението и изменението*** и в този момент.

Ако динамичната система се определя от стойностите на величината X, то състоянието и в момента t ще се определя от положението $x(t)$ и от изменението $\dot{x}(t)$, т.е. състоянието е двойката $(x(t), \dot{x}(t))$. Множеството от всички възможни състояния се нарича ***фазово пространство на динамичната система***. Ако динамичната система се определя от стойностите на величината *X*, то фазовото пространство е $\mathbf{R}^2$ или негово подмножество. Ако динамичната система се определя от стойностите на величините $(X_1, X_2, ..., X_n)$, то състоянията $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), ..., \dot{x}_n(t))$ на системата са точки от $\mathbf{R}^{2n}$, което означава, че фазовото пространство е $\mathbf{R}^{2n}$ или негово подмножество. Динамиката на система определена от стойностите на величината *X* се задава от взаимно свързаното поведение на променливите $t, x(t), \dot{x}(t)$. За да определим траекторията $x(t)$ на положенията на системата, е необходимо да решим уравнение от вида

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \qquad (1)$$

което е диференциално уравнение от първи ред, понеже най-високата му производна е от първи ред. F е някаква функция на три променливи, отчитаща връзките между променливите $t, x(t), \dot{x}(t)$.

Ако динамиката на системата се определя от стойностите на величините $(X_1, X_2, ..., X_n)$, то за да определим траекторията $\tilde{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ от положенията на системата се налага да решим векторно диференциално уравнение от вида:

$$G(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)) = 0 \qquad (2)$$

относно $\tilde{x}(t)$**,** което е всъщност система от n диференциални уравнения от първи ред. G е векторна функция на $(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))$.

Ако G е линейна функция, системата от диференциални уравнения може да бъде представена във вида:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(t) \qquad (3)$$

Ако $\tilde{A}(t) = \tilde{A}$ $\tilde{B}(t) = \tilde{B}$ за всяко t, то линейната система (3) е с постоянни коефициенти и придобива вида:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B} \qquad (4)$$

като сме означили

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} ... a_{2n} \\ ... & \\ a_{n1} & a_{n2} ... a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ ... \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

Системата от диференциални уравнения (4) наричаме ***линейна нехомогенна с постоянни коефициенти***. Ако $\tilde{B} = \tilde{0}$, то (4) придобива вида (5) и се нарича ***линейна хомогенна с постоянни коефициенти:***

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) \qquad (5)$$

Всяка линейна нехомогенна система (4(може да бъде сведена до линейна хомогенна от вида (5) чрез полагането $\tilde{x} = \tilde{A}^{-1}(\tilde{y} - \tilde{B})$. Действително, замествайки в (4) получаваме $\tilde{A}^{-1}\dot{\tilde{y}} = \tilde{A}\tilde{A}^{-1}(\tilde{y} - \tilde{B}) + \tilde{B}$, откъдето $\tilde{A}^{-1}\dot{\tilde{y}} = \tilde{y} - \tilde{B} + \tilde{B}$ и $\dot{\tilde{y}} = \tilde{A}\tilde{y}$.

Възможно е динамиката на величината X, или величините $(X_1, X_2, ..., X_n)$ да е по-сложна и да се определя с участието и на други производни от по-висок ред, като например втората производна $\ddot{x}(t)$, съответно, $\ddot{\tilde{x}}(t)$ задаваща ускорението или скоростта на изменение на скоростта. В този случай ще се получат диференциални уравнения и съответно системи от диференциални уравнения от втори ред и уравненията (1) и (2) задаващи динамиката на системата ще придобият вида:

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = 0 \qquad (6)$$

$$G(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t), \ddot{\tilde{x}}(t)) = 0 \qquad (7)$$

Диференциалните уравнения (6) и съответно системите от диференциални уравнения (7) от втори ред се използват за описание и изследване на процеси и явления във физиката и икономиката, които имат цикличен характер на изменение като трептения, вълнови процеси, сезонни изменения, цикли, затихващи колебания и т.н. Решаването на уравнението (1) или (6) за величината X, или на системата от уравнения (2) или (7) за величините $(X_1, X_2, ..., X_n)$ би ни дало стойностите на тези величини във всеки момент от времето t. Решението ще зависи от вида на тези уравнения определен от функциите F и G съответно, за които в общия случай не съществува метод за намирането му.

В следващите глави ще изложим методите за количествено решаване на линейните диференциални уравнения с постоянни коефициенти за една или повече величини, възможностите за линеаризация на нелинейни системи, както и методите за качествено изследване на диференциални уравнения и числени методи за приближеното им решаване.

Глава 2. Обикновени диференциални уравнения.

1 Линейно диференциално уравнение от първи ред с постоянни коефициенти.

А. Хомогенно уравнение

Динамичната система е зададена посредством линейно хомогенно диференциално уравнение от първи ред с постоянни коефициенти, ако то има вида:

$$\dot{x}(t) = ax(t) \qquad (1)$$

където a е постоянен коефициент, което означава, че той не се променя в течение на времето t. Уравнението (1) представяме във вида:

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a$$

Последното уравнение се решава по следния начин:

$$\frac{d}{dt}\ln x = a$$

$$d\ln x = adt$$

$$\int d\ln x = a\int dt + \ln C$$

$$\ln x = at + \ln C$$

$$\ln\frac{x}{C} = at$$

$$x(t) = Ce^{at} \qquad (2)$$

Равенството (2) представлява *общото решение* на динамичната система зададена посредством диференцианото уравнение (1). Нека да отбележим, че общото решение на диференциалното уравнение (1) е не една отделна крива, а множество от криви, всяка от които се получава за определена стойност на C в интервала $(-\infty,+\infty)$ Решението което се получава когато C се замени с някоя конкретна стойност се нарича *частно решение* на динамичната система. Следователно, общото решение се състои от безбройно много частни решения, които нагледно можем да си представим като „сноп" от криви. За да „подредим" този сноп от криви или траектории, ще използваме стойностите им в началния момент $t = 0$.

За $t=0$ получаваме $x(0)=C$. Следователно

$$x(t) = x(0)e^{at} \qquad (3)$$

Частно е и решението, което се получава за конкретно $C=x(0)$ и което е дадено в (3). Множеството на всички частни решения от вида (4) се нарича *дефинитно или определено решение* на динамичната система. Дефинитното решение на динамичната система задава състоянието на системата $x(t)$ в произволен момент t при условие, че е известно състоянието на системата $x(0)$ в началния момент 0.

Б. Нехомогенно уравнение

Динамичната система е зададена посредством линейно нехомогенно диференциално уравнение от първи ред с постоянни коефициенти, ако то има вида:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b \qquad (4)$$

където, както *a* така и *b* не се променят с течение на времето *t*.

Не е трудно да забележим, че хомогенното уравнение (1) се получава от нехомогенното (4), като се положи *b=0*. Ние ще наричаме хомогенното уравнение – ***хомогенна или редуцирана версия на нехомогенното уравнение***. Тази хомогенна версия ще използваме при решаване на нехомогенното уравнение.

Решението *x(t)* на нехомогенното уравнение (4) се получава като се направи полагането

$$x(t) = \frac{1}{a}(y(t) - b) \qquad (5)$$

Като използваме, че $\dot{x}(t) = \frac{1}{a}\dot{y}(t)$ получаваме след заместване в (4) $\frac{1}{a}\dot{y}(t) = a\frac{1}{a}(y(t) - b) + b$, което от своя страна се свежда до $\dot{y}(t) = ay(t)$. Последното уравнение е хомогенно, което ни дава възможност да го решим като използваме формулата (2):

$$y(t) = Ce^{at} \qquad (6)$$

Обръщаме полагането (5) и получаваме $y(t) = ax(t) + b$. Заместваме последното в (6): $ax(t) + b = Ce^{at}$, което се свежда до:

$$x(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a} \text{ за } a \neq 0 \qquad (7)$$

Равенството (7) представлява общото решение на нехомогенното уравнение. За да определим дефинитното решение на нехомогенното уравнение полагаме *t=0* в (7) и получаваме $x(0) = Ce^{a0} - \frac{b}{a}$ откъдето $C = x(0) + \frac{b}{a}$, което заместваме *C* в (7) и получаваме

$$x(t) = (x(0) + \frac{b}{a})e^{at} - \frac{b}{a} \text{ за } a \neq 0 \qquad (8)$$

което е и дефинитното решение на нехомогенното уравнение (4).

Тъй като решението на нехомогенното уравнение е за $a \neq 0$, ние тук отделно ще разгледаме случая *a=0*. Заместваме *a=0* в (4) и получаваме

$$\dot{x}(t) = b \qquad (9)$$

Общото решение на това уравнение намираме чрез директно интегриране:

$$x(t)=bt+C \tag{10}$$

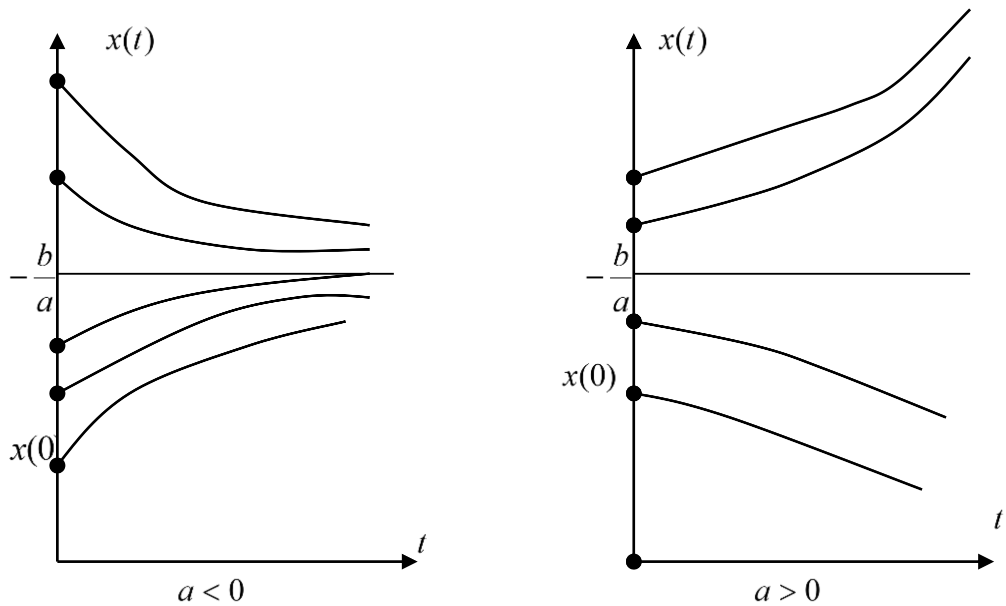
където C е произволна константа.

За да намерим дефинитното решение заместваме $t=0$ в (10) и получаваме $x(0)=b.0+C$. Следователно $C=x(0)$. Заместваме го в (10) и получаваме

$$x(t)=x(0)+bt\quad, \tag{11}$$

което е и дефинитното решение на (9).

На фигура 1 са представени нагледно решенията на нехомогенното линейно диференциално уравнение в зависимост от знака на коефициента a.



Фигура 1. Решения на нехомогенното уравнение (4)

2. **Линейно диференциално уравнение от произволен ред с постоянни коефициенти.**

Линейно хомогенно диференциално уравнение с постоянни коефициенти от ред n наричаме уравнението, което може да бъде записано във вида:

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}\dot{x}(t) + a_n x(t) = 0\,, \qquad (12)$$

където $a_0, a_1, ..., a_n$ са реални числа, а $x = x(t)$ е търсената функция на независимата променлива t.

Линейното диференциално уравнение (12) от ред n чрез полагането

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t)$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = \ddot{x}(t)$$

…

$$x_k(t) = x^{(k)}(t)$$

…

$$x_n(t) = x^{(n)}(t)$$

се свежда до следната еквивалентна на него система от диференциални уравнения от първи ред:

$$a_n x_1(t) + a_{n-1} x_2(t) + ... + a_2 x_{n-1}(t) + a_1 x_n(t) = 0$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t)$$

…

$$x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t)$$

Решаването и изследването на системи от уравнения от първи ред е разгледано в следващата глава.

Глава 3. Система обикновени диференциални уравнения от първи ред с постоянни коефициенти.

Линейната хомогенна система с постоянни коефициенти се задава чрез матричното равенство:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) \qquad (1)$$

като сме означили

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

което можем да запишем още в еквивалентния нематричен вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ &\ldots \qquad (2) \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \end{aligned}$$

където a_{ij} за $i, j = 1,2,\ldots,n$ са коефициенти, които не се променят в течение на времето.

Решението на уравнението (1) се дава от основната теорема на линейните диференциални уравнения, формулирана и доказана, например в В. И. Арнолд (1984), стр 133.

Основна теорема Решението $\tilde{x}(t)$ на уравнението $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t)$ с начално условие $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$ има вида:

$$\tilde{x}(t) = e^{\tilde{A}t}\tilde{x}_0,\ t \in (-\infty,+\infty) \qquad (3)$$

Формулата показва, че решението на линейната хомогенна система от диференцални уравнения от първи ред с постоянни коефициенти има експоненциален вид подобно на решението $y(t) = e^{at}y_0$ на простото линейно хомогенноуравнение от първи ред $\dot{y} = ay$. В простия случай ескпонентата e^{at} е добре дефинирана, докато в матричния случай $e^{\tilde{A}t}$ изисква дефиинция, понеже само по форма прилича на e^{at}. Един естествен начин за дефиниране на $e^{\tilde{A}t}$ е да се използва идеята на представянето на e^{at} в степенен ред:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{a^nt^n}{n!} + \ldots$$

като се зададе $e^{\tilde{A}t}$ да бъде по дефиниция равно на:

$$e^{\tilde{A}t} = 1 + \tilde{A}t + \frac{\tilde{A}^2t^2}{2!} + \frac{\tilde{A}^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{\tilde{A}^nt^n}{n!} + \ldots$$

Последният безкраен ред е сходящ, както е показано например в Гантмахер (Gantmacher, 1959), стр. 137. Почленното му диференциране ни дава:

$$\frac{d}{dt}e^{\tilde{A}t} = \tilde{A} + \frac{\tilde{A}^2t}{1!} + \frac{\tilde{A}^3t^2}{2!} + \ldots + \frac{\tilde{A}^nt^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots =$$

$$= \tilde{A}(1 + \tilde{A}t + \frac{\tilde{A}^2t^2}{2!} + \frac{\tilde{A}^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{\tilde{A}^nt^n}{n!} + \ldots) =$$

$$= \tilde{A}e^{\tilde{A}t}$$

Това означава, че (3) е решение на (1):

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{d}{dt}(e^{\tilde{A}t}\tilde{x}_0) = \tilde{A}e^{\tilde{A}t}\tilde{x}_0 = \tilde{A}\tilde{x}(t)$$

Формалното решение (3) няма голяма практическа стойност, освен в случаите, когато $e^{\tilde{A}t}$ може да бъде пресметнато в затворен вид, различен от развитието в степенен ред. Това не е трудно да се направи в частния случай, когато матрицата $\tilde{A}$ има различни собствени стойности. Както е известно от матричната алгебра, в този случай матрицата $\tilde{A}$ може да бъде диагонализирана посредством модалната матрица $\tilde{V}$, както следва:

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{V}^{-1}\tilde{A}\tilde{V} \quad \text{или} \quad \tilde{A} = \tilde{V}\tilde{\Lambda}\tilde{V}^{-1},$$

където

$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\tilde{V} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \ldots & \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \ldots & \alpha_n^{(2)} \\ \ldots & & & \\ \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} & \ldots & \alpha_n^{(n)} \end{bmatrix}$, $\tilde{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i^{(1)} \\ \alpha_i^{(2)} \\ \ldots \\ \alpha_i^{(n)} \end{bmatrix}$, $i = 1,2,\ldots,n$, собствения вектор съответстващ на собствена стойност λ_i, удовлетворява матричното уравнение:

$$[\tilde{A} - \lambda_i\tilde{I}]\tilde{\alpha}_i = \tilde{0}, \; i = 1,2,\ldots,n$$

Следователно

$$e^{\tilde{A}t} = e^{\tilde{V}\tilde{\Lambda}\tilde{V}^{-1}} = e^{\tilde{V}\tilde{\Lambda}t\tilde{V}^{-1}}$$

Тук прилагаме теоремата на Силвестър (виж например Колар и Симпсън, (Collar, Simpson, 1987), глава 6, раздел 118) и получаваме:

$$e^{\tilde{V}\tilde{\Lambda}t\tilde{V}^{-1}} = \tilde{V}e^{\tilde{\Lambda}t}\tilde{V}^{-1},$$

където $e^{\tilde{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0\dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$

Следователно

$$\tilde{x}(t) = e^{\tilde{A}t}\tilde{x}_0 = \tilde{V}e^{\tilde{\Lambda}t}(\tilde{V}^{-1}\tilde{x}_0),$$

което е решение в затворен вид, сведено до собствените стойности и собствените вектори на матрицата $\tilde{A}$. Случая на кратни собствени стойности е значително по-сложен, но също е решен, например в [16] Колар и Симпсън.

Пресмятането на елементите на матрицата $e^{\tilde{A}}$ формално става по следната процедура:

I. Частен случай. Диагонална матрица.

Матрицата $\tilde{A}$ е диагонална, ако има ненулеви елементи $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ само по главния диагонал, а всички останали елементи са равни на нула, т.е.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ В този случай } e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0\dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0\dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_0^{(n)} \end{bmatrix}, \ \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0^{(1)} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_0^{(2)} e^{\lambda_2 t} & 0\dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & x_0^{(n)} e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \text{ или}$$

$$x_1(t) = x_0^{(1)} e^{\lambda_1 t}$$

$x_2(t) = x_0^{(2)} e^{\lambda_1 t}$

$\dots$

$x_n(t) = x_0^{(n)} e^{\lambda_1 t}$

II. Общ случай. Матрицата A е произволна, със собствени стойности $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

1. Собствените стойности $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ се определят като решение на характеристичното уравнение $\det[\tilde{A} - \lambda \tilde{E}] = 0$

2. Собствените вектори $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_n$ се определят като решения на уравненията:

$\tilde{A}\tilde{\alpha}_k = \lambda_k \tilde{\alpha}_k$, $\tilde{\alpha}_k \neq 0$, $k = 1,2,...,n$

3. Разлагане на началното условие $\tilde{x}_0$ по собствените вектори $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_n$:

$$\tilde{x}_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k \tilde{\alpha}_k$$

1. Общо решение:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} \tilde{\alpha}_k \qquad (4)$$

Тъй като в частния случай $n = 1$, едно уравнение с една неизвестна функция позволява директно интегриране и има за резултат решение във вида $x(t) = \alpha e^{\lambda t}$, то изглежда естествено в общия случай да се търси решение на (1) във вида:

$$\tilde{x} = \tilde{\alpha} e^{\lambda t} \qquad (5)$$

където $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ е вектор от константи, поне една от които е различна от нула.

Заместваме (5) в (1) и получаваме:

$$\lambda \tilde{\alpha} e^{\lambda t} = \tilde{A} \tilde{\alpha} e^{\lambda t}$$

Последното може да бъде приведено във вида

$$e^{\lambda t} [\tilde{A} - \lambda \tilde{I}] \tilde{\alpha} = \tilde{0}$$

където $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, $\tilde{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

Последното равенство е в сила за всяко t тогава и само тогава, когато:

$$[\tilde{A} - \lambda \tilde{I}]\tilde{\alpha} = \tilde{0} \qquad (6)$$

Системата от уравнения (6) има решение относно λ тогава и само тогава, когато е равна на нула детерминантата:

$$\det[\tilde{A} - \lambda \tilde{I}] = \tilde{0} \qquad (7)$$

Детерминантата (7) може да бъде представена като полином по степените на λ по следния начин:

$$(-1)^n \lambda^n + b_1(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_r(-1)^r \lambda^r + \dots + b_{n-1}(-1)\lambda + b_n = 0$$

Умножаваме двете страни на последното равенство с $(-1)^n$ и получаваме:

$$\lambda^n - b_1\lambda^{n-1} + \dots + b_r(-1)^{n+r}\lambda^r + \dots + b_{n-1}(-1)^{n+1}\lambda + (-1)^n b_n = 0 \qquad (8)$$

където

$$b_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

b_2 равно на сумата от главните минори от втори ред на матрицата $\tilde{A}$

...

b_r е равно на сумата от главните минори от ред r на матрицата $\tilde{A}$

...

$b_n = \det \tilde{A}$

Решаването на уравнението (8) ще ни даде n корена $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, които се наричат характеристични корени или собствени стойности на матрицата $\tilde{A}$. На всяка собствена стойност λ_i съответства собствен вектор $\tilde{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i^{(1)} \\ \alpha_i^{(2)} \\ \dots \\ \alpha_i^{(n)} \end{bmatrix}$, $i = 1,2,\dots,n$, който удовлетворява матричното уравнение (6):

$$[\tilde{A} - \lambda_i \tilde{I}]\tilde{\alpha}_i = \tilde{0}, \; i = 1,2,\dots,n$$

Ако собствените стойности $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ на матрицата $\tilde{A}$ са различни, то решението на системата от диференциални уравнения (2) ще има вида:

$$
\begin{aligned}
&x_1(t) = c_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\alpha_1^{(n)}e^{\lambda_n t} \\
&x_2(t) = c_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\alpha_2^{(n)}e^{\lambda_n t} \\
&... \\
&x_n(t) = c_1\alpha_n^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_n^{(2)}e^{\lambda_2 t} + ... + c_n\alpha_n^{(n)}e^{\lambda_n t}
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

където $\tilde{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ е вектор от произволни константи. Определянето на константите $\tilde{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ става въз основа на началните условия, което означава да предположим, че са известни стойностите $\tilde{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ ... \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$ на траекториите $\tilde{x}(t)$ в началния момент $t = 0$, т.е.

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}^{(0)} \qquad (10)$$

Равенствата (10) задават ***началните условия*** на системата (1). Полагаме $t = 0$ в (9) и замествайки (10) в (9) получаваме:

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(0)} = c_1\alpha_1^{(1)} + c_2\alpha_1^{(2)} + ... + c_n\alpha_1^{(n)} \\
&x_2^{(0)} = c_1\alpha_2^{(1)} + c_2\alpha_2^{(2)} + ... + c_n\alpha_2^{(n)} \\
&... \\
&x_n^{(0)} = c_1\alpha_n^{(1)} + c_2\alpha_n^{(2)} + ... + c_n\alpha_n^{(n)}
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Матричното представяне на последната система от равенства има вида:

$$\tilde{x}^{(0)} = \tilde{c}\tilde{V} \qquad (12)$$

където $\tilde{V}$ е матрицата образувана от собствените вектори $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1,2,...,n$ на матрицата $\tilde{A}$:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & ... & \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & ... & \alpha_n^{(2)} \\ ... & & & \\ \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} & ... & \alpha_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$\tilde{V}$ се нарича ***модална матрица*** на $\tilde{A}$. Детерминантата $\det\tilde{V} \neq 0$, понеже на различни собствени стойности $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ съответстват линейно независими собствени вектори $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_n$. Следователно, съществува обратната матрица $\tilde{V}^{-1}$ на матрицата $\tilde{V}$ и от (12) получаваме:

$$\tilde{c} = \tilde{x}^{(0)}\tilde{V}^{-1} \qquad (13)$$

Последното равенство ни дава възможност да намерим константите $\tilde{c}$ и да ги заместим в (9):

В случая когато някои от собствените стойности $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ са кратни корени на уравнението (7), което означава, че не са различни, а някои от тях съвпадат помежду си, повече няма да може да твърдим, че съответните собствени вектори $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_n$ са линейно независими. Все пак обаче и в този случай общото решение ще представлява линейна комбинация на n различни решения, образуващи базис от линейно независими вектори, което означава, че съответната матрица отново ще бъде несингулярна.

Условия за съществуване и стабилност на равновесни състояния на една линейна хомогенна динамична система.

Съществуването на равновесни състояния на линейната хомогенна система (1) или (2), както и тяхната стабилност или нестабилност, зависи изцяло и само от собствените стойности $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ на матрицата $\tilde{A}$. Това твърдение става ясно ако погледнем решението на системата във вида и (4) или (9). За да определим едно равновесно състояние $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ на системата, ще ни се наложи да направим граничен преход при $t \to \infty$ в (9), понеже по дефиниция:

$$\bar{x}_k = \lim_{t\to\infty} x_k(t), \; k = 1,2,...,n$$

Равновесното състояние $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ ще е стабилно, ако сходимостта (14) е в сила за произволни начални състояния $\tilde{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$ на траекториите $\tilde{x}(t)$ в началния момент $t = 0$, т.е. $\tilde{x}(0) = \tilde{x}^{(0)}$. Началните условия се появяват в решението (9) чрез коефициентите $\tilde{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$, изразени чрез началните състояния $\tilde{x}(0) = \tilde{x}^{(0)}$ в (13).

Решението на системата (9) ясно показва, че траекториите $x_k(t)$, $k=1,2,...,n$ зависят от времето t чрез изразите $e^{\lambda_u t}$, $k=1,2,...,n$ като техни линейни комбинации, което означава, че сходимостта на траекториите $x_k(t)$, $k=1,2,...,n$ при $t\to\infty$ ще зависи от сходимостта на изразите $e^{\lambda_u t}$, $k=1,2,...,n$ при $t\to\infty$, което от своя страна ще означава, че сходимостта на траекториите $x_k(t)$, $k=1,2,...,n$ при $t\to\infty$ ще зависи от стойностите на $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$.

Пресмятането на стойностите на $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ става посредством решаването или на детерминантното уравнение (7) или на полиномиалното равнение (8). Преобразуването на характеристичното уравнение от детерминантен вид (7) в полиномиален вид (8) е твърде сложна процедура за големи стойности на броя на променливите n (даже още за $n>2$), понеже както се вижда от представянето (8), коефициентите $b_1,b_2,...,b_n$ в този полином са сложни функции в крайна сметка на елементите a_{ij} на матрицата $\tilde{A}$. Пресмятането на собствените стойности на $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ чрез $b_1,b_2,...,b_n$ и определянето по този начин на условия за съществуване и стабилност на равновесни състояния се избягва, като се търсят условия за стабилност, които се изразяват като по прости изрази от елементите a_{ij} на матрицата $\tilde{A}$. На този проблем са посветени много публикации, измежду които ще посочим, някои по-важни от тях, като Гандолфо (Gandolfo, 1997), Фулар (Fuller, 1968), Мурата (Murata, 1977).

Тук ние ще формулираме без доказателства само някои от най-популярните условия за стабилност, като под условия за стабилност ще разбираме условия върху матрицата $\tilde{A}$, при които стойностите на $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ на характеристичните и корени отрицателни, ако са реални или са с отрицатени реални части, ако са комплексни.

Условие за отрицателна дефинитност.

Ако матрицата $\tilde{A}$ е симетрична, т.е. за елементите и е в сила $a_{ij}=a_{ji}$, то необходимото и достатъчно условие за стабилност е изискването главните минори на $\tilde{A}$ алтернатино да си менят знака, започвайки с минус, т.е.

$$a_{11} < 0\,,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0\,,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0\,,\ldots,\ sign\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = sign(-1)^n$$

Условие за квази-отрицателна дефинитност.

Ако означим с $\tilde{A}^T$ транспонираната на $\tilde{A}$ матрица и образуваме симетричната матрица $\tilde{B} = \frac{1}{2}(\tilde{A}^T + \tilde{A})$, т.е.

$$\tilde{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) & \ldots & \frac{1}{2}(a_{1n} + a_{n1}) \\ \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) & a_{22} & \ldots & \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{n2}) \\ \ldots \\ \frac{1}{2}(a_{n1} + a_{1n}) & \frac{1}{2}(a_{n2} + a_{2n}) & .. & a_{nn} \end{vmatrix},$$

то условието за отрицателна дефинитност на $\tilde{B}$ е неоходимо и достатъчно за системата породена от $\tilde{A}$.

Условие на Метцлер (Metzler)

Матрицата $\tilde{A}$ наричаме матрица на Метцлер, ако елементите и по главния диагонал са отрицателни, т.е. $a_{ii} < 0$, а елементите извън главния и диагонал са положителни или нула, т.е. $a_{ij} \geq 0$.

Ако $\tilde{A}$ е матрица на Метцлер, то необходимото и достатъчно условие за стабилност е изискването главните минори на $\tilde{A}$ да си сменят алтернативно знака, започвайки от минус, както това е при условието за отрицателна дефинитност.

Условие за отрицателно доминантен главен диагонал

Достатъчно условие за стабилност е изискването матрицата $\tilde{A}$ да има отрицателно доминантен главен диагонал, което означава всички елементи по главния диагонал да са отрицателни и всеки елемент от главния диагонал, по абсолютна стойност, да е по-голям от сумата на абсолютните стойности на елементите от съответния ред (стълб), т.е.

$$a_{ii} < 0,\ |a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

(доминантност по редове)

$$a_{ii} < 0,\ |a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ji}|$$

(доминантност по стълбове)

Глава 4. Система от две линейни диференциални уравнения от първи ред с постоянни коефициенти.

1. Интегриране

Системата от две линейни диференциални уравнение от първи ред с постоянни коефициенти с две променливи величини $x_1(t)$ и $x_2(t)$, $t \geq 0$ може да се запише във вида:

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2 \qquad (1)$$

където коефициентите a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} и свободните членове b_1 и b_2 не зависят от времето *t*. Системата (1) може да бъде записана в матричен вид по следния начин:

$$\dot{\tilde{X}} = \tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B} \qquad (2)$$

като сме означили

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \tilde{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Ако поне един от свободните членове b_1 и b_2 е различен от нула системата е нехомогенна. Ако $b_1 = b_2 = 0$, получаваме хомогенна система, съответстваща на (2):

$$\dot{\tilde{X}} = \tilde{A}\tilde{X} \qquad (3)$$

Не е трудно да се забележи, че всяка нехомогенна система (2) може да бъде сведена до хомогенната система $\dot{\tilde{Y}} = \tilde{A}\tilde{Y}$ посредством полагането $\tilde{X} = \tilde{A}^{-1}(\tilde{Y} - \tilde{B})$. Тъй като свойствата на системата (2), които ще ни интересуват по-нататък, лесно се пренасят от хомогенната в нехомогенната система чрез трансформацията $\tilde{Y} = \tilde{X} + \tilde{A}^{-1}\tilde{B}$, ние ще разгледаме свойствата на хомогенната система

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \qquad (4)$$

Ако $a_{12} = a_{21} = 0$, то матрицата $\tilde{A}$ става диагонална, което означава, че всички нейни елементи извън главния диагонал стават равни на нула, т.е. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, а системата от уравнения (4) придобива вида:

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_{22}x_2(t)$$

Последната система се състои от две отделни, несвързани помежду си уравнения; първото е изцяло само относно неизвестната функция $x_1(t)$, а второто – относно $x_2(t)$, поради което могат да бъдат решени независимо едно от друго като се използва формула (2) или (3) от предишния раздел 1:

$$x_1(t) = x_1(0)e^{a_{11}t}$$

$$x_2(t) = x_2(0)e^{a_{22}t}$$

В общия случай, системата от уравнения (3) или (4) можем да решим, ако успеем да приведем матрицата $\tilde{A}$ в диагонален вид. За целта е необходимо да пресметнем собствените стойности на матрицата $\tilde{A}$. Собствените стойности λ се пресмятат като решения на уравнението:

$$\det\left(\tilde{A} - \lambda\tilde{E}\right) = 0\,, \qquad (5)$$

където $\tilde{E}$ е единичната матрица:

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Уравнението (25) може да запишем още във вида:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

или

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

Разкриваме скобите и подреждаме:

$$a_{11}a_{12} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \qquad (6)$$

Решавайки последното квадратно уравнение получаваме:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

или

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}a_{21}} \qquad (7)$$

В зависимост от знака на израза под квадратния корен се получават три различни случая, които ще разгледаме последователно.

Случай 1. $\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}a_{21} > 0$

В този случай съществуват точно *два различни и реални корена* на квадратното уравнение (27), а следователно и две различни и реални собствени стойности λ_1 и λ_2 на матрицата $\tilde{A}$. След като имаме собствените стойности λ_1 и λ_2 можем да определим и съответстващите им собствени вектори:

$$\tilde{\xi}_1 = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{\xi}_2 = \begin{bmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \end{bmatrix}$$

се определят като решения на уравненията:

$$\tilde{A}\tilde{\xi}_i = \lambda_i \tilde{\xi}_i, \quad i = 1,2 \qquad (8)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_{i1} \\ \xi_{i2} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} \xi_{i1} \\ \xi_{i2} \end{bmatrix}, \; i = 1,2 \qquad (9)$$

$$\begin{matrix} a_{11}\xi_{i1} + a_{12}\xi_{i2} = \lambda_i \xi_{i1} \\ a_{21}\xi_{i1} + a_{22}\xi_{i2} = \lambda_i \xi_{i2} \end{matrix}, \; i = 1,2 \qquad (10)$$

$$\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda_i)\xi_{i1}+a_{12}\xi_{i2}=0\\ a_{21}\xi_{i1}+(a_{22}-\lambda_i)\xi_{i2}=0\end{array},\ i=1,2 \qquad (11)$$

$$\xi_{i2}=-\frac{a_{11}-\lambda_i}{a_{12}}\xi_{i1}$$

$$a_{21}\xi_{i1}-\frac{(a_{22}-\lambda_i)(a_{11}-\lambda_i)}{a_{12}}\xi_{i1}=0$$

$$(a_{21}-\frac{(a_{22}-\lambda_i)(a_{11}-\lambda_i)}{a_{12}})\xi_{i1}=0$$

$$\frac{a_{12}a_{21}-(a_{22}-\lambda_i)(a_{11}-\lambda_i)}{a_{12}}\xi_{i1}=0$$

Тъй като $a_{12}a_{21}-(a_{22}-\lambda_i)(a_{11}-\lambda_i)=0$, то $0.\xi_{i1}=0$. Следователно системата от уравнения (10) или (11) има безбройно много решения и това са всички вектори $\tilde{\xi}_i=\begin{bmatrix}\xi_{i1}\\ \xi_{i2}\end{bmatrix}$, които са колинеарни на вектора $\tilde{e}_i=\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{a_{11}-\lambda_i}{a_{12}}\end{bmatrix}$

$$AV=VE\lambda, \qquad (8)$$

където:

$$V=\begin{bmatrix}v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix} \qquad \lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix} \qquad E\lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

Уравнението (8) може да бъде записано още и във вида:

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}v_{11}+a_{12}v_{21} & a_{11}v_{12}+a_{12}v_{22}\\ a_{21}v_{11}+a_{22}v_{21} & a_{21}v_{12}+a_{22}v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1v_{11} & \lambda_2v_{12}\\ \lambda_1v_{21} & \lambda_2v_{22}\end{bmatrix} \qquad (8')$$

Тъй като съответния на собствената стойност λ_1, собствен вектор v_1 и съответния на собствената стойност λ_2, собствен вектор v_2 се определят с точност до скаларен множител, можем без ограничение на общността да положим по една от компонентите на всяка от двата собствени вектора да бъде равна на произволно избрано от нас число, което за простота избираме да е числото 1. Полагаме $v_{11}=1$ и $v_{12}=1$ и заместваме в (8') в резултат на което получаваме

$$\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}v_{21} & a_{11}+a_{12}v_{22}\\ a_{21}+a_{22}v_{21} & a_{21}+a_{22}v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_1v_{21} & \lambda_2v_{22}\end{bmatrix}$$

От последното равенство получаваме

$$v_{21} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \; v_{22} = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} \qquad (9)$$

След като сме намерили двете различни собствени стойности λ_1 и λ_2 и съответните им собствени вектори v_1 и v_2, които може да се покаже, че са линейно независими, можем да представим матрицата A в следния вид:

$$A = V\Lambda V^{-1}, \qquad (10)$$

където:
$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} & \dfrac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} & -\dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\dfrac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}, \; \Lambda := E\lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Заместваме матрицата A от (10) в (2), след което умножаваме полученото матрично равенство отляво с матрицата V^{-1}.

$$\dot{X} = V\Lambda V^{-1} X + B$$

$$V^{-1}\dot{X} = V^{-1} V\Lambda V^{-1} X + V^{-1} B$$

$$V^{-1}\dot{X} = \Lambda V^{-1} X + V^{-1} B \qquad (11)$$

В последното равенство полагаме:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = V^{-1} X, \quad \dot{Y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = V^{-1}\dot{X}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \dfrac{-b_1(\lambda_1 - a_{11}) + b_2 a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

след което матричното равенство (11) придобива вида:

$$\dot{Y} = \Lambda Y + C, \qquad (13)$$

което е еквивалентен запис на:

$$\dot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t) + c_1$$

$$\dot{y}_2(t) = \lambda_2 y_2(t) + c_2 \qquad (14)$$

Последните равенства явно показват, че ние успяхме да сведем първоначалната система от диференциални уравнения (1) до еквивалентната и система (14), която има предимство, че се състои от уравнения, всяко от които се решава отделно и независимо от другото. Всяко от тези уравнения е линейно, нехомогенно от първи ред и за решаването му прилагаме формулата за решаване на такова уравнение с една променлива:

$$y_1(t)=\left(y_1(0)+\frac{c_1}{\lambda_1}\right)e^{\lambda_1 t}-\frac{c_1}{\lambda_1}$$

$$y_2(t)=\left(y_2(0)+\frac{c_2}{\lambda_2}\right)e^{\lambda_2 t}-\frac{c_2}{\lambda_2} \qquad (15)$$

Връщаме се обратно в полагането, като използваме (12) и получаваме:

$X=VY$, с еквивалентен запис $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}} & \frac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$, откъдето и

$$x_1(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

$$x_2(t)=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}y_1(t)+\frac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}}y_2(t)$$

Заместваме от (15):

$$x_1(t)=\left(y_1(0)+\frac{c_1}{\lambda_1}\right)e^{\lambda_1 t}-\frac{c_1}{\lambda_1}+\left(y_2(0)+\frac{c_2}{\lambda_2}\right)e^{\lambda_2 t}-\frac{c_2}{\lambda_2}$$

$$x_2(t)=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}\left(\left(y_1(0)+\frac{c_1}{\lambda_1}\right)e^{\lambda_1 t}-\frac{c_1}{\lambda_1}\right)+\frac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}}\left(\left(y_2(0)+\frac{c_2}{\lambda_2}\right)e^{\lambda_2 t}-\frac{c_2}{\lambda_2}\right)$$

Заместваме c_1 и c_2 от (12) получаваме:

$$\begin{aligned}
x_1(t)&=\left(y_1(0)+\frac{b_1(\lambda_2-a_{11})-b_2a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}\right)e^{\lambda_1 t}-\frac{b_1(\lambda_2-a_{11})-b_2a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}+\\
&+\left(y_2(0)+\frac{-b_1(\lambda_1-a_{11})+b_2a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\right)e^{\lambda_2 t}-\frac{-b_1(\lambda_1-a_{11})+b_2a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\\
x_2(t)&=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}\left(\left(y_1(0)+\frac{b_1(\lambda_2-a_{11})-b_2a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}\right)e^{\lambda_1 t}-\frac{b_1(\lambda_2-a_{11})-b_2a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)}\right)+\\
&+\frac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}}\left(\left(y_2(0)+\frac{-b_1(\lambda_1-a_{11})+b_2a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\right)e^{\lambda_2 t}-\frac{-b_1(\lambda_1-a_{11})+b_2a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)}\right)
\end{aligned} \qquad (16)$$

От (12) имаме

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Y = V^{-1}X = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\dfrac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(t) - \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(t) \\ -\dfrac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(t) + \dfrac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(t) \end{bmatrix}$$

Следователно

$$y_1(t) = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(t) - \frac{\lambda_1 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(t)$$

$$y_2(t) = -\frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(t) + \frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(t)$$

За $t = 0$ получаваме

$$y_1(0) = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(0) - \frac{\lambda_1 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0)$$

$$y_2(0) = -\frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(0) + \frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0)$$

Заместваме $y_1(0)$ и $y_2(0)$ от последните две равенства в (16) и получаваме:

$$x_1(t) = \left(\frac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(0) - \frac{\lambda_1 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0) + \frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) e^{\lambda_1 t} - \frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} +$$

$$+ \left(-\frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(0) + \frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0) + \frac{-b_1(\lambda_1 - a_{11}) + b_2 a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) e^{\lambda_2 t} - \frac{-b_1(\lambda_1 - a_{11}) + b_2 a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$x_2(t) = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \left(\left(\frac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(0) - \frac{\lambda_1 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0) + \frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) e^{\lambda_1 t} - \frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} \left(\left(-\frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(0) + \frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0) + \frac{-b_1(\lambda_1 - a_{11}) + b_2 a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) e^{\lambda_2 t} - \frac{-b_1(\lambda_1 - a_{11}) + b_2 a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \right)$$

(16')

Равновесното състояние $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ на системата (1) се получава при $\dot{x}_1 = 0$ и $\dot{x}_2 = 0$. Замествайки в (1) получаваме:

$$a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1 = 0$$

$$a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2 = 0$$

Решавайки последната система от уравнения получаваме:

$$\bar{x}_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Случай 2. $\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12} a_{21} = 0$.

В този случай двата различни реални корена λ_1 и λ_2 се сливат в един и матрицата *A* ще притежава един *двоен реален корен*, т.е.

$$\hat{\lambda} = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \tag{17}$$

Тъй като в този случай съответстващите на собствените стойности λ_1 и λ_2 собствени вектори v_1 и v_2 ще бъдат линейно зависими, вече няма да е възможно посредством матрицата *V* да получим представяне на *A* от вида (30). Подобно представяне обаче все пак е възможно макар и с друга матрица вместо с V. Аналогичното на (30) представяне ще има вида:

$$A = W \Lambda W^{-1} \tag{18}$$

Матрицата *W* ще определяме в зависимост от стойностите на a_{12} и a_{21} и на матрицата Λ в следните три случая:

1. $\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{\lambda} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda} \end{bmatrix}$, ако $a_{12} = a_{21} = 0$.

2. $\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{\lambda} & 1 \\ 0 & \hat{\lambda} \end{bmatrix}$, ако $a_{12} \neq 0$.

3. $\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{\lambda} & 0 \\ 1 & \hat{\lambda} \end{bmatrix}$, ако $a_{21} \neq 0$

За 1. В този случай $W = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Тогава очевидно $A = \Lambda = \begin{bmatrix} \hat{\lambda} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda} \end{bmatrix}$ замествайки *A* в (23) или (24) получаваме:

$$\dot{x}_1(t) = \hat{\lambda}\, x_1(t) + b_1$$

$$\dot{x}_2(t) = \hat{\lambda}\, x_2(t) + b_2 \tag{19}$$

Т.е. системата от две диференциални уравнения, всяко, от които се решава отделно от другото. Решенията на (19) намираме като приложим отново формулата за решаване линейно диференциално уравнение с една променлива:

$$x_1(t)=\left(x_1(0)+\frac{b_1}{\hat{\lambda}}\right)e^{\hat{\lambda}t}-\frac{b_1}{\hat{\lambda}}$$

$$x_2(t)=\left(x_2(0)+\frac{b_2}{\hat{\lambda}}\right)e^{\hat{\lambda}t}-\frac{b_2}{\hat{\lambda}} \tag{20}$$

В последната система от две равенства можем да елиминираме $e^{\hat{\lambda}t}$ като умножим първото равенство с $\dfrac{1}{x_1(0)+\dfrac{b_1}{\hat{\lambda}}}$, а второто с $-\dfrac{1}{x_2(0)+\dfrac{b_2}{\hat{\lambda}}}$ и ги съберем:

$$\frac{x_1(t)}{x_1(0)+\dfrac{b_1}{\hat{\lambda}}}-\frac{x_2(t)}{x_2(0)+\dfrac{b_2}{\hat{\lambda}}}=-\frac{b_1}{\left(x_1(0)+\dfrac{b_1}{\hat{\lambda}}\right)\hat{\lambda}}+\frac{b_2}{\left(x_2(0)+\dfrac{b_2}{\hat{\lambda}}\right)\hat{\lambda}}$$

Последното равенство показва, че между $x_1(t)$ и $x_2(t)$ има линейна зависимост.

За 2. В този случай за матрицата W полагаме:

$$W=\begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ -\dfrac{a_{11}-a_{22}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

За обратната матрица получаваме:

$$W^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_{12}} & 0 \\ \dfrac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} & 1 \end{bmatrix}$$

Тя съществува, понеже $a_{12}\neq 0$.

Тогава с $\Lambda=\begin{bmatrix} \hat{\lambda} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda} \end{bmatrix}$ ще е в сила представянето $A=W\Lambda W^{-1}$. Оттук заместваме A в основното уравнение (4) и го умножаваме отляво с W^{-1}:

$$\dot{x}(t)=W\Lambda W^{-1}x(t)+b \text{ и } W^{-1}\dot{x}(t)=\Lambda W^{-1}x(t)+W^{-1}b$$

Полагаме $y(t)=W^{-1}x(t)$ и $C=W^{-1}B$ с:

$$\dot{Y}(t)=\begin{bmatrix}\dot{y}_1(t)\\ \dot{y}_2(t)\end{bmatrix},\qquad Y(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{b_1}{a_{12}}\\ \dfrac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}\cdot b_1+b_2\end{bmatrix}$$

И получаваме $\dot{Y}(t)=\Lambda Y(t)+C$ или

$$\dot{y}_1(t)=\hat{\lambda}\,y_1(t)+y_2(t)+c_1$$

$$\dot{y}_2(t)=\hat{\lambda}\,y_2(t)+c_2 \qquad (21)$$

Последното уравнение решаваме чрез формулата за уравнение с една променлива:

$$y_2(t)=\left(y_2(0)+\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)e^{\hat{\lambda}t}-\frac{c_2}{\hat{\lambda}} \qquad (22)$$

Замествайки $y_2(t)$ от (22) в (21) и получаваме нехомогенно диференциално уравнение от първи ред с променлив свободен член от вида $\dot{y}(t)+a(t)y(t)=b(t)$, което се решава по формулата:

$$y(t)=e^{-\int_0^t a(u)du}\left(y(0)+\int_0^t b(v)e^{\int_0^v a(u)du}dv\right)$$

Прилагаме тази формула за $a(t)=-\hat{\lambda}$, $b(t)=\left(y_2(0)-\dfrac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)e^{\hat{\lambda}t}-\dfrac{c_2}{\hat{\lambda}}+c_1$:

$$y_1(t)=e^{-\hat{\lambda}t}\left(y_1(0)+\int_0^t\left(\left(y_2(0)-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)e^{\hat{\lambda}v}-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}+c_1\right)e^{-\hat{\lambda}v}dv\right)$$

$$y_1(t)=e^{-\hat{\lambda}t}\left(y_1(0)+\left(y_2(0)-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)t+\left(c_1-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)\int_0^t e^{-\hat{\lambda}t}dv\right)$$

$$y_1(t)=e^{-\hat{\lambda}t}\left(y_1(0)+\left(y_2(0)-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)t-\frac{1}{\hat{\lambda}}\left(c_1-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)e^{-\hat{\lambda}v}\Big|_{v=0}^{t}\right)$$

$$y_1(t)=e^{-\hat{\lambda}t}\left(y_1(0)+\left(y_2(0)-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)t-\frac{1}{\hat{\lambda}}\left(c_1-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)e^{-\hat{\lambda}t}+\frac{1}{\hat{\lambda}}\left(c_1-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)\right)$$

$$y_1(t)=e^{-\hat{\lambda}t}\left(y_1(0)+\left(y_2(0)-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)t+\left(\frac{c_1}{\hat{\lambda}}-\frac{c_2}{\hat{\lambda}^2}\right)\right)-\left(\frac{c_1}{\hat{\lambda}}-\frac{c_2}{\hat{\lambda}^2}\right)$$

Връщайки обратно полагането $y(t)=W^{-1}x(t)$ ще получим $x(t)=W\,y(t)$, което в нематричен и по-конкретен вид ще има вида:

$$x_1(t)=a_{12}y_1(t)$$

$$x_2(t)=-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}y_1(t)+y_2(t)$$

Въз основа на (21) и (22) получаваме окончателно

$$x_1(t)=a_{12}\left(e^{-\hat{\lambda}t}\left(y_1(0)+\left(y_2(0)-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)t+\left(\frac{c_1}{\hat{\lambda}}-\frac{c_2}{\hat{\lambda}^2}\right)\right)-\left(\frac{c_1}{\hat{\lambda}}-\frac{c_2}{\hat{\lambda}^2}\right)\right) \qquad (23)$$

$$x_2(t)=-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\left(e^{-\hat{\lambda}t}\left(y_1(0)+\left(y_2(0)-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)t+\left(\frac{c_1}{\hat{\lambda}}-\frac{c_2}{\hat{\lambda}^2}\right)\right)-\left(\frac{c_1}{\hat{\lambda}}-\frac{c_2}{\hat{\lambda}^2}\right)\right)+\left(y_2(0)+\frac{c_2}{\hat{\lambda}}\right)e^{\hat{\lambda}t}-\frac{c_2}{\hat{\lambda}}$$

за $c_1=\frac{b_1}{a_{12}}$, $\qquad c_2=\frac{(a_{11}-a_{22})b_1}{2a_{12}}+b_2$

$$y_1(0)=\frac{x_1(0)}{a_{12}}, \qquad y_2(0)=x_2(0)+\frac{(a_{11}+a_{22})}{2a_{12}}\cdot x_1(0)$$

За 3. Този случай $a_{21}\neq 0$ се свежда до предишния $a_{21}\neq 0$, като се разместят местата на $x_1(t)$ и $x_2(t)$, а именно от:

$$\dot{x}_1(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+b_1$$

$$\dot{x}_2(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+b_2$$

чрез разместване получаваме:

$$\dot{x}_2(t)=a_{22}x_2(t)+a_{21}x_1(t)+b_2$$

$$\dot{x}_1(t)=a_{12}x_2(t)+a_{11}x_1(t)+b_1$$

Ако тук въведем нови означения:

$$x_1^*(t)=x_2(t),\ x_2^*(t)=x_1(t),\ b_1^*=b_2,\ b_2^*=b_1 \qquad (24)$$

Получаваме системата:

$$\dot{x}_1^*(t)=a_{11}^*x_1^*(t)+a_{12}^*x_2^*(t)+b_1^* \qquad (25)$$

$\dot{x}_2^*(t)=a_{12}^*x_1^*(t)+a_{22}^*x_2^*(t)+b_2^*$, с $a_{12}^*\neq 0$, понеже $a_{12}^*=a_{21}$, а $a_{21}\neq 0$ по условие.

Прилагаме цялата процедура за случай 2, към (25) и получаваме следния аналог на (23):

$$x_1^*(t) = a_{12}^*\left(e^{-\hat{\lambda}t}\left(y_1^*(0) + \left(y_2^*(0) - \frac{c_2^*}{\hat{\lambda}}\right)t + \left(\frac{c_1^*}{\hat{\lambda}} - \frac{c_2^*}{\hat{\lambda}^2}\right)\right) - \left(\frac{c_1^*}{\hat{\lambda}} - \frac{c_2^*}{\hat{\lambda}^2}\right)\right)$$

$$x_2^*(t) = -\frac{a_{11}^* - a_{22}^*}{2}\left(e^{-\hat{\lambda}t}\left(y_1^*(0) + \left(y_2^*(0) - \frac{c_2^*}{\hat{\lambda}}\right)t + \left(\frac{c_1^*}{\hat{\lambda}} - \frac{c_2^*}{\hat{\lambda}^2}\right)\right) - \left(\frac{c_1^*}{\hat{\lambda}} - \frac{c_2^*}{\hat{\lambda}^2}\right)\right) + \left(y_2^*(0) + \frac{c_2^*}{\hat{\lambda}}\right)e^{\hat{\lambda}t} - \frac{c_2^*}{\hat{\lambda}}$$

за $c_1^* = \dfrac{b_1^*}{a_{12}^*} = \dfrac{b_2}{a_{21}}$, $\quad c_2^* = \dfrac{(a_{11}^* - a_{22}^*)b_1^*}{2a_{12}^*} + b_2^* = \dfrac{a_{22} - a_{11}}{2a_{21}} \cdot b_2 + b_1$

$$y_1^*(0) = \frac{x_1^*(0)}{a_{12}^*} = \frac{x_2(0)}{a_{21}}, \quad y_2^*(0) = x_2^*(0) + \frac{(a_{11}^* + a_{22}^*)}{2a_{12}^*} \cdot x_1^*(0) = x_1(0) + \frac{a_{11} + a_{22}}{2a_{21}} \cdot x_2(0)$$

В последните равенства за $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$ заместваме (24) като разместваме и местата им:

(26)

Равенствата (26) са решенията за 3.

Случай 3. $\left(\dfrac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}a_{21} < 0$.

В този случай матрицата *A* притежава *два различни комплексно спрегнати корена* $\lambda_1 = \lambda_{re} + i\lambda_{im}$ и $\lambda_2 = \lambda_{re} - i\lambda_{im}$, където $\lambda_{re} = \dfrac{a_{11} + a_{22}}{2}$ е реалната, а $\lambda_{im} = \sqrt{\left(\dfrac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}a_{21}}$ е имагинерната част като с i сме означили имагинерната единица. Един собствен вектор v_1 съответстващ на собствената стойност λ_1 можем да получим от матричното уравнение $(A - E\lambda_1)v_1 = 0$, което записано по-детайлно изглежда така:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - (\lambda_{re} + i\lambda_{im}) & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - (\lambda_{re} + i\lambda_{im}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11}^{re} + iv_{11}^{im} \\ v_{21}^{re} + iv_{21}^{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ или:}$$

$$(a_{11} - (\lambda_{re} + i\lambda_{im}))(v_{11}^{re} + iv_{11}^{im}) + a_{12}(v_{21}^{re} + iv_{21}^{im}) = 0$$

$$a_{12}(v_{11}^{re} + iv_{11}^{im}) + (a_{22} - (\lambda_{re} + \lambda_{im}))(v_{21}^{re} + iv_{21}^{im}) = 0$$

Без ограничение на общността може да положим:

$$v_{11}^{im} = 1, \qquad v_{21}^{im} = 0$$

Тогава:

$$\left(a_{11}-\left(\lambda_{re}+i\lambda_{im}\right)\right)\left(v_{11}^{re}+i\right)+a_{12}v_{21}^{re}=0$$

$$a_{12}\left(v_{11}^{re}+i\right)+\left(a_{22}-\left(\lambda_{re}+\lambda_{im}\right)\right)v_{21}^{re}=0$$

След елементарни преобразования получаваме последователно:

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}v_{11}^{re}+a_{11}i-\lambda_{re}v_{11}^{re}-\lambda_{re}i-\lambda_{im}v_{11}^{re}\,i+\lambda_{im}+a_{12}v_{21}^{re}=0 \\ a_{12}v_{11}^{re}+a_{12}i+a_{22}v_{21}^{re}-\lambda_{re}v_{21}^{re}-\lambda_{im}v_{21}^{re}\,i=0 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}v_{11}^{re}-\lambda_{re}v_{11}^{re}+\lambda_{im}+a_{12}v_{21}^{re}+\left(a_{11}-\lambda_{re}-\lambda_{im}v_{11}^{re}\right)i=0 \\ a_{12}v_{11}^{re}+a_{22}v_{21}^{re}-\lambda_{re}v_{21}^{re}+\left(a_{12}-\lambda_{im}v_{21}^{re}\right)i=0 \end{array}\right.$$

Реалните и имагинерните части трябва да са нули:

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}v_{11}^{re}-\lambda_{re}v_{11}^{re}+\lambda_{im}+a_{12}v_{21}^{re}=0\rightarrow\left(a_{11}-\lambda_{re}\right)v_{11}^{re}+a_{12}v_{21}^{re}+\lambda_{im}=0 \\ a_{12}v_{11}^{re}+a_{22}v_{21}^{re}-\lambda_{re}v_{21}^{re}=0\rightarrow a_{12}v_{11}^{re}+\left(a_{22}-\lambda_{re}\right)v_{21}^{re}=0 \\ a_{11}-\lambda_{re}-\lambda_{im}v_{11}^{re}=0\rightarrow v_{11}^{re}=\dfrac{a_{11}-\lambda_{re}}{\lambda_{im}} \\ a_{12}-\lambda_{im}v_{21}^{re}=0\rightarrow v_{11}^{re}=\dfrac{a_{12}}{\lambda_{im}} \end{array}\right.$$

Матрицата V конструираме по следния начин:

$$V=\begin{bmatrix} v_{11}^{re} & v_{11}^{im} \\ v_{21}^{re} & v_{21}^{im} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{a_{11}-\lambda_{re}}{\lambda_{im}} & 1 \\ \dfrac{a_{12}}{\lambda_{im}} & 0 \end{bmatrix} \qquad (27)$$

За обратната матрица получаваме:

$$V^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\lambda_{im}}{a_{12}} \\ 1 & -\dfrac{a_{11}-\lambda_{re}}{a_{12}} \end{bmatrix} \qquad (28)$$ Може

да се провери, че $VV^{-1}=E$. Ако изберем:

$$B=\begin{bmatrix} \lambda_{re} & -\lambda_{im} \\ \lambda_{im} & \lambda_{re} \end{bmatrix},$$

за матрицата A ще стане възможно представянето $A=VBV^{-1}$.

Този израз за A заместваме в уравнението:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+b\Rightarrow\dot{x}(t)=VBV^{-1}x(t)+b$$

Умножаваме отляво двете страни на това уравнение с V^{-1}:

$$V^{-1}\dot{x}(t) = BV^{-1}x(t) + V^{-1}b$$

Полагаме:

$$y(t) = V^{-1}x(t) \text{ и } c = V^{-1}b, \tag{29}$$

където:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{11} - \lambda_{re}}{a_{12}} \cdot b_1 \\ b_1 - \frac{a_{11} - \lambda_{re}}{a_{12}} \cdot b_2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Двумерната динамична система $\dot{y}(t) = by(t) + c$ може да бъде представена във вид на двумерно нехомогенно диференциално уравнение от първи ред относно траекторията $z(t)$ в следния вид:

$$\dot{z}(t) = \lambda_1 z(t) + (c_1 + i\,c_2),$$

като всъщност сме заместили:

$y(t)$ със $z(t) = y_1(t) + i\,y_2(t)$ (31)

$\dot{y}(t)$ със $\dot{z}(t) = \dot{y}_1(t) + i\,\dot{y}_2(t)$

c със $c_1 + i\,c_2$

$B\,y(t)$ със $\lambda_1 z$, където:

$$\lambda_1 z = (\lambda_{re} + i\lambda_{im})(y_1(t) + i\,y_2(t)) = (\lambda_{re} y_1(t) - \lambda_{im} y_2(t)) + i\,(\lambda_{im} y_1(t) + \lambda_{re} y_2(t))$$

$$B\,y(t) = \begin{bmatrix} \lambda_{re} y_1(t) - \lambda_{im} y_2(t) \\ \lambda_{im} y_1(t) + \lambda_{re} y_2(t) \end{bmatrix}$$

Нехомогенното диференциално уравнение от първи ред в комплексни числа относно $z(t)$ се решава както нехомогенното диференциално уравнение от първи ред в реални числа с помощта на извесната формула:

$$z(t) = \left(z(0) + \frac{c_1 + i\,c_2}{\lambda_1} \right) e^{\lambda_1 t} - \frac{c_1 + i\,c_2}{\lambda_1}, \tag{32}$$

където $z(0) = y_1(0) + i\,y_2(0)$ е стойността на $z(t)$ за началния момент $t = 0$.

Преобразуваме равенство (32) с цел групиране реалната и имагинерната част:

$$z(t) = \left(y_1(0) + i\,y_2(0) + \frac{(c_1 + i\,c_2)\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) e^{(\lambda_{re} + i\,\lambda_{im})t} - \frac{(c_1 + i\,c_2)\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \tag{33}$$

$$z(t)=\left(y_1(0)+i\,y_2(0)+\frac{(c_1+i\,c_2)(\lambda_{re}-i\lambda_{im})}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)e^{\lambda_{re}t+i\lambda_{im}}-\frac{(c_1+i\,c_2)(\lambda_{re}-i\lambda_{im})}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}$$

$$z(t)=\left(y_1(0)+i\,y_2(0)+\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}+(c_2\lambda_{re}-c_1\lambda_{im})i}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)e^{\lambda_{re}t}(\cos\lambda_{im}t+i\sin\lambda_{im}t)$$
$$-\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}+(\lambda_{re}c_2-\lambda_{im}c_1)i}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}$$

$$z(t)=\left(y_1(0)+i\,y_2(0)+\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}+\frac{c_2\lambda_{re}-c_1\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\cdot i\right)\left(e^{\lambda_{re}t}\cos\lambda_{im}t+i\,e^{\lambda_{re}t}\sin\lambda_{im}t\right)-\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}$$
$$-\frac{c_2\lambda_{re}-c_1\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\cdot i$$

$$z(t)=\left(\left(y_1(0)+\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)+\left(y_2(0)+\frac{c_2\lambda_{re}-c_1\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)\cdot i\right)\left(e^{\lambda_{re}t}\cos\lambda_{im}t+i\,e^{\lambda_{re}t}\sin\lambda_{im}t\right)-\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}$$
$$-\frac{c_2\lambda_{re}-c_1\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\cdot i$$

$$z(t)=e^{\lambda_{re}t}\cos\lambda_{im}t\left(y_1(0)+\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)-e^{\lambda_{re}t}\sin\lambda_{im}t\left(y_2(0)+\frac{c_2\lambda_{re}-c_1\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)+$$
$$+\left(e^{\lambda_{re}t}\sin\lambda_{im}t\left(y_1(0)+\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)+e^{\lambda_{re}t}\cos\lambda_{im}t\left(y_2(0)+\frac{c_2\lambda_{re}-c_1\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)\right)i-$$
$$-\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\cdot i$$

Сравнявайки реалните и имагинерните части на (32) и (33) получаваме:

$$y_1(t)=e^{\lambda_{re}t}\left(\left(y_1(0)+\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)\cos\lambda_{im}t-\left(y_2(0)+\frac{c_2\lambda_{re}-c_1\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)\sin\lambda_{im}t\right)-\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}$$

(34)

$$y_2(t)=e^{\lambda_{re}t}\left(\left(y_1(0)+\frac{c_1\lambda_{re}+c_2\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)\sin\lambda_{im}t+\left(y_2(0)+\frac{c_2\lambda_{re}-c_1\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}\right)\cos\lambda_{im}t\right)-\frac{c_2\lambda_{re}-c_1\lambda_{im}}{\lambda_{re}^2+\lambda_{im}^2}$$

За да се върнем обратно от $y(t)$ към $x(t)$ ще използваме преобразуването:

$$x(t)=Vy(t) \tag{35}$$

което получаваме от (29). Имайки предвид (27) получаваме:

$$x_1(t)=\frac{a_{11}\lambda_{re}}{\lambda_{im}}y_1(t)+y_2(t)$$

$$x_2(t)=\frac{a_{12}}{\lambda_{im}}y_1(t) \tag{36}$$

В частност, за $t = 0$ ще имаме:

$$\left| \begin{aligned} & x_1(0) = \frac{a_{11}\lambda_{re}}{\lambda_{im}} \cdot y_1(0) + y_2(0) \\ & x_2(0) = \frac{a_{12}}{\lambda_{im}} \cdot y_1(0) \end{aligned} \right. \tag{37}$$

Решаваме последната система от уравнения относно $y_1(0)$ и $y_2(0)$:

$$\left| \begin{aligned} & y_1(0) = \frac{\lambda_{im}}{a_{12}} \cdot x_2(0) \\ & y_2(0) = x_1(0) - \frac{a_{11}\lambda_{re}}{\lambda_{im}} \cdot \frac{\lambda_{im}}{a_{12}} \cdot x_2(0) = x_1(0) - \frac{a_{11}\lambda_{re}}{a_{12}} \cdot x_2(0) \end{aligned} \right. \tag{38}$$

Замествайки стойностите на $y_1(0)$ и $y_2(0)$ от (38) в (34) и стойностите на $y_1(t)$ и $y_2(t)$ от (34) в (36) получаваме окончателните изрази за $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

2. Стабилност на равновесните състояния на динамична система зададена посредством две линейни диференциални уравнения от първи ред с постоянни коефициенти.

Различните видове стабилност или нестабилност на системата зависят от матрицата A и по-точно от нейните собствени стойности. Да разгледаме двумерната линейна динамична стопанска система зададена чрез:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B \tag{1}$$

като сме означили:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \qquad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Казваме, че състоянието $X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ е ***равновесно*** за динамичната система (1), ако съществува траектория на тази система, т.е. нейно решение $X(t)$, за което е в сила:

$$X(t) \equiv X^* \text{ т.е. } \left| \begin{aligned} & x_1(t) \equiv x_1^* \\ & x_2(t) \equiv x_2^* \end{aligned} \right., \text{ за всяко } t \geq 0. \tag{2}$$

Ако $X(t) \equiv X^*$ е равновесно решение, то $\dot{X}(t) \equiv 0$. Заместваме го в (1) и получаваме $AX^* + B = 0$. Ако матрицата A е обратима, т.е. съществува обратната матрица A^{-1}, то за равновесната точка получаваме:

$$X^* = -A^{-1}B \tag{3}$$

Равновесното състояние X^* можем да получим и в нематричен вид по следния начин. Замествайки $\dot{x}_1(t)=0$ и $\dot{x}_2(t)=0$ в (21) от предходния раздел получаваме:

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* + b_2 = 0 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* = -b_1 \\ a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* = -b_2 \end{vmatrix}$$

Прилагайки правилото на Крамер за решаване на тази система от уравнения и ако $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ получаваме:

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} -b_1 & a_{12} \\ -b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-b_1a_{22}+b_2a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

$$(4)$$

$$x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -b_1 \\ a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-b_2a_{11}+b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

На равновесното състояние (4) ще съответства решението на системата, което се получава за $\dot{x}(t)=0$, а това ще бъдат правите:

$$x_1(t) \equiv x_1^* := \frac{-b_1a_{22}+b_2a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \text{ за } \dot{x}_1(t)=0 \qquad (5)$$

$$x_2(t) \equiv x_2^* := \frac{-b_2a_{11}+b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \text{ за } \dot{x}_2(t)=0 \qquad (6)$$

Правата (5) за $\dot{x}_1(t)=0$ е успоредна на оста Ox_2, а правата (6) за $\dot{x}_2(t)=0$ е успоредна на оста Ox_1. Двете прави се пресичат в стационарната точка x^*.

Казваме, че динамичната система (1) е:

- *глобално стабилна*, ако всяка траектория $X(t)$ независимо от началното и положение $X(0)$, клони към равновесната точка X^*, когато времето t клони към безкрайност, т.е. $X(t)\to X^*$, $t\to\infty$.
- *частично стабилна*, ако само за част от началните положения $X(0)$ за траекториите $X(t)$ на системата е в сила, че $X(t)\to X^*$ при $t\to\infty$.
- *глобално нестабилна*, ако за всяко начално положение $X(0)$, различно от равновесното състояние X^*, траекторията е разходяща при $t\to\infty$.

- *периодична*, ако независимо от избора на начално положение $X(0)$, траекторията $X(t)$ през крайни интервали от време преминава периодично през равновесното състояние $X*$.

Следващите две теореми показват, че различните видове стабилност зависят само от матрицата *А* и по-точно от нейните собствени стойности.

Теорема 1. Нехомогенната динамична система

$$\dot{X} = AX + B$$

е точно тогава глобално стабилна, частично стабилна, глобално нестабилна или периодична, когато хомогенната динамична система $\dot{X} = AX$ е съответно глобално стабилна, частично стабилна, глобално нестабилна или периодична.

Теорема 2. Ако A е обратима матрица със собствени стойности λ_1 и λ_2, то динамичната система $\dot{X} = AX + B$ притежава равновесно състояние $X* = -A^{-1}B$, за което са възможни следните случаи:

	Свойства на собствените стойности λ_1 и λ_2 на матрицата А		Стабилност на динамичната система	Вид на равновесното състояние $X* = -A^{-1}B$
1	Реални	$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	Глобално стабилна	Стабилен възел
2	Реални	$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Частично стабилна	Седловинна точка
3	Реални	$0 < \lambda_2 < \lambda_1$	Глобално нестабилна	Нестабилен възел
4	Реални	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Глобално стабилна	Стабилен възел
5	Реални	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Глобално нестабилна	Нестабилен възел
6	Комплексни	$\lambda_{re} < 0$	Глобално стабилна	Стабилна спирална точка
7	Комплексни	$\lambda_{re} = 0$	Периодична	Център или фокус
8	Комплексни	$\lambda_{re} > 0$	Глобално нестабилна	Нестабилна спирална точка

Теорема 2 можем да преформулираме в следната:

Теорема 3. (Такаяма (Takayama, 1994), стр. 405).

Едно равновесно състояние е:

I. *Глобално стабилно*, тогава и само тогава когато и двете собствени стойности λ_1 и λ_2 са реални и отрицателни или и двете са комплексни, но имат отрицателни реални части.

II. *Глобално нестабилно*, тогава и само тогава когато и двете собствени стойности λ_1 и λ_2 са реални и положителни или и двете са комплексни, но имат положителни реални части.

III. *Периодично стабилно* (*център или фокус)* (фазовите траектории са концентрични, затворени криви, обикалящи в орбити около центъра, без да се доближават или отдалечават от него), тогава и само тогава, когато и двете собствени стойности са комплексни и чисто имагинерни, т. е. с нулеви реални части.

IV. *Частично стабилно (седловинно)*, тогава и само тогава, когато и двете собствени стойности λ_1 и λ_2 са реални, като едната е отрицателна, а другата е положителна.

Теорема 3. можем отново да преформулираме в следната теорема 4:

Теорема 4. Едно равновесно състояние е:

I. *Глобално стабилно*, тогава и само тогава когато за собствените стойности λ_1 и λ_2 са изпълнени условията:

$\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

II. *Глобално нестабилно*, тогава и само тогава, когато за собствените стойности λ_1 и λ_2 са изпълнени условията:

$\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

III. *Периодично стабилно* (*център или фокус)* (фазовите траектории са концентрични, затворени криви, обикалящи в орбити около центъра, без да се доближават или отдалечават от него), тогава и само тогава, когато за собствените стойности λ_1 и λ_2 са изпълнени условията:

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

IV. *Частично стабилно (седловинно)*, тогава и само тогава, когато за собствените стойности λ_1 и λ_2 е в сила:

$\lambda_1 \lambda_2 < 0$

Да припомним, че равенство (27) ни дава собствени стойности λ_1 и λ_2 изразени чрез елементите на матрицата $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ последния начин:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)}$$

Не е трудно да пресметнем, че:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

По дефиниция обаче, следата и детерминантата на матрицата $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ са съответно равни на:

$$traceA = a_{11} + a_{22}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Следователно

$$\lambda_1 + \lambda_2 = traceA$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det A$$

Не е трудно да забележим, че последните две равенства ни дават възможност да преформулираме теорема 4 в следния по-удобен за използване вид:

Теорема 5. Равновесното състояние на една линейна динамична система с матрица A е:

I. *Глобално стабилно*, тогава и само тогава когато: $traceA < 0$, $\det A > 0$

II. *Глобално нестабилно*, тогава и само тогава когато: $traceA > 0$, $\det A > 0$

III. *Периодично стабилно (център или фокус)* (фазовите траектории са концентрични, затворени криви, обикалящи в орбити около центъра, без да се доближават или отдалечават от него), тогава и само тогава, когато: $traceA = 0$, $\det A > 0$

IV. *Частично стабилно (седловинно)*, тогава и само тогава, когато: $\det A < 0$

Последната теорема изчерпва всички случаи на стабилност, понеже предположението $\det A = 0$ е изключено още като първоначално предположение. Тя ни показва, че за да определим вида на стабилност на едно равновесие не е необходимо да пресмятаме собствените стойности на матрицата A, а е достатъчно да пресметнем детерминантата и следата и.

3. Класификация на особените точки за система от две линейни диференциални уравнения от първи ред с постоянни коефициенти.

Да предположим, че

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}, \quad \tilde{x} \in R^2, \quad \tilde{A} : R^2 \to R^2 \qquad (1)$$

е хомогенна система от две линейни диференциални уравнения от първи ред с постоянни коефициенти.

Случай 1. Корените λ_1 и λ_2 на характеристичното уравнение са реални и различни и $\lambda_1 < \lambda_2$. В този случай системата от уравненията (1) се трансформира в система от две отделни уравнения, всяко от които се решава отделно като се използва формулата от раздел 1. Резултатите в отделните случаи са нагледно представени на фигура 1, 2 и 3.

Случай 2. Корените λ_1 и λ_2 на характеристичното уравнение са комплексни и

$$\lambda_1 = \alpha + i\omega$$
$$\lambda_2 = \alpha - i\omega \qquad (2)$$

По формулата на Ойлер получаваме

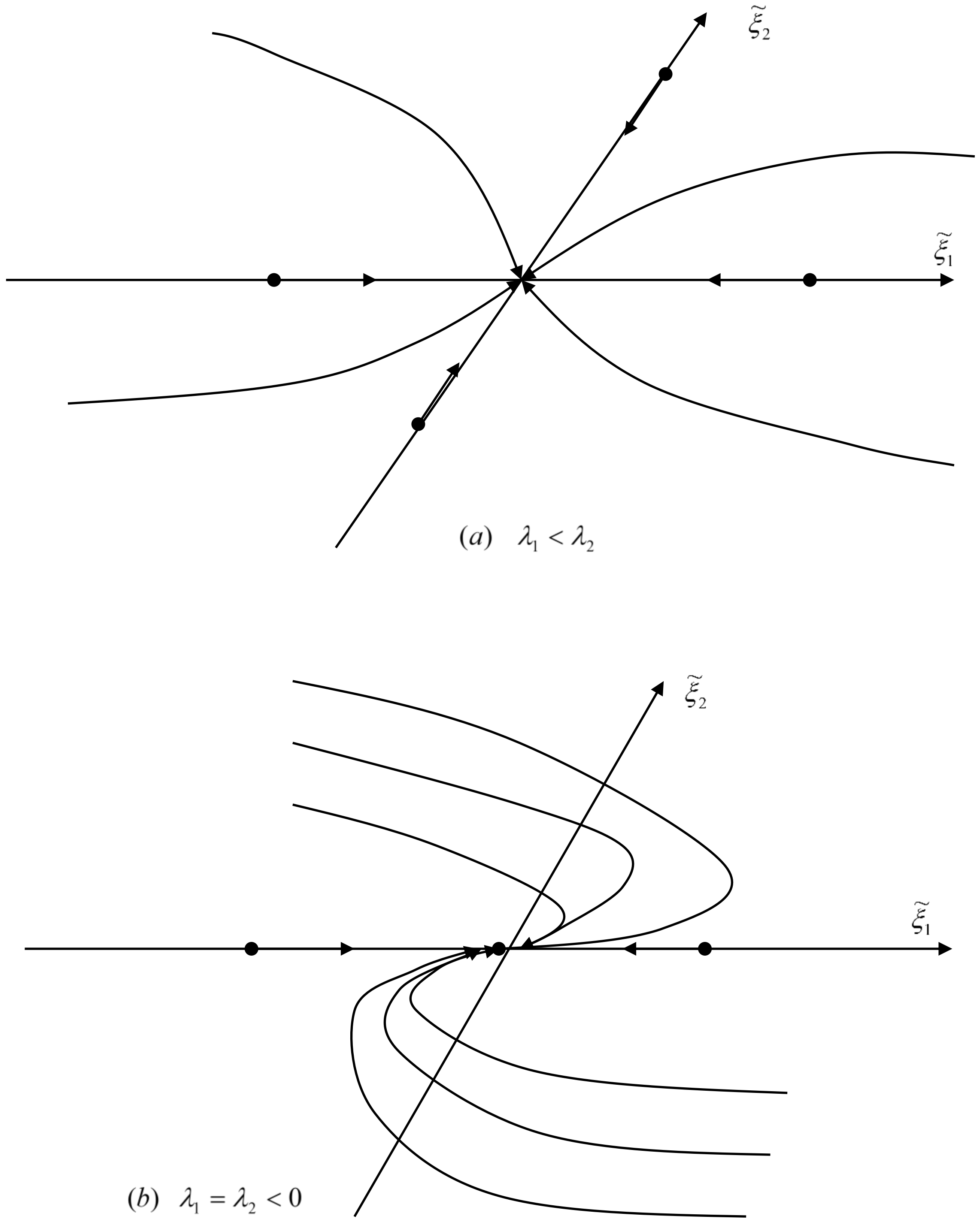
$$e^{\lambda_{11,2}t} = e^{(\alpha \pm i\omega)t} = e^{\alpha t} e^{\pm i\omega t} = e^{\alpha t}(\cos \omega t \pm i \sin \omega t) \qquad (3)$$

В този случай фазовият поток на системата от уравнения (1) представлява ***свиване*** при $\alpha < 0$ или ***разтягане*** при $\alpha > 0$ с големина $e^{\alpha t}$ и ***въртене*** на ъгъл ωt, както е показано на фигура 3 а) и в). С нарастването на t, интегралната траектория $\tilde{x}(t) = e^{\lambda t}\tilde{x}_0$ при $\alpha < 0$ и $\omega > 0$ ще се доближава до началото на координатната система, извършвайки кръгово постъпателно движение в посока противоположна на на часовниковата стрелка, както това е показано на фигура 3 а). При $\alpha < 0$ и $\omega > 0$ кръговото постъпътелно движение ще отдалечава кривата от началото, както това е показано на фигура 3 в).

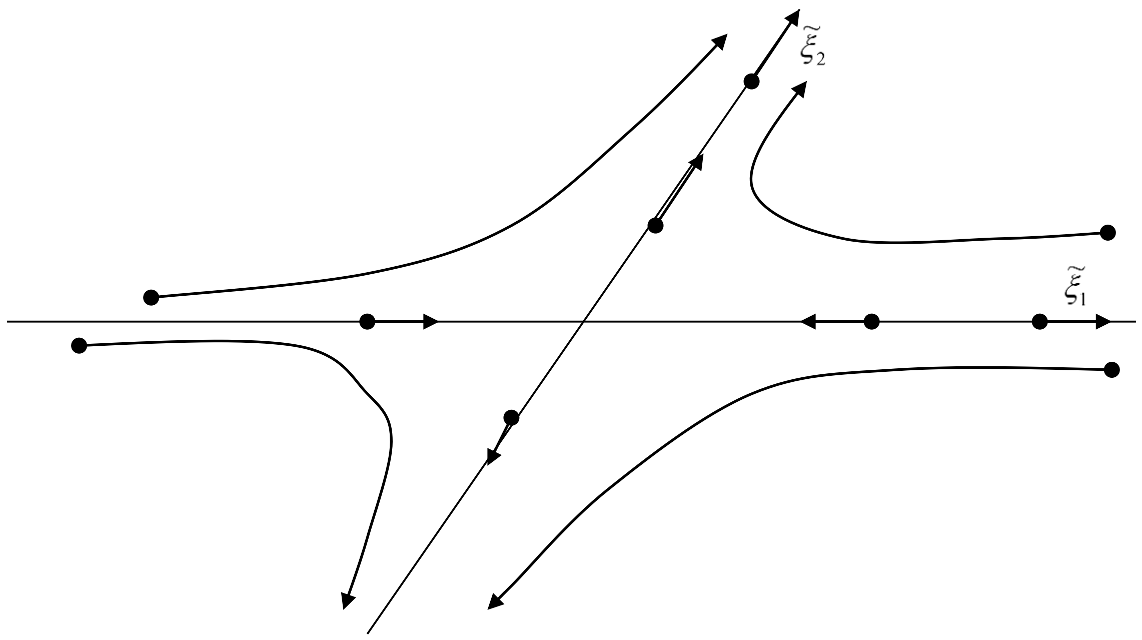
В полярни координати, кривата се изразява чрез уравненията

$$r = e^{k\varphi},\ k = \frac{\alpha}{\omega},\ \text{или}\ \varphi = \frac{1}{k}\ln r, \qquad (4)$$

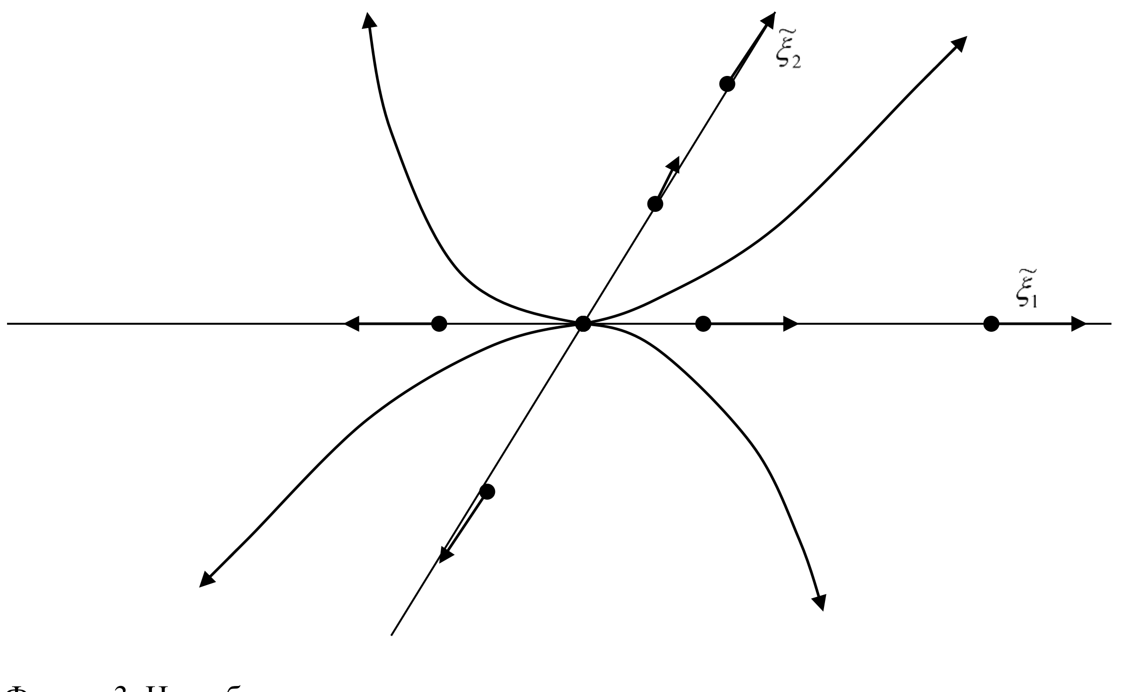
Което се нарича логаритмична спирала. За различните комбинации на знаците на α и ω се получават различни логаритмични спирали, които нагледно са показани на фигура 4 и 5.



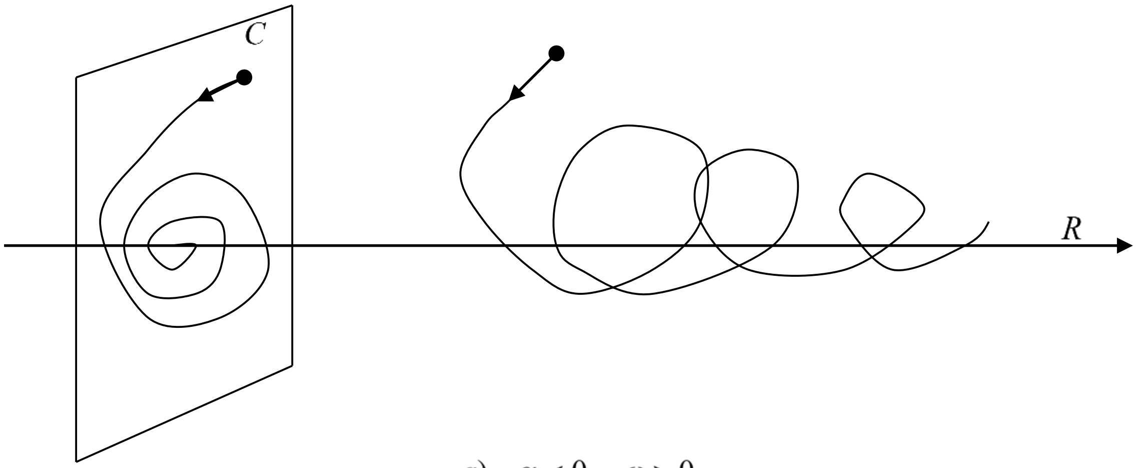
Фигура 1. Стабилни възли



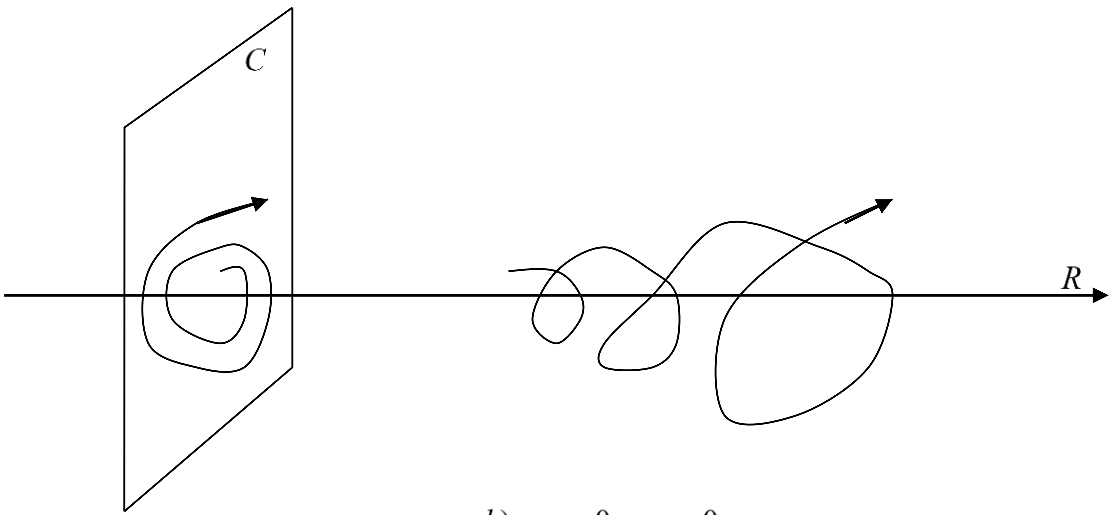
Фигура 2. Седловинен (частично стабилен) възел



Фигура 3. Нестабилен възел

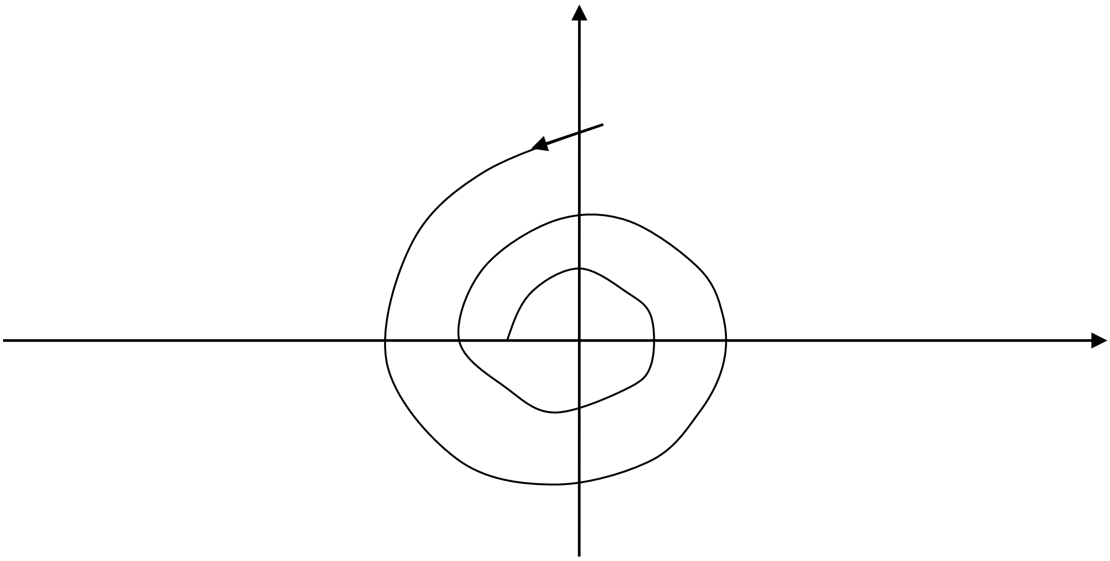


$a)\quad \alpha < 0,\quad \omega > 0$

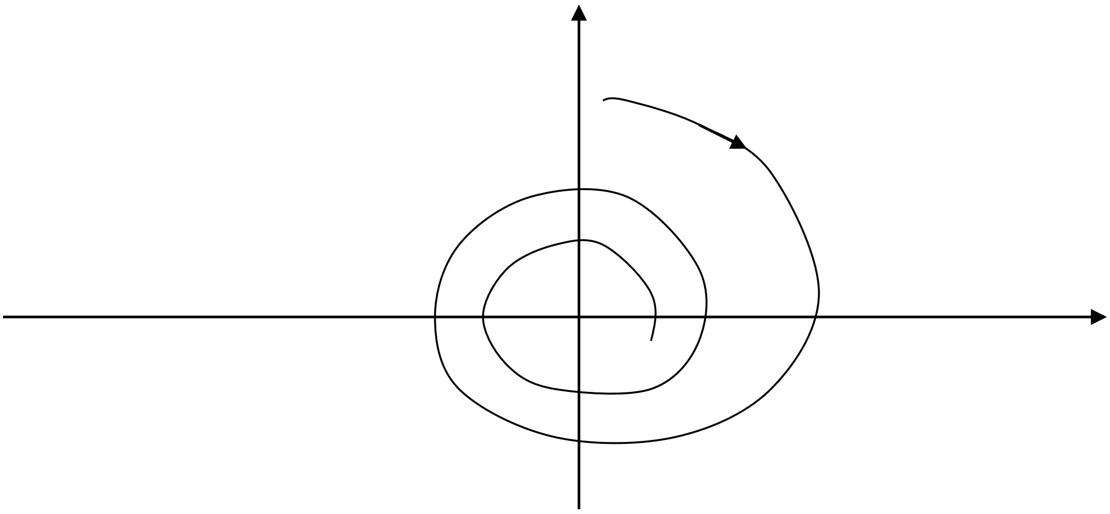


$b)\quad \alpha > 0,\quad \omega > 0$

Фигура 3. Фазови и интегрални криви на системата от уравнения (1).

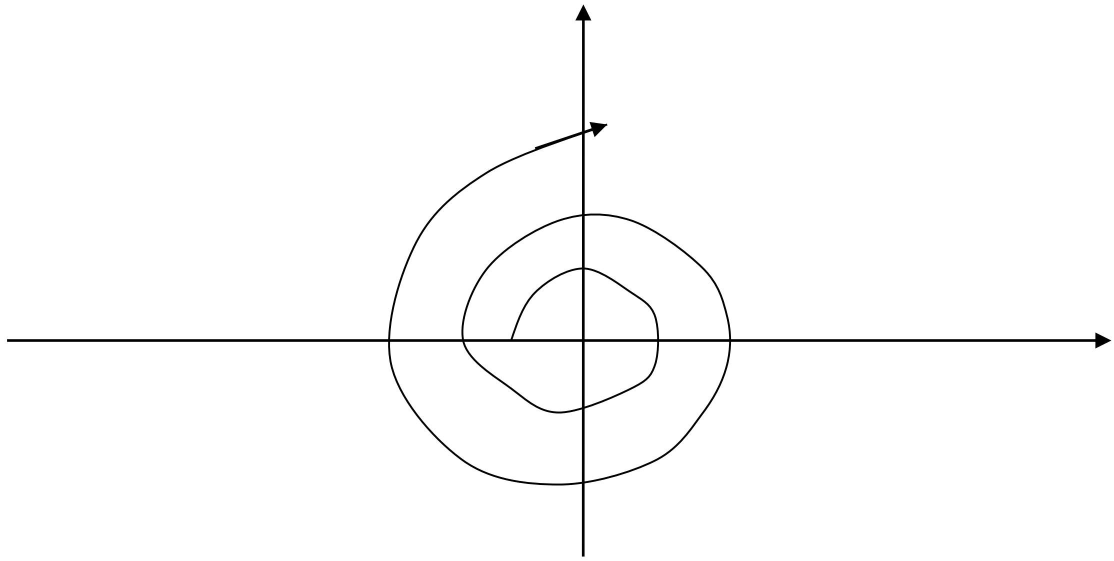


$a) \quad \alpha < 0, \quad \omega > 0$

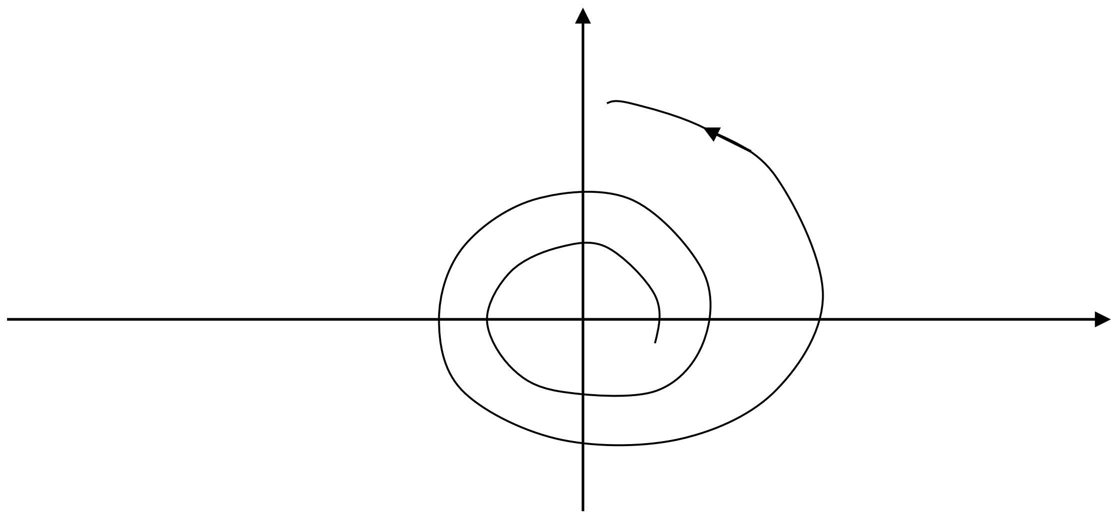


$b) \quad \alpha < 0, \quad \omega < 0$

Фигура 4 Стабилни фокуси.



$a) \quad \alpha < 0, \quad \omega < 0$



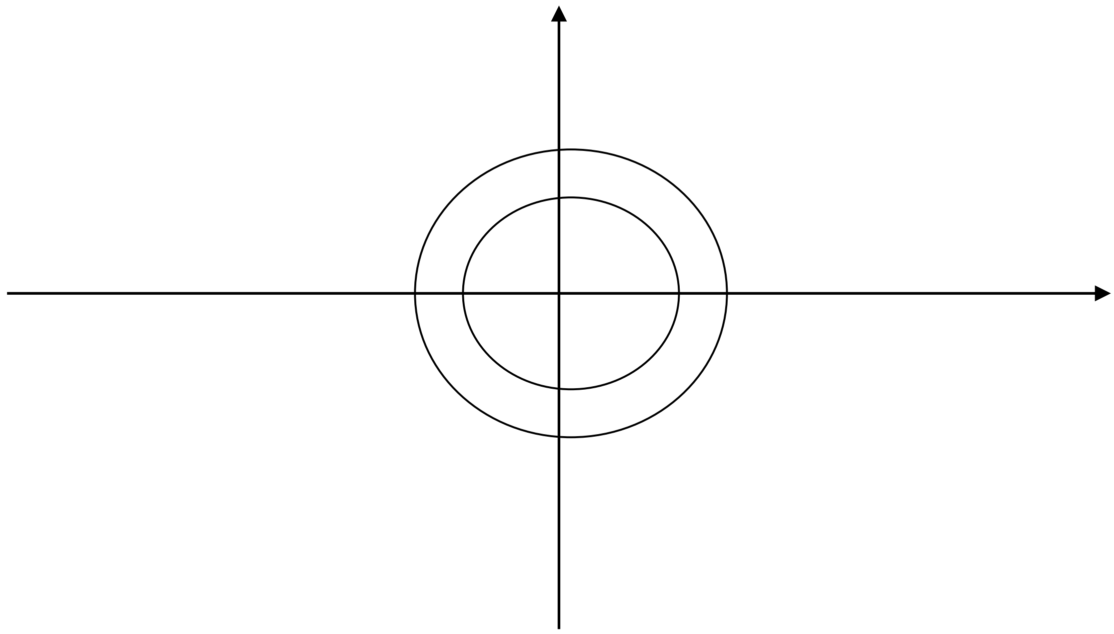
$b) \quad \alpha > 0, \quad \omega > 0$

Фигура 4 Нестабилни фокуси.

Във всички тези случаи, с изключение на $\lambda = 0$, точката $\tilde{x} = \tilde{0}$ е единствената неподвижна точка на фазовия поток и единствената особена точка на системата от уравнения (1). Тази особена точка се нарича ***фокус***.

При предположение, че $\alpha \neq 0$, $\omega \neq 0$; ако $\alpha < 0$, то $\tilde{x}(t) \to \tilde{0}$, при $t \to 0$ и фокусът е устойчив, ако $\alpha > 0$, то фокусът е неустойчив.

При $\alpha = 0$, $\omega \neq 0$ траекториите са окръжности, а особената точка е техния център, понеже $\tilde{x}(t) = \cos \omega t + i \sin \omega t$ (фигура 6)



Фигура 6. Център

В комплексната равнина C да означим $z = x + iy$ и да проследим изменението на реалната и имагинерната част $x = x(t)$ и $y = y(t)$. От формулата на Ойлер получаваме:

$$x(t) = re^{\alpha t} \cos(\varphi + \omega t)$$

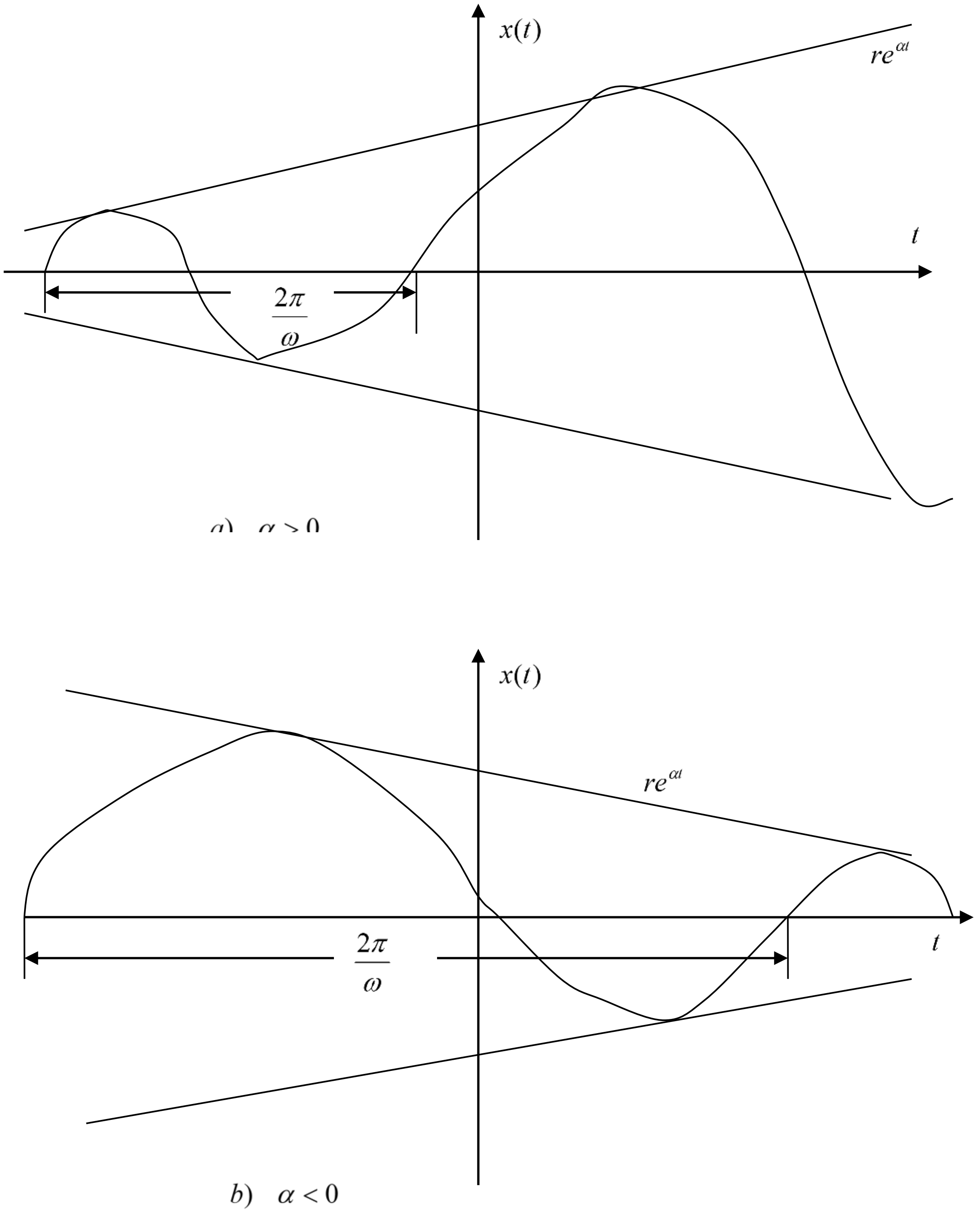
$$y(t) = re^{\alpha t} \sin(\varphi + \omega t)$$

Където константите r и φ се определят от началните условия.

При $\alpha > 0$ координатите $x = x(t)$ и $y = y(t)$.извършват хармонични осцилации с честота ω и експоненциално нарастваща амплитуда $re^{\alpha t}$, а при $\alpha < 0$ хармоничните осцилации са затихващи, както това е онагледено на фигура 7. Изменението на $x = x(t)$ и $y = y(t)$ може да се запише и във вида:

$$x(t) = Ae^{\alpha t} \cos \omega t + Be^{\alpha t} \sin \omega t$$

$$y(t) = Ce^{\alpha t} \cos \omega t + De^{\alpha t} \sin \omega t$$



Фигура 7. Хармонични осцилации на траекториите.

Общата формула за решаването на системата от уравнения (1) има вида:

$$\tilde{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \tilde{\xi}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \tilde{\xi}_2 \qquad (5)$$

където λ_1, λ_2 са различни корени на характеристичното уравнение на системата, $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$ са съответните им собствени вектори, а c_1, c_2 са зависещи от началните условия комплексни променливи.

Ако $z = z_1 + iz_2$ е представянето на комплексното число z чрез реалната си част z_1 и имагинерната - z_2, то решението на системата (1) може да бъде представено във вида

$$z_1(t) = r_1 e^{\alpha_1 t} \cos(\varphi_1 + \omega_1 t) = A_1 e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t + B_1 e^{\alpha_1 t} \sin \omega_1 t \qquad (6)$$

$$z_2(t) = r_2 e^{\alpha_2 t} \cos(\varphi_2 + \omega_2 t) = A_2 e^{\alpha_2 t} \cos \omega_2 t + B_2 e^{\alpha_2 t} \sin \omega_2 t$$

Пример Движение на махало с триене.

Уравнението на движение на махалото с триене има вида:

$$\ddot{x} = -x - k\dot{x} \qquad (1)$$

където k е коефициент на триене на махалото с обкръжаващата го среда. Уравнението (1) е еквивалентно на системата от уравнения

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - kx_2 \qquad (2)$$

Матрицата A на системата от уравнения (2) има вида:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}$$

Лесно се вижда, че

$$trA = -k, \ \det A = 1$$

За характеристичното уравнение получаваме последователно:

$$\det[A - \lambda E] = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & -k - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda(-k - \lambda) - (-1)1 = 0$$

$$\lambda(k + \lambda) + 1 = 0$$

$$\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{(\frac{k}{2})^2 - 1}$$

Корените λ_1 и λ_2 са реални и различни тогава и само тогава, когато

$$D = (\frac{k}{2})^2 - 1 > 0,$$

което е еквивалентно на

$$(\frac{k}{2} + 1)(\frac{k}{2} - 1 > 0$$

$$\frac{k}{2} - 1 > 0 \text{ и } \frac{k}{2} + 1 > 0 \text{ или } \frac{k}{2} - 1 < 0 \text{ и } \frac{k}{2} + 1 < 0$$

$$k > 2 \text{ или } k < -2$$

$$|k| > 2$$

Следователно, реални и различни корени съществуват точно тогава, когато коефициентът на триенето по абсолютна стойност е по-голям от две.

Случай 1. $k > 2$

В този случай и двата корена са отрицателни, а системата (1) се записва във вида:

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \lambda_1 < 0$$

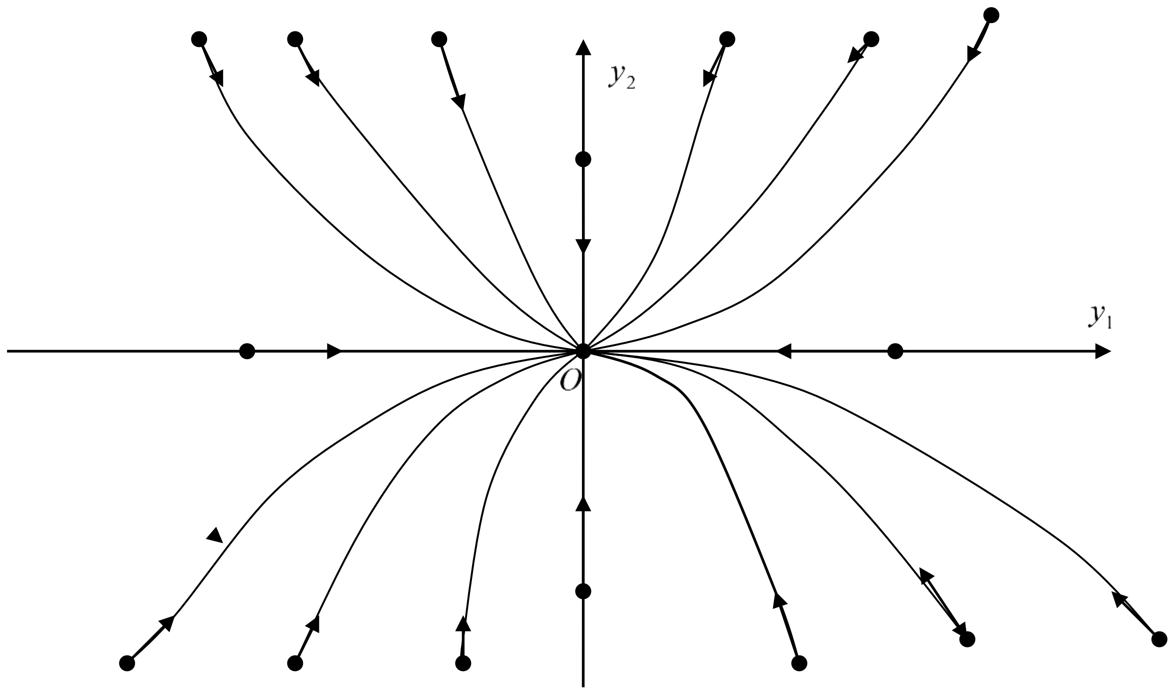
$$\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, \quad \lambda_2 < 0 \tag{3}$$

откъдето получаваме

$$y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_1 t}$$

$$y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda_2 t} \tag{4}$$

При $t \to \infty$, всичките решения клонят към нула и почти всички интегрални криви се допират до оста Oy_1, ако $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, тъй като тогава y_2 клони към нула по-бързо от y_1, както е показано на фигура 1.



Фигура 1. Фазови криви на махало с много силно триене.

Траекториите $x_1(t), x_2(t)$ се получават от $y_1(t), y_2(t)$, (изобразени на фигура 1) чрез линейна трансформация. В този случай траекториите се доближават до равновесие без да извършват каквито и да е осцилации. Ако триенето е голямо, но не много голямо, което означава, че k е по-голямо от 2, но не много повече, примерно $k = 3\frac{1}{3}$, то в този случай би могло да се очаква, че махалото ще направи само няколко осцилации, примерно, една, две, след което ще затихне в равновесие. За илюстрация ще разгледаме следния:

Частен случай. $k = 3\frac{1}{3}$

В този случай получаваме $\lambda_1 = -\frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = -3$. Собствения вектор $\tilde{\xi}_1 = \xi_1^{(1)}\tilde{e}_1 + \xi_1^{(2)}\tilde{e}_2$ намираме както следва:

$$\tilde{A}\tilde{\xi}_1 = \lambda_1\tilde{\xi}_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\xi_1^{(2)} = \lambda_1 \xi_1^{(1)}$$
$$-\xi_1^{(1)} - k\xi_1^{(2)} = \lambda_1 \xi_1^{(2)}$$

Тъй като $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, а $k = 3\frac{1}{3}$, получаваме

$$\xi_1^{(2)} = -\frac{1}{3}\xi_1^{(1)}$$
$$-\xi_1^{(1)} - 3\frac{1}{3}\xi_1^{(2)} = -\frac{1}{3}\xi_1^{(2)}$$
, откъдето

$$\xi_1^{(1)} = -3\xi_1^{(2)}$$

Следователно $\tilde{\xi}_1 = \tilde{e}_1 - 3\tilde{e}_2$

Собствения вектор $\tilde{\xi}_2 = \xi_2^{(1)}\tilde{e}_1 + \xi_2^{(2)}\tilde{e}_2$ намираме както следва:

$$\tilde{A}\tilde{\xi}_2 = \lambda_2 \tilde{\xi}_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_2^{(1)} \\ \xi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \xi_2^{(1)} \\ \xi_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\xi_2^{(2)} = \lambda_2 \xi_2^{(1)}$$
$$-\xi_2^{(1)} - k\xi_2^{(2)} = \lambda_2 \xi_2^{(2)}$$

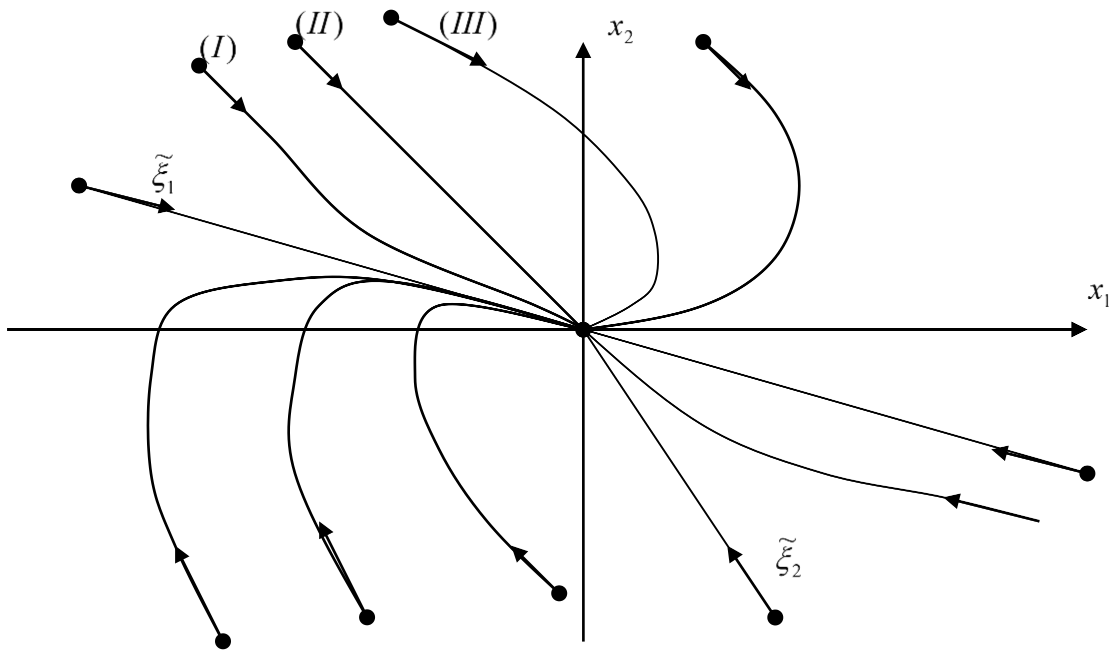
Тъй като $\lambda_1 = -3$, а $k = 3\frac{1}{3}$, получаваме

$$\xi_2^{(2)} = -3\xi_2^{(1)}$$
$$-\xi_2^{(1)} - 3\frac{1}{3}\xi_2^{(2)} = -3\xi_2^{(2)},$$

откъдето $\xi_2^{(1)} = -\frac{1}{3}\xi_2^{(2)}$

Следователно $\tilde{\xi}_2 = \tilde{e}_1 - \frac{1}{3}\tilde{e}_2$

Тъй като $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, фазовите криви имат вида изобразен на фигура 2. Фигура 2 нагледно показва интересния факт, че ако триенето е силно (при коефициент на триене $|k| > 2$), но не много силно, което означава $k = 3\frac{1}{3}$, то махалото не извършва много затихващи осцилации около равновесното си състояние, а се доближава към него или директно или след само една осцилация, т.е. преминаване през равновесното си състояние, което се вижда от факта, че скоростта му x_2 променя знака си само веднъж (виж траектории I,II,III).



Фигура 2. Фазови криви на махало със силно, но не много силно триене ($k = 3\frac{1}{3}$).

Случай 2. $|k| < 2$

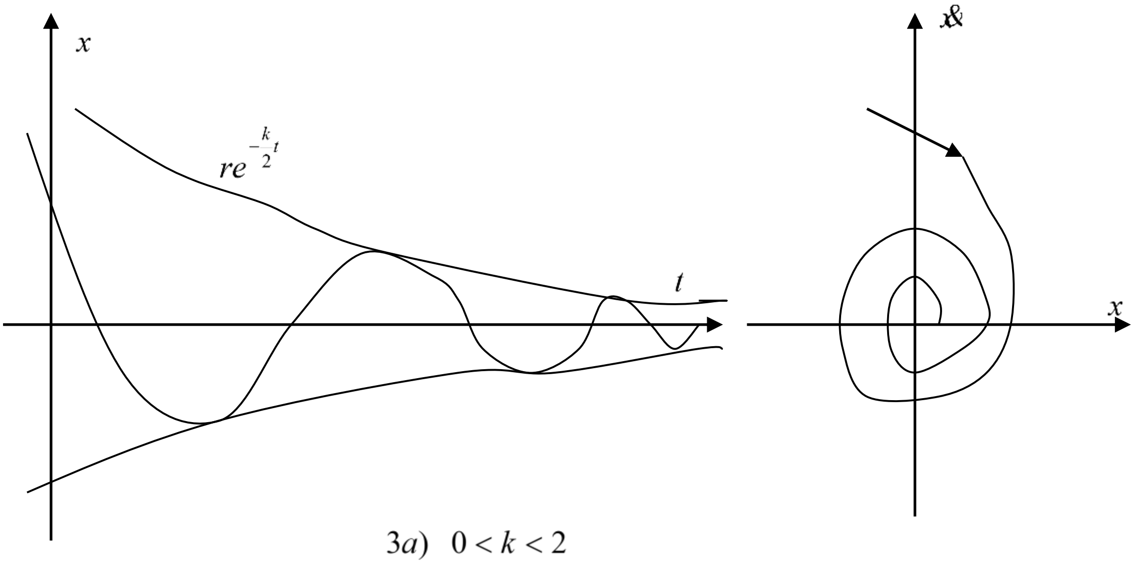
В този случай корените λ_1 и λ_2 на характеристичното уравнение са комплексни понеже $(\frac{k}{2})^2 - 1 < 0$ и $\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{(\frac{k}{2})^2 - 1}$. Реалната част и на двата комплексно спрегнати корена λ_1 и λ_2 е $-\frac{k}{2}$. Формулите за траекториите $x(t) = x_1(t)$ на уравнението (1) ще имат вида (виж формула (6) от предишния раздел:

$$x(t) = re^{\alpha t}\cos(\varphi - \omega t) = Ae^{\alpha t}\cos\omega t + Be^{\alpha t}\sin\omega t \qquad (6)$$

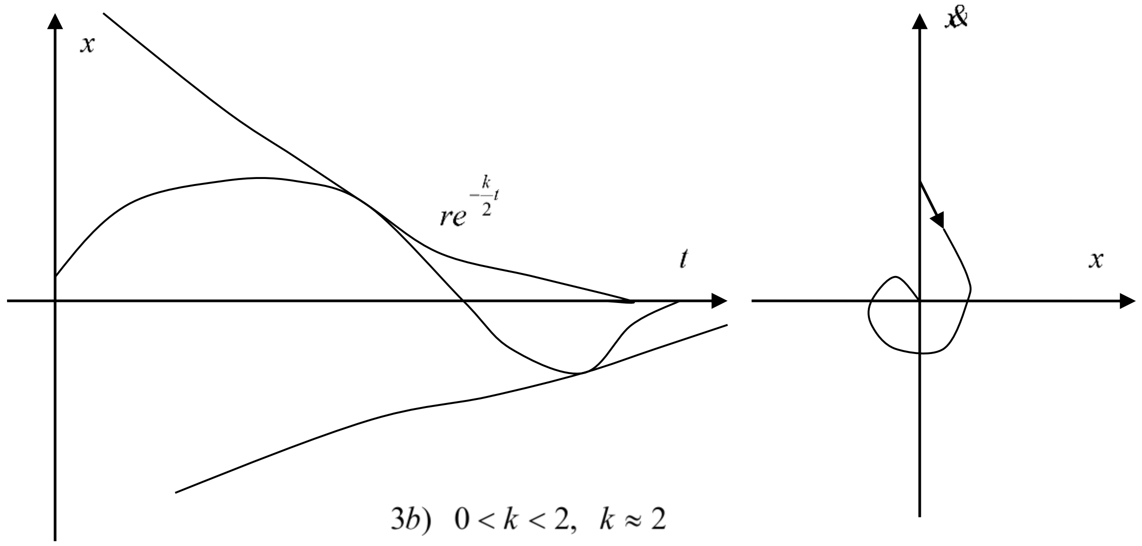
където коефициентите r, φ, A, B се определят от началните условия.

Резюмирайки , можем да кажем, че в случая 2 осцилациите на махалото са затихващи с намаляваща амплитуда $re^{\alpha t}$ и с период $\frac{2\pi}{\omega}$. Колкото е по-голям коефициента на триене, толкова по-бързо намалява амплитудата. За всяка стойност на k, за която $0 < k < 2$, махалото извършва безбройно много осцилации около равновесната си точка, като фазовата крива се доближава до началото със свиващо се кръгово движение, както е показано нагледно на фигура 3а. Нарастването на коефициента на триене k и доближаването му до 2 означава $k \to 2$, при което честотата $\omega = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}} \to 0$, а периодът $\frac{2\pi}{\omega} \to \infty$ (фигура 3в).

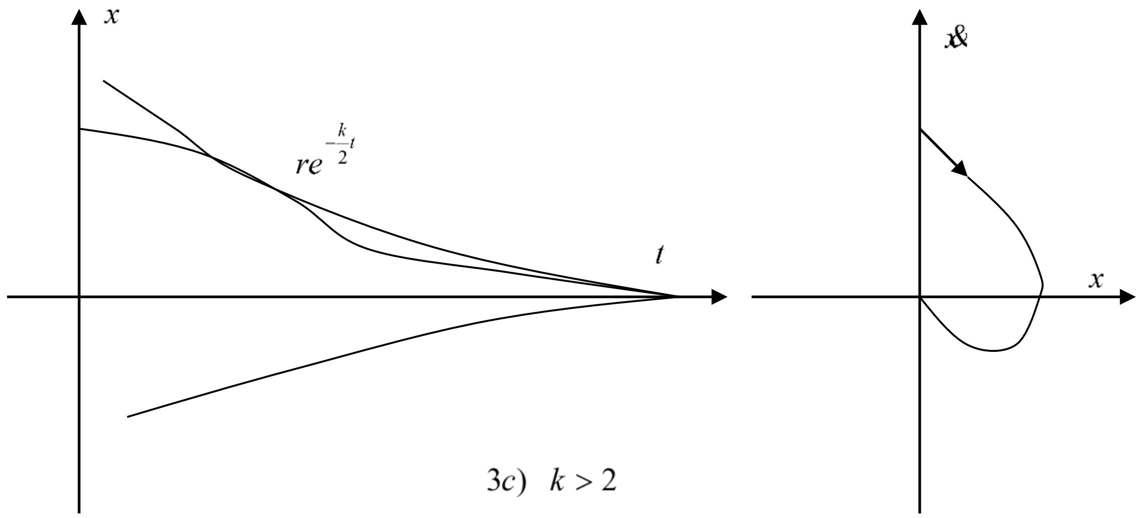
При $k > 2$, корените λ_1 и λ_2 са реални и махалото попада в равновесие без да осцилира (фигура 3с).



$3a) \quad 0 < k < 2$



$3b)\quad 0 < k < 2,\quad k \approx 2$



$3c)\quad k > 2$

Фигура 3. Поведение на махалото за различни стойности на коефициента на триене k .

4. Линеаризация на система от две диференциални уравнения от първи ред.

Тъй като линейните динамични системи могат да бъдат анализирани значително по-лесно и по-пълно от нелинейните, изглежда смислена идеята, нелинейната система да бъде заменена с близка до нея линейна, след което да се анализира линейната система и изводите се пренесат със съответните корекции върху нелинейната.

Анализът на поведението на една динамична система се свежда до голяма степен до изследване на равновесните й точки и на сходимостта към тях, която си проличава обикновено в техни околности. От гледна точка на анализа, който следва да бъде направен, апроксимацията на нелинейната система чрез линейна е удобно да бъде осъществена в околността на разглежданата равновесна точка *E*. Може би най-популярното средство за апроксимация в околността на дадена точка е формулата на Тейлър.

В случая на линейна апроксимация на функцията *f(x)* на една променлива *x* в околност на равновесната точка x^e формулата на Тейлор има вида:

$$f(x) = f(x^e) + f'(x^e)(x - x^e) + R_1(|x - x^e|)$$

Остатъчният член $R_1(|x - x^e|)$ представлява всъщност грешката на апроксимацията, понеже функцията *f(x)* заместваме с линейната относно *x*, функция $f(x^e) + f'(x^e)(x - x^e)$. Грешката $R_1(|x - x^e|)$ клони към нула, когато *x* клони към равновесната точка x^e, което означава, че апроксимацията е толкова по-добра, колкото *x* е по-близо до x^e, т.е. колкото е по-малка околността на x^e.

За линейната апроксимация на функцията $f(x_1, x_2)$ на две променливи (x_1, x_2) в околност на равновесната точка $E = (x_1^e, x_2^e)$ формулата на Тейлор ще придобие вида:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^e, x_2^e) + \frac{\partial f(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^e) + \frac{\partial f(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^e) + R_1(|x_1 - x_1^e|, |x_2 - x_2^e|)$$

В този случай функцията $f(x_1, x_2)$ заместваме с $f(x_1^e, x_2^e) + \frac{\partial f(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^e) + \frac{\partial f(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^e)$.

Грешката $R_1(|x_1 - x_1^e|, |x_2 - x_2^e|)$, която правим при това заместване клони и в този случай към нула, когато (x_1, x_2) се доближава до равновесната точка $E = (x_1^e, x_2^e)$, което ни дава основание да очакваме, че в една достатъчно малка околност на равновесната точка $E = (x_1^e, x_2^e)$, двете функции ще имат едно и също поведение.

В динамичната система с две променливи величини $x_1(t)$ и $x_2(t)$ за $t \geq 0$, която в общия случай има вида:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)), \qquad (2)$$

заместваме $f_1(.,.)$ и $f_2(.,.)$, които са произволни функции на две променливи, с техните линейни приближения и получаваме съответно

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1^e, x_2^e) + \frac{\partial f_1(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^e) + \frac{\partial f_1(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^e) \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1^e, x_2^e) + \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^e) + \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^e) \qquad (2)$$

За равновесното състояние $E = (x_1^e, x_2^e)$ имаме

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1^e, x_2^e) = 0 \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1^e, x_2^e) = 0 \qquad (2)$$

Следователно

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^e) + \frac{\partial f_1(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^e) \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^e) + \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^e) \qquad (2)$$

Разкривайки скобите отдясно на последните равенства и преобразувайки ще получим представянето:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f_1(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2}x_2 - \frac{\partial f_1(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1}x_1^e - \frac{\partial f_1(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2}x_2^e \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2}x_2 - \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_1}x_1^e - \frac{\partial f_2(x_1^e, x_2^e)}{\partial x_2}x_2^e \qquad (2)$$

Последната очевидно линейна динамична система можем да представим в матричен вид по следния начин:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^e\\ x_2^e\end{bmatrix}$$

Означаваме

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$J(E)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2}\end{bmatrix},\ B=-\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2(x_1^e,x_2^e)}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^e\\ x_2^e\end{bmatrix}$$

Получаваме

$$\dot{X}=J(E)X+B$$

Последната динамична система е линейна и може да бъде решена количествено и равновесните и състояния да бъдат изследвани качествено като се приложи теорема 4. Този частен случай формулираме като следната:

Теорема 5. Равновесното състояние на линейната динамична система с матрица *J(E)* е:

I. *Глобално стабилно*, тогава и само тогава когато: $traceJ(E)<0$, $\det J(E)>0$

II. *Глобално нестабилно*, тогава и само тогава когато: $traceJ(E)>0$, $\det J(E)>0$

III. *Център или фокус* (фазовите траектории са концентрични, затворени криви, обикалящи в орбити около центъра, без да се доближават или отдалечават от него), тогава и само тогава, когато: $traceJ(E)=0$, $\det J(E)>0$

IV. *Седловинно*, тогава и само тогава, когато: $\det J(E)<0$

Любопитно е да се отбележи, че определяща роля за вида на равновесното състояние *E* на нелинейната динамична система играе нейната матрица на Якоби *J(E)* за това състояние.

Глава 5. Качествена теория на обикновените диференциални уравнения.

1. Фазови диаграми за качествено-графичен анализ на динамична система с една променлива.

В предишния раздел ние решавайки уравненията определящи една динамична система, като резултат получавахме количествен израз за траекторията *x(t)*, задаваща стойностите на величината *x* в течение на времето *t* и на тази база анализирахме поведението на *x(t)*. В този случай правим *количествен анализ* на динамичната система. Ние намерихме решение на една съвсем проста динамична система – линейна с постоянни коефициенти. В теорията на диференциалните уравнения са известни методи за количествен анализ на значително по-сложни динамични системи, но и с тези методи не може да се реши количествено всяка динамична система, което обикновено е най-доброто за нейния анализ. Ако динамичната система, обаче не може да се реши количествено, има възможност да й се направи *качествен* или както се казва още *качествено-графичен* анализ. Със средствата на качествено-графичния анализ можем да получим свойства на траекторията *x(t)* без да я получаваме в експицитен количествен вид. Макар, че няма да познаваме *x(t)* в явен вид, свойствата на динамичната система, които ще получим, ще бъдат напълно достатъчни, за да си направим необходимите за поведението на икономическата система изводи.

Да предположим, че разглеждаме динамична система, зададена посредством диференциално уравнение от първи ред в общия му вид:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad (1)$$

където *f* е произволна функция на една променлива.

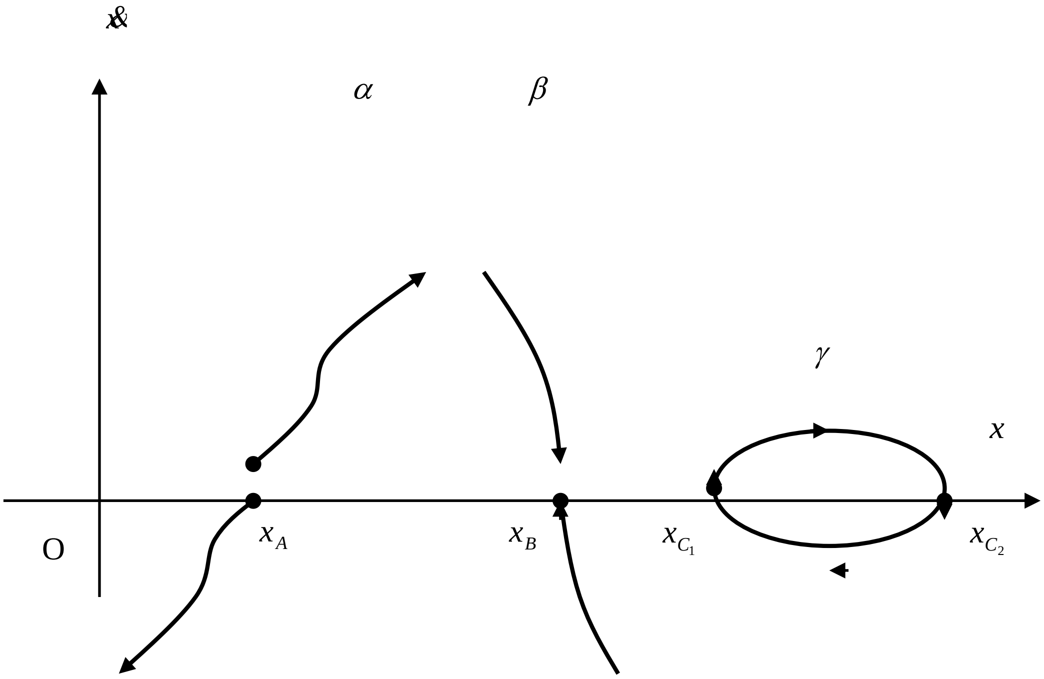
Множеството от двойките точки $(x, \dot{x})$, всяка от които показва положението *x* и посоката $\dot{x}$ на изменение (нарастване или намаляване) потенциално възможни за траекторията на решението *x(t)* на уравнението (1) наричаме *фазово пространство* на динамичната система определена от това уравнение. Независимо от това, дали функцията *f* е линейна или не, ние бихме могли да разгледаме нейната графика, като на абсцисната ос нанасяме *x*, а на ординатната - $\dot{x}$. Графиката на зависимостта между *x* и $\dot{x}$

се нарича *фазова траектория*. Съществуват безбройно много фазови траектории на една динамична система в зависимост от началното положение. Съвкупността от всички фазови траектории наричаме фазова диаграма на динамичната система. Тъй като не сме в състояние да начертаем всички фазови траектории на системата ние ще отразяваме графично само тези от тях които са характерни, типични за поведението на системата. Тъй като фазовата траектория се състои всъщност от двойките точки $(x,\dot{x})$, всяка от които показва положението *x* и посоката $\dot{x}$ на изменение (нарастване или намаляване) на траекторията на решението *x(t)* на уравнението (1), то и фазовата траектория е насочена линия, посоките на която се определят по следния начин: Навсякъде *над абсцисната ос, където* $\dot{x} > 0$, *x ще расте с течение на времето* и понеже това се отнася за оста *x*, там ще има *движение отляво надясно*. В същото време, когато *x* расте, за $\dot{x}$ има две възможности: да расте или да намалява. Когато $\dot{x}$ *расте, фазовата линия е насочена надясно и нагоре (североизток)*, както е показано на фигура 1 посредством посоката на движение на точка A_1, а *когато* $\dot{x}$ *намалява посоката на движение е надясно и надолу (на югоизток)*, отразено на фигура 1 посредством посоката на движение на точка B_1. По аналогични съображения, за всяка точка под абсцисната ос $\dot{x} < 0$ и с течение на времето ще се имаме движение на променливата *x*, наляво, понеже отрицателната първа производна $\dot{x}$ означава, че самата функция е намаляваща. И тук за $\dot{x}$ има две възможности: да намалява или да расте. Ако $\dot{x}$ намалява имаме посока на движение наляво и надолу (на югозапад), отразено чрез посоката на движение на точка A_2, ако $\dot{x}$ расте, имаме посока на движение наляво и нагоре (на северозапад), отразено чрез посоката на движение на точка B_2. (фиг.1). Равновесната във времето стойност на *x*, ако такава въобще съществува, може да се търси в точките в които фазовата траектория пресича абсцисната ос, понеже в тези точки $\dot{x} = 0$. Такива са например точките x_A и x_B на фигура 1. Както ще видим по-нататък обаче, не във всяка точка, за която $\dot{x} = 0$, има динамична стабилност, т.е. възможно е за някои точки с $\dot{x} = 0$ да има динамична стабилност, а за други да няма. Това трябва да се проверява допълнително.

Формата на фазовата траектория зависи от свойствата на функцията *f(.)*. Ако *f(.)* е *растяща функция*, фазовата траектория ще има вида α (фиг.1), ако *f(.)* е *намаляваща функция*, фазовата линия има вида β (фиг.1), а ако *f(.)* представлява *изпъкнала и затворена крива*, като окръжност или елипса, фазовата линия има вида γ (фиг.1).

Да предположим, че *f(.)* е растяща функция. Това означава, че фазовата й траектория има вида α (фиг.1). Тя пресича абсцисната ос в точката x_A, което означава, че в тази точка $\dot{x} = 0$. Следователно x_A е точка на равновесие. Дали това равновесие обаче е динамично стабилно? Динамично стабилно означава, че $x(t) \to x_A$, тръгвайки от произволно начално положение $x(0)$. В разглеждания случай обаче тази сходимост е в сила само когато $x(0) = x_A \equiv x(t) \to x_A$, т.е. траекторията започва от x_A, тъждествено равна е на x_A и следователно ще клони към x_A. На фигура 2А тя е отразена като права, успоредна на абсцисата и минаваща през x_A. Ако траекторията стартира с начална стойност $x(0)$, която е по-малка от x_A, то на фигура 1, частта на фазовата линия α, която е под абсцисата показва, че с течение на времето *t,* траекторията постоянно ще се движи надясно и надолу, което означава, че тя е постоянно намаляваща функция на *t* и с течение на времето ще се отдалечава от нивото x_A, както това е показано на фигура 2А (кривите под нивото x_A). Ако траекторията стартира с начална стойност $x(0)$, която е по-голяма от x_A, то в този случай на фигура 1 ще забележим, че в частта от фазовата траектория над абсцисната ос движението на траекторията е постоянно насочено нагоре, което означава, че траекториите са растящи функции на времето и растейки постоянно ще се отдалечават от нивото x_A, както това е показано на фигура 2А (кривата над нивото x_A). В крайна сметка, можем да твърдим, че *когато f(.) е растяща функция, равновесието е нестабилно*.

Да предположим сега, че *f(.)* е намаляваща функция. Посоките на движение прочитаме от фазовата траектория β на фигура 1. Ако траекторията започва в равновесното състояние x_B, т.е. $x(0) = x_B$ и тук както в предишния случай тя ще си остане до края в равновесното състояние, т.е. $x(t) \equiv x(0) = x_B$, което е отразено на фигура 2В посредством траекторията, която е правата успоредна на абсцисата на ниво x_B. Ако траекторията стартира с начална стойност $x(0)$, която е по-малка от x_B, то от фигура 1, в частта на фазовата линия β, която е над абсцисата виждаме, че *x(t)* е растяща функция с течение на времето *t*, т.е. *x(t)* ще се движи постоянно надясно и нагоре, като се доближава до равновесната точка x_B, както това е показано в зависимост от времето на фигура 2В (траекториите под нивото $x(0) = x_B$). Ако траекторията стартира с начална стойност $x(0)$, която е по-голяма от x_B, то отново от фигура 1, но в частта на фазовата линия β, която е под абсцисата виждаме, че *x(t)* е намаляваща функция и с течение на времето *t* ще се движи постоянно надясно и надолу, като се доближава до равновесната точка x_B, както това е показано на фигура 2B (траекториите над нивото $x(0) = x_B$). В крайна сметка, стигаме до заключението, че *когато f(.) е намаляваща функция, равновесието е стабилно*. Резюмирайки, получаваме



Фигура 1. Фазови диаграми на нестабилно, стабилно и периодично равновесие.

Критерий за динамична стабилност или нестабилност.

Равновесното състояние x_A на динамичната система $x(t)$ е динамично нестабилно, ако функцията f(.) е растяща, поне в някаква околност на състоянието x_A, а равновесното състояние x_B на динамичната система $x(t)$ е динамично стабилно, ако функцията f(.) е намаляваща, поне в някаква околност на състоянието x_B.

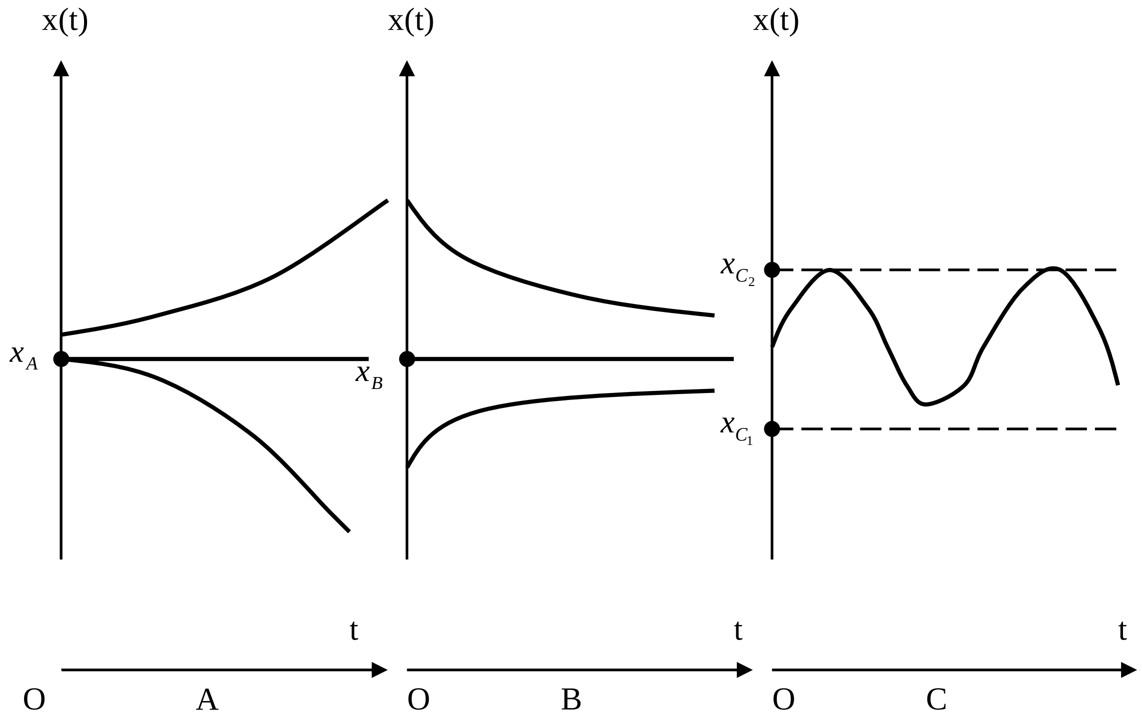
Получения критерий за динамична стабилност или нестабилност може да бъде демонстриран в частния случай когато $f(x) = -ax + b$ е линейна функция. В този частен случай за динамичната система $\dot{x}(t) = -ax(t) + b$ намерихме решенията в експлицитен количествен вид:

$$x(t) = (x(0) - \frac{b}{a})e^{-at} + \frac{b}{a} \text{ за } a \neq 0 \quad (2)$$

Равновесното състояние в този случай е $\bar{x} = \dfrac{b}{a}$ и се получава като решение на уравнението $f(x) = -ax + b = 0$. Според критерия за динамична стабилност или нестабилност, равновесното състояние $\bar{x} = \dfrac{b}{a}$ ще бъде динамично нестабилно, ако за наклона на фазовата линия имаме $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d(-ax+b)}{dx} = -a > 0$ и динамично нестабилно, ако $-a < 0$. До същия резултат ще достигнем, ако направим граничен преход в решенията (2). Действително:

Ако $a > 0$, то *x(t)* при $t \to \infty$ е сходяща и клони към равновесната точка $\bar{x} = \dfrac{b}{a}$ за всяко начално положение $x(0)$, което означава, че равновесната точка е динамично стабилна. Ако $a < 0$, то *x(t)* при $t \to \infty$ клони към равновесната точка $\bar{x} = \dfrac{b}{a}$ само в случая, когато стартира в тази точка, понеже тя остава там до края, а при всички останали начални позиции, т.е. при $x(0) \neq \dfrac{b}{a}$ системата е разходяща и клони към плюс или минус безкрайност.

Остава да разгледаме фазовата линия γ дадена като трети възможен случай на фигура 1 и представляваща изпъкнала затворена крива пресичаща абсцисната ос в точките x_{C_1} и x_{C_2} с вертикални допирателни (наклони) към кривата в тези точки. Такава функционална зависимост може да се получи в нелинейно уравнение от вида $(\dot{x})^2 = f(x)$ и би могла да представлява примерно окръжност или елипса. Интересна особеност тук е, че се получава периодично, циклично изменение на траекторията *x(t)* в течение на времето *t*. С подобни криви в икономиката биха могли да се описват например сезонни изменения, бизнес цикли или други процеси, които имат периодичен или цикличен характер. Траекториите *x(t)* на фазовата линия γ са представени в случая *C* на фигура 2 и имат вид на синусоида, като през определени периоди попадат в екстремните точки x_{C_1} и x_{C_2}. В тези точки траекториите имат равновесни стойности, в които, обаче равновесието не е динамично стабилно.



Фигура 2. Траектории на нестабилно, стабилно и периодично равновесие.

2. Фазови диаграми и качествено-графичен анализ на динамична система с две променливи величини.

В този раздел ще разгледаме динамична система с две променливи величини $x_1(t)$ и $x_2(t)$ за $t \geq 0$, която в общия случай има вида:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \tag{1}$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)), \tag{2}$$

където $f_1(.,.)$ и $f_2(.,.)$ са произволни функции на две променливи, което означава, че системата може да бъде както линейна, така и нелинейна. Ние вече разгледахме частния случай, когато $f_1(.,.)$ и $f_2(.,.)$ са линейни функции с постоянни коефициенти и направихме количествен анализ на системата. В общия случай не винаги е възможно системата да бъде решена и да и се направи качествен анализ. В този случай можем да се задоволим с качествен анализ с помощта на метода на фазовите диаграми. Ние ще приложим този метод за автономна динамична система, което означава, че в системата

(1), (2) функциите $f_1(.,.)$ и $f_2(.,.)$ зависят от времето t само чрез $x_1(t)$ и $x_2(t)$, но не и директно.

Конструирането на фазовите диаграми започва с определянето на фазовото пространство на динамичната система.

Фазовото пространство Φ на динамичната система, зададена чрез уравненията (1),(2) се състои от всички точки $\varphi = (x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_2(t))$, наричани още *състояния на системата*, с компоненти положенията $x_1(t), x_2(t)$ и съответните посоки на изменения (положителни – за нарастване, отрицателни - за намаляване) $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$, във всеки момент от времето t. Всяко състояние φ от фазовото пространство Φ, във всеки момент от времето t показва, къде се намира и в каква посока се движи системата.

Траекторията на движение на точката $x_1(t), x_2(t)$ в равнината на положенията x_1Ox_2 на динамичната система се нарича *фазова траектория*. Тъй като фазовата траектория е насочена, тя геометрично се изобразява с линия върху която със стрелка се задава посоката на движение.

Една динамична система притежава обикновено безбройно много фазови траектории, които сумарно образуват *фазовата диаграма* на системата. Тъй като обикновено е невъзможно да се начертаят всички фазови траектории, на фазовата диаграма се отразяват само най-типичните, определящите тенденциите на движение и изменение фазови траектории, които ни дават представа за поведението на системата като цяло и които служат за качествения и анализ. Качественият анализ на една динамична система обикновено се свежда до намиране на равновесните и състояния и определяне на вида на равновесие относно степента на стабилност на състоянието: стабилно, частично стабилно, седловинно и т.н.

Макар, че състоянията на системата имат явно размерност четири, което затруднява графичното им представяне, има възможност, те да бъдат представени графично в двумерната координатна система x_1Ox_2, като се отрази точката $x_1(t), x_2(t)$ на положението на системата, посоките $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$ на движението на системата, да се отразят със стрелки поставени в точката на положението в което се намира системата. Посоката на движението се определя от знака на производната на положението относно времето в даден момент. Ако производната има положителен знак – движението е в положителната посока на съответната координатна ос, ако производната има отрицателен знак – движението е в отрицателната посока на съответната координатна ос, а ако производната е нула – движение няма. Точките с производна равна на нула трасират линия, която разделя равнината на две области: едната – с точки с положителна посока, а другата – с точки с отрицателна посока, поради което тази линия се нарича *демаркационна линия*.

Демаркационните линии на динамичната система (1), (2) се получават като се положи $\dot{x}_1(t) \equiv 0$ и $\dot{x}_2(t) \equiv 0$ в резултат на което се получава:

$f_1(x_1(t), x_2(t)) = 0$ (демаркационна линия $\dot{x}_1(t) \equiv 0$) (3)

$f_2(x_1(t), x_2(t)) = 0$ (демаркационна линия $\dot{x}_2(t) \equiv 0$) (4)

Демаркационните линии представляват всъщност зависимости между положенията $x_1(t), x_2(t)$ и могат графично да бъдат представени в координатната система x_1Ox_2, както това е направено на фигура 1. Наклона на демаркационната линия $\dot{x}_1(t) \equiv 0$ пресмятаме като вземем диференциал от двете страни на равенство (3): $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 = 0$. Следователно

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\dot{x}_1 \equiv 0} = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}} \qquad (5)$$

За да пресметнем наклона на демаркационната линия $\dot{x}_2(t) \equiv 0$, вземаме диференциал от двете страни на равенството (4) и получаваме:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

Следователно

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\dot{x}_2 \equiv 0} = -\frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_2}{\partial x_2}} \qquad (6)$$

Наклоните на демаркационните линии $\dot{x}_1(t) \equiv 0$ и $\dot{x}_2(t) \equiv 0$, както и взаимното им разположение в равнината x_1Ox_2 ще зависят очевидно от производните $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$,

$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$. Всяка от последните производни може има както положителен, така и отрицателен знак, т.е. $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0$ или $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0$ за *i,j=1,2.*

Случай 1.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} < 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} < 0 \tag{7}$$

От (5),(6),(7) получаваме, че

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\dot{x}_1 \equiv 0} = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}} > 0 \tag{8}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\dot{x}_2 \equiv 0} = -\frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_2}{\partial x_2}} > 0 \tag{9}$$

което означава, че наклоните на демаркационните линии са положителни.

Случай 1.1

Да допуснем, че наклонът на демаркационна линия $\dot{x}_1(t) \equiv 0$ е по-голям от наклона на демаркационната линия $\dot{x}_2(t) \equiv 0$:

$$-\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}} > -\frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial f_2}{\partial x_2}} \tag{10}$$

Това означава, че демаркационните линии ще се пресекат в някаква точка E с координати x_1^e и x_2^e и че първата крива в „северната” си част, до пресечната точка E е „западно” от втората, както това е отразено на графиката на фигура 1. Точката E =(x_1^e, x_2^e) е равновесна за системата понеже $x_1^e = 0$ и $x_2^e = 0$ и в нея движение или изменение няма да има. В останалите точки обаче може да се очаква, че $x_1(t)$ или $x_2(t)$ или и двете ще се движат или изменят в посока, която ще се определя от знаците на производните $\dot{x}_1(t)$ и $\dot{x}_2(t)$ в тези точки.

За да определим динамиката на $\dot{x}_1$ диференцираме (1) относно x_1 и получаваме:

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} < 0 \tag{11}$$

Последното е отрицателно поради (7). Съотношението (11) ни показва, че $\dot{x}_1$ е намаляваща функция на x_1, което означава, че когато x_1 расте започвайки с отрицателни числа (знаци) и през нулата преминава към положителни числа (знаци), то същевременно за $\dot{x}_1$ това изменение започва с положителни и през нулата преминава към отрицателни числа (знаци). Геометрично, това изменение може да бъде наблюдавано на фигура 1, където x_1 расте по координатната си ос от “запад” на “изток” започвайки с отрицателни числа (знаци) и през нулата преминава към положителни числа (знаци), докато в същото време $\dot{x}_1$ започва вляво (“западно”) от демаркационната линия с положителни (+) стойности, върху демаркационната линия става нула, а надясно (“източно”) от нея става с отрицателни знаци (-).

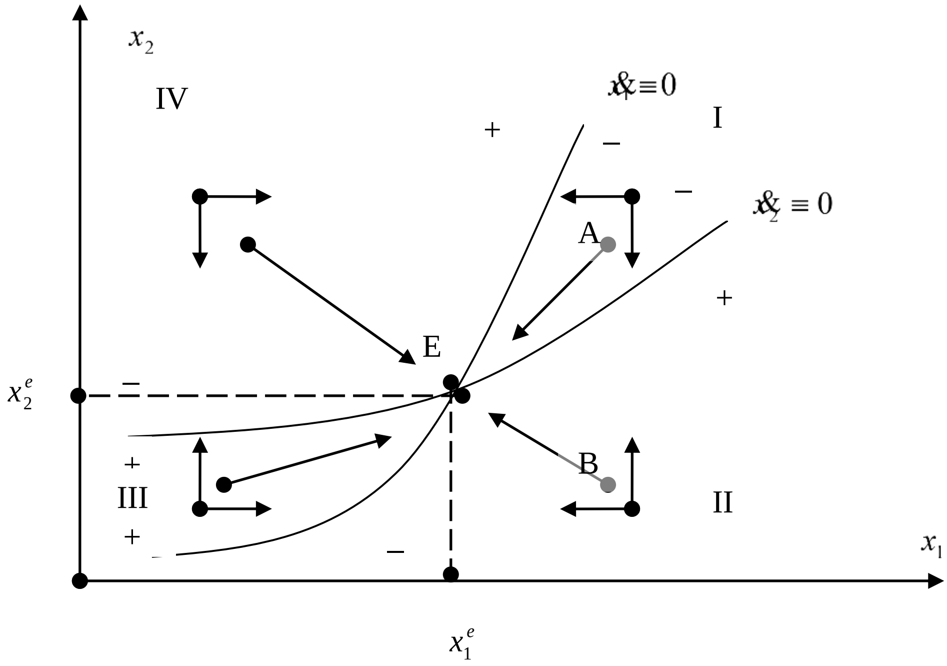
Динамиката на $\dot{x}_2$ определяме като по подобен начин диференцираме (2) относно x_2 и получаваме:

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} < 0 \tag{12}$$

Последното е отрицателно поради (7). В този случай $\dot{x}_2$ е намаляваща функция на x_2, което разгледано геометрично на фигура 1 ще означава, че когато x_2 нараства от “юг” на “север” движейки се по координатната си ос, $\dot{x}_2$ ще намалява като започва с положителни знаци под (“южно” от) демаркационната линия, става нула върху демаркационната линия и преминава към отрицателни знаци над (“северно” от) демаркационната линия, което е отбелязано и на фигура 1.

Демаркационните линии разделят равнината x_1Ox_2 на четири области, които на фигура 1 са означени с I,II,III,IV. Фазовите траектории имат своето начало в някоя от четирите области I,II,III,IV.

Фазовата диаграма на фигура 1 съдържа фазовите траектории очертаващи основните тенденции на движението или на изменението на динамичната система (1),(2) при условие I изразено чрез неравенствата (7) и предположението (10).



Фигура 1. Фазова диаграма на динамична система със стабилно равновесие.

В областта I знаците на $\dot{x}_1(t)$ и $\dot{x}_2(t)$ са отрицателни. Следователно, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ намаляват, което означава, че тези точки се движат в отрицателните посоки на съответните координатни оси. Тези посоки са отразени със стрелки. Общата посока на движение на точката $x_1(t), x_2(t)$ е към равновесната точка *E* и също е отразена със стрелка. В областта I, където посоката на движение е към точката *E*, фазовата траектория ще представлява насочена линия, която ще се доближава към *E* на фигура 1 е показано движението към *E*, стартирайки от точката *A*.

В областта II типичната фазова траектория също се доближава към равновесната точка *E*, тръгвайки от някаква точка *B*, тъй като координатата $x_1(t)$ ще намалява поради $\dot{x}_1(t) < 0$, а $x_2(t)$ ще расте, понеже $\dot{x}_2(t) > 0$.

В областта III положителна е посоката както на $x_1(t)$ така и на $x_2(t)$, което отново означава движение на типичната фазова траектория към *E*.

И в областта IV характерната фазова траектория описва движение към *E*, понеже $x_1(t)$ ще се движи в положителна, $x_2(t)$ - в отрицателна посока доближавайки точката $(x_1(t), x_2(t))$ отново е към равновесната точка *E*.

Сумирайки, можем да направим извода, че всяка фазова траектория на динамичната система отразена графично на фигура 1 се стреми към равновесното положение E, независимо от стартовата си позиция. Едно равновесно състояние на динамична система наричаме *стабилно равновесие или стабилен възел*, ако всяка нейна фазова траектория клони към това състояние независимо от стартовата си позиция. Това означава, че E е състояние на стабилен възел или стабилно равновесие. Стабилен възел е представен на фигура 1. Нагледна представа за стабилен възел би могло да ни даде движението на топче в съд с формата на полусфера, понеже където и да поставим в съда топчето, то ще се стреми да достигне най-ниската точка (дъното) на съда, която ще е и точката на стабилното равновесие.

Случай 1.2

Оставайки при условията на случай 1:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} < 0, \ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0, \ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0, \ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} < 0 \qquad (13)$$

По подобен начин получаваме, че

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\dot{x}_1 \equiv 0} = -\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}} > 0 \qquad (14)$$

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\dot{x}_2 \equiv 0} = -\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}} > 0 \qquad (15)$$

което означава, че наклоните на демаркационните линии са положителни.

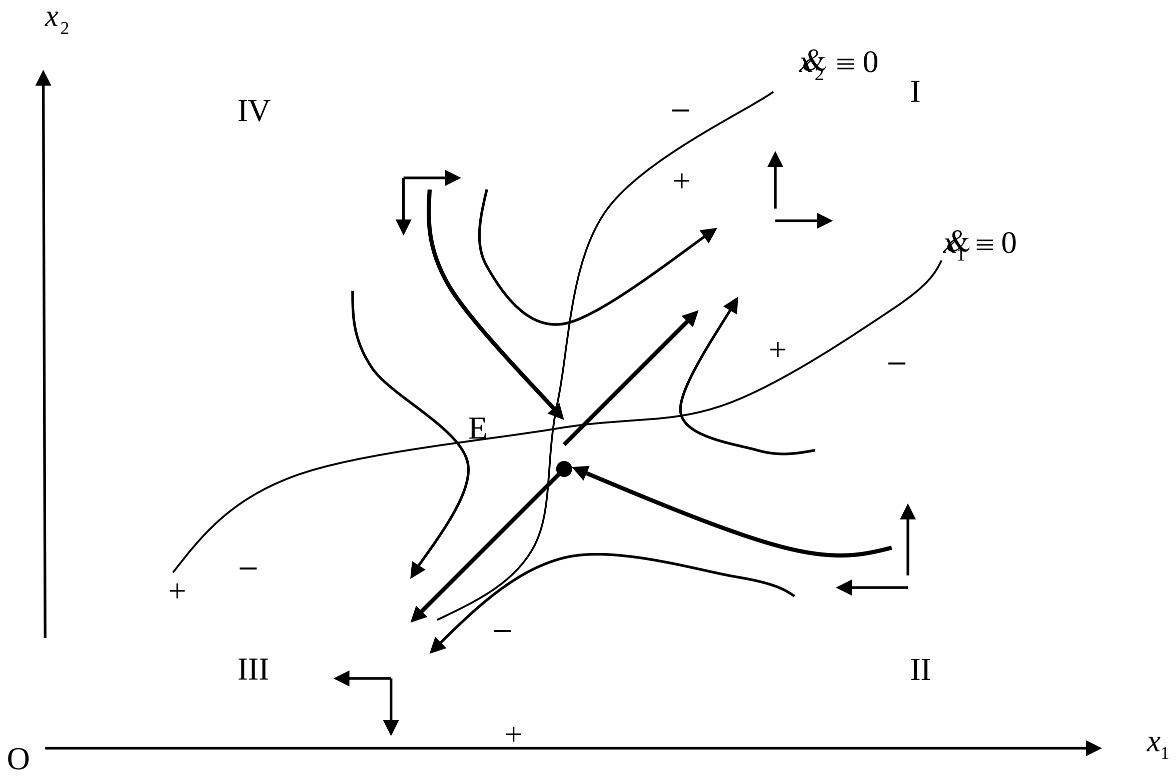
Тук ще допуснем обаче, че наклонът на демаркационна линия $\dot{x}_1(t) \equiv 0$ е по-малък от наклона на демаркационната линия $\dot{x}_2(t) \equiv 0$:

$$-\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}} < -\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}} \qquad (16)$$

Това отново ще означава, че демаркационните линии ще се пресекат в точка E, но в този случай демаркационната линия $\dot{x}_2(t) \equiv 0$ в „северната” си част, до пресечната точка E е „западно” от демаркационна линия $\dot{x}_1(t) \equiv 0$, както това е отразено на графиката на фигура 2. Точката E =(x_1^e, x_2^e) е равновесна и в нея движение или изменение няма да има. В останалите точки обаче може да се очаква, че $x_1(t)$ или $x_2(t)$ или и двете ще се движат или изменят в посока, която ще се определя от знаците на производните $\dot{x}_1(t)$ и $\dot{x}_2(t)$ в тези точки.

За да определим динамиката на $\dot{x}_1$ диференцираме (1) относно x_1 и получаваме:

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} < 0 \tag{17}$$



Фигура 2. Фазова диаграма на динамична система със седловинно равновесие.

Последното е отрицателно поради (7). Съотношението (17) ни показва, че $\dot{x}_1$ е намаляваща функция на x_1, което означава, че когато x_1 расте започвайки с отрицателни числа (знаци) и през нулата преминава към положителни числа (знаци), то същевременно за $\dot{x}_1$ това изменение започва с положителни знаци пред демаркационната линия, става нула върху върху нея и преминава към отрицателни числа след нея. Геометрично, това изменение може да бъде наблюдавано на фигура 2, където x_1 расте по координатната си ос от "запад" на "изток" започвайки с отрицателни числа (знаци) и през нулата преминава към положителни числа (знаци), докато в същото време $\dot{x}_1$ започва вляво ("западно") от демаркационната линия с положителни знаци (+), върху демаркационната линия става нула, а надясно ("източно") от нея става с отрицателни (-) стойности.

Динамиката на $\dot{x}_2$ определяме като по подобен начин диференцираме (2) относно x_2 и получаваме:

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} < 0 \qquad (18)$$

Последното е отрицателно поради (7). И в този случай $\dot{x}_2$ е намаляваща функция на x_2, което разгледано геометрично на фигура 2 ще означава, че когато x_2 нараства от "юг" на "север" движейки се по координатната си ос, $\dot{x}_2$ ще намалява като започва с положителни знаци под ("южно" от) демаркационната линия, става нула върху демаркационната линия и преминава към отрицателни знаци над ("северно" от) демаркационната линия, което е отбелязано и на фигура 2.

Движението на системата в областите определени от демаркационните линии се определя от посоките на типичните траектории. В областите I и III типичните траектории се отдалечават от равновесната точка, в областите II и IV към равновесната точка се доближават по една траектория, които директно без да се отклоняват към демаркационните линии, докато тези траектории, които се отклоняват към демаркационните линии впоследствие ги пресичат и попадайки в областта I или III се отдалечават от равновесната точка.

Едно равновесно състояние наричаме *седловидно или седловидна точка*, когато съществуват точно две фазови траектории, които се доближават директно, без да преминават в съседни области към равновесното състояние и точно две фазови траектории, които също така директно се отдалечават от него към безкрайността, а всички останали фазови траектории в началото се доближават към равновесното състояние, след което пресичат демаркационна линия и безкрайно се отдалечават от него. На фигура 2 е представена фазова диаграма със седловинно равновесие. Наименованието седловинна точка е подсказано от нагледната представа, която може бъде предложена в този случай. Седловинната равновесна точка е най-ниската точка на гребена на едно седло. Към нея директно се спускат фазовите траектории, които се движат точно по гребена на седлото. От равновесната точка директно надолу “по краката на ездача” се спускат двете фазови траектории, които безкрайно се отдалечават от нея. Останалите фазови траектории се спускат първоначално успоредно или почти успоредно на гребена на седлото, като се приближават към най-ниската му точка, след което пресичат вдлъбнатината на демаркационна линия и се пренасочват в посока успоредна или почти успоредна на краката на ездача, стремително надолу към пропастта на безкрайност

Случай 2

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} > 0\,,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} < 0\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} > 0 \qquad (19)$$

От (5),(6),(19) получаваме, че

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\dot{x}_1=0} = -\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}} > 0 \qquad (20)$$

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\dot{x}_2=0} = -\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}} > 0 \qquad (21)$$

което означава, че наклоните на демаркационните линии са положителни. Да допуснем, че наклонът на първата крива е по-голям от наклона на втората крива:

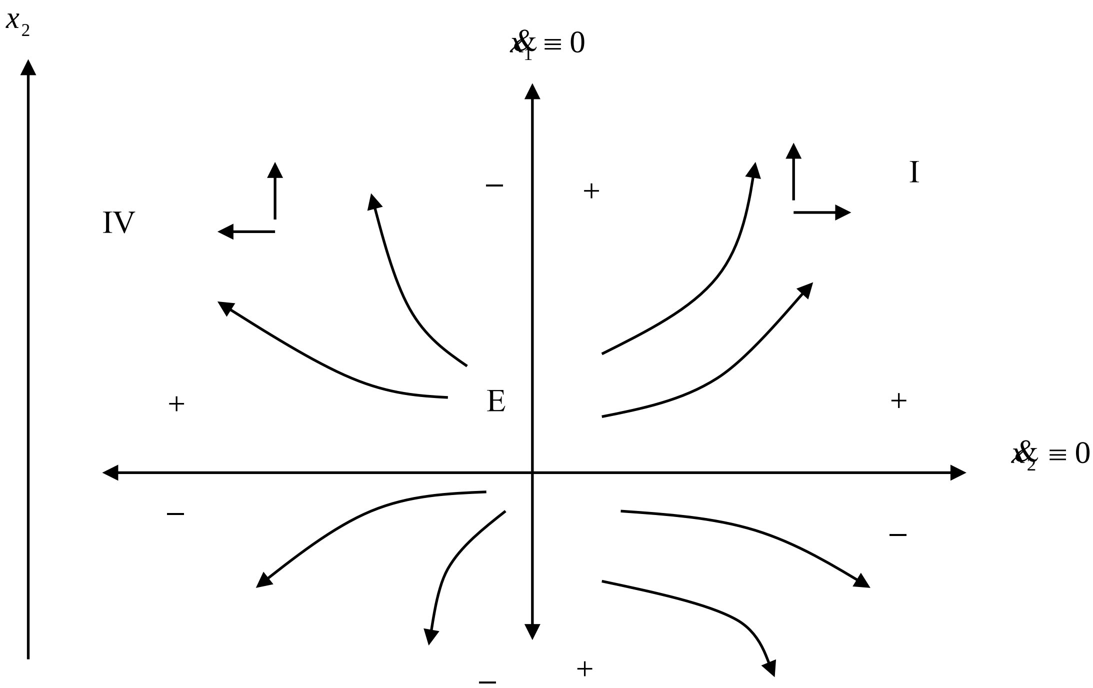
$$-\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}} > -\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}} \qquad (22)$$

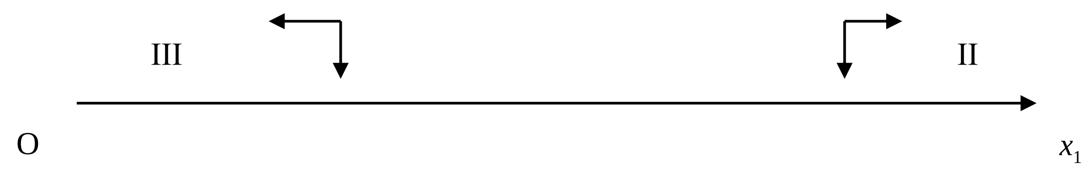
Това означава, че демаркационните линии ще се пресекат в някаква точка E с координати x_1^e и x_2^e и че първата крива в „северната” си част, до пресечната точка E е „западно” от втората, както това е отразено на графиката на фигура 3. Точката $E = (x_1^e, x_2^e)$ е равновесна за системата понеже $x_1^e = 0$ и $x_2^e = 0$ и в нея движение или изменение няма да има. В останалите точки обаче може да се очаква, че $x_1(t)$ или $x_2(t)$ или и двете ще се движат или изменят в посока, която ще се определя от знаците на производните $\dot{x}_1(t)$ и $\dot{x}_2(t)$ в тези точки.

За да определим динамиката на $\dot{x}_1$ диференцираме (1) относно x_1 и получаваме:

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} > 0 \qquad (23)$$

Последното е положително поради (7). Съотношението (23) ни показва, че $\dot{x}_1$ е растяща функция на x_1, което означава, че когато x_1 расте започвайки с отрицателни числа (знаци) и през нулата преминава към положителни числа (знаци), то същевременно за $\dot{x}_1$ това изменение започва с отрицателни и през нулата преминава към положителни числа (знаци). Геометрично, това изменение може да бъде наблюдавано на фигура 3, където x_1 расте по координатната си ос от "запад" на "изток" започвайки с отрицателни числа (знаци) и през нулата преминава към положителни числа (знаци), докато в същото време $\dot{x}_1$ започва вляво ("западно") от демаркационната линия с отрицателни (-) стойности, върху демаркационната линия става нула, а надясно ("източно") от нея става с положителни знаци (+).





Фигура 3. Фазова диаграма на динамична система със нестабилно равновесие.

Динамиката на $\dot{x}_2$ определяме като по подобен начин диференцираме (2) относно x_2 и получаваме:

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} > 0 \qquad (24)$$

Последното е положително поради (7). В този случай $\dot{x}_2$ е растяща функция на x_2, което разгледано геометрично на фигура 3 ще означава, че когато x_2 нараства от "юг" на "север" движейки се по координатната си ос, $\dot{x}_2$ също ще нараства като започва с отрицателни знаци под ("южно" от) демаркационната линия, става нула върху демаркационната линия и преминава към положителни знаци над ("северно" от) демаркационната линия, което е отбелязано и на фигура 2.

Фазовата диаграма на фигура 3 съдържа фазовите траектории очертаващи основните тенденции на движението или на изменението на динамичната система (1),(2) при условията на случай 2 изразен чрез неравенствата (19) и предположението (22).

В областта I знаците на $\dot{x}_1(t)$ и $\dot{x}_2(t)$ са положителни. Следователно, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ растат, което означава, че тези точки се движат в положителните посоки на съответните координатни оси. Тези посоки са отразени със стрелки. Общата посока на движение на точката $(x_1(t), x_2(t))$ е на отдалечаване от равновесната точка E и също е отразена със стрелка. В областта I, посоката на движение е отразено от типична фазова траектория представляваща насочена линия, която се отдалечава от равновесната точка E, като през цялото време остава в областта I и не преминава в други области.

В областта II типичната фазова траектория също се отдалечава от равновесната точка E, тъй като координатата $x_1(t)$ ще намалява поради $\dot{x}_1(t) < 0$, а $x_2(t)$ ще расте, понеже $\dot{x}_2(t) > 0$.

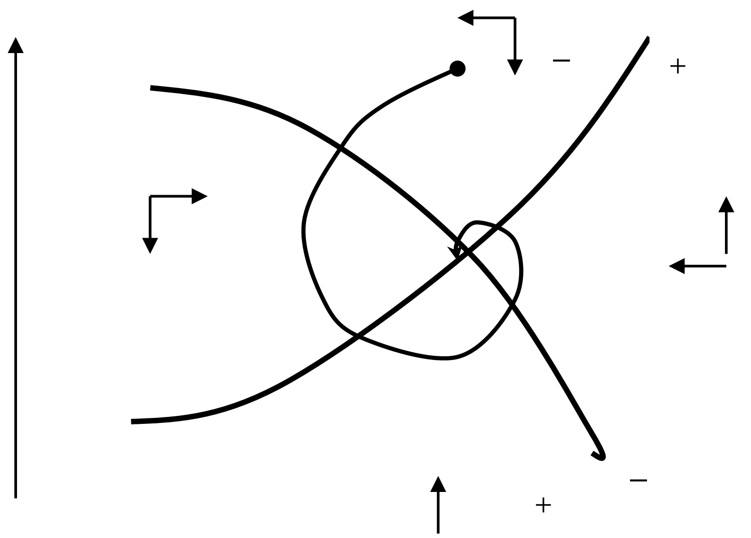
В областта III положителна е посоката както на $x_1(t)$ така и на $x_2(t)$, което отново означава движение на типичната фазова траектория отдалечавайки се от *E*.

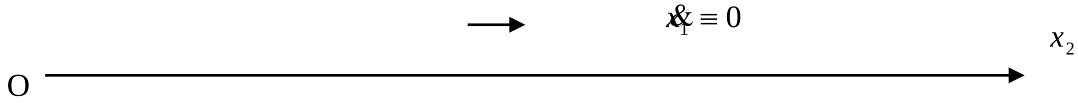
И в областта IV характерната фазова траектория описва движение на отдалечаване от *E*, понеже $x_1(t)$ ще се движи в положителна, $x_2(t)$ - в отрицателна посока доближавайки точката $x_1(t), x_2(t)$ отново е към равновесната точка *E*.

Сумирайки, можем да направим извода, че всяка фазова траектория на динамичната система отразена графично на фигура 3 се отдалечава от равновесното положение *E*, независимо от стартовата си позиция.

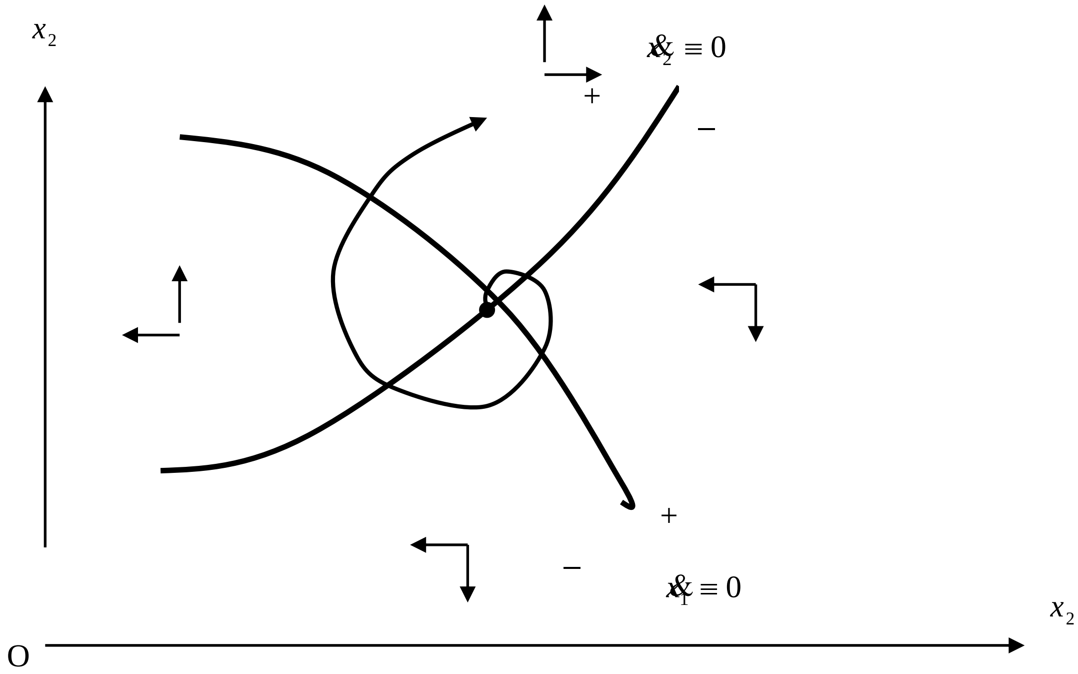
Всяко равновесно състояние на една динамична система, фазовите траектории на която се отдалечават от равновесното състояние независимо от началната си позиция наричаме глобално нестабилно състояние или нестабилен възел. Нестабилен възел е представен на фигура 3. Характерно за нестабилния възел е, че демаркационите линии са прави успоредни на координатните оси и са същевременно и фазови траектории. Фазовите траектории не пресичат демаркационните линии, което означава, че не преминават от една в друга област. Нестабилното равновесие също може нагледно да бъде представено чрез движението топче в сферичен съд. За целта обаче е необходимо да обърнем сферичния съд с дъното нагоре, така че дъното да застане на върха. Тогава където и да поставим топчето върху външната страна на сферата, то ще се спуска надолу и ще се отдалечава от върха, който поради това ще бъде нестабилен равновесен възел.

Стабилна фокусна точка на равновесие на една динамична система или *стабилен фок* X_2 наричаме всяка нейна равновесна то $\dot{x}_2 \equiv 0$ зите траектории на която имат формата на спирали клонящи към равновесната точка пресичайки последователно демаркационните линии. (Фигура 4).





Фигура 4. Фазова диаграма на динамична система със стабилен фокус.

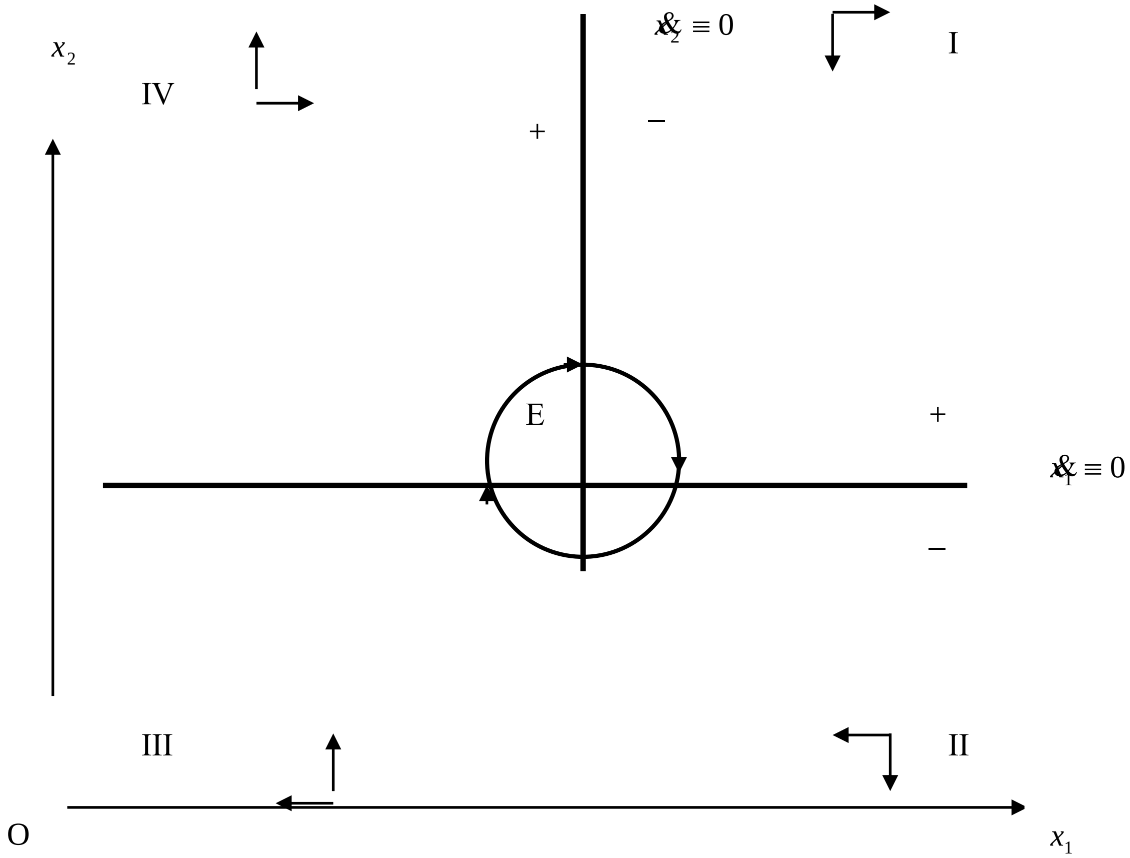


Фигура 5. Фазова диаграма на динамична система с нестабилен фокус.

Равновесната точка на една динамична система е *нестабилен фокус*, ако нейните фазови траектории имат формата на спирали, които се отдалечават от равновесната точка, отивайки в безкрайността. (Фигура 5).

Равновесната точка на една динамична система наричаме *вихрова точка или вихров център*, ако фазовите траектории на системата представляват затворени концентрични овални криви, с център в равновесната точка, които се движат вечно в орбити около равновесната точка подобно на вихър, без да се доближават или отдалечават от нея. Тъй като равновесната точка не може да бъде достигната от никоя точка освен от самата нея, то равновесието се счита за нестабилно. Фазова диаграма на динамична система с вихров център е представена на фигура 6.

В разгледаните случаи негласно предполагахме, че в динамичната система съществува единствена равновесна точка. Ако в системата обаче съществуват повече равновесни точки, както е обикновено в нелинейните системи може да се получат комбинации от разглежданите случаи, но принципите за качествен анализ на системата ще останат същите.



Фигура 6. Фазова диаграма на динамична система с вихров център.

3. Фазови диаграми на линейна система от диференциални уравнения с две променливи.

Разглеждаме линейната динамична система, зададена чрез уравненията:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \qquad (1)$$

$$\dot{x}_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \qquad (2)$$

където $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$ са динамичните променливи, а $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ са коефициенти, независещи от времето t.

Наклоните на демаркационните линии $\dot{x}_1 = 0$ и $\dot{x}_2 = 0$ на динамичната система (1), (2), взаимното им разположение в равнината x_1Ox_2, както и динамиката на $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ ще зависят от производните $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j}$ за *i,j=1,2*. Определяме ги:

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = a_{11}, \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = a_{12}, \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = a_{21}, \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = a_{22} \qquad (3)$$

Демаркационните линии на динамичната система (1), (2) ще имат вида:

$$\dot{x}_1 = 0 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 = 0 \qquad (4)$$

$$\dot{x}_2 = 0 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 = 0 \qquad (5)$$

или

$$\dot{x}_1 = 0 : x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 - \frac{b_1}{a_{12}} \qquad (6)$$

$$\dot{x}_2 = 0 : x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{b_2}{a_{22}} \qquad (7)$$

Демаркационните линии се пресичат в равновесната точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Компонентата $\bar{x}_1$ пресмятаме като приравним (6) и (7):

$-\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 - \frac{b_1}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{b_2}{a_{22}}$, еквивалентно на:

$\left(\frac{a_{21}}{a_{22}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\right)x_1 = -\frac{b_2}{a_{22}} + \frac{b_1}{a_{12}}$, еквивалентно на:

$$\frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{22}}x_1 = \frac{-b_2a_{12} + b_1a_{22}}{a_{12}a_{22}}$$

Следователно $\bar{x}_1 = \frac{b_2a_{12} - b_1a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

Компонентата $\bar{x}_2$ намираме като заместим $\bar{x}_1$ в (6)

$$\bar{x}_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}.\frac{b_2a_{12} - b_1a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} - \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{-a_{11}(b_2a_{12} - b_1a_{22}) - b_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} =$$

$$= \frac{-a_{11}b_2a_{12} + a_{11}b_1a_{22} - b_1a_{11}a_{22} + b_1a_{12}a_{21}}{a_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = \frac{a_{12}(b_1a_{21} - a_{11}b_2)}{a_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

Следователно $\bar{x}_2 = \frac{b_1a_{21} - b_2a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

Тъй като поведението на динамичната система се определя от знаците на производните $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}, i, j = 1,2$, които вече пресметнахме в (3), сега ще разгледаме различни възможни случаи

Случай 1

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = a_{11} < 0, \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = a_{12} > 0, \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = a_{21} > 0, \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = a_{22} < 0 \qquad (8)$$

За да определим наклоните на демаркационните линии вземаме диференциал от двете страни на равенствата (4) и (5)

$$\dot{x}_1 = 0 : a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 = 0 \qquad (9)$$

$$\dot{x}_2 = 0 : a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 = 0 \qquad (10)$$

Следователно наклоните са съответно равни на:

$$\frac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{\dot{x}_1=0} = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2}} \qquad (11)$$

$$\frac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{\dot{x}_2=0} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} = -\frac{\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}} \qquad (12)$$

Случай 1.1 Наклонът на $\dot{x}_1 = 0$ е по-голям от наклона на $\dot{x}_2 = 0$, (фиг.1), т.е. $-\frac{a_{11}}{a_{12}} > \frac{a_{21}}{a_{22}}$, което е еквивалентно на $-a_{11} > -\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}$, понеже $a_{12} > 0$ и $-a_{11}a_{22} < -a_{12}a_{21}$, понеже $a_{22} < 0$. Следователно

$$\lambda_1\lambda_2 = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \qquad (13)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = traceA = a_{11} + a_{22} < 0 \qquad (14)$$

Последните неравенства показват, че равновесното състояние $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ на системата при условията на случай 1 и 1.1. ***е глобално стабилна.***

Посоките на движение на типичните фазови траектории в четирите области, на които се разделя фазовото пространство от демаркационните линии, определяме от предположението (8).

Динамиката на $\dot{x}_1$ в зависимост от x_1 е отрицателна, понеже $\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = a_{11} < 0$, което означава, че когато x_1 расте, започвайки от $-\infty$, стигайки до демаркационната линия в точката x_1* и продължавайки нататък към $+\infty$, то $\dot{x}_1$ намалява, като започва с положителни знаци вляво и над демаркационната линия $\dot{x}_1 = 0$, върху демаркационната линия $\dot{x}_1 = 0$, разбира се става равно на нула и продължава с отрицателни знаци под и вдясно от демаркационната линия $\dot{x}_1 = 0$ (виж фигура 1).

Динамиката на $\dot{x}_2$ в зависимост от x_2 е отрицателна понеже $\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = a_{22} < 0$ в (8), което означава, че когато x_2 расте по оста Ox_2 започвайки от $-\infty$, стигайки до демаркационната линия $\dot{x}_2 = 0$ в точката x_2* и продължавайки към $+\infty$, то $\dot{x}_2$ ще намалява започвайки с положителни знаци под и вдясно от демаркационната линия $\dot{x}_2 = 0$, ставайки нула върху демаркационната линия $\dot{x}_2 = 0$ и продължавайки с отрицателни знаци от другата страна на демаркационната линия, т.е. над и вляво от нея (виж фигигура 1).

Случай 1.2. Наклонът на $\dot{x}_1 = 0$ е по-малък от наклона на $\dot{x}_2 = 0$, (виж фигура 2.), т.е.

$-\frac{a_{11}}{a_{12}} < -\frac{a_{21}}{a_{22}}$, което е еквивалентно на:

$-a_{11} < -\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}$, понеже $a_{12} > 0$ и

$-a_{11}a_{22} > -a_{12}a_{21}$, понеже $a_{22} < 0$. Следователно

$$\lambda_1\lambda_2 = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0 \qquad (15)$$

Последното неравенство показва, че равновесното състояние $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ на системата при условията на случай 1 и случай 1.2. е ***седловинно стабилно,*** независимо от това какъв е знакът на $traceA = a_{11} + a_{22} < 0$. Посоките на движение на типичните фазови траектории в четирите области, на които се разделя фазовото пространство от демаркационните линии, определяме от предположението (8). Динамиката на $\dot{x}_1$ в зависимост от x_1 е отрицателна, понеже $\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = a_{11} < 0$, което означава, че когато x_1 расте по оста Ox_1 започвайки от $-\infty$, стигайки до демаркационната линия в точката x_1* и продължавайки нататък към $+\infty$, то $\dot{x}_1$ намалява, като започва с положителни знаци в ляво и над демаркационната линия $\dot{x}_1 = 0$, върху демаркационната линия $\dot{x}_1 = 0$, става равно на нула и продължава с отрицателни знаци под и вдясно от демаркационната линия $\dot{x}_1 = 0$ (виж фигура 2).

Динамиката на $\dot{x}_2$ в зависимост от x_2 е отрицателна понеже $\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = a_{11} < 0$ в (8) означава, че когато x_2 расте по оста Ox_2 започвайки от $-\infty$, стигайки до демаркационната линия $\dot{x}_2 = 0$ в точката x_2* и продължавайки към $+\infty$, то $\dot{x}_2$ ще намалява започвайки с положителни знаци под и вдясно от демаркационната линия $\dot{x}_2 = 0$, ставайки нула върху демаркационната линия $\dot{x}_2 = 0$ и продължавайки с отрицателни знаци от другата страна на демаркационната линия, т.е. над и вляво от нея (виж фигура 2).

Разположението на типичните фазови траектории показва, че равновесната точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ на динамичната система (1), (2) при условията на случай 1 и случай 1.2 е седловинно стабилно, което потвърждава получения въз основа на равенство (15) извод.

При седловинната стабилност само две траектории клонят към равновесната точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. На фигура 2 те са означени с s_2 и s_4 и се намират в областите II и IV съответно. Две траектории се отдалечават директно от равновесната точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и клонят към безкрайност. На фигура 2 те са означени с d_1 и d_3 и се намират в областите I и III съответно.

Траекториите с начална точка в областите (I) и (III) асимтотично се доближават до траекториите на d_1 и d_2 в областта (I) и (III) съответно, като например траектории t_1 и t_3.

Траекториите с начална точка в областите (II) и (IV) в началото на движението си може да имат посока близка до s_2 и s_4, но с течение на времето се отдалечават от тази посока и пресичайки съответно демаркационната линия и с асимтотично близка до d_1 и d_2 посока се отдалечават в безкрайността, като изобразените на фигура 2 траектории t_2 и t_4 например.

Равновесната точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ е седловинно стабилна, ако според теорема 2 ако съществуват две реални и различни собствени стойности λ_1 и λ_2 на матрицата *A*, така че едната от тях е положителна, а другата е отрицателна.

Според равенство 7, в раздел 2 на приложение I имаме:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

По-точно:

$$\lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

$$\lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

Предположенията (8) ни дават $a_{11} < 0, a_{12} > 0, a_{21} > 0, a_{22} < 0$. От тези предположения и от $\lambda_1\lambda_2 = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$ следва, че $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Решението на динамичната система в този случай според равенство (16`) в приложение I, има вида:

$$x_1(t) = \left(\frac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(0) - \frac{\lambda_1 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0) + \frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) e^{\lambda_1 t} - \frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} +$$

$$+ \left(-\frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(0) + \frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0) + \frac{-b_1(\lambda_1 - a_{11}) + b_2 a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) e^{\lambda_2 t} - \frac{b_1(\lambda_1 - a_{11}) + b_2 a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$x_2(t) = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \left(\left(\frac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(0) - \frac{\lambda_1 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0) + \frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) e^{\lambda_1 t} - \frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} \left(\left(-\frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(0) + \frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0) + \frac{b_1(\lambda_1 - a_{11}) + b_2 a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) e^{\lambda_2 t} - \frac{-b_1(\lambda_1 - a_{11}) + b_2 a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \right)$$

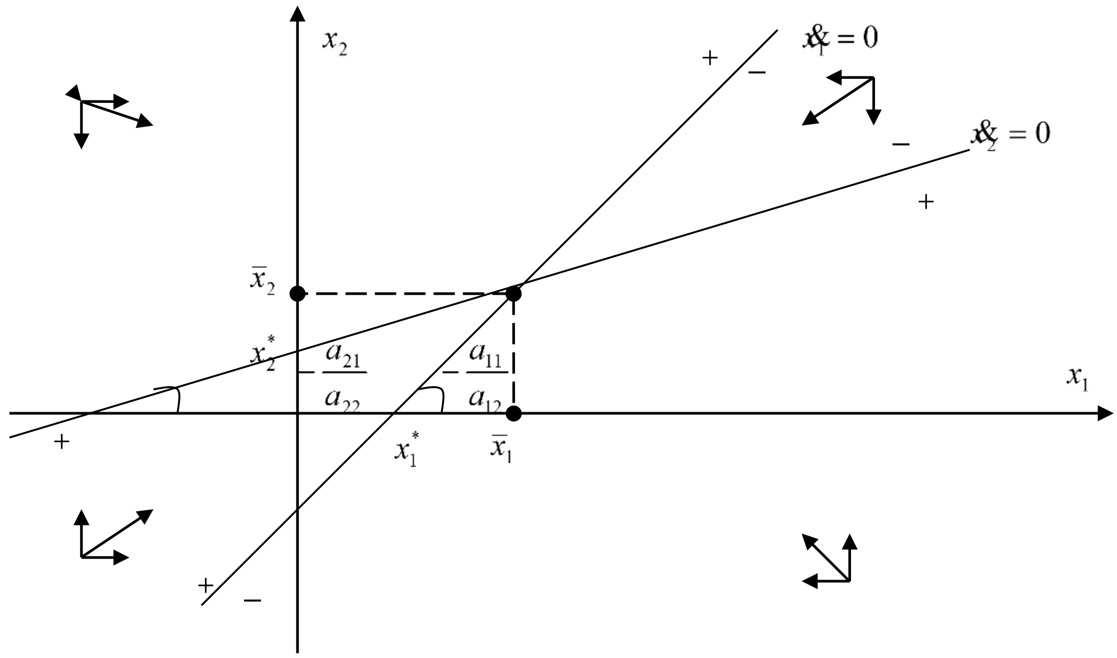
Тъй като $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, границите на $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при $t \to \infty$ ще са крайни, тогава и само тогава когато множителят пред $e^{\lambda_1 t}$ е равен на нула, т.е.:

$\dfrac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1(0) - \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} x_2(0) + \dfrac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = 0$, което е еквивалентно на:

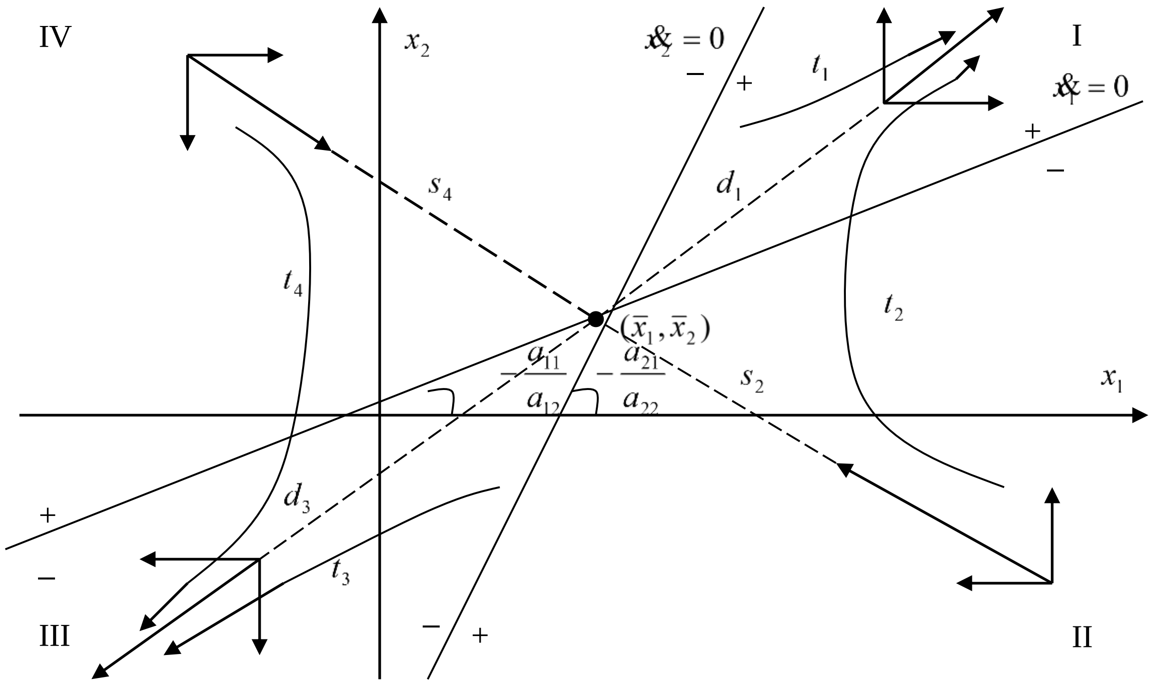
$$(\lambda_2 - a_{11})x_1(0) - (\lambda_1 - a_{11})x_2(0) + \frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1} = 0$$

$$(\lambda_1 - a_{11})x_2(0) = (\lambda_2 - a_{11})x_1(0) + \frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1}$$

$$x_2(0) = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{\lambda_1 - a_{11}} x_1(0) + \frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_1 - a_{11})} \qquad (16)$$



Фигура 1. Фазова диаграма на глобално стабилна линейна динамична система с две променливи.



Фигура 2. Фазова диаграма на седловинно стабилна линейна динамична система с две променливи.

Относно $(x_1(0), x_2(0))$ равенството (16) представлява уравнението на права, която е геометричното място на всички начални точки, които трасират клонящите към равновесната точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ траектории s_2 и s_4 на фигура 2.

Уравнието (16) задава правата на седловинното равновесие.

Пресмятанията по-долу показват, че равновесните точки със собствените стойности съвпадат с равновесните точки пресметнати директно при нулеви скорости, което би трябвало и да се очаква.

$$\bar{x}_1 = -\frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} - \frac{-b_1(\lambda_1 - a_{11}) + b_2 a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-b_1\lambda_2(\lambda_2 - a_{11}) + b_2\lambda_2 a_{12} + \lambda_1 b_1(\lambda_1 - a_{11}) - \lambda_1 b_2 a_{12}}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} =$$

$$= \frac{-\lambda_2^2 b_1 + b_1\lambda_2 a_{11} + b_2\lambda_2 a_{12} + b_1\lambda_1^2 - \lambda_1 b_1 a_{11} - \lambda_1 b_2 a_{12}}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{b_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + b_1 a_{11}(\lambda_2 - \lambda_1) + b_2 a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} =$$

$$= \frac{-b_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + b_1 a_{11}(\lambda_2 - \lambda_1) + b_2 a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-b_1(\lambda_2 + \lambda_1) + b_1 a_{11} + b_2 a_{12}}{\lambda_1\lambda_2} = *$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$$
$$\lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$* = \frac{-b_1(a_{11} + a_{22}) + b_1 a_{11} + b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{-b_1 a_{11} - b_1 a_{22} + b_1 a_{11} + b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{-b_1 a_{22} + b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{(\lambda_1 - a_{11})}{a_{12}}\left(-\frac{b_1(\lambda_2 - a_{11}) - b_2 a_{12}}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) - \frac{-b_1(\lambda_1 - a_{11}) + b_2 a_{12}}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} =$$

$$= \frac{(\lambda_1 - a_{11})(-b_1\lambda_2^2 + b_1\lambda_2 a_{11} + b_2\lambda_2 a_{12}) + (b_1\lambda_1^2 - b_1\lambda_1 a_{11} - b_2\lambda_1 a_{12})(\lambda_2 - a_{11})}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)a_{12}} =$$

$$= \frac{-b_1\lambda_1\lambda_2^2 + b_1\lambda_1\lambda_2 a_{11} + b_2\lambda_1\lambda_2 a_{12} + b_1\lambda_1^2\lambda_2 - b_1\lambda_1\lambda_2 a_{11} - b_2\lambda_1\lambda_2 a_{12}}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)a_{12}} =$$

$$= \frac{-a_{11}(-b_1\lambda_2^2 + b_1\lambda_2 a_{11} + b_2\lambda_2 a_{12} + b_1\lambda_1^2 - b_1\lambda_1 a_{11} - b_2\lambda_1 a_{12})}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)a_{12}} =$$

$$= \frac{-b_1\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}{a_{12}\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} - \frac{a_{11}(-b_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + b_1 a_{11}(\lambda_2 - \lambda_1) + b_2 a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1))}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)a_{12}} =$$

$$= \frac{-b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}(\lambda_2 - \lambda_1)(-b_1(\lambda_2 + \lambda_1) + b_1 a_{11} + b_2 a_{12})}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)a_{12}} = \frac{-b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}(-b_1(\lambda_1 + \lambda_2) + b_1 a_{11} + b_2 a_{12})}{\lambda_1\lambda_2 a_{12}} =$$

$$= \frac{-b\lambda_1\lambda_2 + b_1 a_{11}(\lambda_1 + \lambda_2) - b_1 a_{11}^2 - b_2 a_{11} a_{12}}{\lambda_1\lambda_2 a_{12}} = *$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$$
$$\lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$* = \frac{-b_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + b_1 a_{11}(a_{11} + a_{22}) - b_1 a_{11}^2 - b_2 a_{11} a_{12}}{a_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} =$$

$$= \frac{-b_1 a_{11}a_{22} + b_1 a_{12}a_{21} + b_1 a_{11}^2 + b_1 a_{11}a_{22} - b_1 a_{11}^2 - b_2 a_{11}a_{12}}{a_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} =$$

$$= \frac{a_{12}(b_1 a_{21} - b_2 a_{11})}{a_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = \frac{b_1 a_{21} - b_2 a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Глава 6. Числени методи за решаване на обикновени диференциални уравнения.

В общия случай не съществуват методи за намиране на решенията на диференциални уравнения. Разработени са обаче мощни числени методи за приблизително решаване или за графично изследване на такива уравнения. (Виж например Славов, 2003, Тончев 2006, 2007) Тук само за илюстрация ще опишем една техника за графично представяне на решенията на диференциално уравнение от първи ред:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

където $f(t,x)$ е зададена функция на t и x. За да разберем тази техника, нека да разгледаме уравнението (1) като зависимост, която ни позволява за всяка точка (t_0,x_0) в равнината tOx да намерим наклона $\frac{dx(t_0)}{dt}$ на допирателната към кривата $x(t)$ в тази точка, като за целта просто заместим (t,x) с (t_0,x_0) във функцията $f(.,.)$ в резултат на което ще получим

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = f(t_0,x_0), \tag{2}$$

Наклона на допирателната е графично изобразен на фигура 4 чрез една чертичка, която всъщност определя нейната посока, поради което, всяка такава чертичка ще наричаме ***линия на посоката***. Множеството от всички линии на посоките, които можем да получим за диференциалното уравнение (1) се нарича ***поле на посоките*** на това диференциално уравнение. Чертичките от полето на посоките трасират като допирателни към решението $x(t)$ на диференциалното уравнение, самото решение. Чертичките трасирайки решенията на диференциалното уравнение и ни дават представа за тяхното поведение. Всичко това ни дава основание да приложим техниката за представяне на решенията на диференциалното уравнение на два етапа:

I. Да се начертае полето от посоките на диференциалното уравнение.

II. Да се свържат линиите на посоките посредством изгладени криви, така, че кривите да са постоянно допирателни към линиите на посоките в съответните допирни точки.

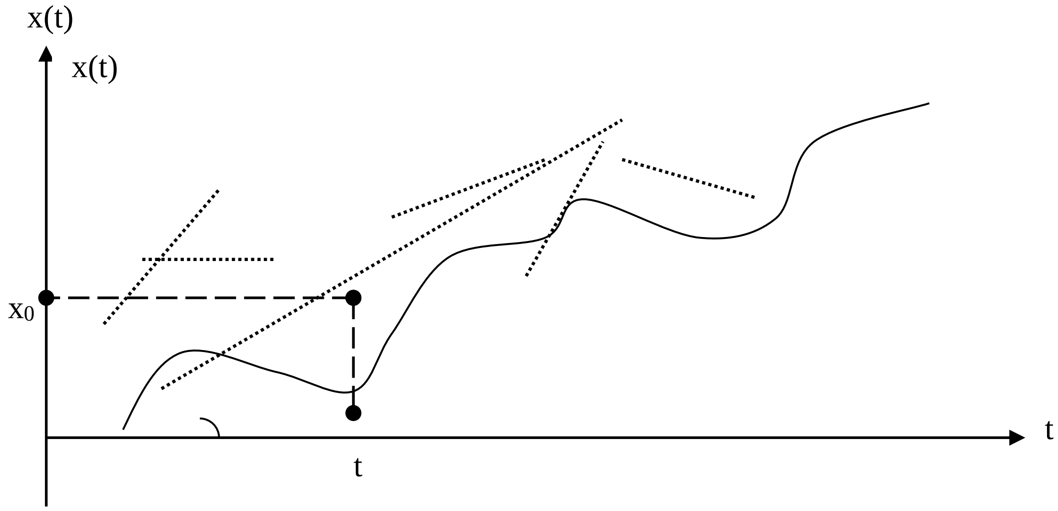
Пример 3. Да се представят графично решенията на уравнението

$$\frac{dx}{dt} = t - x \qquad (3)$$

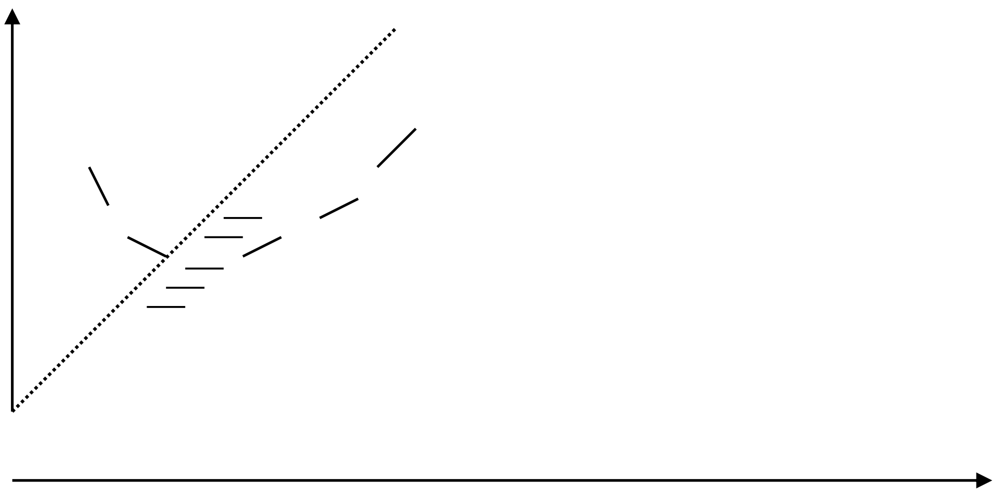
Полето от посоките е представено на фиг. 5. и се трасира в случаите:

А) Ако $x = t$, то $\frac{dx}{dt} = 0$. Наклонът е нула, което означава, че посоката е успоредна на оста Ot.

Б) Ако $x > t$, то $\frac{dx}{dt} < 0$. Наклонът е отрицателен.



Фигура 4. Линии на посоките на уравнение (1)



Фигура 5. Поле от посоките на уравнение (3)

t

Пример 4. Да се представят графично решенията на уравнението

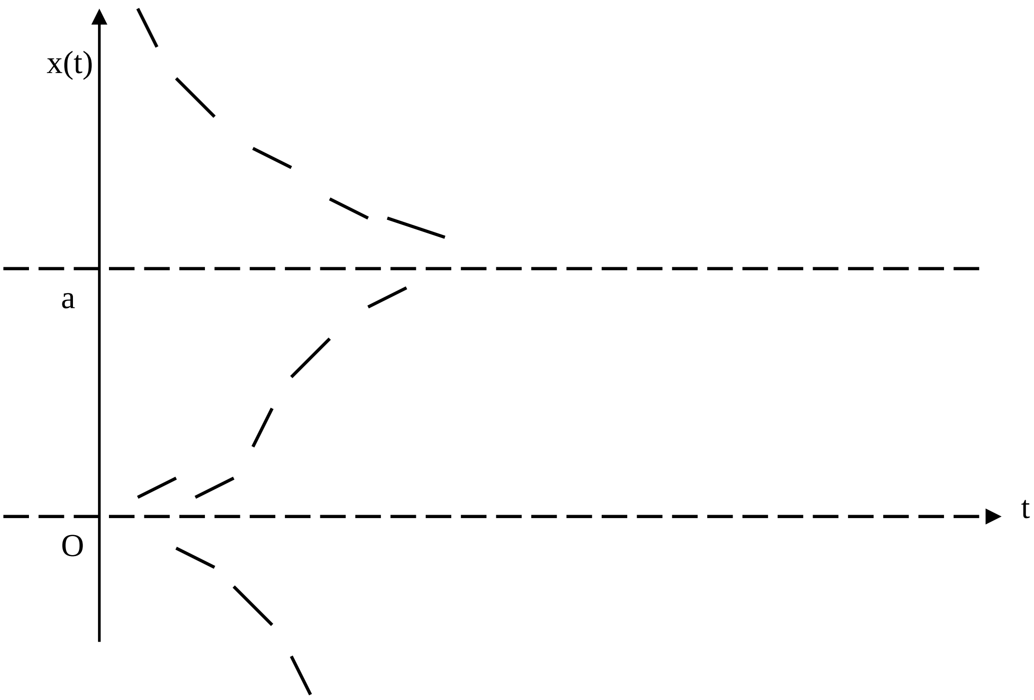
$$\frac{dx}{dt} = x(a - x) \tag{4}$$

Определяме полето от посоките на уравнението на базата на следните случаи

А) Наклонът на x е нула за $x(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv a$.

Б) Наклонът на x е положителен за $0<x<a$ и за всяко t.

В) Наклонът на x е отрицателен за $x>a$ и за $x<0$



Фигура 6. Поле от посоките на уравнение (4)

Използване на софтуерния пакет MAPLE 9 за числено решаване на динамични системи. MAPLE 9 е една от най-мощните интегрирани системи за пресмятания, сравнима по своите възможности с MATHEMATICA и MATLAB. Тя дава възможност за най-разнообразни числени пресмятания и в частност за решаване и графично представяне на динамични системи. Има добре разработен интерфейс, който позволява сравнително лесно и бързо да се подберат необходимите команди, да се подадат данните и да се получат резултатите в числов и графичен вид. Началната страница на MAPLE 9 има различни стандарти за подбор на команди с основен стандарт Maple Input. Подбора на изразните средства става като чрез прозореца View се влиза в Palette, която предоставя възможностите Symbol, Expression, Matrix, Vector. Възможността Symbol съдържа всички букви от гръцката азбука и някои математически символи. Възможността Expression съдържа математически изрази като интеграл, сума, производна, граница, всички основни математически функции така, че с тяхна помощ да може да бъде записан всеки математически израз. (За подробности, виж например Тончев 2006, 2007).

Литература към математическото приложение

Арнолд, В. И.. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Наука, Москва, 1984.

Арнолд, В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, Москва, 1978.

Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. Наука, Москва, 1987.

Каранджулов, Л., Иван Трендафилов. Обикновени диференциални уравнения. Линейни системи от диференциални уравнения. СД „Недкова&Математика, София, 1999.

Пашева, Весела, Яни Арнаудов. Основи на числените методи. Технически университет, София, 2002.

Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, Москва, 1970.

Понтрягин, Лев С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Издательство „Наука", Москва, 1965.

Самойленко, А. М., С. А. Кривошея, Н.А. Перестюк. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. Вища школа, Киев, 1984.

Славов, Йордан. Числени методи. Примери, разработени на MAPLE. Херон Прес, София, 2003.

Тончев, Йордан. MATLAB 67. Преобразувания. Изчисления. Визуализация. Част I. Издателство Техника, София, 2007.

Тончев, Йордан. MATLAB 67. Преобразувания. Изчисления. Визуализация. Част II. Издателство Техника, София, 2006.

Эрроусмит, Д., К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. Мир, Москва, 1962.

Beavis, Brian; Ian Dobbs. Optimization and Stability Theory for Economic Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1991. Braun, Martin. Differential Equations and Their Applications. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978.

Chiang, Alpha C. Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw-Hill Book Company, London, Tokyo, 1984.

Collar, A. R. and A. Simpson. Matrices and Engineering Dynamics, 1987.

Felderer, Bernhard; Stefan Homburg. Makrooekonomik und neue Makrooekonomik. Springer, Berlin, 1999.

Fuller, A.T.. Conditions for a Matrix to Have Only Characteristic Roots with Negative Real Parts. Journal of Mathematical Analysis and Applications 23, 1968, pp. 71-98.

Gandolfo, Giancarlo. Economic Dynamics. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

Gantmacher, F. R.. Applications of the Theory of Matrices. Interscience, New York, 1959

Gulick, Denny. Encounters with Chaos. McGraw-Hill Inc., New York, 1992.

Karmann, Alexander; Thomas Kaehler. Mathematik fuer Wirtschaftswissenschaftler. R. Oldenbourg Verlag, Muenchen, Wien, 1998.

Lefschetz, Solomon. Differential Equations. Geometric Theory. Inter science Publishers Inc., New York 1957.

Luderer, Bernd; Volker Nollau, Klaus Vetters. Mathematical Formlas for Economists. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.

Murata, Y. Mathematics for Stability and Optimization of conomic Systems. Academic Press, New York, 1977.

Sydsaeter, Knut; Arne Stroem, Peter Berck. Economists' Mathematical Manual. Springer, Berlin, 1999.

Takayama, Akira. Analytical Methods in Economics. Harvester Wheatsheaf, New York, 1994.