

Физически факултет  
Софийски университет "Св. Климент Охридски"

**Димитър Сотиров Попчев**

**Числено изследване на компактни самогравитиращи обекти и  
тяхната динамика в гравитационни теории**

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

на дисертация за присъждане на образователната и научна степен  
„ДОКТОР“

**Професионално направление 4.1 Физически науки**  
**Научна специалност: 01.03.01 Теоретична и математическа физика**

**Научен ръководител:**  
проф. дфзн Стойчо С. Язаджиев

**Научен консултант:**  
д-р Даниела Д. Донева,  
Университет Тюбинген; ИЯИЯЕ БАН

Докторантът е зачислен в редовна докторантура към катедра Теоретична физика при Физически факултет на СУ “Св. Климент Охридски”. Изследванията по дисертацията са проведени във Физическия факултет на Софийски Университет.

Дисертационната работа е съставена от 81 страници разделени в 6 глави. Съдържа 25 фигури, а библиографията обхваща 161 заглавия.

Дисертационният труд е обсъден на заседание на катедрен съвет в катедра Теоретична физика на Физически факултет, СУ “Св. Климент Охридски”, проведено на 19.12.2018г., и насочен за обсъждане от Факултетен съвет за защита пред научно жури в състав

чл. кор. проф. дфзн Емил Нисимов

проф. дфзн Светлана Пачева

проф. дфзн Пламен Божилов

проф. дфзн Стойчо Язаджиев

доц. д-р Димитър Младенов

# Съдържание

<b>1</b>	<b>Скаларно-тензорни теории на гравитацията</b>	<b>3</b>
1.1	Основни идеи и уравнения . . . . .	3
1.2	Непертурбативни ефекти в скаларно-тензорните теории . . . . .	5
1.3	Експериментални ограничения върху безмасовите скаларно-тензорни теории	7
1.4	Експериментални ограничения върху масивните скаларно-тензорни теории .	9
<b>2</b>	<b>Числени методи за решаване на уравненията на скаларно-тензорните теории</b>	<b>10</b>
2.1	Интегратора <code>odeint</code> . . . . .	10
2.2	Метод на престрелката . . . . .	12
2.3	Метод на Нютон-Рафсън . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Неутронни звезди в масивни скаларно-тензорни теории</b>	<b>15</b>
3.1	Предварителна информация . . . . .	15
3.2	Постановка на задачата . . . . .	16
3.2.1	Основни уравнения . . . . .	16
3.2.2	Наблюдателни ограничения . . . . .	18
3.2.3	Числена постановка . . . . .	19
3.3	Резултати . . . . .	19
3.4	Заключение . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Неутронни звезди в скаларно-тензорни теории със самодействие</b>	<b>23</b>
4.1	Предварителна информация . . . . .	23
4.2	Постановка на задачата . . . . .	24
4.2.1	Основни уравнения . . . . .	24
4.2.2	Наблюдателни ограничения . . . . .	24
4.2.3	Числена постановка . . . . .	25
4.3	Резултати . . . . .	25
4.4	Заключение . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Универсални съотношения за неутронни звезди в скаларно-тензорните теории със самодействие</b>	<b>29</b>
5.1	Предварителна информация . . . . .	29
5.2	Резултати . . . . .	31
5.3	Заключение . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Компютърни кодове</b>	<b>37</b>
	Приноси на дисертационния труд	39
	Авторски публикации включени в дисертационния труд	40
	Доклади на конференции по темата на дисертационния труд	40
	Библиография	41

# Актуалност на темата, цел и задачи на дисертационния труд

В рамките на дисертацията са разгледани скаларно-тензорни теории с куплираща функция от вида  $\alpha(\varphi) = \beta\varphi$ . Този подклас на скаларно-тензорните теории са много популярни, тъй като не противоречат на експериментите в режим на слаби гравитационни полета. При силна гравитация проявяват потенциално наблюдателни непертурбативни ефекти, които водят до значително отклонение спрямо общата теория на относителността.

Първоначално са разгледани масивни скаларно-тензорни теории на гравитацията. Представени са решения за стационарни неутронни звезди. Получените резултати са сравнени със съответните такива в ОТО, но и с вече известни в литературата резултати. За първи път са разгледани неутронни звезди в приближение на бавно въртене в този подклас скаларно-тензорни теории. Резултатите за инерчния момент на звездите отново са сравнени с ОТО, като отклоненията са значителни за наблюдателно съгласувани стойности на параметричното пространство.

Разгледани са скаларно-тензорни теории със самодействие. Представени са решения за стационарни неутронни звезди. Получените резултати са сравнени със съответните такива в ОТО, но и с вече известни в литературата резултати. За първи път са разгледани неутронни звезди в приближение на бавно въртене в този подклас скаларно-тензорни теории. Резултатите отново са сравнени с ОТО, като наблюдателните отклонения са значителни.

Разгледани са универсално съотношения на параметрите на неутронните звезди в приближение на бавно въртене в скаларно-тензорни теории със самодействие на гравитацията. Получените резултати са сравнени със съответните такива за ОТО и безмасови скаларно тензорни теории. Резултатите показват от една страна добра универсалност в рамките на теория, от друга – за скаларизираните решения разликите надхвърлят неопределеността на уравнението на състоянието.

## Структура и обем на дисертацията

В Глава 1 са представени накратко основни идеи и уравнения на скаларно-тензорните теории на гравитацията. Представени са непертурбативните ефекти в безмасовата скаларно тензорна теория, както и експерименталните ограничения върху нея. Разгледани са наблюдателните ограничения върху масивните скаларно-тензорни теории.

В Глава 2 са представени на кратко основните числени методи, които са в основата на разгледаните в дисертацията задачи.

В Глава 3, 4 и 5 са представени оригиналните резултати.

В Глави 3 са представени резултати за стационарно и за бавно въртящи се неутронни звезди в масивни скаларно-тензорни теории на гравитацията. Представени са оригинални резултати, получени чрез числено решаване. Те са сравнени с тези в ОТО и безмасови скаларно-тензорни теории. Коментирани са резултатите и отклоненията.

В Глави 4 са представени резултати за стационарно и за бавно въртящи се неутронни звезди в скаларно-тензорни теории на гравитацията със самодействие. Представени са новополучените чрез числено решаване резултати. Те са сравнени с тези в ОТО, безмасови и масивни скаларно тензорни теории. Коментирани са резултатите и отклоненията.

В Глави 5 са представени универсални съотношения за параметрите на неутронните звезди в ОТО, безмасови и масивни скаларно-тензорни теории, и скаларно-тензорни теории със самодействие. За получаването им са използвани получените чрез числено решаване резултати за голяма представителна извадка от уравнения на състоянието. Резултатите са сравнени и тяхното приложение са коментирани.

## Увод

В настоящия дисертационен труд са числено изследвани компактни самогравитиращи обекти и тяхната динамика в гравитационни теории. По-конкретно – неутронни звезди и универсални съотношения в масивните скаларно-тензорни теории.

Общата теория на относителността в момента е най-утвърдената теория на гравитацията. Тя правилно описва редица наблюдения: движението на телата в Слънчевата система, съществуването на гравитационни вълни, реликтовото лъчение и др. Многобройните наблюдателни случаи, за които е тествана, макар разнообразни, са примери по-скоро за слаби гравитационни полета и няма основание да смятаме, че теорията ще премине толкова успешно тестовете на предстоящите наблюдателни мисии, чийто фокус ще е върху силни полета.

Едно от най-естествените обобщения на общата теория на относителността са скаларно-тензорните теории. В тях гравитацията се описва не само с метриката на пространство-времето, но и с едно, или няколко скаларни полета. Първите разглеждания на този тип теории са мотивирани от търсенето на обединението на взаимодействията, но в съвременната гравитационна физика намират далеч по-голямо приложение. Значителен интерес през последните десетилетия привлякоха скаларно-тензорните теории с куплираща функция от вида  $\alpha(\varphi) = \beta\varphi$  заради своите свойства. Този вид теории съвпадат с общата теория на относителността в режим на слаби гравитационни полета, докато при силна гравитация се различават значително от нея. Отклоненията в този режим са следствие на непертурбативен ефект, т.нар. спонтанна скаларизация, чиято същина се състои в нестабилността на скаларния вакуум към кондензиране на скаларното поле. Поради теоремите за несъществуване на скаларна коса за черните дупки в скаларно-тензорните теории, неутронните звезди са най-добрите лаборатории за изследването им и за изследване на алтернативните теории на гравитацията, като цяло, в режим на силни гравитационни полета.

Неутронните звезди са крайния стадий на еволюция на звезди гиганти и са едни от най-компактните астрофизични обекти познати на човека. Те достига от 1.4 до 2 звездни маси, докато радиуса им е между 10 – 12km. При тези екстремални условия материята в центъра на звездата достига плътности по-големи от ядрената такава, което обуславя невъзможността за изследване на свойствата на неутронната звезда в наземни експерименти. Това налага използване на различни модели и приближения за уравнението на състоянието, което, от практическа гледна точка, е източник на неопределеност. За жалост, при разглеждания на неутронни звезди в различни теории на гравитацията неопределеността в уравнението на състоянието е сравнима с неопределеността от модификациите в самите теории. Това е съществен проблем, без значение дали искаме да ограничим уравнението на състоянието, или да ограничим гравитационната теория.

Съвременните наблюдения на бинарни системи значително ограничиха параметричното пространство на безмасовите скаларно-тензорни теории до стойности, за които остава малък прозорец за спонтанна скаларизация. В рамките на дисертацията показваме, че си-

туацията се променя значително, ако разгледаме масивни скаларно-тензорни теории или скаларно-тензорни теории със самодействие. За тях параметричното пространство на наблюдателно съгласувани стойности е значително по-голямо от безмасовия случай и задава по-широк прозорец за наблюдаване на спонтанна скаларизация.

Един от начините за справяне с неопределеността на уравнението на състоянието и изолиране на отклоненията от общата теория на относителността само до ефекти от модификациите в гравитационната теория е формулирането на универсални съотношения на параметрите на неутронните звезди. В рамките на дисертацията са разгледани две нормализирани съотношения. Резултатите, от една страна, показват добра универсалност в теориите, от друга – значително отклонение на скаларизираните решения, надхвърлящо неопределеността от уравненията на състоянието.

# 1 Скаларно-тензорни теории на гравитацията

## 1.1 Основни идеи и уравнения

За първи път скаларно-тензорна формулировка на гравитацията се появява в опита за обединение на гравитационното и на електромагнитно взаимодействие направен от Kaluza-Klein [1]. Изхождайки от пет-мерна теория и след редукция към четири измерения, те получават полевите уравнения на Айнщайн-Максуел, в които фигурира допълнително скаларно поле куплирано с материята. Макар това да противоречи със слабия принцип на еквивалентност, идеята за гравитационно взаимодействие с допълнителна степен на свобода – скаларно поле, което не се куплира директно с материята, а само чрез метриката, се разглежда в следващите години от Jordan [2], Fierz [3], Brans-Dicke [4] и Damour-Esposito-Farese [5].

Действието на скаларно-тензорна теория (СТТ) на гравитацията с едно скаларно поле  $\Phi$  не минимално куплирано към метриката  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  се записва чрез Лагранжевата плътност:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{-\tilde{g}} \left( (F(\Phi)\tilde{R} - Z(\Phi)\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - 2U(\Phi) + \tilde{\mathcal{L}}_m(\Psi_m; \tilde{g}_{\mu\nu}) \right). \quad (1)$$

СТТ се определя напълно от избора на функции на  $\Phi : F(\Phi), Z(\Phi), U(\Phi)$ . Например теорията на Бранс-Дике се получава, като за функции на скаларното поле изберем  $F(\Phi) = \Phi$ ,  $Z(\Phi) = \omega_0/\Phi$ ,  $U(\Phi) = 0$ , където  $\omega_0$  е константа [4].

Наличието на неминималното куплиране в (1) прави извеждането на полевите уравнения трудоемко, а вида им сложен. Тези усложнения могат бъдат преодолени, като трансформираме Лагранжевата плътност в такава с минимално куплиране чрез избор на подходяща конформна трансформация на метриката:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} = \mathcal{A}^2(x)\tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (2)$$

където  $\mathcal{A}(x)$  е регулярна функция на координатите, която никъде не е нула. Първо трябва да изразим всички геометрични членове в термини на конформната метрика  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  и конформния фактор  $\mathcal{A}$ :

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \mathcal{A}^{-2}g_{\mu\nu} \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \mathcal{A}^2g^{\mu\nu} \quad \sqrt{-\tilde{g}} = \mathcal{A}^{-4}\sqrt{-g} \quad (3)$$

За удобство нека да разделим Лагранжиана (1) на отделни членове:

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 = \sqrt{-\tilde{g}}F(\Phi)\tilde{R} \quad (4)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_2 = -\sqrt{-\tilde{g}}Z(\Phi)\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi \quad (5)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_3 = -2\sqrt{-\tilde{g}}U(\Phi) \quad (6)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_4 = \sqrt{-\tilde{g}}\tilde{L}_m(\Psi_m; \tilde{g}_{\mu\nu}) \quad (7)$$

След редица алгебрични преобразования, можем да запишем трансформацията на първия член  $\tilde{\mathcal{L}}_1$ :

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_1 = \sqrt{-g}F(\Phi)\mathcal{A}^2(R + 6\Box f - 6g^{\mu\nu}f_\mu f_\nu) \quad (8)$$

Неопределеността на  $\mathcal{A}$  ни позволява да изберем:

$$F(\Phi)\mathcal{A}^{-2}(x) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}(\Phi(x)) = F^{1/2}(\Phi(x)), \quad (9)$$

с което успешно разделяме скаларното поле от скалара на Ричи в конформното пространство-време.

Втория член в (8) съдържа оператора на Д'Ламбер и изчезва при интегриране по части. Последния член може да се сведе в по-удобен вид като използваме дефиницията на  $f \equiv \ln \mathcal{A}$ ,  $f_\rho \equiv \frac{\partial_\rho \mathcal{A}}{\mathcal{A}} = \partial_\rho f$  и връзката между  $F$  и  $\mathcal{A}$  от (9):

$$f_\rho = \frac{1}{2} \frac{\partial_\rho F}{F} = \frac{1}{2} \frac{F'}{F} \partial_\rho \Phi, \quad (10)$$

където с  $'$  сме обозначили диференциране по скаларното поле  $\Phi$ ,  $F' \equiv dF/d\Phi$ . В така получения конформно трансформиран Лагранжиан  $\mathcal{L}_1$ , гравитацията е минимално куплирана със скаларното поле:

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{-g} \left( R - \frac{3}{2} \left( \frac{F'}{F} \right)^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right) \quad (11)$$

Прилагайки същите разсъждения за (5) получаваме:

$$\tilde{\mathcal{L}}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2 = \sqrt{-g} \frac{Z(\Phi)}{F(\Phi)} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \quad (12)$$

Лесно се вижда, че втория член на (11) има същия вид като (12) и ако ги съберем ще получим

$$-\sqrt{-g} \Delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi, \quad (13)$$

където сме положили

$$\Delta = \frac{3}{4} \left( \frac{F'}{F} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Z(\Phi)}{F(\Phi)} \quad (14)$$

Вече можем да въведем ново скаларно поле  $\Phi \longrightarrow \varphi$

$$\frac{d\varphi}{d\Phi} = \sqrt{\Delta}, \quad \Delta > 0, \quad (15)$$

където  $\varphi(x)$  е скаларното поле в конформното пространство-време. Изборът на този вид трансформация е удобен, защото

$$\sqrt{\Delta} \partial_\rho \Phi = \frac{d\varphi}{d\Phi} \partial_\rho \Phi = \partial_\rho \varphi \quad (16)$$

което преобразува (13)

$$-\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi \quad (17)$$

в каноничен кинетичен член на ново скаларно поле  $\varphi$ . С други думи,  $\varphi$  вместо  $\Phi$  е скаларното поле в конформното пространство-време с метрика  $g_{\mu\nu}$ . Физическата интерпретация на условие (15) е, че то дефинира нормално скаларно поле с положителна енергия. Обратното,  $\Delta < 0$ , би означавало  $\varphi$  да бъде духово поле.

Трансформационните формули за (6) и (7) са:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_3 &\longrightarrow \mathcal{L}_3 = V(\varphi) \equiv \sqrt{-g}F^{-2}(\Phi)U(\Phi) \\ \tilde{\mathcal{L}}_4 &\longrightarrow \mathcal{L}_4 = \sqrt{-g}L_m(\Psi_m, F(\Phi)g_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (18)$$

Използвайки (6), (7) и (18) сме готови да запишем конформно еквивалентния на (1) Лагранжиан

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left( R - g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi) + \mathcal{L}_m(\Psi_m; \mathcal{A}^2(\varphi)g_{\mu\nu}) \right), \quad (19)$$

в който скаларното поле е минимално куплирано към гравитацията.  $\mathcal{A}(\varphi)$  ще наричаме конформен фактор,  $V(\varphi)$  – потенциал на полето, и с техния избор определяме напълно скаларно-тензорната теория.

Конформната еквивалентност на теориите, определени чрез Лагранжианите (1) и (19), означава, че те имат една и съща причинна структура – конформната трансформацията запазва светлинните конуси и вида вектори; но не означава, че те описват едно и също пространство-време. Точно обратното, (2) не е дифеоморфизъм и конформната метрика  $g_{\mu\nu}$  не е просто  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  записана в друга координатна система. Всеки Лагранжиан има свое пространство-време със свои полета – (1) определя  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{\mu\nu}, \Phi)$ , докато (19) задава  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu}, \varphi)$ . В литературата е прието да разграничим двете пространство-временна,  $\tilde{\mathcal{M}}$  и  $\mathcal{M}$ , с различни имена – първото наричаме отправна система на Йордан (*Jordan frame*), а второто – отправна система на Айнщайн (*Einstein frame*). Също, следвайки общо приетата конвенция, ще приемем, че отправната система на Йордан е физичната отправна система, тъй като в нея е спазен слабия принципа на еквивалентност, за разлика от отправната система на Айнщайн, в която има куплиране на скаларното поле с материята  $\mathcal{L}_m(\Psi_m; \mathcal{A}^2(\varphi)g_{\mu\nu})$ .

Конформната трансформация се използва с голям успех в гравитационната физика като математически инструмент за пренаписване на уравнения във вид, в който е полесно да решим или е изчислително по-удобен. Поради това дискусиата относно въпроса за това коя е „физичната“ отправна система е често срещана. Повече по темата може да бъде намерено например в [6–8].

## 1.2 Непертурбативни ефекти в скаларно-тензорните теории

Едно от най-интересните явления в СТТ е т.нар. „спонтанна скаларизация“ – за определени куплиращи функции съществуват начални условия, при които дори слабо външно скаларно поле предизвиква силно куплиране с материята и съответно води до значителни отклонения от ОТО [9–14]. Ефектът е изследван, както в космологични (инфлационни теории и тъмна енергия [15–17]), така и за астрофизични (неутронни звезди, черни дупки) случаи. За да го представим, ще работим в математически по-простата отправна система на Айнщайн:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi) + S_m[\Psi_m; \mathcal{A}^2(\varphi)g_{\mu\nu}] \quad (20)$$



където  $G$  е голата гравитационна константа,  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  е Ричи скалара на кривината относно метриката  $g_{\mu\nu}$ ,  $g$  е детерминантата на метриката, а  $\varphi$  е скаларното поле. За разлика от (19) тук за простота сме положили  $V(\varphi) = 0$ , също ще използваме геометрични единици  $G = c = 1$ . Втория член на (20) е действието на материалните полета, което включва физичната метрика  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \mathcal{A}^2(\varphi)g_{\mu\nu}$ .

След вариране действието (19) получаваме полевите уравнения за  $(g_{\mu\nu}, \varphi)$ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} + 2\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}g^{\rho\tau}\partial_\rho\varphi\partial_\tau\varphi \quad (21)$$

$$\square\varphi = -4\pi\alpha(\varphi)T, \quad (22)$$

където  $T^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}\delta S_m/\delta g_{\mu\nu}$  е тензора на енергията и импулса в отправната система на Айнщайн,  $T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$  е неговата следа, а самия той е свързан със съответния си еквивалент във физичната отправна система чрез формулата  $T_{\mu\nu} = \mathcal{A}^2\tilde{T}_{\mu\nu}$ . В (22) сме положили

$$\alpha(\varphi) = \frac{\partial \ln \mathcal{A}(\varphi)}{\partial \varphi}, \quad (23)$$

който член определя силата на куплиране на скаларното поле с материята.

За да фиксираме напълно СТТ, е необходимо да изберем вида на конформния фактор:

$$\mathcal{A}(\varphi) = e^{1/2\beta\varphi^2}, \quad (24)$$

с което вече изразяваме куплиращата функция  $\alpha(\varphi) = \beta\varphi$  и е необходимо да разпознаем  $\beta$  като свободен параметър на теорията. При тази формулировка, уравнението (22) става:

$$\square\varphi = -4\pi\beta\varphi T \quad (25)$$

Уравнение (25) е елиптично и решението му се определя еднозначно от поставените гранични условия. Предвид наблюдателните данни, които много добре съвпадат с ОТО, физично обосновано е да приемем асимптотичната стойност  $\varphi_0$  на скаларното поле на безкрайност да е нула:

$$\varphi \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \varphi_0 = 0 \quad (26)$$

Заедно с (21) и граничните условия на метричните функции получаваме силно нелинейна система от частни диференциални уравнения, която макар и добре дефинирана, няма обобщено аналитично решение, а за физично важните случаи се решава числено.

Въпреки това, от вида на (25) ние можем да определим някои свойства, които ще притежават решенията. Диференциалното уравнение е симетрично относно отражение, следователно ако  $\varphi$  е решение, то и  $-\varphi(x)$  също ще е. Едно от решенията е самосиметрично тривиално решение  $\varphi(x) = 0$ , което свежда теорията до ОТО. То също е и критична точка, чийто тип се определя от знака на  $\beta T$ .

За да илюстрираме това, можем да подходим евристично и да разгледаме (25) с налагането на следните опростявания: сферично симетрична изолирана звезда, която е съставена от хомогенен нерелативистичен флуид  $T \approx -\rho = const$ , в пренебрежимо малко статично гравитационното поле  $\square \rightarrow \Delta$ :

$$\Delta\varphi = -4\pi\beta\varphi\rho \quad (27)$$

С налагане на допълнителното ограничение  $\beta < 0$  можем да решим уравнението и да получим съответно вътрешно и външно решение на  $\varphi$ :

$$\varphi = \begin{cases} C_{in} \frac{\sin(kr)}{r} & r \leq R \\ \frac{C_{out}}{r} + \varphi_0 & r \geq R \end{cases} \quad (28)$$

където  $R$  е радиуса на звездата,  $k^2 = 2\beta\rho$ , а константите  $C_{in}, C_{out}$  се определят от условието за непрекъснатост на  $\varphi$  и  $d\varphi/dr$  на повърхността на звездата:

$$C_{in} = \frac{\varphi_0}{k \cos(kR)} \quad (29)$$

$$C_{out} = \varphi_0(k^{-1} \tan(kR) - R) \quad (30)$$

От решението виждаме, че при  $kR \rightarrow \pi/2$  имаме значителен скок на скаларното поле независимо от неговата вакуумна стойност  $\varphi_0$ . Ако използваме  $\rho R^3 \sim M$ , където  $M$  е масата на звездата, тогава  $kR \sim 4\beta^2(M/R)^{1/2}$  и съответно се вижда, че скаларизацията се определя от два параметъра - свободния параметър на теорията  $\beta$  и компактността на звездата  $M/R$ . Случая с  $\beta > 0$ , при който скаларизация се наблюдава по-трудно, може да се намери в [11].

Damour-Esposito-Farese [10] интерпретират този ефект като аналог на спонтанна магнетизация на феромагнити под температура на Кюри. Те показват, че за различните уравнения на състоянието съществуват съответни плътности, над които звездите развиват скаларно поле дори когато външното поле е нула  $\varphi_0 = 0$ . Такива неутронни звезди са в енергетично по-благоприятно равновесно състояние спрямо еквивалентите си в ОТО. Интересно е да отбележим, че други конформни фактори, които оставят уравнението за скаларното поле (22) симетрично относно отражение, например  $\mathcal{A}(\varphi) = \cos(\sqrt{-\beta}\varphi)$  водят до такъв ефект. Нещо повече – разглеждането на несиметрична конформна функция  $\mathcal{A}(\varphi) = \exp(\frac{1}{2}\beta\varphi^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\varphi^3)$  води до хистерезисни явления: за някои маси има два локални енергични минимума.

### 1.3 Експериментални ограничения върху безмасовите скаларно-тензорни теории

По-голямата част от наблюдателни данни са от Слънчевата система, в режим на слаби гравитационни полета, поради което при тестване на алтернативни теории на гравитацията можем да използваме съответните им пост-Нютоновите параметри [18]. За безмасова СТТ, единствените два параметъра отличаващи се от ОТО са  $\beta^{PPN}$  и  $\gamma^{PPN}$ . Те се въвеждат след развитие на метриката на Шварцшилд, записана в изотропни координати, в ред по степените  $1/c^2$ :

$$-g_{tt} = 1 - 2\frac{Gm}{rc^2} + 2\beta^{PPN} \left(\frac{Gm}{rc^2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^6}\right) \quad (31)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + 2\gamma^{PPN} \frac{Gm}{rc^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^4}\right) \quad (32)$$

За ОТО стойността на двата параметъра е единица  $\beta^{PPN} = 1$  и  $\gamma^{PPN} = 1$ , но в СТТ те се изразяват чрез стойностите на куплиращите параметри. Ако  $\varphi_0$  е фоновата стойност на скаларното поле, тогава като положим  $\alpha_0 \equiv \alpha(\varphi_0)$  и  $\beta_0 \equiv \partial\alpha_0/\partial\varphi_0$ , и развием конформния фактор  $\mathcal{A}(\varphi)$  в ред около  $\varphi_0$  получаваме:

$$\ln \mathcal{A}(\varphi) = \alpha_0(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2}\beta_0(\varphi - \varphi_0)^2 + \mathcal{O}(\varphi - \varphi_0)^3 \quad (33)$$

За ОТО коефициентите  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  имат стойност 0. СТТ, която е пертурбативно еквивалентна на ОТО, например с действие от вида (20) и конформен фактор (24), има  $\alpha_0 \neq 0$

и  $\beta_0 \neq 0$ . Тези коефициенти са свързани с параметрите на Едингтън  $\gamma^{PPN}$  и  $\beta^{PPN}$ :

$$\bar{\gamma} = \gamma^{PPN} - 1 = \frac{2\alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2} \quad (34)$$

$$\bar{\beta} = \beta^{PPN} - 1 = \frac{1}{2} \frac{\beta_0 \alpha_0^2}{(1 + \alpha_0^2)^2} \quad (35)$$

и тяхното измерване налага ограничения върху куплиращите параметри на СТТ  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ .

Едно от най-точните ограничения върху  $\bar{\gamma}$  е получено от измерването промяната на честота на сигнал изпратен от Cassini при преминаването му в близост до Слънцето –  $\bar{\gamma} \lesssim 10^{-5}$  [19]. Това от своя страна за СТТ означава:

$$\alpha_0^2 \lesssim 10^{-3} \quad (36)$$

Наблюдателните мисии с фокус върху движението на небесните тела потвърждават стойностите на  $\bar{\gamma}$  и задават интервала  $\bar{\beta} \lesssim 10^{-4}$  [20, 21]. Това ограничава пространството на СТТ параметрите  $(\alpha_0, \beta_0)$ :

$$|\beta_0| \alpha_0^2 \lesssim 10^{-3} \quad (37)$$

Ограничения на параметричното пространство  $(\alpha_0, \beta_0)$  могат да бъдат наложени и чрез тестове на СТТ с наблюденията на бинарни системи съставени от компактни астрофизични обекти. Докато в ОТО най-нисък мултиполен източник, генериращ гравитационни вълни, е квадруполът, алтернативните теории за гравитацията обикновено предсказват наличието на монополно и диполно излъчване наред с модификации в другите мултиполени моменти. Например за бинарна система СТТ задава промяната на периода с формулата:

$$\dot{P} = \dot{P}_{mono}^{\varphi} + \dot{P}_{dipo}^{\varphi} + \dot{P}_{quad}^{\varphi} + \dot{P}_{quad}^g + \dot{P}_{GR}^{gal} + \delta^{th}(P^{gal}) \quad (38)$$

Първите три члена съответстват на загубената енергия под форма на скаларните вълни. Четвъртият член съответства на енергията излъчена под формата на тензорни вълни. Петият - оценява ефекта от Галактиката, в граница на ОТО, а шестият член е негова поправка, която отчита ефектите от нарушения силен принцип за еквивалентност в СТТ.

Този анализ е направен за първи път от Damour-Esposito за бинарните системи PSR 1913+16, 1534+12 и 0655+64 [10] и резултатите им налагат ограничението

$$\beta_0 \gtrsim -5, \quad (39)$$

което ефективно изключва възможността за наблюдаване на големи отклонение от ОТО в следствие на кондензиране на скаларно поле. Проучването им също показва, че наблюдателните данни, получени чрез тестове на компактни бинарни системи, са значително по-строги спрямо тези в Слънчевата система. По конкретно, за този режим, параметрите на Едингтън придобиват вида:

$$\bar{\gamma} \approx 2\alpha_0^2; \quad \bar{\beta} \approx \frac{1}{2}\beta_0\alpha_0^2, \quad (40)$$

което означава, че параметричното пространство на СТТ за слаби полета не може да налага ограничения върху режима на силни такива.

В скорошно проучване Shao et al. [22] изследват подробно свободните параметри на безмасови СТТ, като използват пет бинарни системи: PSR J0348+0432, J1012+5307, J1738+0333, J1909-3744, J2222-0134; и 11 уравнения на състоянието. Резултатите им, получени след прилагане Монте Карло симулация с вериги на Марков (Markov-chain Monte Carlo) [23] върху този набор от данни, действително потвърждават (39) с 90% вероятност:

$$\beta_0 \gtrsim -4.38 \quad (41)$$

## 1.4 Експериментални ограничения върху масивните скаларно-тензорни теории

Последните наблюдателни данни ограничават параметричното пространство на безмасови СТТ с конформен фактор (24) до стойности (41), които не водят до съществени отклонения от ОТО. Ситуацията значително се променя, когато разглеждаме СТТ с масивно скаларно поле. Наличието на маса  $m_\varphi$  води до поле, което действа на разстояние не по-голямо от неговата Комптонова дължина на вълната  $\lambda_\varphi = 2\pi/m_\varphi$  [14].

Полевите уравнения, в които сме положили  $G = h = c = 1$ , в отправна система на Айнщайн, относно метриката и скаларното поле  $(g_{\mu\nu}, \varphi)$ , са:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} + 2\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\varphi\partial_\sigma\varphi - m_\varphi^2\varphi^2g_{\mu\nu} \quad (42)$$

$$\nabla_\sigma\nabla^\sigma\varphi = -4\pi\alpha(\varphi)T + m_\varphi^2\varphi \quad (43)$$

В уравнението за скаларното поле отново сме положили  $\alpha(\varphi) = \partial \ln \mathcal{A}(\varphi)/\partial\varphi$ . С избора на конформен фактор (24) и  $\beta < 0$  фиксираме напълно теорията.

Забелязва се, че тривиалното решение  $\varphi(x) = 0$  удовлетворява (43) и свежда теорията до ОТО. Спонтанна скаларизация се получава при нестабилни решения. С други думи, произволно малка пертурбация на скаларното поле нараства и води системата до по-стабилна конфигурация с  $\varphi \neq 0$ . За да разгледаме динамиката на скаларното поле и материята, трябва да отчетем, че  $T$  е следата на тензора на енергията и импулса в нефизичната отправна система на Айнщайн. Връзката с физичния му еквивалент  $\tilde{T}$  се задава от формулата  $T = \mathcal{A}^4(\varphi)\tilde{T}$ . В такъв случай, малка пертурбация около решението на ОТО  $\varphi = 0$  с точност до линейни членове по скаларното поле:

$$\nabla_\sigma\nabla^\sigma\varphi \approx \left(-4\pi\beta\tilde{T} + m_\varphi^2\right)\varphi \quad (44)$$

В приближение на нерелативистичен идеален флуид  $\tilde{T} \approx -\rho$  и  $\beta < 0$  полето има ефективна маса  $m_{eff}^2 = m_\varphi^2 + 4\pi\beta\rho$ , която при  $4\pi\beta\rho > m_\varphi^2$  е отрицателна (т.нар. тахионна нестабилност). Ако оценим плътността  $\rho \sim M/R^3$ , където  $M$  е масата на звездата и  $R$  е радиуса ѝ, можем да пренапишем  $\lambda_{eff}$  и да поставим условие за  $\lambda_\varphi$ , използвайки параметрите на звездата:

$$\lambda_\varphi > \lambda_{eff} \sim \frac{R}{\sqrt{2C|\beta|}}, \quad (45)$$

където  $C \equiv M/R$  е компактността. Тогава най-късата допустима от звездата нестабилна мода трябва да е с дължина  $\lambda_{star} < R$ , което съответства на условие върху компактността и свободния параметър  $\beta$ :

$$C \gtrsim 1/|\beta| \quad (46)$$

Далеч от статична сферично симетрична звезда, в слабо гравитационно поле, можем да намери аналитичното решение на уравнението за скаларното поле:

$$\varphi(r \rightarrow \infty) \sim a \frac{e^{-2\pi r/\lambda_\varphi}}{r}, \quad (47)$$

което можем да сравним с решението за безмасова СТТ при същите приближения (28). Благодарение на масивния член, скаларното поле бива ограничено до мащаби пропорционални на неговата дължина на вълната  $\lambda_\varphi$  и ефективно се премахва налагането на гранично условие за вакуумна стойност на полето  $\varphi_0 = 0$ .

Изложените до тук съображения ни дават възможност да наложим ограничения върху параметричното пространство  $(\beta, m_\varphi)$  на масивната СТТ от наблюдателните данни. Една от най-подходящите бинарни системи, която можем да използваме за тази цел, е PSR J0348+0432 [24]. Тя се състои от първата наблюдавана неутронна звезда с маса  $\sim 2M_\odot$  и бяло джудже.

Наблюдателните данни показват, че бялото джудже е с малка компактност  $\sim 10^{-3}$  и не би трябвало да допуска кондензация на скаларното поле, докато масата на неутронната звезда  $\sim 2M_\odot$  предполага наблюдаването на спонтанна скаларизация. Тъй като радиусът на неутронната звезда е неизвестен, е разумно да допуснем  $C \sim 1/3$ . С тези условия и (46) получаваме интервала на допустими стойности на  $\beta$ , който е много по-широк от (41):

$$3 \lesssim -\beta \lesssim 10^3 \quad (48)$$

За да бъде пренебрежимо излъчването на скаларното поле, неговата дължина на вълната  $\lambda_\varphi$  трябва да е много по-малка спрямо средното разстояние  $r_b \sim 10^9\text{m}$  между неутронната звезда и бялото джудже, което условие се изпълнява, ако  $m_\varphi \gg 10^{-16}\text{eV}$ . Също, масата на скаларното поле трябва да допуска скаларизация на неутронна звезда с максимално  $C|\beta|$ , което означава  $C \sim 1/3$  и от (48)  $|\beta| = 10^3$ . Ако използваме типичен радиус на неутронна звезда  $R \approx 10\text{km}$  получаваме интервала върху масата на скаларното поле:

$$10^{-16}\text{eV} \lesssim m_\varphi \lesssim 10^{-9}\text{eV}, \quad (49)$$

което спрямо радиуса и масата на слънцето в безразмерни единици е  $10^{-6} \lesssim m_\varphi \lesssim 10^0$ .

## 2 Числени методи за решаване на уравненията на скаларно-тензорните теории

### 2.1 Интегратора `odeint`

За получаване на резултатите сме използвали процедурата `odeint` от [25]. Тя имплементира в себе си няколко основни метода за числено решаване на системи ОДУ, които ще разгледаме по-подробно тук. Важно е да отбележим, че представеният тук интегратор не е единствен и съществуват различни реализации. Добър пример за интерфейс към други интеграторни процедури е `integrate.ode`, част от *SciPy* пакета. Представените резултати са тествани с част алтернативните интегратори достъпни в `integrate.ode`, но в основата си сме работили с `odeint` поради удобството за модификация на кода.

Процедурата `odeint` включва в себе си метода на Рунге-Кута с включен механизъм за следене на локалната грешка от закръгляне, който дава възможност за контрол на избора на стъпката за постигане на желана точност.

### Метод на Рунге-Кута

Метода на Рунге-Кута е основен за числено интегриране на системи ОДУ, със зададени начални условия, от вида:

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x_i, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (50)$$

Най-простия пример за метод на Рунге-Кута е метода на Ойлер, чрез който пресмятайки системата в точка  $x_n$  можем да приближим решението в точка  $x_{n+1} = x_n + h$  със следната формула:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (51)$$

Може да се покаже, че точността на този метод е от втори ред по стъпката  $\mathcal{O}(h^2)$ . Основен проблем в метода е зависимостта от системата, която разглеждаме, тъй като избора дори на минимална стъпка  $h \rightarrow 0$  не означава, че точността ще се повиши. Начин за преодоляване на това е разбиването на интервала на пресмятане  $(x_n; x_{n+1})$  на няколко под интервала по подходящ начин. Най-популярния избор е Рунге-Кута метода от 4ти ред, в който за да пресметнем следващата стойност  $y_{n+1}$  можем да направим четири междинни стъпки:

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (52)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (53)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \quad (54)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + k_3\right) \quad (55)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + \mathcal{O}(h^5) \quad (56)$$

Използвайки този метод, значително повишаваме точността, която вече е  $\mathcal{O}(h^5)$ , но за сметка на допълнителни пресмятания на системата. Възможно е извеждането на обобщение за по-големи разбивания на интервала.

В астрофизичните приложения, поради използването на големи безкрайности, това може да създаде проблем. Прекалено малка стъпка  $h$ , означава дълго пресмятане на системата, докато прекалено голяма – в най-добрия случай неточен резултат, в най-лошия недостигане до края на интервала на изследване. Поради това е удобно въвеждането на механизъм за адаптиране на стъпката.

### Механизъм за адаптиране на стъпката

От практическо значение е въвеждането на процедура за оценяване на локалната грешка от пресмятанията на метода за интегриране. От една страна може значително да намали времето за пресмятане, като в областите на добро поведение увеличава стъпките  $h$ , от друга – може да контролира избора на стъпка по такъв начин, че локалната грешка да не надминава предварително зададена желана стойност.

Реализирането на такава процедура би означавало значително увеличаване на броя пресмятания на системата, но за случая Рунге-Кута от 5-ти ред се осъществява сравнително лесно и ефективно. При него, са правят пет междини стъпки и съответно шест пресмятания на системата. Фелберг открива начин за комбинирането на шестте функции, резултатите от междините пресмятания, който дава резултат сравним с Рунге-Кутаа от 4-ред. При това положение, ако положим  $k_1, k_2, \dots, k_6$  междините стъпки на Рунге-Кута от 5-ти ред, тогава резултата ще бъде:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^6 c_i k_i + \mathcal{O}(h^6) \quad (57)$$

където  $c_i$  са константи. Тогава, използвайки същите  $k_i$ , можем да постигнем резултата  $y_{n+1}$  като тяхна линейна комбинация:

$$y_{n+1}^* = y_n + \sum_{i=1}^6 c_i^* k_i + \mathcal{O}(h^5) \quad (58)$$

което дава възможността да оценим локалната грешка от пресмятането:

$$\Delta = y_{n+1} - y_{n+1}^* = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^*) k_i \quad (59)$$

Използвайки оценката от локалната грешка  $\Delta$  и предавателно зададена желана максимална грешка  $\Delta_0$  можем да променим стъпката  $h \rightarrow h'$  използвайки примерна релация:

$$h' = h \left| \frac{\Delta_0}{\Delta} \right|^l \quad (60)$$

където  $l$  определя мащабирането и може да зависи от конкретните условия.

Избора на константите  $c_i, c_i^*$  и по-широка дискусия по метода на Фелберг, както и избора на  $l$  може да се намери в [25].

## 2.2 Метод на престрелката

Стандартен проблем в астрофизиката е намирането на решение на система от  $N$  ОДУ, което в началната точка  $x_1$  да удовлетворява  $n_1$  начални условия, а в крайната точка  $x_2 - n_2 = N - n_1$  гранични условия. Стандартния вид на такава система

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = g_i(x, y_0, y_1, \dots, y_{N-1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (61)$$

като решението в началната точка  $x_1$  трябва да удовлетворява

$$B_{1j}(x_1, y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (62)$$

като решението в крайната точка  $x_2$  трябва да удовлетворява

$$B_{2k}(x_2, y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (63)$$

В метода на престрелката избираме стойности за всички зависими променливи в една от двете точки  $x_1$  или  $x_2$ . Тези стойности са избрани единствено по критерий да удовлетворяват съответните гранични условия, но иначе първоначалния им избор на „случаен принцип“. След това интегрираме ОДУ с наложените начални условия, и откриваме несъответствия от желаните гранични стойности там. По този начин задачата се превръща в задача с търсене на корен – кои са тези начални условия на едната граница, които ще минимизират отклоненията на другата. Ако си представим интегрирането на диференциалните уравнения като траектория на изстрел, тогава избора на първоначални стойности е прицелването, а измерването на отклоненията – наблюдаване с колко сме се отклонили от целта.

Ако в началната точка  $x_1$  имаме  $N$  начални стойности  $y_i$ , които са неизвестни, но са предмет на  $n_1$  условия, тогава имаме  $n_2 = N - n_1$  свободно определяеми начални условия.

Нека тях да представим като компоненти на вектор  $\vec{V}$ , който е част от векторно пространство с размерност  $n_2$ . Тогава началните условия за ОДУ могат да се изразят по следния начин:

$$y_i(x_1) = y_i(x_1; V_0, \dots, V_{n_2-1}) \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (64)$$

След това, за конкретния избор на  $\vec{V}$  и съответни начални условия  $y_i|_{x_1}$ , системата се интегрира до  $x_2$ . Използвайки получените стойности за  $y_i|_{x_2}$  и съответните гранични условия, дефинираме вектор на отклонението  $\vec{F}$ , който е със същата размерност като  $\vec{V}$ , и има за компоненти колко е отклонението на от всяко гранично условие поставено в точка  $x_2$ . Това може да се изрази чрез следното уравнение:

$$F_k = B_{2k}(x_2, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad k = 0, 1, \dots, n_2 - 1 \quad (65)$$

Сега искаме да намерим компонентите на  $\vec{V}$ , такива че  $\vec{F} = \vec{0}$ . За тази цел може да се използва метода на Нютон за решаване система от  $n_2$  линейни уравнения:

$$\vec{J} \cdot \delta\vec{V} = -\vec{F} \quad (66)$$

и за новата стойност на вектора намираме

$$\vec{V}^{new} = \vec{V}^{old} + \delta\vec{V} \quad (67)$$

като компонентите на матрицата на Якоби  $\vec{J}$  се задават

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial V_j} \quad (68)$$

### 2.3 Метод на Нютон-Рафсън

Един от основните методи за намиране на корен е метода на Нютон-Рафсън. Геометрично, той се състои в намирането на пресечената точка между тангентата, в първоначалното предположение  $x_i$ , и абцисата  $x_{i+1}$ , и използвайки последната за ново предположение за корен. Това означава, че за тангенциална линия към крива  $y = f(x)$  в точка  $x = x_n$  е

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) \quad (69)$$

където  $f'$  е производната по  $x$ . За да намерим пресечената точка с абцисата и съответно оценим следващото предположение за корен  $x_{n+1}$ :

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0 \quad (70)$$

което означава:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (71)$$

Силата на метода се състои в неговата бърза сходимост. За малка околност на нашето първоначално предположение  $x_i$  с радиус  $\epsilon$ , можем да развием в ред функцията, и стойността на първата производна:

$$f(x + \epsilon) = f(x) + \epsilon f'(x) + \epsilon^2 \frac{f''}{2} + \dots \quad (72)$$

$$f'(x + \epsilon) = f'(x) + \epsilon f''(x) + \dots \quad (73)$$



съответно изразявайки ги по аналогичен начин на (71)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (74)$$

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (75)$$

Ако предположим, че  $\epsilon$  всъщност е разликата на  $x_i$  и истинския корен  $\alpha$  тогава:

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + (\alpha - x_n)^2 \frac{1}{2}f''(x) + \dots \quad (76)$$

Разделяме горното неравенство на  $f'(x_n) \neq 0$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (\alpha - x_n) = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''}{2f'(x_n)} \quad (77)$$

което замества в (74) и получаваме:

$$\epsilon_{n+1} = -\epsilon_n^2 \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \quad (78)$$

от където се вижда че методът е квадратично сходящ. Това означава, че в близост до корена броя на значещите цифри се удвоява при всяка стъпка.

Методът изисква пресмятането на функцията  $f(x)$ , както и нейната първа производна  $f'(x)$  в точката на предположение  $x_n$ . Възможно е използването на числено приближение използвайки дефиницията на производната:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} \quad (79)$$

Методът може да се обобщи и за система от нелинейни уравнения. Нека системата е съставена от  $N$  уравнения с  $N$  неизвестни:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (80)$$

Ако  $\vec{x}$  е векторът от всички стойности на  $x_i$  и  $\vec{F}$  е вектор функция с компоненти  $F_i$ , тогава в област  $\delta x_i$  на  $x_i$  можем за развие всяка функция в ред на Тейлър:

$$F_i(\vec{x} + \delta \vec{x}) = F_i(\vec{x}) + \sum_{k=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta x_k + \mathcal{O}(\delta \vec{x}^2) \quad (81)$$

Уравнението може да се запише по-компактно използвайки матрицата на Якоби  $\vec{J}$ , която има компоненти

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad (82)$$

и съответно векторния вид е:

$$\vec{F}(\vec{x} + \delta \vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) + \vec{J} \cdot \delta \vec{x} + \mathcal{O}(\delta \vec{x}^2) \quad (83)$$

Отново, запазвайки само линейни членове и налагайки условието  $\vec{F}(\vec{x} + \delta \vec{x}) = 0$ , получаваме система от линейни уравнения относно корекцията  $\delta \vec{x}$ :

$$\vec{J} \cdot \delta \vec{x} = -\vec{F} \quad (84)$$

и съответно

$$\vec{x}^{new} = \vec{x}^{old} + \delta\vec{x} \quad (85)$$

Подобно на едномерния случай, тази процедура е толкова добра, колкото първоначалното предположение. Възможно е да се направи глобален метод на Нютон-Рафсън, който да схожда към корен независимо от първоначалното предположение, но за реализираното му са необходимо допълнителни пресмятания на системата, при условие че отново не е гарантирано намирането на решение. Повече информация може да се намери в [25]

## 3 Неутронни звезди в масивни скаларно-тензорни теории

### 3.1 Предварителна информация

По-рано представихме експерименталните ограничения върху безмасовите (глава 1.3) и масивните СТТ (глава 1.4). В тази част за пълнота ще представим кратко тяхно обобщение.

Едни от най-добрите лаборатории за тестване на гравитационни теории в режим на силни полета са неутронните звезди. Те привлякоха голям интерес в СТТ и тяхната структура, свойства и физически ефекти бяха изследвани в много статии ([9, 10, 26–31] и референциите в тях). Последните астрофизични и космологични наблюдения обаче строго ограничават свободните параметри на безмасовите СТТ [24, 32], оставяйки тесен прозорец за нова физика извън ОТО. Ситуацията може да се промени драстично, ако разгледаме масивно скаларно поле – неговата маса  $m_\varphi$  води до ограничен обхват на скаларното поле, от порядъка на неговата Комптонова дължина на вълната  $\lambda_\varphi = 2\pi/m_\varphi$ . С други думи, всички наблюдения на разстояния  $D > \lambda_\varphi$  не могат да поставят ограничения или поне строги такива върху СТТ. Например за случая на масивна теория на Бранс-Дике с  $m_\varphi \gtrsim 2 \times 10^{-25} \text{ GeV}$  (или  $\lambda_\varphi \lesssim 10^{11} \text{ m}$ ) наблюденията в Слънчевата система не могат да поставят строги ограничения върху параметъра  $\omega_{BD}$  и всички стойности  $\omega_{BD} > -3/2$  са допустими от наблюденията [33, 34].

Известно е, че някои СТТ с куплираща функция от типа  $\alpha = \beta\varphi, \beta < 0$  проявяват непертурбативен ефект на спонтанна скаларизация за неутронните звезди. Той се състои във факта, че скаларният вакуум в материята е нестабилен за кондензацията на скаларното поле и решенията за неутронни звезди се различават значително от аналогичните в ОТО. Настоящите наблюдения, например бинарната система PSR J0348+0432, съставена от пулсар и бяло джудже, поставят много строго ограничение върху  $\beta, \beta \gtrsim -4.5$ . Ако обаче разгледаме масивно скаларно поле с подходящ обхват на действие, тогава стойностите на  $\beta$ , позволени от наблюденията, могат да бъдат с порядъци разлика от  $-4.5$ . Приблизителна оценка на параметъра  $\beta$ , когато диапазонът на скаларното поле е значително по-малък от периапсида на PSR J0348+0432 ( $\lambda_\varphi \ll 10^{10} \text{ m}$  или еквивалентно  $m_\varphi \gg 10^{-16} \text{ eV}$ ) е даден в [14], а именно  $3 \lesssim -\beta \lesssim 10^3$ .

## 3.2 Постановка на задачата

### 3.2.1 Основни уравнения

За пълнота, тук накратко ще представим основните уравнения. Действието на СТТ в отправна система на Айнщайн е:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2g^{\tau\rho} \partial_\rho \varphi \partial_\tau \varphi - V(\varphi)) + S_m [\psi_m; \mathcal{A}^2(\varphi) g_{\mu\nu}] \quad (86)$$

където  $R$  е Ричи скалара на кривината относно метриката  $g_{\mu\nu}$  в отправна система на Айнщайн. СТТ се определя напълно от избора на функциите  $\mathcal{A}(\varphi)$  и  $V(\varphi)$ . Метриката  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  и скаларното поле  $\tilde{\Phi}$  относно отправната система на Jordan се задават чрез формулите  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \mathcal{A}^2(\varphi) g_{\mu\nu}$  и  $\tilde{\Phi} = \mathcal{A}^{-2}(\varphi)$ . В тази глава ще разгледаме дилатон с потенциал  $V(\varphi) = 2m_\varphi^2 \varphi^2$ .

След вариране на действието (86) получаваме уравненията за движение на  $g_{\mu\nu}, \varphi$ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} + 2\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} g^{\rho\tau} \partial_\rho \varphi \partial_\tau \varphi - \frac{1}{2} V(\varphi) g_{\mu\nu} \quad (87)$$

$$\square \varphi = -4\pi \alpha(\varphi) T + \frac{1}{4} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \quad (88)$$

където  $\nabla_\mu$  е ковариантната производна относно  $g_{\mu\nu}$ , а куплиращата функция  $\alpha(\varphi)$  се дефинира  $\alpha(\varphi) = \frac{d \ln \mathcal{A}(\varphi)}{d\varphi}$ . От полевите уравнения и контрактираните тъждества на Бианки изразяваме закона за запазване на тензора на енергията и импулса  $T_{\mu\nu}$  в отправна система на Айнщайн:

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = \alpha(\varphi) T \nabla_\nu \varphi \quad (89)$$

Тензорът на енергията и импулсът в отправната система на Айнщайн  $T_{\mu\nu}$  е свързан с този в отправната система на Jordan  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  с формулата  $T_{\mu\nu} = \mathcal{A}^2(\varphi) \tilde{T}_{\mu\nu}$ . За идеален флуид, връзките на енергийната плътност, налягането и четири-скоростта се дават с формулите  $\rho = \mathcal{A}^4(\varphi) \tilde{\rho}, p = \mathcal{A}^4(\varphi) \tilde{p}$  и  $u_\mu = \mathcal{A}^{-1}(\varphi) \tilde{u}_\mu$ .

При това положение, масивната теория на Бранс-Дике се задава с куплираща функция:

$$\alpha(\varphi) = \alpha_0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(\varphi) = e^{\alpha_0 \varphi}, \quad (90)$$

където  $\alpha_0$  е константа.

Втората теория, СТТ с масивно поле има куплираща функция:

$$\alpha(\varphi) = \beta \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A}(\varphi) = e^{\frac{1}{2} \beta \varphi^2}, \quad (91)$$

където  $\beta < 0$  е свободен параметър. При този избор на куплираща функция теорията е еквивалентна на ОТО в режим на слаби гравитационни полета.

Ще разгледаме стационарно аксиално симетрично пространство-време, флуид и скаларно поле. В приближение на бавно въртене, иначе казано, взимайки само членовете от първи ред на ъгловата скорост  $\Omega = u^\theta / u^t$ , метричния анзац в стандартен вид изглежда по следния начин [35]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - 2\omega(r, \theta) r^2 \sin^2 \theta d\varphi dt. \quad (92)$$

Само метричната функция  $\omega(r, \theta)$  е от първи ред по  $\Omega$ . Влиянието на въртенето върху другите метрични функции, скаларното поле, плътността на енергията и налягането, са

от ред  $\mathcal{O}(\Omega^2)$ . За четири-скоростта на флуида  $u^\mu$  до линейни членове по  $\Omega$ , имаме  $u = u^t(1, 0, 0, \Omega)$ , където  $u^t = e^{-\Phi}$ .

Безразмерните уравнения в отправна система на Айнщайн, които не съдържат членове от по-висок ред от първи относно  $\Omega$  са следните:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\Lambda})] = 8\pi G \mathcal{A}^4(\varphi) \tilde{\rho} + e^{-2\Lambda} \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} V(\varphi), \quad (93)$$

$$\frac{2}{r} e^{-2\Lambda} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\Lambda}) = 8\pi G \mathcal{A}^4(\varphi) \tilde{p} + e^{-2\Lambda} \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2} V(\varphi), \quad (94)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left( \frac{d\Phi}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{2}{r} \right) \frac{d\varphi}{dr} = 4\pi G \alpha(\varphi) \mathcal{A}^4(\varphi) (\tilde{\rho} - 3\tilde{p}) e^{2\Lambda} + \frac{1}{4} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} e^{2\Lambda}, \quad (95)$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dr} = -(\tilde{\rho} + \tilde{p}) \left( \frac{d\Phi}{dr} + \alpha(\varphi) \frac{d\varphi}{dr} \right), \quad (96)$$

$$\frac{e^{\Phi-\Lambda}}{r^4} \partial_r [e^{-(\Phi+\Lambda)} r^4 \partial_r \bar{\omega}] + \frac{1}{r^2 \sin^3 \theta} \partial_\theta [\sin^3 \theta \partial_\theta \bar{\omega}] = 16\pi G \mathcal{A}^4(\varphi) (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \bar{\omega}, \quad (97)$$

където  $\bar{\omega} \equiv \Omega - \omega$ .

Тази система от уравнения, допълнена с уравнението на състоянието на звездната материя и със съответните гранични условия, описва вътрешността и външността на неутронната звезда. За външните решения полагаме  $\tilde{\rho} = \tilde{p} = 0$ .

Уравненията, с изключение на уравнение (97), формират независима подсистема. Тя очевидно е системата за статична и сферично симетрична звезда. Естествените гранични условия за центъра ѝ са  $\rho(0) = \rho_c$ ,  $\Lambda(0) = 0$ , докато на безкрайността имаме изискването пространството да е асимптотически плоско –  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = 0$  [36]. Координатния радиус  $R_S$  на звездата се определя от условието  $p(R_S) = 0$ , докато физическият радиус на звездата, измерен в отправната система на Jordan, се определя чрез  $R_S = \mathcal{A}(\varphi(R_S)) R_S$ .

Уравнение (97) се опростява значително, когато развием  $\bar{\omega}$ :

$$\bar{\omega} = \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\omega}_l(r) \left( -\frac{1}{\sin \theta} \frac{dP_l}{d\theta} \right), \quad (98)$$

където  $P_l$  са полиномите на Лежандър (Legendre). След заместване в (97) получаваме:

$$\frac{e^{\Phi-\Lambda}}{r^4} \frac{d}{dr} \left[ e^{-(\Phi+\Lambda)} r^4 \frac{d\bar{\omega}_l(r)}{dr} \right] - \frac{l(l+1) - 2}{r^2} \bar{\omega}_l(r) = 16\pi G \mathcal{A}^4(\varphi) (\rho + p) \bar{\omega}_r(r) \quad (99)$$

За асимптотично плоско пространство-време, асимптотата на външното решение на (99) е  $\bar{\omega}_l \rightarrow \text{const}_1 r^{-l-2} + \text{const}_2 r^{l-1}$ . С оглед на това че  $\bar{\omega} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2J/r^3$ , където  $J$  е ъгловият момент на звездата, можем да заключим, че  $l = 1$ , иначе казано  $\bar{\omega}_l = 0$  за  $l \geq 2$ . Следователно  $\bar{\omega}$  е функция само на  $r$  и нейното диференциално уравнение е:

$$\frac{e^{\Phi-\Lambda}}{r^4} \frac{d}{dr} \left[ e^{-(\Phi+\Lambda)} r^4 \frac{d\bar{\omega}}{dr} \right] = 16\pi G \mathcal{A}^4(\varphi) (\rho + p) \bar{\omega}_r(r) \quad (100)$$

с естествените гранични условия:  $\frac{d\bar{\omega}}{dr}(0) = 0$ , осигоряващ регулярност на  $\bar{\omega}$  в центъра на звездата; и  $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\omega}(r) = \Omega$ .

Една от величините, които ще изследваме, е инерциония момент  $I = J/\Omega$  на звездата, който чрез (100) и асимптотичната форма на  $\bar{\omega}$  се изразява чрез следния интеграл:

$$I = \frac{8\pi G}{3} \int_0^{R_S} \mathcal{A}^4(\varphi) (\rho + p) r^4 e^{\Lambda-\Phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{\Omega} \right) dr \quad (101)$$

### 3.2.2 Наблюдателни ограничения

**Масивна скаларно-тензорна теория с  $\mathcal{A}(\varphi) = e^{1/2\beta\varphi^2}$**

В тази част ще разгледаме ограниченията в масивна скаларно-тензорна теория с  $\mathcal{A}(\varphi) = e^{1/2\beta\varphi^2}$ . Преди това ще обсъдим случая на СТТ с безмасово скаларно поле с конформен фактор  $\mathcal{A}(\varphi) = e^{1/2\beta\varphi^2}$ , който е еквивалентен на ОТО в режим на слабо поле и следователно преминава без проблем повечето от наблюденията. Единственото изключение е наблюдението на неутронни звезди в компактни бинарни системи, в които силните полеви ефекти са значителни. Тези бинарни системи се състоят обикновено от две неутронни звезди или неутронна звезда и бяло джудже (най-пълният списък от такива обекти, до колкото ни е известно, може да се намери в [32], включително и наскоро откритата PSR J0348+0432 [37]). Тъй като излъчените гравитационни вълни съвпадат много добре с предвижданията на ОТО, ограниченията върху  $\beta$  могат да бъдат получени от изискването да има пренебрежимо скаларно гравитационно лъчение за съответната бинарна система (това означава, че трябва да имаме много слабо скаларизирани или напълно нескларизирани решения за наблюдаваните маси на неутронни звезди) [10]. Всички наблюдавани бинарни системи водят до интервала  $\beta \gtrsim -5$ , а най-тежките ограничения идват от PSR J0348+0432, а именно  $\beta > -4.5$ . Това намаля значително възможността за нова физика, тъй като скаларизирането се наблюдава грубо за  $\beta \lesssim -4.35$  при статичния и  $\beta \lesssim -3.9$  за бързо въртящия се случай [31].

Начинът за преодоляване на тези тежки ограничения е да се разгледа масивно скаларно поле, както е описано във въведението [38]. Масата на скаларното поле може ефективно да потисне скаларните гравитационни вълни и да съгласува скаларно-тензорните теории с наблюденията на бинарни неутронни звезди за много по-голям интервал на  $\beta$ . Т.е. ако дължината на вълната на Комптън на скаларното поле  $\lambda_\varphi$  е много по-малка от разстоянието на двете звезди в бинарната система, обозначено с  $r_b$ , то скаларното гравитационно излъчване ще бъде незначително. Следователно, най-строгото ограничение на  $\lambda_\varphi$ , съответно и на масата на скаларното поле  $m_\varphi$ , ще дойде от бинарните системи [24, 32], които имат най-малкото орбитално разделение. За всички тях то (разделението) е приблизително от един и същи порядък  $\sim 10^9\text{m}$ , което се превежда в долна граница на масата на полето

$$m_\varphi \gg 10^{-16}\text{eV} \quad (102)$$

Що се отнася до неутронните звезди, за такива стойности на  $m_\varphi$ ,  $\beta$  е практически неограничен. Границите за  $\beta$  са дадени в [38], а именно  $-10^3 < \beta < -3$ . В тази глава ще представим резултатите за  $\beta \geq -10$ , тъй като много по-малки стойности на  $\beta$  водят до много драстични промени в структурата на неутронната звезда.

Горната граница на  $m_\varphi$  може да бъде наложена въз основа на изискването, че масовият член не трябва да пречи на скаларизацията на звездата. А именно, радиусът на звездата трябва да бъде по-малък от дължината на вълната на Комптън, което означава [38]. Поради това допустимият интервал за  $m_\varphi$  е

$$10^{-16}\text{eV} \lesssim m_\varphi \lesssim 10^{-9}\text{eV} \quad (103)$$

Бихме могли да изключим и допълнителен среден интервал  $10^{-13}\text{eV} \lesssim m_\varphi \lesssim 10^{-9}\text{eV}$ , ако приемем, че измерванията на въртенето на черни дупки е достатъчно точно и има супер радиация [38, 39]. Тъй като има много несигурности около последните две предпочитаме да не го взимаме в предвид.

## Масивна теория на Бранс-Дике с $\mathcal{A}(\varphi) = e^{\alpha_0\varphi}$

Тук ще обърнем внимание на границите, наложени върху параметрите в масивния случай на Бранс-Дике. В безмасовия случай, куплиращия параметър  $\alpha_0$  в (90) е силно ограничен, тъй като теорията дава отклонения от ОТО дори в режим на слабо поле, а параметърът  $\alpha_0$  е тестван с голяма точност от няколко експеримента. Ако скаларното поле е с достатъчна маса, то то ще бъде експоненциално потиснато и няма да повлияе на тези експерименти. Както коментирахме по-горе, най-строгите ограничения върху масата на скаларното поле идват от експерименти с най-малкото разделение. От макрофизичните тестове, това са експериментите с Gravity Probe B, където разделиението е от порядъка на орбитата на сателита  $\sim 10^7\text{m}$ . Други наблюдения, като например скоростта на промяната на перихелия на Меркурий или отклонението на светлината от Слънцето, имат характеристична дължина от порядъка на астрономическа единица, която е явно много по-голяма.

Следователно, ако наложим изискването дължината на вълната Комптън да е по-малка от  $10^7\text{m}$ , ние получаваме следното ограничение за масивната теория на Бранс-Дике:

$$m_\varphi > 2 \times 10^{-14}\text{eV}, \quad (104)$$

за който интервал  $\alpha_0$  е практически неограничен.

### 3.2.3 Числена постановка

Система (93)-(96) се решава числено с използването на метода на престрелката с параметри стойностите на скаларното поле  $\varphi$ , метричната функция  $\Phi$  и  $\omega$  в центъра на звездата. След като фиксираме масата на скаларното поле и куплиращия параметър  $\beta$  или  $\alpha_0$  (в зависимост от конкретния клас СТТ, който използваме), решението се определя от централната стойност на плътността на енергията  $\rho_c$ . Кодът е тестван спрямо резултатите в статичния случай, представени в [14], и показва много добро съгласуване.

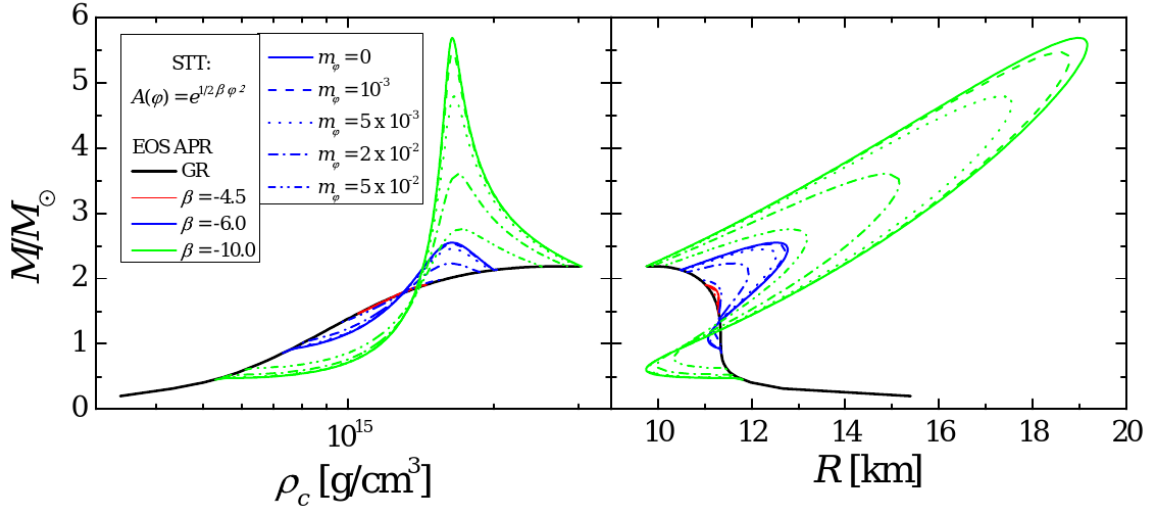
Резултатите са представени с безразмерния параметър  $m_\varphi \rightarrow m_\varphi R_\odot$  и безразмерния инерчен момент  $I \rightarrow I/M_\odot R_\odot^2$ , където  $M_\odot$  е масата, а  $R_\odot$  е гравитационния радиус на Слънцето.

За яснота, ще използваме само едно, представително, уравнение на състоянието – APR.

## 3.3 Резултати

### Масивна скаларно-тензорна теория с $\mathcal{A}(\varphi) = e^{1/2\beta\varphi^2}$

Както вече коментирахме, в този случай наблюденията на компактни бинарни системи не могат да наложат ограничения върху параметъра  $\beta$ , ако масата на скаларното поле е достатъчно голяма  $m_\varphi \gg 10^{-16}\text{eV}$ . На фиг. 1 е представена масата като функция на централната плътност на енергията и като функция на радиуса за няколко комбинации от  $\beta$  и масата на скаларното поле  $m_\varphi$ . Представените във фигурата резултати са за статичния случай, тъй като използваме приближение на бавно въртене, а корекциите в масата  $M$  и радиуса  $R$  са от втори порядък по  $\mathcal{O}(\Omega^2)$ . На фигурата се представени данните за  $\beta \geq -10$  и може да се види, че за такива стойности на  $\beta$  максималната маса на неутронната звезда да се увеличава почти 3 пъти, както че и звездните радиуси също достигат значително по-големи стойности. Ако увеличим още повече  $\beta$ , естествено ще получим по-големи отклонения от ОТО, но качествено им поведение ще остане същото.

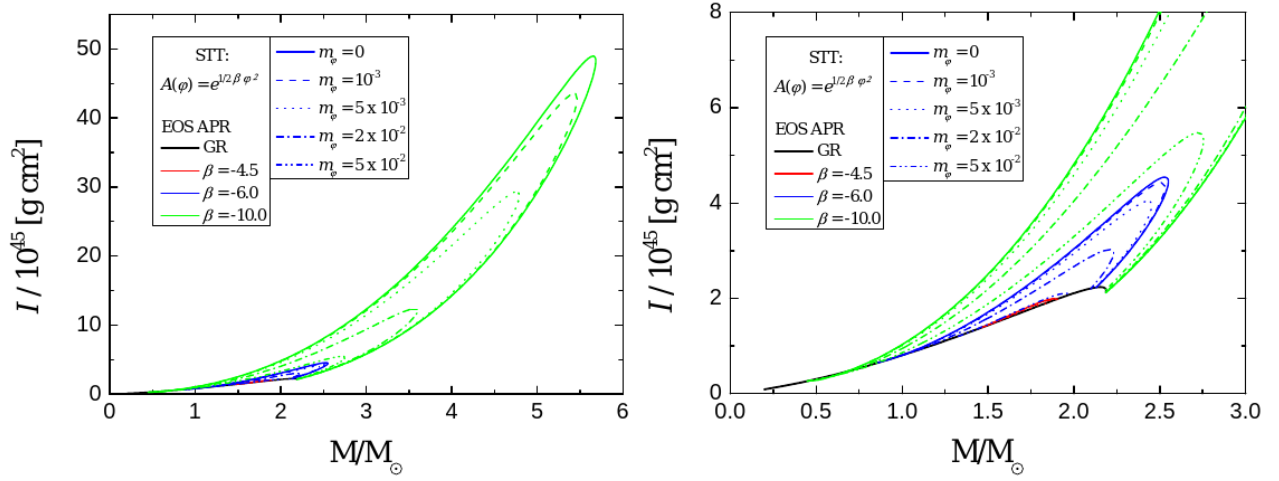


Фигура 1: Масата като функция на централната плътност на енергията (ляв панел) и като функция от радиуса (десен панел) за уравнение на състоянието APR. Резултатите за различните стойности на куплиращия параметър  $\beta$  и масата на скаларното поле  $m_\varphi$  са изобразени.

Очаквано, резултатите за  $\beta = -4.5$  се различават незначително от ОТО, но разликите могат да нараснат значително с увеличението на  $\beta < 0$ . Случаят с  $m_\varphi = 0$  е очевидно еквивалентен на безмасова СТТ. С увеличаването на масата на скаларното поле, дължината на вълната Комптън намалява. Това ефективно потиска скаларното поле и отклонението от ОТО започва да намалява. Грубо казано, когато  $m_\varphi \rightarrow \infty$ , решенията сходят към ОТО. Следователно, неутронните звезди с различни стойности на  $m_\varphi$  са повече или по-малко ограничени между случая СТТ без маса и граничния случай ОТО. Това означава, че масата на скаларното поле не може да доведе до по-голямо отклонение от ОТО, в сравнение с безмасовата теория за същата стойност на  $\beta$ , за сметка на това имаме много по-голям интервал от допустими стойности  $\beta$ . На фигурата са изобразени резултатите за масите между нула и  $5 \times 10^{-2}$  в нашите безразмерни единици. Изчисленията ни показват, че ако увеличим  $m_\varphi$ , решенията се приближават все повече до ОТО, но ние решихме да не ги добавяме във фигурата, защото те се припокриват с решенията за различните стойности на  $\beta$  и по този начин правят фигурата пренаселена и трудно разбираема. За маси по-малки от  $10^{-3}$  резултатите стават почти неразличими от безмасовия случай.

На фиг. 2 инерциония момент  $I$  се изобразява като функция на звездната маса, като десният панел е увеличение на левия. Както може да се види,  $I$  се увелича с почти порядък в сравнение с ОТО за  $\beta = -10$ . Това наистина е драстична промяна, която може да се използва за налагане на наблюдателни ограничения върху масивната СТТ, тъй като се очаква, че в близко бъдеще инерциония момент на неутронни звезди ще бъде наблюдаван с добра точност [40]. Отново трябва да отбележим, че ако увеличим допълнително масата на скаларното поле, резултатите ще се доближат до случая ОТО, с което ще се препокрият с резултатите с по-големи  $\beta$ . Това е причината, поради която решихме да не представяме данни за по-големи стойности на  $m_\varphi$ .

Нека да коментираме промяната на резултатите при промяна на  $\beta$  и  $m_\varphi$ . Забелязва се, че качествено поведението както на масата, така и на инерциония момент е практически едно и също – резултатите с малък  $\beta$  и голяма  $m_\varphi$  се припокриват практически с данните за големи  $\beta$  и малки  $m_\varphi$ . Това означава, че наблюденията на звездната маса, на радиуса и на инерциония момент могат да ни дадат представа за възможни отклонения от ОТО,



Фигура 2: Инерчния момент като функция на звездната маса. Десният панел е увеличение на левия панел.

но не могат да разграничат ефектите, произтичащи от варирането на  $\beta$  и  $m_\varphi$ . Такова разграничаване е възможно с използването на други наблюдения, например излъчените гравитационни вълни от сливащи се бинарни системи [11, 41, 42]. От друга страна, ако се открият още по-компактни бинарни системи със значително по-малки орбити в сравнение с [32, 37], то тогава масата на скаларното поле би могла да бъде ограничена допълнително.

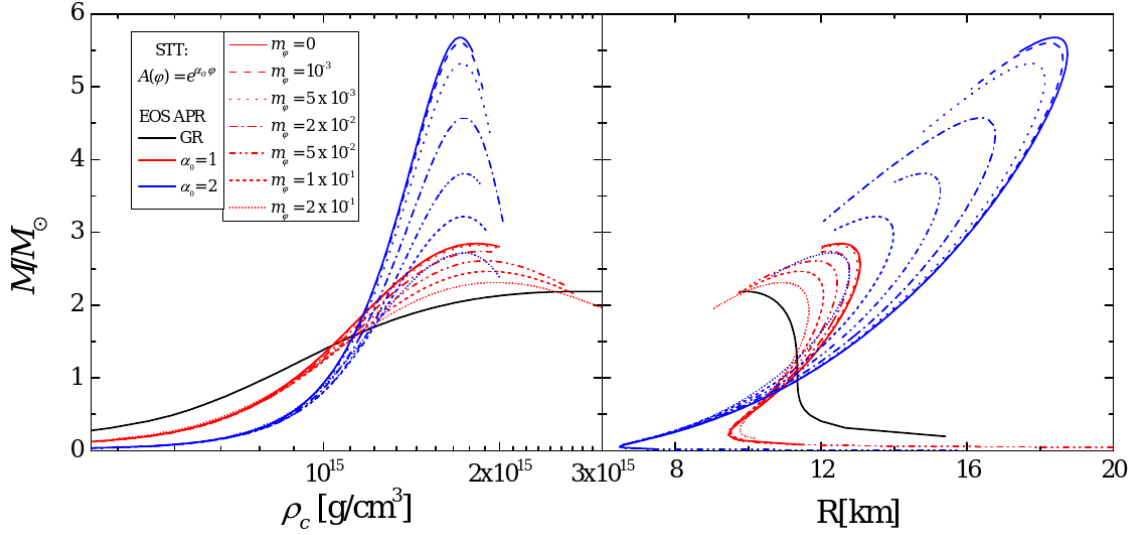
Тук разглеждаме само едно уравнение на състоянието, което може да се разглежда като представително. Често срещан проблем при тестването на алтернативните теории на гравитацията е, че има дегенерация между ефектите, произтичащи от промяната на теория и уравнението на състоянието. Както може да се види, тук ситуацията е много по-добра, защото отклоненията от ОТО могат да бъдат значителни, докато параметрите все още са в съгласие с всички наблюдения.

Стойностите на  $m_\varphi$  представени на графиките са в съгласие с границите, които са разгледани в началото на главата и които идват от наблюденията на компактните бинарни системи и от изискването, че масовият член не пречи на скаларизацията на звездата, а именно  $10^{-16}\text{eV} \lesssim m_\varphi \lesssim 10^{-9}\text{eV}$  (в нашите безразмерни единици  $7 \times 10^{-7} \lesssim m_\varphi \lesssim 7$ ). В изчисленията ни не изключихме ограничаването на средния обхват, идващо от измерванията на въртящи се черни дупки и суперрадиация –  $10^{-13}\text{eV} \lesssim m_\varphi \lesssim 10^{-11}\text{eV}$  (в нашите безразмерни единици  $7 \times 10^{-4} \lesssim m_\varphi \lesssim 7 \times 10^{-2}$ ). Причината е, че искаме да постигнем завършеност на нашите изследвания и, разбира се, има несигурност в измерванията на завъртанята на черни дупки, които могат да доведат до промяна в този среден диапазон.

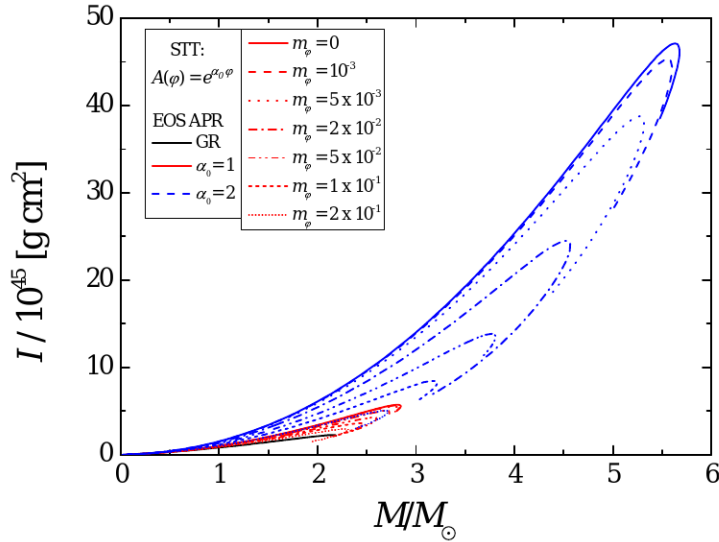
### Масивна теория на Бранс-Дике с $A(\varphi) = e^{\alpha_0\beta}$

Като втори клас на СТТ ще разгледаме масивната теория на Бранс-Дике. Както споменахме по-рано, най-строгото ограничение на масата на скаларното поле произтича от експеримента Gravity Probe B, а именно  $m_\varphi > 10^{-4}$ . Резултатите са представени на фиг. 3 и 4. Избрахме две стойности на  $\alpha_0$  –  $\alpha_0 = 1, \alpha_0 = 2$ , които водят до значителна промяна на свойствата на неутронната звезда. Забелязва се, че за ненулевия  $\alpha_0$ , решенията винаги се различават от ОТО, за разлика от безмасовите СТТ, което е пряко следствие от полевите уравнения и конкретния избор на куплираща функция. За разглежданите стойности на  $\alpha_0$  максималната маса може да се увеличи почти три пъти и инерчния момент се увеличава приблизително с порядък в сравнение с случая ОТО. С увеличаването на  $\alpha_0$  отклоненията





Фигура 3: Масата като функция на централната плътност на енергията (ляв панел) и като функция от радиуса (десен панел) за уравнение на състоянието APR. Резултатите за масивна теория на Бранс-Дике, и различните стойности на куплиращия параметър  $\alpha_0$  и масата на скаларното поле  $m_\varphi$  са изобразени.



Фигура 4: Инерционния момент като функция на звездната маса в масивна теория на Бранс-Дике

от ОТО стават още по-големи.

Видимо е, че качествено поведението е подобно на СТТ с  $\mathcal{A}(\varphi) = e^{1/2\beta\varphi^2}$ . За фиксирана стойност  $\alpha_0$  решенията с различни маси на скаларното поле са между решенията на ОТО, които съответстват на границата на безкрайна скаларна маса, и безмасовия случай. Представените резултати са за  $m_\varphi \geq 10^{-4}$ , което е в съгласие с наблюденията и може да се забележи, че за  $m_\varphi = 10^{-4}$  резултатите са вече много близки до безмасовия случай на Бранс-Дике. Друга прилика с резултатите за масивните СТТ е, че качествено поведението на промяната на параметъра  $\alpha_0$  и масата на скаларното поле са еднакви. Това означава, че решения с малки  $\alpha_0$  и малки  $m_\varphi$  се припокриват с решения с големи  $\alpha_0$  и големи  $m_\varphi$ , което прави много трудно да се направи разлика между двата ефекта.

Няма да навлизаме в повече подробности за резултатите на масивната теория на Бранс-Дике поради следните причини: първо, резултатите са качествено много сходни с тези за масивна СТТ с куплираща функция  $\alpha = \beta\varphi$  и повечето заключения направени за нея са

валидни и за масивната теория на Бранс-Дике; второ, нашата основна цел тук не беше да направим обширно проучване, а да дадем примери, че масивната теория на Бранс-Дике може да доведе до значителни отклонения за ОТО за стойности на куплиращите параметри, които са в съгласие с настоящите наблюдения, противно на безмасовата теория на Бранс-Дике, където отклоненията от ОТО са незначителни поради стриктните ограничения, наложени от наблюденията в режим на слаби полета.

### 3.4 Заключение

В тази глава изучихме бавно въртящи се неутронни звезди в два отделни класа на СТТ с ненулева скаларна маса. Първият клас е еквивалентен на ОТО в режима на слабо гравитационно поле, но може да доведе до големи отклонения, когато се има предвид силно поле (т.нар. скаларизация). Вторият клас е масивната теория на Бранс-Дике. Тези два класа са сред най-интуитивните и широко използвани СТТ.

И в двете теории решенията за статичните и бавно въртящи се неутронни звезди се различават почти незначително от ОТО в безмасовия случай, ако се вземат стойности на куплиращите параметри, които са в съгласие с настоящото наблюдение. Включването на скаларно масово поле изменя картината драстично. Масата потиска скаларното поле на разстояние от порядъка на съответната Комптонова дължина на вълната, която ни помага да съгласуваме теорията с наблюденията за много по-широк диапазон от куплиращите параметри. Всъщност се оказва, че масата, радиусът и инерчния момент за неутронните звезди в масивната СТТ могат да се различават драстично от ОТО решенията, ако се вземат предвид достатъчно големи маси на скаларното поле.

Едно неудобство идва от факта, че ефектите от промяната на параметрите на куплиране и масата на скаларното поле имат едно и също качествено влияние върху няколко важни зависимости като маса-радиус и инерчен момент-маса. Следователно, не може да се прекъсне израждането между тези параметри, като се използват само наблюдения на масата, радиуса и инерционния момент на звездата. За да се постигне това, трябва да се разглеждат и различни астрофизични наблюдения, като излъчвания на гравитационни вълни при сливане на неутронни звезди.

Представените масови СТТ са едни от малкото (ако не и единствените) алтернативни теории на гравитацията, които имат големи отклонения от ОТО – от една страна, и са в съгласие с всички настоящи наблюдения, от друга. Освен това СТТ е самосъгласувана, не страда от вътрешни проблеми, и е едно от най-естествените обобщения на теорията за гравитацията на Айнщайн. Това прави резултатите в настоящата статия и техните астрофизични последствия важни и струващи да се проучат в бъдеще, за да се намерят специфични тестове за ограничаване на параметрите на теорията.

## 4 Неутронни звезди в скаларно-тензорни теории със са-модействие

### 4.1 Предварителна информация

Както беше представено подробно в предишните глави (1.4, 1.3, 3.1), наблюдателно допустимите стойности за  $\beta$  в СТТ с масивно скаларно поле могат значително да се различават

от безмасовия случай, а неутронните звезди и в двата случая могат да имат значително различни свойства и структура. Допълнителна информация за статични и за бавно въртящи се неутронни звезди може да се намери в [38, 43–45]. Така включването на самодействие на масивното скаларно поле и изследването на влиянието му върху структурата и свойствата на неутронните звезди е естествено разширение на изучаването на СТТ.

## 4.2 Постановка на задачата

### 4.2.1 Основни уравнения

Представихме подробно в предишните глави математическата обосновка, поради тази причина тук ще скицираме основни допълнения. За простота ще работим в отправна система на Айнщайн, докато резултатите ще бъдат представени в отправна система на Jordan. Действието на СТТ в отправна система на Айнщайн е:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2g^{\tau\rho} \partial_\rho \varphi \partial_\tau \varphi - V(\varphi)) + S_m [\psi_m; \mathcal{A}^2(\varphi) g_{\mu\nu}], \quad (105)$$

където  $R$  е Ричи скалара на кривината относно метриката  $g_{\mu\nu}$ . СТТ се определя напълно от избора на функциите  $\mathcal{A}(\varphi)$  и  $V(\varphi)$ . За това проучване ще изберем

$$\mathcal{A}(\varphi) = e^{\frac{1}{2}\beta\varphi^2} \quad (106)$$

който води до СТТ, тя на свой ред е пертурбативно еквивалентна на ОТО за слаби гравитационни полета, но в режим на силни такива проявява непертурбативен ефект – спонтанна скаларизация, при който решенията за неутронни звезди се различават значително от ОТО. Ще изберем неотрицателен скаларен потенциал  $V(\varphi)$ :

$$V(\varphi) = 2m_\varphi^2 \varphi^2 + \lambda \varphi^4, \quad (107)$$

където  $m_\varphi$  е масата на скаларното поле  $\varphi$  и  $\lambda \geq 0$  е параметър с размерност  $length^{-2}$ . Първият член на потенциала  $V(\varphi)$  е стандартен и разглеждан в предишни работи [32, 38, 44, 45]. Вторият член описва самодействието на скаларното поле и не е изследван до сега.

По същество, разглежданията за получаването на системата ОДУ за описване на бавно въртящи се неутронни звезди в СТТ с масивно скаларно поле със самодействие са същите като тези за масивни СТТ, представени в глава 3.2, поради което ще спестим повторното им излагане тук.

### 4.2.2 Наблюдателни ограничения

Подробно изложение относно наблюдателните ограничения върху  $\beta, m_\varphi$  вече бе представено в предишната глава, като тук ще представим обобщение на направените там изводи. Долната граница на масата на скаларното поле може да бъде определено от наблюдателните данни за разстоянието между двата спътника в бинарната система  $r_b$  [32, 37]. За да има пренебрежимо скаларно гравитационно излъчване, дължината на вълната Комптън на полето  $\lambda_\varphi \varphi = 2\pi/m_\varphi$  трябва да бъде по-малка от орбиталното разстояние  $\lambda_\varphi \ll r_b$ . За наблюдаваните бинарни системи  $r_b \sim 10^9$  m, което в граници на масата е  $m_\varphi \gtrsim 10^{-16}$  eV. Горната граница за масата на полето трябва да бъде такава, че да не потиска спонтанната

скаларизация в звездите, т.е. характерната дължина на звездата да бъде по-малка от дължината на вълната на Комптън за съответното поле. Това поставя граница  $m_\varphi \lesssim 10^{-9}\text{eV}$ . Като окончателен интервал за масата

$$10^{-16}\text{eV} \lesssim m_\varphi \lesssim 10^{-9}\text{eV} \quad (108)$$

което в нашите безразмерни единици е  $10^{-6} \lesssim m_\varphi \lesssim 10$ .

Вече споменахме, че ако масата на скаларното поле е достатъчно голяма, параметърът  $\beta$  може да бъде зададен в значително по широк интервал от стойности в сравнение с безмасовия случай, по-точно  $3 \lesssim -\beta \lesssim 10^3$ , идващи от изискването, че можем да имаме скаларизирани неутронни звезди, но не и скаларизация за белите джуджета. Ние обаче ще вземем предвид само умерените стойности на  $\beta \geq -10$ , от едната страна следвайки [38, 44, 45], а от друга имаме допълнителен параметър  $\lambda_\varphi$ , идващ от члена за самодействие в потенциала и е добре да изследваме ефекта му за познати и стабилни се модели. По отношение на параметъра  $\lambda$  ние се ограничаваме до положителни стойности, които позволяват спонтанна скаларизация.

### 4.2.3 Числена постановка

Системата ОДУ (93 - 97), заедно с уравнението на състоянието, се решава числено като се намират централните стойности на  $\varphi, \Phi, \omega$ , които удовлетворяват граничните условия на безкрайност.

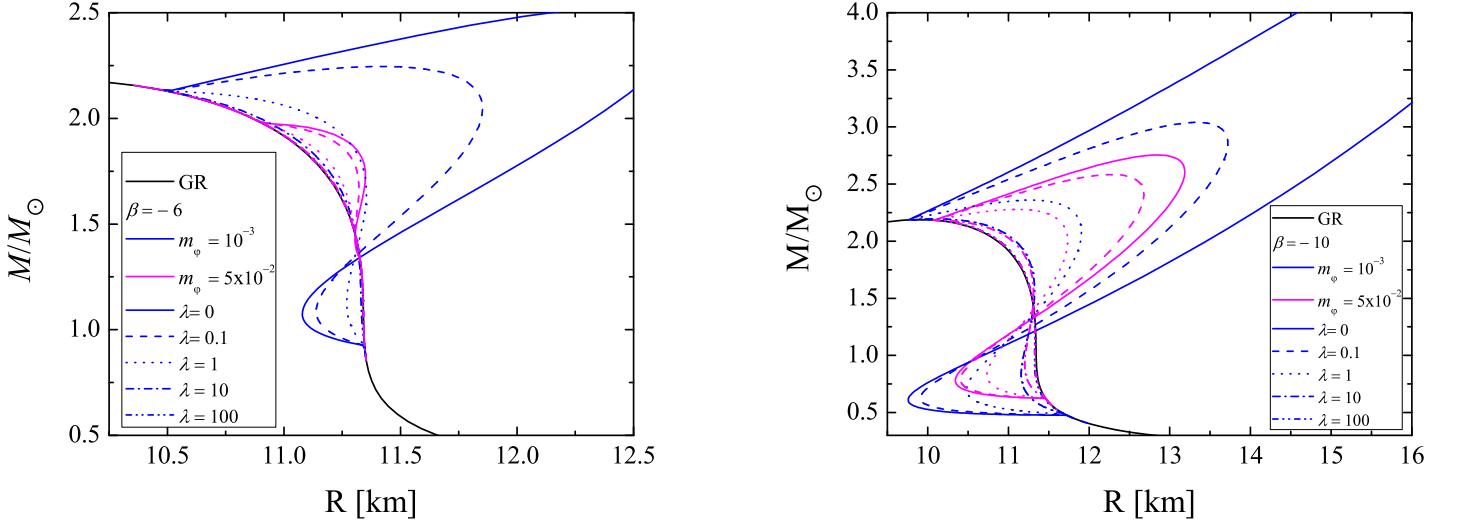
След избор на куплиращия параметър  $\beta$ , масата на скаларното поле  $m_\varphi$  и коефициента на самодействие  $\lambda$ , решението се определя от централната стойност на плътността на енергията  $\rho_c$ . Кодът е тестван спрямо [38, 44] и показва добро съгласуване.

Резултатите са представени във физичната отправна система в безразмерни единици определени от трансформациите:  $m_\varphi \rightarrow m_\varphi R_\odot, I \rightarrow I/M_\odot R_\odot^2, \lambda \rightarrow \lambda R_\odot^2$ ; където  $M_\odot$  и  $R_\odot$  са съответно слънчевата маса и половината слънчев гравитационен радиус.

Ще използваме едно от най-популярните уравнения на състоянието – APR4 [46] в поточново политропно приближение [47]. Ще се съсредоточим върху проявлението на свободните параметри в теорията, вместо да разглеждаме голямо разнообразие от уравнения на състоянието, тъй като имаме три параметрично  $(\beta, m_\varphi, \lambda)$  семейство от решения.

## 4.3 Резултати

На фиг. 5 сме показали зависимостта на маса от радиус за две стойности за параметъра:  $\beta = -6$  (ляв) и  $\beta = -10$  (десен). Представени са различни комбинации от маса на скаларното поле и стойността на константата на самодействие  $\lambda$ . И в двата панела някои от резултатите за чисто масивния случай, т.е.  $\lambda = 0$  (непрекъснати сини линии), са частично изрязани от фигурите, за да се постигне по-добра видимост на резултатите за различни ненулеви  $\lambda$ . Както може да се види, членът за самодействие в потенциала допълнително потиска скаларизацията в звездата. За всички останали параметри, граничният случай на  $\lambda \rightarrow 0$  води до резултатите за масивна СТТ без самодействие (съответно за безмасовия случай, ако липсва масивен член), а с нарастването на  $\lambda$  резултатите се схождат към ОТО. Това поведение може да бъде разгледано и на фиг. 6, където са представени масата като функция на централната плътност (лява) и централната стойност за скаларното поле като функция на централната плътност (дясна).

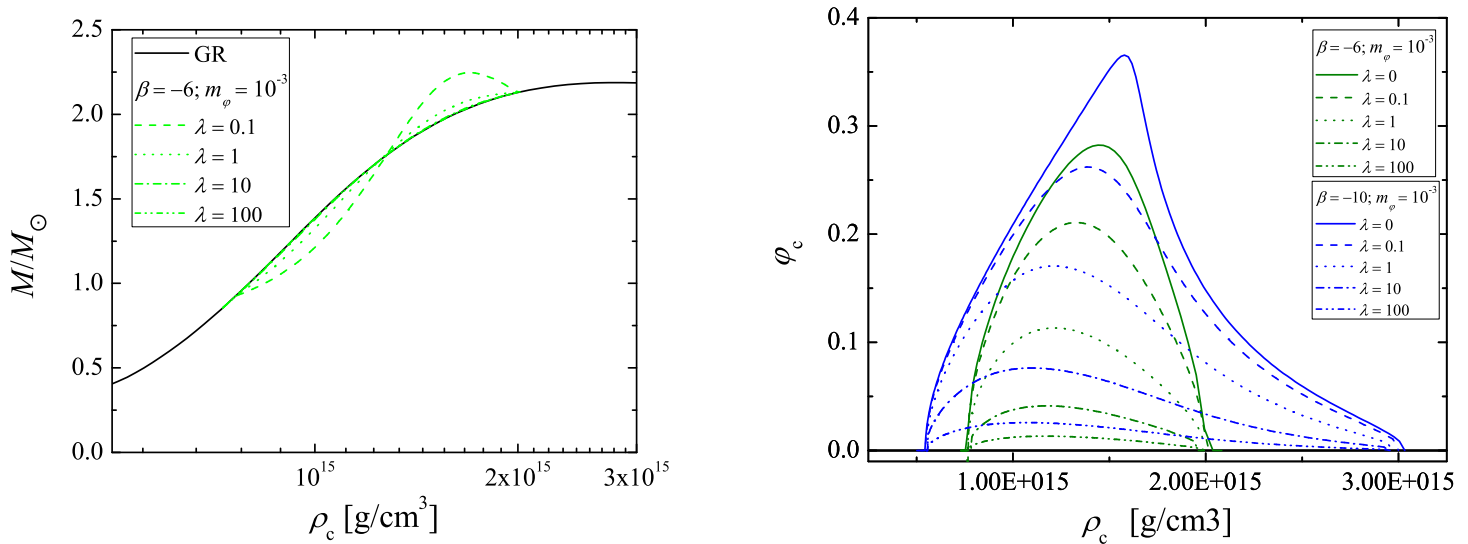


Фигура 5: Зависимостта на масата от радиуса за модели с уравнение на състоянието APR4,  $\beta = -6$  (ляво) и  $\beta = -10$  (дясно). На двете фигури са представени резултатите за ОТО (черна непрекъсната линия). Решенията с различни маси на скаларното поле са представени с различни цветове:  $m_\varphi = 10^{-3}$  – син,  $m_\varphi = 5 \times 10^{-2}$  – пурпур. Решенията с различни коефициенти на самодействие са представени с различни модели на линията:  $\lambda = 0.1$  непрекъсната,  $\lambda = 1$  пунктир,  $\lambda = 10$  непрекъсната с точка.

	$M/M_\odot$	$R$ [km]	$\varphi_c$
GR	1.867	11.06	0.0
$\lambda = 0.1, m_\varphi = 0$	1.996	12.43	0.209
$\lambda = 0, m_\varphi = 2.478 \times 10^{-2}$	1.958	12.32	0.209
$\lambda = 1, m_\varphi = 0$	1.903	11.39	0.106
$\lambda = 0, m_\varphi = 5.115 \times 10^{-2}$	1.888	11.35	0.106
$\lambda = 10, m_\varphi = 0$	1.872	11.10	0.0376
$\lambda = 0, m_\varphi = 5.975 \times 10^{-2}$	1.870	11.10	0.0376

Таблица 1: Параметри на звездата за ОТО, масивна СТТ без самодействие и безмасова СТТ със самодействие за една и съща централна плътност  $\rho_c = 1.398 \times 10^{15} [\text{g/cm}^3]$

На Фиг. 7 са представени разпределението на скаларното поле спрямо радиалната координата при различни фиксирани допълнителни параметри. В левия панел сме фиксирали масата на скаларното поле, куплиращия параметър  $\beta$  и масата на звездата. В десния панел представяме модели с еднаква централна плътност за безмасовия случай с различни стойности на  $\lambda$  и модели без самодействие с различни стойности за масата на полето. Моделите в десния панел са групирани два по два за равни централни стойности на скаларното поле, за да се изследва ефекта от различните членове на потенциала поотделно. Очакваното затихване на скаларното поле се вижда и в двата панела, но е ясно, че за безмасовото СТТ със самодействие то се случва по-бавно. В таблица 1 представяме параметрите на тези модели. Ясно е, че за една и съща централна и скаларна стойност, члена на самодействието оказва маргинално по-изразен ефект върху масата на звездата и нейния радиус, който като се има предвид разпределението на скаларното поле е очаквано (колкото по-бавно затихва то, толкова по-голям принос има към гравитационната маса на звездата).

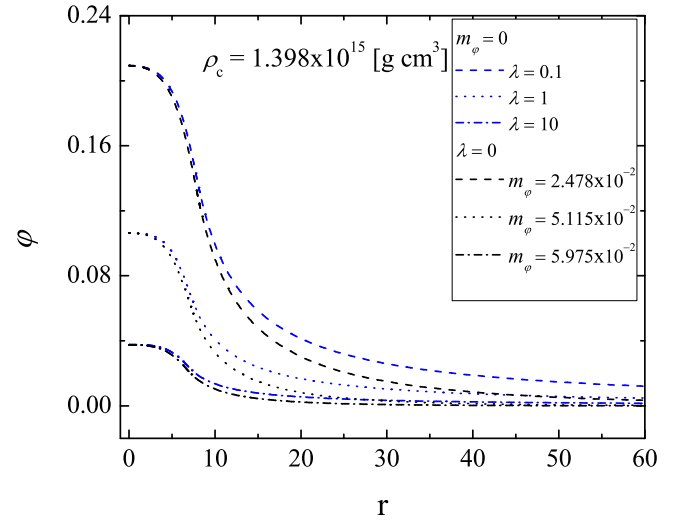
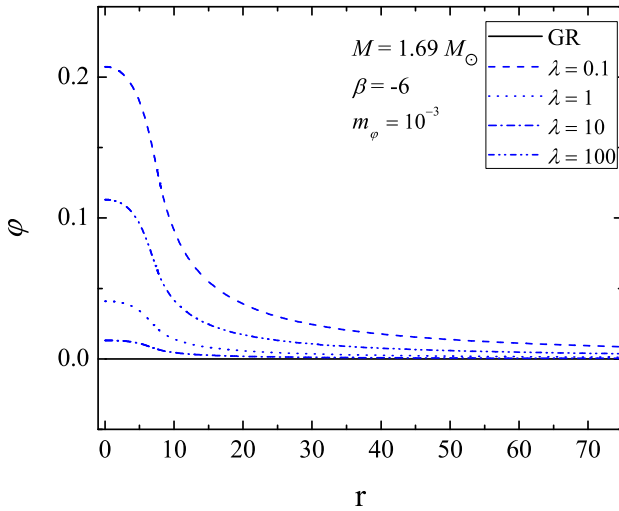


Фигура 6: Зависимост на маса от централна плътност (*ляво*) и централната стойност за скаларното поле от централната плътност (*дясно*). Решенията на ОТО са представени с черна непрекъсната линия. Решенията с различни коефициенти на самодействие са представени с различни типове линията:  $\lambda = 0.1$  непрекъсната,  $\lambda = 1$  пунктир,  $\lambda = 10$  непрекъсната с точка. В горния панел са представени решения за фиксирана маса на скаларното поле  $m_\varphi = 10^{-3}$  и различни стойности на  $\beta$  –  $\beta = -6$  (*нурнур*) и  $\beta = -10$  (*син*).

На фиг. 8 са показани отношенията маса от радиус в два различни случая: безмасово СТТ със самодействие (*ляво*) и масивна СТТ без самодействие (*дясно*). И двата члена самостоятелно потискат скаларизацията, но по качествено различен начин. Масивният член ( $\sim \varphi^2$ ) потиска полето и едновременно с това измества двете точки на бифуркация (едната по-ниска и другата при по-висока централна плътност на енергията) една към друга. Членът на самодействието ( $\sim \varphi^4$ ), от друга страна, също потиска скаларното поле, но не променя позицията на точките на бифуркация. Последното означава, че дори при големи стойности на  $\lambda$ , т.е. силно потиснато скаларизиране, ще имаме по-широк диапазон от стойности на централната плътност, за които може да се получи скаларизация в сравнение с масивния случай.

На фиг. 9 представяме графиката на инерционния момент като функция на масата за две стойности на параметъра  $\beta$ . Различни комбинации за масата на скаларното поле и за стойността на константата  $\lambda$  са показани. Както може да се види, членът за самодействие допълнително потиска скаларизацията в сравнение с чисто масовия случай, подобен на масата на радиуса, представена на фиг. 5.

Нека коментираме избраните стойности за параметрите и ефекта на различните им комбинации върху моделите с неутронни звезди. Избраните стойности за  $\beta$  са по-малки в сравнение с забранените на безмасовата СТТ, но те все пак са и доста консервативни в сравнение с интервала на допустимите стойности за масивни СТТ. Освен това, поради допълнителния потискащ ефект на самодействието, интервалите за допустими стойности на  $m_\varphi$  стават още по-широки. Както може да се види, ефектът от самодействие причинява частично припокриване на резултатите за модели с малка маса на скаларното поле и големи стойности за  $\lambda$  с модели с голяма маса на скаларното поле и малки стойности за  $\lambda$ , което въвежда допълнителна изразждане между параметрите. В допълнение, ние



Фигура 7: (ляво) Разпределението на скаларното поле спрямо радиалната координата за модели с еднаква маса. Моделите са с  $\beta = -6$  и  $m_\varphi = 10^{-3}$  и различни стойности за  $\lambda$  (син в различни типове линия). (дясно) Разпределението на скаларното поле спрямо радиалната координата за модели с еднаква маса централна плътност. Резултатите са за безмасова СТТ със самодействие (синьо) и за масивна СТТ без самодействие (черно)

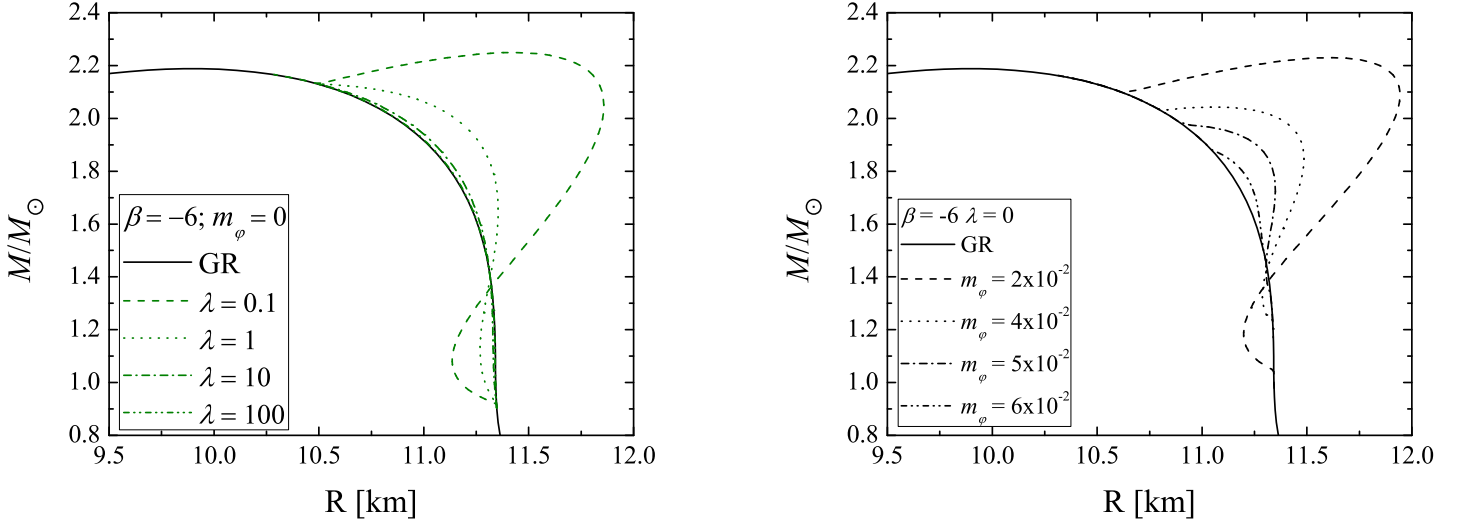
разгледахме модели с нулева маса на скаларното поле, т.е. безмасова СТТ, но ненулева  $\lambda$  и установихме, че поведението е подобно на случая, в който имаме масивно скаларно поле и без самодействие, но и в този случай посочените по-горе различия важат.

#### 4.4 Заключение

В тази глава представихме определен клас СТТ с масивно скаларно поле с допълнителен член на самодействие в потенциала. Най-широко изследваните СТТ през последните няколко десетилетия са били теории с безмасово скаларно поле, но наблюденията на бинарни системи от компактните обекти и на гравитационните вълни драстично ограничиха допустимите стойности за параметрите, до такива които показват само малки отклонения от ОТО.

Добавянето на масивно скаларно поле съвместява теорията с наблюденията за много по-широк интервал от параметри в сравнение с безмасовия случай. Тук ние разширихме проучванията на масивни СТТ, като включихме член на самодействието потенциала на полето. Резултатите ни показват, че този член потиска скаларизацията, което означава, че намалява още повече отклоненията от ОТО. По-точно, за фиксирана стойност на куплиращата константа  $\beta$  и фиксирана маса за скаларното поле  $m_\varphi$ , отклонението от ОТО намалява, ако се увеличи стойността на коефициента на самодействие  $\lambda$ . Това допуска още по-широк диапазон от стойности за масите на скаларното поле съвместими с наблюденията.

За да изучим по-добре ефекта от члена за самодействие, разгледахме случая на безмасово скаларно поле с ненулева самодействие. Резултатите показват, че скаларизацията отново се потиска и до голяма степен константата  $\lambda$  има качествено сходен ефект върху свойствата на неутронната звезда, както масата на скаларното поле на полето. Основната разлика между тях идва от факта, че самодействието не променя позицията на точките



Фигура 8: Зависимостта маса от радиус за безмасова СТТ със самодействие (ляво) и масивна СТТ без самодействие (дясно). Двете са с фиксиран  $\beta = -6$  и различни стойности на свободния параметър.

на бифуркация (в безмасовия случай), докато масата на скаларното поле променя критичните стойности на параметрите, където се появяват нови клонове на скаларизирани решения или изчезват.

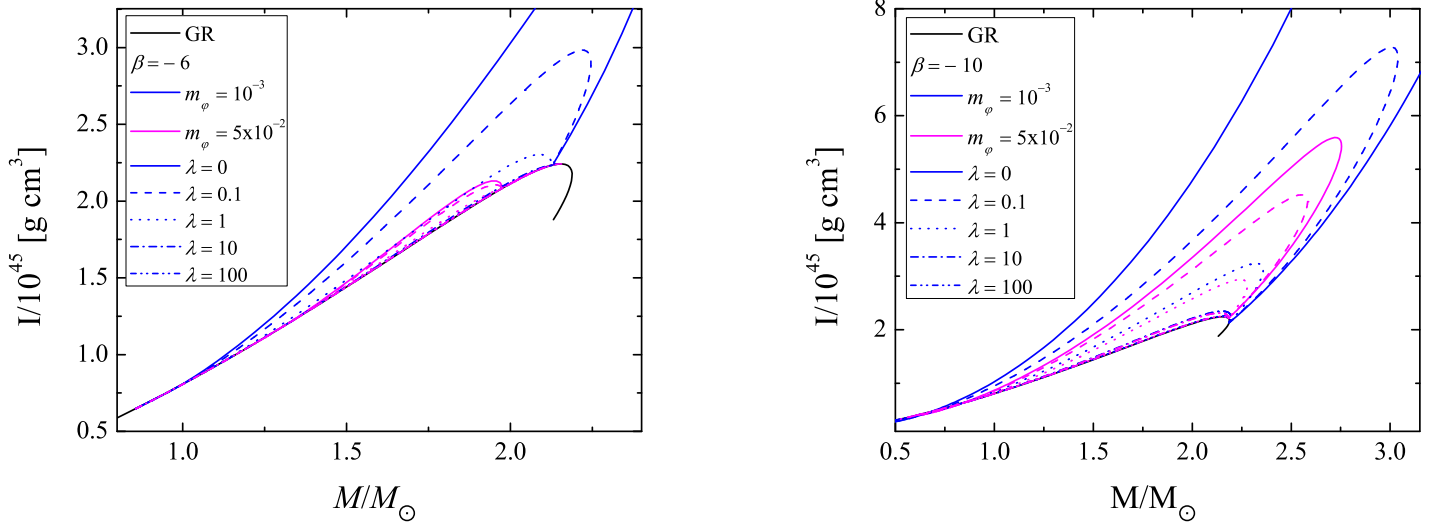
Стандартен проблем на алтернативните теории на гравитацията като цяло е, че модификациите на гравитационната теория могат или да имат незначителен ефект върху свойствата на неутронната звезда, или този ефект да е много подобен на този, следствие на неопределеността в уравнението на състоянието за материята в звездата. Тук изследвахме отклоненията от чистата ОТО, които могат да бъдат значително по-големи от разликите породени от неопределеността в уравнението на състоянието несигурност, но се появява допълнителен проблем. А именно, имаме три свободни параметъра на теорията и промяната им има много сходен ефект върху структурата на неутронната звезда. По този начин нарушаването на изродеността между тези параметри не може да бъде направено единствено чрез електромагнитните наблюдения на неутронната звезда, радиуса или инерционния момент. Наблюденията на гравитационните вълни на сливащите се неутронни звезди обаче могат да предложат допълнителни начини за преодоляване на този проблем, но са необходими допълнителни изследвания в тази посока.

## 5 Универсални съотношения за неутронни звезди в скаларно-тензорните теории със самодействие

### 5.1 Предварителна информация

Голяма част от алтернативните теории на гравитацията водят или до незначителни ефекти върху свойствата на неутронните звезди, или тези ефекти попадат в неопределеността в избора на уравнение на състоянието (УнС) на материята в звездата, което е общ проблем при всички опити да се ограничи режима на силните гравитационни полета. Голямата неопределеност в УнС, от една страна, се дължи на неразбирането ни на фундаменталните взаимодействия, които протичат при високите плътности в ядрото на неутронната





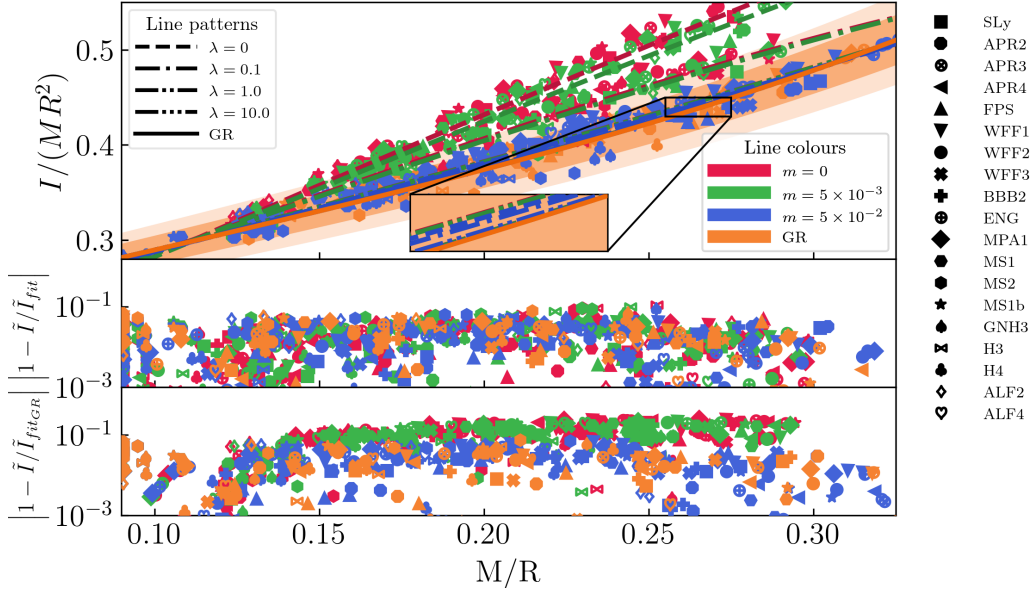
Фигура 9: Зависимостта маса от радиус за безмасова СТТ със самодействие (*ляво*) и масивна СТТ без самодействие (*дясно*). Двете са с фиксиран  $\beta = -6$  и различни стойности на свободния параметър.

звезда, а от друга - липсата на достатъчно точни наблюдателни данни или липсата на добра интерпретация на наличните такива. Опитите за ограничаване на неопределеността в УнС използват наблюденията на маса, радиус, инерчен момент, както и числата на Лов на неутронната звезда, но понастоящем това се извършва или с ограничена точност, или само за няколко подходящи астрофизични обекти (вж. напр. [40, 48, 49]). Тъй като бинарните системи са един от най-обещаващите източници на гравитационни вълни, се очаква ограниченията върху УнС да се подобрят значително поради бързия напредък в астрономията на гравитационните вълни [50–54].

За справяне с неопределеността в УнС може да се използват независими от тях съотношения на звездни параметри, т.нар. универсални съотношения. Едно от първите формулировки на такова съотношение, което включва честотата на трептения на неутронните звезди, от една страна, и масата и радиуса ѝ от друга, е направено в [55–57]. По-късно тези проучвания са разширени с включване на допълнителни реалистични УнС [58]. В скорошно проучване Lau et. al. [59] разменят компактността с "ефективна компактност"  $\eta \equiv \sqrt{M^3/I}$  с цел постигане на по-добра независимост на УнС. В [60] може да се намери добро разглеждане на споменатите по-горе съотношения и коментари за тяхната универсалност. Други обещаващи универсални съотношения бяха открити от Yagi and Yunes [61, 62], които свързват нормализирания момент на инерция  $\bar{I}$ , числата на Лов и нормализирания квадруполен момент  $Q$ . Тази връзка беше подробно изследвана през следващите години в много статии (виж например [63–70]).

Проучването на различни универсални съотношения в алтернативните теории на гравитацията е обект на значителен интерес (виж например [62, 71–76]). В някои случаи може да се види ясно разграничение с ОТО, което може да се използва като метод за ограничаване на силния режим на гравитационното поле по независим от УнС начин, докато в други случаи резултатите не са само до известна степен независими от УнС, но до голяма степен също независими от теория. Във втория случай универсалните съотношения може да се използват, за да се определят НЗ параметрите без никакъв произвол.

Особено интересно приложение на универсалните съотношения между нормализира-



Фигура 10: Нормализан инерчен момент  $I/MR^2$  като функция на звездната компактност  $M/R$  в ОТО и СТТ с  $\beta = -6$  и различни стойности на  $m_\varphi$  и  $\lambda$  със съответните полиноми фитове. УнС са обозначени с индивидуален символ, ОТО резултатите са представени с оранжево, а моделите в СТТ с различни маси на скаларното поле са представени с различен цвят:  $m_\varphi = 0$  - червено,  $m_\varphi = 5 \times 10^{-3}$  - зелено,  $m_\varphi = 5 \times 10^{-2}$  - син. За всяка маса се изчисляват резултатите за различните стойности на коефициента на самодействие и съответстващите полиноми фитове се представят с различен тип линия:  $\lambda = 0$  - пунктирна линия,  $\lambda = 0.1$  - пунктирна линия с една точка,  $\lambda = 1$  - пунктирна линия с две точки,  $\lambda = 10$  - пунктирна линия с три точки. В средния панел се намират съответните отклонения на полинома и данните  $|1 - \tilde{I}/\tilde{I}_{\text{fit}}|$ , докато в долния панел – отклоненията от ОТО фита  $|1 - \tilde{I}/\tilde{I}_{\text{fit GR}}|$  за всички данни, включително СТТ моделите.

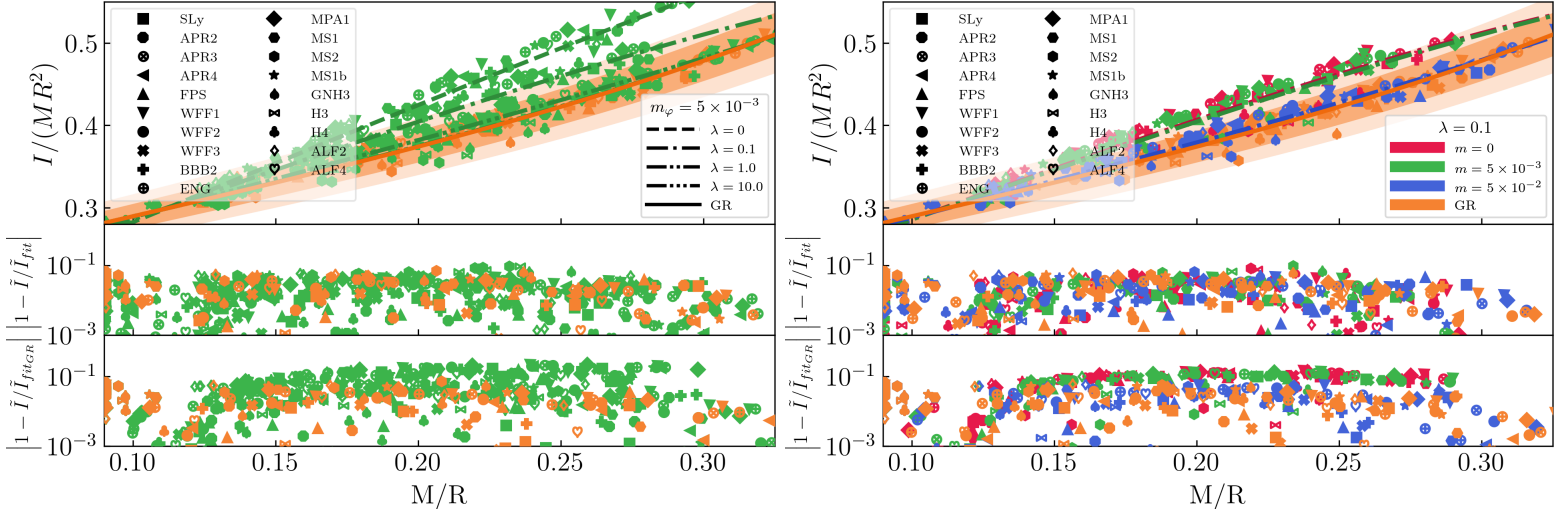
ния момент на инерцията и компактността на звездата е показано от Lattimer и Schutz [40], където те посочват възможността да се оцени радиуса на неутронната звезда, като се използва масата и момента на инерция на пулсар в бинарна система. В Breu and Rezzolla [77] задълбочено се изучават такива съотношения с коментар за тяхното приложение. Следвайки работата им, Staykov et al [78] разширяват изследването, като разглеждат универсални съотношения между нормализирания момент на инерция и звездна компактност в ОТО,  $f(R)$  и скаларно-тензорни теории на гравитацията.

## 5.2 Резултати

Тук ще разгледаме универсалността в зависимостта от нормализиран момент на инерция и компактност, предложени за пръв път в [79], и широко изследвани от Breu и Rezzolla [77] в ОТО и Staykov et al. [78] в  $f(R)$  гравитация и безмасова СТТ.

На фиг.10 са представени нормализираният момент на инерция е  $\tilde{I} \equiv I/(MR^2)$  като функция на компактността  $M/R$  в ОТО и СТТ с фиксирана  $\beta = -6$  и различни групи от стойности  $(m_\varphi, \lambda)$ . Резултатите показват доста добра универсалност за УнС за фиксирани двойки параметри. При големите компактности  $M/R$  отклоненията от ОТО поради скаларизация ефект са по-големи от неопределеността в УнС, напр. НС за масивна СТТ с компактност  $M/R \gtrsim 0.25$  се отделят от масивната СТТ със самодействие  $\lambda = 0.1$  за същия интервал.

Данните за всяка теория са фитирани с полиномен фит от четвърта степен, с изклю-



Фигура 11: Нормализираният инерчен момент  $I/MR^2$  като функция на звездната компактност  $M/R$ . (Горен панел) Неутронни звездни модели в масивна СТТ със самодействие с фиксирана маса на полето  $m_\varphi = 5 \times 10^{-3}$ , зелен цвят, и няколко различни стойности за  $\lambda$ , всеки в различен тип линия. (Долен панел) Неутронни звезда модели в масивна СТТ със самодействие и фиксирана  $\lambda = 0.1$ , прекъсната с точка пунктирана линия, и няколко различни стойности на  $m_\varphi$ , всеки в различни цветове. И в двата панела е представен съответният на данните фитиращ полином (109). В средата на всеки панел са представени съответните отклонения на данните от фита  $|1 - \tilde{I}/\tilde{I}_{\text{fit}}|$ , докато в дъното - относителните отклонения от ОТО фита и данните за всички модели – ОТО и съответни СТТ.

чени членове от втора и трета степен, което дава малка корекция на естествения избор - линейния фит:

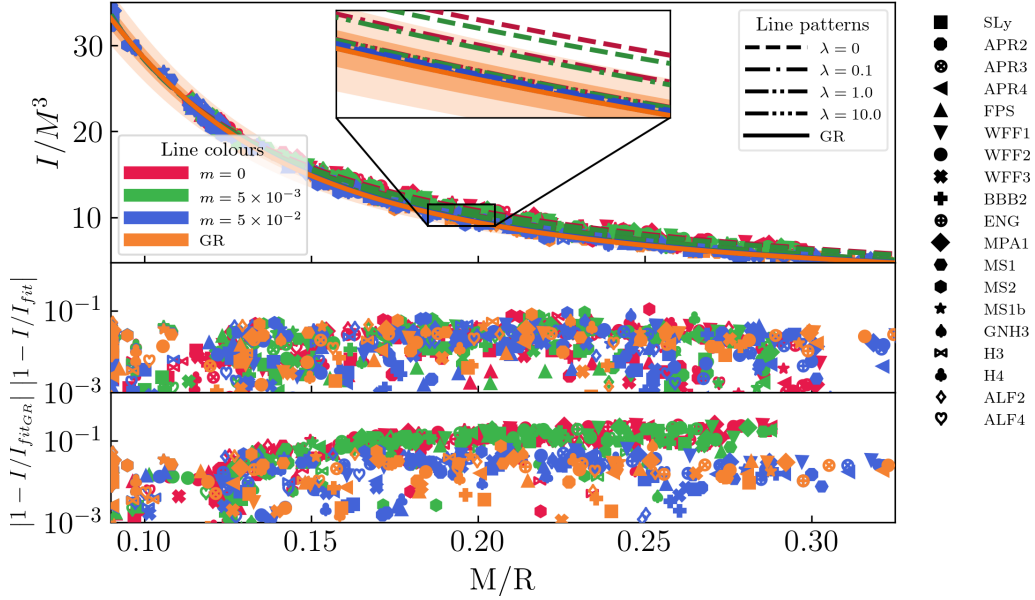
$$\tilde{I} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \frac{M}{R} + \tilde{a}_4 \left( \frac{M}{R} \right)^4, \quad (109)$$

Този вид е предложен за пръв път от Lattimer и Schutz [40], изследван е след това от Breu и Rezzolla [77] и по-късно използван от Staykov et al. [78] в алтернативни теории на гравитацията.

Стойностите на коефициентите и съответните оценки  $\chi^2$  на всеки фит от фиг.10 могат да бъдат намерени в таблица 2. В средния панел на графиката сме представили относителното отклонение на данните от фита за всяка теория. Определяме отклоненията като  $|1 - \tilde{I}/\tilde{I}_{\text{fit}}|$  и за набора от УнС, които използваме, е под 10% за всички теории изследвани тук.

Допълнително представяме оценки на неопределеността във фитове -  $\langle L \rangle$ , средно отклонение  $|1 - \tilde{I}/\tilde{I}_{\text{fit}}|$  за всички УнС;  $\langle L_\infty \rangle$ , средното най-голямо относително отклонение от фита на всички УнС;  $L_\infty$ , най-голямото отклонение между всички УнС. Стойностите на различните отклонения за СТТ и ОТО са показани в таблица 3. На графиката са представени  $\langle L_\infty \rangle$  и  $L_\infty$  за ОТО фита като запълнени с различна яркост области, като последният е с по-светъл цвят от първия.

На фиг. 11 представяме опростена версия на фиг.10 чрез фиксиране на един допълнителен свободен параметър - или  $m_\varphi = 5 \times 10^{-3}$  в левия панел, или  $\lambda = 0.1$  в десния панел, и представяме резултатите, когато се променя съответния свободен параметър. От двете фигури се вижда, че при увеличаване на който и да е от  $m_\varphi$  или  $\lambda$ , ефектът на скаларизация се потиска и резултатите за масивна СТТ със самодействие влизат в рамките на неопределеността на ОТО-фита.



Фигура 12: Нормализиран инерчен момент  $I/M^3$  като функция на звездната компактност  $M/R$  в ОТО и СТТ с  $\beta = -6$  и различни стойности на  $m_\varphi$  и  $\lambda$  със съответните полиномени фитове. Означения са едни и същи с 10.

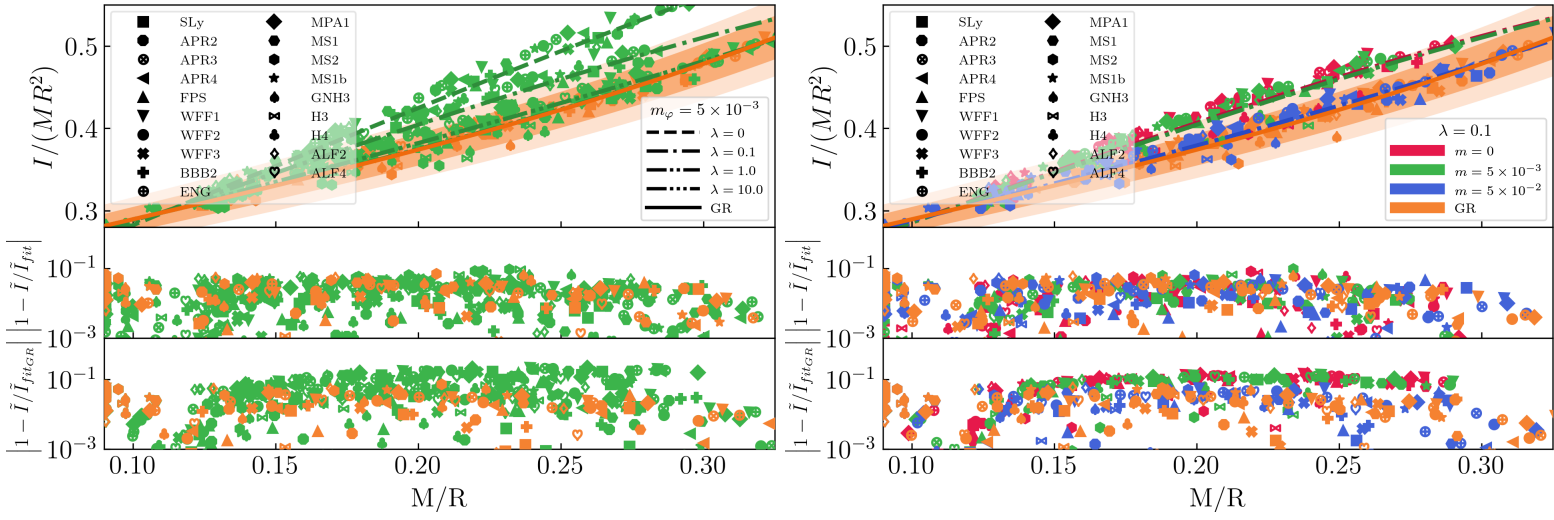
На фиг. 12 използваме различна нормализация за инерчния момент –  $\bar{I} \equiv M/R^3$ . Качествено този избор за нормализация е различен от  $\tilde{I}$ , тъй като с увеличаването на компактността той намалява, но като цяло наблюдаваме сходно поведение и резултатите показват доста добра универсалност. За малки компактности ОТО и СТТ са групирани заедно и с нарастване на компактността (приблизително  $M/R \gtrsim 0.25$ ) скаларизираните резултати се отделят значително от ОТО. За тази нормализация използваме фитирац полином със следния вид:

$$\bar{I} = \bar{a}_1 \left(\frac{M}{R}\right)^{-1} + \bar{a}_2 \left(\frac{M}{R}\right)^{-2} + \bar{a}_3 \left(\frac{M}{R}\right)^{-3} + \bar{a}_4 \left(\frac{M}{R}\right)^{-4} \quad (110)$$

за всяка отделна теория. Визуално  $\bar{I}$  изглежда като по-добра нормализация в сравнение с  $\tilde{I}$ , но всъщност това е подвеждащ визуален ефект на графиката, дължащ се на различните мащаби използвани по оста  $Oy$ . Ако сравним данните в долните панели, което отново е отклонението на данните от фитове за всяка теория, ще установим, че за същия набор от УнС те не надхвърлят 10%. Още повече отклоненията за всяка от нормализация (за  $\tilde{I}$  са в Таблица 3 и за  $\bar{I}$  са в Таблица 4) са сравними: типичната средна стойност за всички УнС  $\langle L \rangle$  е 2%; осредненото максимално отклонения за всички УнС за всяка теория е  $\langle L_\infty \rangle \sim 5\%$ ; максималното относително отклонение за всички УнС е  $L_\infty \sim 10\%$ , като най-голям принос към отклоненията между фит и данни имат меките уравнения на състоянието.

Също така представяме опростена версия на фиг. 12 – фиг. 13, където свободните параметри -  $m_\varphi$  и  $\lambda = 0, 1$  са фиксирани. Качествено, както е показано на фиг. 11, масивните СТТ със самодействие са достатъчно добре отделени от ОТО за голяма компактност и малки  $(m_\varphi, \lambda)$ , но с увеличението  $m_\varphi$  или  $\lambda$  те се схождат към ОТО.

Нека коментираме различията със случая на ОТО. Във всяка от фиг. 10-13 в долния панел е показано относителното отклонение от ОТО- фита. Както се забелязва, отклоненията на скаларизираните модели са видимо по-големи от неопределеността в уравнението



Фигура 13: Нормализиран инерчен момент  $I/M^3$  като функция на звездната компактност  $M/R$  в ОТО и СТТ с  $\beta = -6$  и различни стойности на  $m_\varphi$  и  $\lambda$  със съответните полиноми фитове. Означения са едни и същи с 11.

на състоянието достигащо до 20%. Трябва да отбележим, че това е само за умерено избраните стойности на параметрите. За още по-малки  $\beta$  тези отклонения могат да се увеличат значително. Поради това универсалните съотношения могат потенциално да се използват, за да се ограничат наблюденията на масиви СТТ със самодействие. От друга страна, както е показано в [80], дори и за много малките  $\beta$  съществуват редица параметри, по-точно големи стойности за  $\lambda$ , където моделите все още са скаларизирани за голям диапазон от централни енергийни плътности, но свойствата на неутронните звезди и съответните универсални отношения са почти неразличими от ОТО.

$m \backslash \lambda$	0	0.1	1	10
0	$a_0 = 0.131$ $a_1 = 1.514$ $a_4 = -1.263$ $\chi_r^2 = 6.044 \times 10^{-5}$	$a_0 = 0.160$ $a_1 = 1.255$ $a_4 = -3.061$ $\chi_r^2 = 5.461 \times 10^{-5}$	$a_0 = 0.196$ $a_1 = 0.921$ $a_4 = 1.136$ $\chi_r^2 = 4.764 \times 10^{-5}$	$a_0 = 0.209$ $a_1 = 0.800$ $a_4 = 3.662$ $\chi_r^2 = 4.189 \times 10^{-5}$
$5 \times 10^{-3}$	$a_0 = 0.137$ $a_1 = 1.445$ $a_4 = -1.331$ $\chi_r^2 = 5.703 \times 10^{-5}$	$a_0 = 0.162$ $a_1 = 1.230$ $a_4 = -2.621$ $\chi_r^2 = 5.329 \times 10^{-5}$	$a_0 = 0.196$ $a_1 = 0.918$ $a_4 = 1.215$ $\chi_r^2 = 4.724 \times 10^{-5}$	$a_0 = 0.209$ $a_1 = 0.798$ $a_4 = 3.720$ $\chi_r^2 = 4.270 \times 10^{-5}$
$5 \times 10^{-2}$	$a_0 = 0.195$ $a_1 = 0.917$ $a_4 = 1.122$ $\chi_r^2 = 4.211 \times 10^{-5}$	$a_0 = 0.199$ $a_1 = 0.882$ $a_4 = 1.862$ $\chi_r^2 = 4.402 \times 10^{-5}$	$a_0 = 0.207$ $a_1 = 0.817$ $a_4 = 3.280$ $\chi_r^2 = 4.321 \times 10^{-5}$	$a_0 = 0.210$ $a_1 = 0.789$ $a_4 = 3.905$ $\chi_r^2 = 4.193 \times 10^{-5}$
GR: $a_0 = 2.103e - 01$ ; $a_1 = 7.877e - 01$ ; $a_4 = 3.950e + 00$ ; $\chi_r^2 = 4.186e - 05$				

Таблица 2:  $I/MR^2$  коефициенти на фит (109) и съответни  $\chi^2$  стойности. Първия ред и колона съдържат всички използвани в главата стойности за  $m_\varphi$  и  $\lambda$ .

$m \backslash \lambda$	0	$1 \times 10^{-1}$	$1 \times 10^0$	$1 \times 10^1$
0	$a_1 = 1.175$ $a_2 = 0.282$ $a_3 = -2.267 \times 10^{-2}$ $a_4 = 1.099 \times 10^{-3}$ $\chi_r^2 = 0.154$	$a_1 = 0.763$ $a_2 = 0.343$ $a_3 = -2.182 \times 10^{-2}$ $a_4 = 8.227 \times 10^{-4}$ $\chi_r^2 = 0.148$	$a_1 = 1.052$ $a_2 = 0.121$ $a_3 = 1.500 \times 10^{-2}$ $a_4 = -9.189 \times 10^{-4}$ $\chi_r^2 = 0.127$	$a_1 = 1.253$ $a_2 = 8.055 \times 10^{-3}$ $a_3 = 3.207 \times 10^{-2}$ $a_4 = -1.689 \times 10^{-3}$ $\chi_r^2 = 0.121$
$5 \times 10^{-3}$	$a_1 = 1.206$ $a_2 = 0.242$ $a_3 = -1.582 \times 10^{-2}$ $a_4 = 7.863 \times 10^{-4}$ $\chi_r^2 = 0.152$	$a_1 = 0.853$ $a_2 = 0.298$ $a_3 = -1.584 \times 10^{-2}$ $a_4 = 5.805 \times 10^{-4}$ $\chi_r^2 = 0.147$	$a_1 = 1.069$ $a_2 = 0.113$ $a_3 = 1.603 \times 10^{-2}$ $a_4 = -9.592 \times 10^{-4}$ $\chi_r^2 = 0.127$	$a_1 = 1.257$ $a_2 = 6.625 \times 10^{-3}$ $a_3 = 3.227 \times 10^{-2}$ $a_4 = -1.698 \times 10^{-3}$ $\chi_r^2 = 0.122$
$5 \times 10^{-2}$	$a_1 = 1.206$ $a_2 = 4.868 \times 10^{-2}$ $a_3 = 2.484 \times 10^{-2}$ $a_4 = -1.327 \times 10^{-3}$ $\chi_r^2 = 0.124$	$a_1 = 1.213$ $a_2 = 3.948 \times 10^{-2}$ $a_3 = 2.659 \times 10^{-2}$ $a_4 = -1.418 \times 10^{-3}$ $\chi_r^2 = 0.124$	$a_1 = 1.249$ $a_2 = 1.218 \times 10^{-2}$ $a_3 = 3.127 \times 10^{-2}$ $a_4 = -1.647 \times 10^{-3}$ $\chi_r^2 = 0.122$	$a_1 = 1.273$ $a_2 = -2.283 \times 10^{-3}$ $a_3 = 3.362 \times 10^{-2}$ $a_4 = -1.759 \times 10^{-3}$ $\chi_r^2 = 0.121$
GR: $a_1 = 1.275$ , $a_2 = -3.584 \times 10^{-3}$ , $a_3 = 3.383 \times 10^{-2}$ , $a_4 = -1.769 \times 10^{-3}$ ; $\chi_r^2 = 0.121$				

Таблица 4:  $I/M^3$  коефициенти на фитиращата функция и съответните  $\chi^2$  стойности. Означенията са същите като (2)

$\lambda$ m	0	0.1	1	10
0	$\langle L \rangle = 2.131 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.249 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 1.228 \times 10^{-1}$	$\langle L \rangle = 2.131 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.249 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 1.228 \times 10^{-1}$	$\langle L \rangle = 2.268 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.020 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 1.018 \times 10^{-1}$	$\langle L \rangle = 2.216 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.198 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.286 \times 10^{-2}$
$5 \times 10^{-3}$	$\langle L \rangle = 2.171 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.814 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 1.257 \times 10^{-1}$	$\langle L \rangle = 2.238 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.874 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 1.149 \times 10^{-1}$	$\langle L \rangle = 2.259 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.982 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.963 \times 10^{-2}$	$\langle L \rangle = 2.241 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.213 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.271 \times 10^{-2}$
$5 \times 10^{-2}$	$\langle L \rangle = 2.143 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.796 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.661 \times 10^{-2}$	$\langle L \rangle = 2.198 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.920 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.481 \times 10^{-2}$	$\langle L \rangle = 2.222 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.119 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.295 \times 10^{-2}$	$\langle L \rangle = 2.235 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.205 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.246 \times 10^{-2}$
GR: $\langle L \rangle = 2.236 \times 10^{-2}$ , $\langle L_\infty \rangle = 5.209 \times 10^{-2}$ , $L_\infty = 9.262 \times 10^{-2}$ ,				

Таблица 3: Стойностите на различните отклонения на данните и фитовете за  $I/MR^2$ . Първият ред и колона задържат всички използвани стойности за  $m_\varphi$  и  $\lambda$ . Във всяка отделна клетка са въведени числените стойности на следното -  $\langle L \rangle$ , осреднените отклонения за всички УнС;  $\langle L_\infty \rangle$ , средното от най-голямото отклонение за всяко УнС;  $L_\infty$ , най-голямото отклонение от всички. Съответните стойности на ОТО са на последния ред. На са представянеи  $\langle L_\infty \rangle$  и  $L_\infty$  за ОТО фита като запълнени с различна яркост области, като последният е с по-светъл цвят от първия.

$\lambda$ m	0	$1 \times 10^{-1}$	$1 \times 10^0$	$1 \times 10^1$
0	$\langle L \rangle = 2.162 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.971 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 1.302 \times 10^{-1}$	$\langle L \rangle = 2.249 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.922 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 1.145 \times 10^{-1}$	$\langle L \rangle = 2.268 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.020 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.745 \times 10^{-2}$	$\langle L \rangle = 2.216 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.198 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.286 \times 10^{-2}$
$5 \times 10^{-3}$	$\langle L \rangle = 2.173 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 5.918 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 1.259 \times 10^{-1}$	$\langle L \rangle = 2.227 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.769 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 1.123 \times 10^{-1}$	$\langle L \rangle = 2.161 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.229 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.928 \times 10^{-2}$	$\langle L \rangle = 2.162 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.079 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.418 \times 10^{-2}$
$5 \times 10^{-2}$	$\langle L \rangle = 2.081 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.526 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.481 \times 10^{-2}$	$\langle L \rangle = 2.122 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.453 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.388 \times 10^{-2}$	$\langle L \rangle = 2.138 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.145 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.377 \times 10^{-2}$	$\langle L \rangle = 2.156 \times 10^{-2}$ $\langle L_\infty \rangle = 4.078 \times 10^{-2}$ $L_\infty = 9.406 \times 10^{-2}$
GR: $\langle L \rangle = 2.158 \times 10^{-2}$ , $\langle L_\infty \rangle = 4.077 \times 10^{-2}$ , $L_\infty = 9.428 \times 10^{-2}$				

Таблица 5: Стойностите на различните отклонения на данните и фитовете за  $I/M^3$ . Означенията са същите като за 3

### 5.3 Заключение

Изучаването на универсалните съотношения между параметрите на неутронни звезди е обещаваща перспективите да ни предостави мощно средство за определяне на трудни за получаване параметри на звездите. Например, докато масата и инерчния момент могат да бъдат измерени с добра точност, оптичното измерване на радиуса зависи от различни фактори, като червеното отместване, разстоянието до звездата, ефекта на атмосферата, абсорбцията на междузвездното пространство и т.н. [40]. Такива отношения могат да ни помогнат да преодолеем голямата неопределеност в УнС и да ни позволи еднозначно да



установим параметрите на звездата и в резултат да ни помогне да сравним алтернативните теории за гравитацията срещу ОТО.

Съвременните наблюдения на  $I$  и  $R$  ги правят естествен избор за формиране на универсални съотношения, тъй като те могат да се измерват с добра точност за бинарни системи. Нашето изследване показва, че използването на  $I/(MR^2)$  или  $I/M^3$  като функции на компактността води до доста добра универсалност в съгласие с [77, 78] не само за ОТО, но и за всички изследвани класове СТТ и за нашия набор от УнС. Отклоненията, за всяка от теориите, не са по-високи от 10% за двете изследвани нормализации, като най-големите отклонения са за меките УнС. Разликите между универсалните отношения за скаларизираните модели и тези ОТО са значително по-големи от разсейването на данните поради неопределеността в УнС и достигат до приблизително 20% за разглежданите стойности на  $\beta = -6$ . Разликата естествено ще се увеличи с намалението на  $\beta$ . Това показва, че разглежданите съотношения могат да служат като начин за ограничаване на масивната СТТ със самодействие независимо от неопределеността в УнС.

Сред разглежданите подкласове на СТТ, особено интересен е масивният случай ( $\beta = -6, m_\varphi = 5 \times 10^{-3}, \lambda = 0$ ), за който знаем, че максималното отклонение за инерциония момент може да достигне до 40%, за изучаваната УнС [44], но за всяко от разглежданите нормализирани отношения отклонението от ОТО е около 10% за целия интервал на компактност. Трябва да подчертаем, че макар стойностите  $\beta \lesssim -4.5$  за безмасови СТТ да са ограничени от астрономическите наблюдения, това не е случаят при изследването на масивна СТТ, за която ( $\beta = -6, m_\varphi = 5 \times 10^{-3}, \lambda = 0$ ) е в наблюдателно допустимия интервал. Нещо повече, масивна СТТ със самодействие с голям  $\lambda$  допуска още по-големи  $\beta < 0$ , като същевременно проявява по-малко отклонения от ОТО, тъй като скаларизирането се осъществява за голям диапазон от централни енергийни плътности. Поради това може да се каже, че тези взаимоотношения са не само независими от УнС, но и за голяма част от областта на избрани СТТ, е и независима от теорията.

## 6 Компютърни кодове

Използваните кодове, поради големия им обем не са включени в дисертацията, а могат да бъдат намерени на адрес: [github.com/dpopchev/](https://github.com/dpopchev/). Тук ще приведем кратко описание.

- **main.c** – Основния модул, който инициализира глобалните променливи, функции и т.н. Използва се за стартиране на останалите функции в другите модули.
- **General\_purpose.c** – Съдържа всички функции с общо предназначение. Например такива, които копират вектори, или копират точно определени индекси от един в редуциран друг вектор и подобни. Тук са функциите за записване на резултати
- **EOS.c** – Инициализира структурата отговорна за уравненията на състоянието. Тук са функциите, които отговарят за политропната апроксимация и нейното числено реализиране.
- **ODE\_phiScal.c** – Съдържа функции за числено решаване системата ОДУ за стационарна неутронна звезда в СТТ с произволно зададен потенциал. Използва два метода на престрелката. Численото интегриране се извършва с `odeint`. Може да използва различни методи за намиране на корен, като по подразбиране е Нютон-Рафсън.



- **ODE\_phiScal\_J.c** – Съдържа функции за числено решаване системата ОДУ за стационарна неутронна звезда в приближение на бавно въртене. Разчита на **ODE\_phiScal.c**. СТТ е с произволно зададен потенциал. Използва два метода на престрелката. Численото интегриране се извършва с `odeint`. Може да използва различни методи за намиране на корен, като по подразбиране е Нютон-Рафсън.
- **\*.h** – Необходими header файлове. В **ExternalHeaders** са всички използвани външни библиотеки. **GlobalVars** задава прототипи всички глобални функции и променливи. **myStructData** дефинира моите структури от данни.
- **makefile** – Сърцето на програмата. С този скрипт се контролира компилацията на програмата като чрез нея се стартират лесно различни режими: на дебъгване, почистване на неунжни файлове, инсталация и т.н.
- **execute\_for\_me.py** – Скрипт, който автоматизира работата с програмата, като прекомпилира при предварително зададени съобщения и взема конкретни действия.
- **plotting.py** – Функции за обработка на данните на първите две статии, и частично на третата. Разчита предимно на python реализации и структури от данни за обработка.
- **result\_plotter.py** – Функции за обработка на данните за третата статия, и проверки на първите две. Разчита предимно на функциите и типовете данни на *numpy*.
- **Relativistic\_toolkit.py** – Пакет базиран за символично пресмятане на различни тензори. Тестван е в извода на уравненията от полевите уравнения на ОТО и СТТ. Възможност за пертурбиране на геометрични обекти, като символ на Кристофел тензор на Риман, Ричи, скалар на Ричи, и отчасти на тензора на енергията и импулса.

## Приноси на дисертационния труд

- Изучени са бавно въртящи се неутронни звезди в два отделни класа на СТТ с ненулева скаларна маса – масивна СТТ и масивна теория на Бранс-Дике. За стойности на съответните куплиращи параметри, които са в съгласие с наблюденията, решенията и в двете теории в безмасовия случай се различават почти незначително от ОТО. Включването на скаларно масивно поле изменя картината драстично. Масата на скаларното поле потиска скаларното поле на разстояние от порядъка на съответната Комптонова дължина на вълната, която ни помага да съгласуваме теорията с наблюденията за много по-широк диапазон от куплиращите параметри. Показано е, че всъщност за достатъчно големи маси на скаларното поле, масата, радиусът и инерчния момент в масивна СТТ и масивна теория на Бранс-Дике могат да се различават драстично от ОТО решенията. Резултатите за зависимостта на инерчния момент в масивни СТТ са получени за първи път. Създадени са кодове за решаване на полевите уравнения, което е нетривиална задача, тъй като разгледаните уравнения са от тип твърди.
- За първи път са изучени бавно въртящи се неутронни звезди в СТТ с масивно скаларно поле с допълнителен член на самодействие в потенциала. Резултатите показват, че самодействието потиска скаларизацията в масивната СТТ, което означава, че намалява още повече отклоненията от ОТО. Това допуска още по-широк диапазон от стойности за масите на скаларното поле съвместими с наблюденията. Основната разлика между ефекта на масовия член в потенциала и този на самодействието е, че последното не променя позицията на точките на бифуркация (в безмасовия случай), докато масата на скаларното поле променя критичните стойности на параметрите, където се появяват нови клонове на скаларизираните решения или изчезват. Кодовете за масивна СТТ бяха подобрени и адаптирани.
- За първи път са изучени универсални съотношения между параметрите на неутронни звезди в масивни СТТ със самодействие. Резултатите показват, че нормализираните инерчни моменти  $I/(MR^2)$  и  $I/M^3$  като функции на компактността водят до доста добра универсалност не само за ОТО, но и за всички изследвани класове СТТ и за нашия набор от уравнения на състоянието. Разликите между универсалните отношения за скаларизираните модели и тези в ОТО са значително по-големи от разсейването на данните поради несигурността в уравненията на състоянието и достигат до приблизително 20% за разглежданите стойности на  $\beta = -6$ . За изследването бяха разработени допълнителни кодове за обработка данните и тяхното визуализиране.

## Авторски публикации включени в дисертационния труд

- Stoytcho S. Yazadjiev, Daniela D. Doneva, Dimitar Popchev; "Slowly rotating neutron stars in scalar-tensor theories with a massive scalar field"; Phys. Rev. D 93, 084038 (2016)
- Kalin V. Staykov, Dimitar Popchev, Daniela D. Doneva, Stoytcho S. Yazadjiev; "Static and slowly rotating neutron stars in scalar-tensor theory with self-interacting massive scalar field"; Eur. Phys. J. C (2018) 78: 586
- Dimitar Popchev, Kalin V. Staykov, Daniela D. Doneva, Stoytcho S. Yazadjiev; "Moment of inertia - mass universal relations for neutron stars in scalar-tensor theory with self-interacting massive scalar field"; arXiv:1812.00347

## Доклади на конференции по темата на дисертационния труд

- Доклад на тема „Бавно въртящи се неутронни звезди в скаларно-тензорни теории с масивно скаларно поле“ на Трети Национален Конгрес по физически науки, София, 29.09-02.10.2016г.

# Литература

- [1] Th. Kaluza. On the unification problem in physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1921, 966-972, 1921.
- [2] P. Jordan. Zum gegenwärtigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen. *Z. Phys.*, 157:112, 1959.
- [3] M. Fierz. Über die physikalische Deutung der erweiterten Gravitationstheorie P. Jordans. *Helv. Acta*, 29:128, 1956.
- [4] C. Brans and R. H. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.* 124, 925, 1961.
- [5] T. Damour and G. Esposito-Farese. Tensor-multi-scalar theories of gravitation. *Classical and Quantum Gravity*, 9:2093–2176, 1992.
- [6] Valerio Faraoni, Edgard Gunzig, and Pasquale Nardone. Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology. *Fund.Cosmic Phys.*20:121,1999, 1998.
- [7] Thomas P Sotiriou, Valerio Faraoni, and Stefano Liberati. Theory of gravitation theories: a no-progress report. *Int.J.Mod.Phys.D*17:399-423,2008, 2007.
- [8] Yasunori Fujii and Kei ichi Maeda. *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 2003.
- [9] T. Damour and G. Esposito-Farese. Nonperturbative strong-field effects in tensor-scalar theories of gravitation. *Physical Review Letters*, 70:2220–2223, 1993.
- [10] T. Damour and G. Esposito-Farèse. Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments. *Phys. Rev. D*, 54:1474–1491, 1996.
- [11] M. Shibata, K. Taniguchi, H. Okawa, and A. Buonanno. Coalescence of binary neutron stars in a scalar-tensor theory of gravity. *Phys. Rev. D*, 89:084005, 2014.
- [12] Pisin Chen, Teruaki Suyama, and Jun'ichi Yokoyama. Spontaneous scalarization: asymmetron as dark matter. *Phys. Rev. D* 92, 124016 (2015), 2015.
- [13] Soichiro Morisaki and Teruaki Suyama. Spontaneous scalarization with an extremely massive field and heavy neutron stars. 2017.
- [14] Fethi M Ramazanoğlu and Frans Pretorius. Spontaneous scalarization with massive fields. *Physical Review D*, 93(6):064005, 2016.
- [15] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. xiii. cosmological parameters. *A&A* 594, A13 (2016), 2015.
- [16] Alan H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D* 23, 347, 1981.
- [17] Sean M. Carroll. Quintessence and the rest of the world. *Phys.Rev.Lett.* 81 (1998) 3067-3070, 1998.

- [18] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, and Constantinos Skordis. Modified Gravity and Cosmology. *Phys.Rept.*, 513:1–189, 2012.
- [19] L. Iess & P. Tortora B. Bertotti. A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature volume 425, pages 374–376 (25 September 2003)*, 2003.
- [20] J. Laskar H. Manche A. K. Verma, A. Fienga and M. Gastineau. Use of messenger radioscience data to improve planetary ephemeris and to test general relativity. *A&A Volume 561, January 2014*, 2014.
- [21] E. V. Pitjeva N. P. Pitjev. Relativistic effects and dark matter in the solar system from observations of planets and spacecraft. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 432, Issue 4, 11 July 2013, Pages 3431–3437*, 2013.
- [22] Lijing Shao, Noah Sennett, Alessandra Buonanno, Michael Kramer, and Norbert Wex. Constraining nonperturbative strong-field effects in scalar-tensor gravity by combining pulsar timing and laser-interferometer gravitational-wave detectors. *Phys. Rev. X 7, 041025 (2017)*, 2017.
- [23] J. M. Lattimer and M. Prakash. Neutron star structure and the equation of state. *Astrophys.J.550:426,2001*, 2000.
- [24] J. et al. Antoniadis. A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. *Science*, 340:448, April 2013.
- [25] William T. Vetterling Brian P. Flannery William H. Press, Saul A. Teukolsky. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press New York, NY, USA ©, 2007.
- [26] T. Harada. Stability Analysis of Spherically Symmetric Star in Scalar-Tensor Theories of Gravity. *Progress of Theoretical Physics*, 98:359–379, 1997.
- [27] T. Harada. Neutron stars in scalar-tensor theories of gravity and catastrophe theory. *Phys. Rev. D*, 57:4802–4811, 1998.
- [28] M. Salgado, D. Sudarsky, and U. Nucamendi. Spontaneous scalarization. *Phys. Rev. D*, 58:124003, 1998.
- [29] P. Pani, C. F. B. Macedo, L. C. B. Crispino, and V. Cardoso. Slowly rotating black holes in alternative theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 84:087501, 2011.
- [30] H. Sotani. Slowly rotating relativistic stars in scalar-tensor gravity. *Phys. Rev. D*, 86:124036, 2012.
- [31] D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, N. Stergioulas, and K. D. Kokkotas. Rapidly rotating neutron stars in scalar-tensor theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 88:084060, 2013.
- [32] P. C. C. Freire, N. Wex, G. Esposito-Farèse, J. P. W. Verbiest, M. Bailes, B. A. Jacoby, M. Kramer, I. H. Stairs, J. Antoniadis, and G. H. Janssen. The relativistic pulsar-white dwarf binary PSR J1738+0333 - II. The most stringent test of scalar-tensor gravity. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 423:3328–3343, 2012.

- [33] L. Perivolaropoulos. Ppn parameter  $\gamma$  and solar system constraints of massive brans-dicke theories. *Phys.Rev.D81:047501,2010*, 2010.
- [34] Justin Alsing, Emanuele Berti, Clifford M Will, and Helmut Zaglauer. Gravitational radiation from compact binary systems in the massive brans-dicke theory of gravity. *Physical Review D*, 85(6):064041, 2012.
- [35] J. B. Hartle. Slowly Rotating Relativistic Stars. I. Equations of Structure. *ApJ*, 150:1005, 1967.
- [36] Stoytcho S. Yazadjiev, Daniela D. Doneva, Kostas D. Kokkotas, and Kalin V. Staykov. Non-perturbative and self-consistent models of neutron stars in  $R$ -squared gravity. *JCAP*, 1406:003, 2014.
- [37] John Antoniadis, Paulo CC Freire, Norbert Wex, Thomas M Tauris, Ryan S Lynch, Marten H van Kerkwijk, Michael Kramer, Cees Bassa, Vik S Dhillon, Thomas Driebe, et al. A massive pulsar in a compact relativistic binary. *Science*, 340(6131):1233232, 2013.
- [38] Fethi M Ramazanoglu and Frans Pretorius. Spontaneous scalarization with massive fields. *Physical Review D*, 93(6):064005, 2016.
- [39] V. Cardoso, I. P. Carucci, P. Pani, and T. P. Sotiriou. Black Holes with Surrounding Matter in Scalar-Tensor Theories. *Physical Review Letters*, 111:111101, 2013.
- [40] J. M. Lattimer and B. F. Schutz. Constraining the Equation of State with Moment of Inertia Measurements. *ApJ*, 629:979–984, 2005.
- [41] E. Barausse, C. Palenzuela, M. Ponce, and L. Lehner. Neutron-star mergers in scalar-tensor theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 87:081506, 2013.
- [42] C. Palenzuela, E. Barausse, M. Ponce, and L. Lehner. Dynamical scalarization of neutron stars in scalar-tensor gravity theories. *Phys. Rev. D*, 89:044024, 2014.
- [43] Zahra Altaha Motahar, Jose Luis Blázquez-Salcedo, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Scalarization of neutron stars with realistic equations of state. *Physical Review D*, 96(6):064046, 2017.
- [44] Stoytcho S Yazadjiev, Daniela D Doneva, and Dimitar Popchev. Slowly rotating neutron stars in scalar-tensor theories with a massive scalar field. *Physical Review D*, 93(8):084038, 2016.
- [45] Daniela D. Doneva and Stoytcho S. Yazadjiev. Rapidly rotating neutron stars with a massive scalar field—structure and universal relations. *JCAP*, 1611(11):019, 2016.
- [46] A. Akmal, V. R. Pandharipande, and D. G. Ravenhall. Equation of state of nucleon matter and neutron star structure. *Phys. Rev. C*, 58:1804–1828, 1998.
- [47] J. S. Read, B. D. Lackey, B. J. Owen, and J. L. Friedman. Constraints on a phenomenologically parametrized neutron-star equation of state. *Phys. Rev. D*, 79(12):124032, June 2009.
- [48] James M. Lattimer and Andrew W. Steiner. Neutron Star Masses and Radii from Quiescent Low-Mass X-ray Binaries. *Astrophys. J.*, 784:123, 2014.

- [49] Feryal Oezel and Paulo Freire. Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 54:401–440, 2016.
- [50] B. P. Abbott et al. GW170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, 121(16):161101, 2018.
- [51] Andreas Bauswein, Oliver Just, Hans-Thomas Janka, and Nikolaos Stergioulas. Neutron-star radius constraints from GW170817 and future detections. *Astrophys. J.*, 850(2):L34, 2017.
- [52] Eemeli Annala, Tyler Gorda, Alekski Kurkela, and Alekski Vuorinen. Gravitational-wave constraints on the neutron-star-matter Equation of State. *Phys. Rev. Lett.*, 120(17):172703, 2018.
- [53] Luciano Rezzolla, Elias R. Most, and Lukas R. Weih. Using gravitational-wave observations and quasi-universal relations to constrain the maximum mass of neutron stars. *Astrophys. J.*, 852(2):L25, 2018. [Astrophys. J. Lett.852,L25(2018)].
- [54] Milton Ruiz, Stuart L. Shapiro, and Antonios Tsokaros. GW170817, General Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations, and the Neutron Star Maximum Mass. *Phys. Rev.*, D97(2):021501, 2018.
- [55] Nils Andersson and Kostas D. Kokkotas. Gravitational waves and pulsating stars: What can we learn from future observations? *Phys. Rev. Lett.*, 77:4134–4137, 1996.
- [56] N. Andersson and K. D. Kokkotas. Pulsation modes for increasingly relativistic polytropes. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 297:493–496, 1998.
- [57] Nils Andersson and Kostas D. Kokkotas. Towards gravitational wave asteroseismology. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 299:1059–1068, 1998.
- [58] Omar Benhar, Valeria Ferrari, and Leonardo Gualtieri. Gravitational wave asteroseismology revisited. *Phys. Rev. D*, 70:124015, 2004.
- [59] H. K. Lau, P. T. Leung, and L. M. Lin. Inferring Physical Parameters of Compact Stars from their f-mode Gravitational Wave Signals. *ApJ*, 714:1234–1238, May 2010.
- [60] C. Chirenti, G. H. de Souza, and W. Kastaun. Fundamental oscillation modes of neutron stars: Validity of universal relations. *Phys. Rev. D*, 91(4):044034, February 2015.
- [61] K. Yagi and N. Yunes. I-Love-Q: Unexpected Universal Relations for Neutron Stars and Quark Stars. *Science*, 341:365–368, 2013.
- [62] K. Yagi and N. Yunes. I-Love-Q relations in neutron stars and their applications to astrophysics, gravitational waves, and fundamental physics. *Phys. Rev. D*, 88:023009, 2013.
- [63] A. Maselli, V. Cardoso, V. Ferrari, L. Gualtieri, and P. Pani. Equation-of-state-independent relations in neutron stars. *Phys. Rev. D*, 88:023007, 2013.
- [64] D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, N. Stergioulas, and K. D. Kokkotas. Breakdown of I-Love-Q Universality in Rapidly Rotating Relativistic Stars. *ApJ*, 781:L6, January 2014.

- [65] G. Pappas and T. A. Apostolatos. Effectively Universal Behavior of Rotating Neutron Stars in General Relativity Makes Them Even Simpler than Their Newtonian Counterparts. *Physical Review Letters*, 112(12):121101, March 2014.
- [66] S. Chakrabarti, T. Delsate, N. Gürlebeck, and J. Steinhoff. I-Q Relation for Rapidly Rotating Neutron Stars. *Physical Review Letters*, 112(20):201102, May 2014.
- [67] B. Haskell, R. Ciolfi, F. Pannarale, and L. Rezzolla. On the universality of I-Love-Q relations in magnetized neutron stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 438:L71–L75, February 2014.
- [68] M. Urbanec, J. C. Miller, and Z. Stuchlík. Quadrupole moments of rotating neutron stars and strange stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 433:1903–1909, August 2013.
- [69] B. Majumder, K. Yagi, and N. Yunes. Improved universality in the neutron star three-hair relations. *Phys. Rev. D*, 92(2):024020, July 2015.
- [70] Kent Yagi and Nicolas Yunes. Binary love relations. December 2015.
- [71] Hajime Sotani and Kostas D. Kokkotas. Probing strong-field scalar-tensor gravity with gravitational wave asteroseismology. *Phys. Rev. D*, 70:084026, 2004.
- [72] H. Sotani and K. D. Kokkotas. Stellar oscillations in scalar-tensor theory of gravity. *Phys. Rev. D*, 71:124038, 2005.
- [73] Y.-H. Sham, L.-M. Lin, and P. T. Leung. Testing Universal Relations of Neutron Stars with a Nonlinear Matter-Gravity Coupling Theory. *ApJ*, 781:66, February 2014.
- [74] B. Kleihaus, J. Kunz, and S. Mojica. Quadrupole moments of rapidly rotating compact objects in dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet theory. *Phys. Rev. D*, 90(6):061501, September 2014.
- [75] P. Pani and E. Berti. Slowly rotating neutron stars in scalar-tensor theories. *Phys. Rev. D*, 90(2):024025, July 2014.
- [76] D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, and K. D. Kokkotas. I-Q relations for rapidly rotating neutron stars in  $f(R)$  gravity. *Phys. Rev. D*, 92(6):064015, September 2015.
- [77] Cosima Breu and Luciano Rezzolla. Maximum mass, moment of inertia and compactness of relativistic stars. 2016.
- [78] Kalin V. Staykov, Daniela D. Doneva, and Stoytcho S. Yazadjiev. Moment of inertia – compactness universal relations in scalar-tensor theories and  $\mathcal{R}^2$  gravity. 2016.
- [79] D. G. Ravenhall and C. J. Pethick. Neutron star moments of inertia. *ApJ*, 424:846–851, April 1994.
- [80] Kalin V. Staykov, Dimitar Popchev, Daniela D. Doneva, and Stoytcho S. Yazadjiev. Static and slowly rotating neutron stars in scalar-tensor theory with self-interacting massive scalar field. *The European Physical Journal C*, 2018.