Р Е Ц Е Н З И Я

От проф. дмн Димитър Иванов Вакарелов на дисертацията на Александър Сотиров Биков „Пресмятане и оценяване на фолкманови числа“, представена за придобиване на научна степен „доктор“ в професионално направление 4.5 „Математика“, докторска програма „Алгебра, топология и приложения“. Научен ръководител проф. дмн Недялко Ненов.

Биографични данни за дисертанта и общи данни за дисертацията. Авторът на дисертационния труд Александър Биков завършва специалност информатика към ФМИ през 2011 г. и магистърска програма "Дискретни и алгебрични структури" през 2013 г. като защитава дипломна работа на тема "Компютърно изследване на критични графи на Ramsey" с научен ръководител проф. дмн Недялко Ненов. Темата е в едно престижно направление в теория на графите, в което Българските приноси заемат едно от водещите места в света. Тази тематика поставя началото на едно трайно сътрудничество между Александър Биков, който е отличен математик и програмист, и неговия научен ръководител Недялко Ненов, в резултат на което се получава една серия от нови международно признати резултати в областта. Биков постъпва в докторантура към катедра Алгебра през 2015 г. след като се убеждава, че е навлязъл професионално в областта. Крайният резултат от тази докторантура е рецензираната дисертация. Тя е представена на два езика – български и английски, като в рецензията се има предвид българския текст. Дисертацията е в обем 153 страници, включващи литература от 101 заглавия. Резултатите в дисертацията се покриват от 7 публикации – 2 самостоятелни и 5 съвместни с научния ръководител. Четири от публикациите са в български издания, а три са публикувани в професионалните списания GEOMBINATORICS [5] (основано от Paul Erdős) и Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing [6,7]. Има забелязани 9 цитирания. Резултатите от дисертацията са докладвани в няколко български форума и един международен конгрес. Авторефератът е сбит и ясно представя съдържанието на дисертацията, историята на проблемите и връзката на получените нови резултати с предходни в областта. В авторската справка правилно са отбелязани научните приноси на автора, които са формулирани в 9 отделни групи. По мое мнение това е една богата на резултати работа, която по количество съдържа материал за поне 3 дисертации.

Характеристика на областта и връзката и с computer aided mathematics. Както споменах в началото, тематиката на дисертацията е в едно крайно интересно направление в екстремалната теория на графите, което кратко може да се именува „числа на Фолкман“. Например, числото $F_e(3,3,5)$ изразява минималното количество върхове, които може да има един граф, който не съдържа пълния граф K_5, така че при произволно оцветяване на ребрата му с два цвята винаги да съдържа едноцветен триъгълник. Съвкупността на всички графи с това свойство е огромна и задачата е да се намери в тази съвкупност граф с минимално число върхове, което е именно числото $F_e(3,3,5)$. Точното пресмятане на това число има 30-годишна история. През 1981 г. в [57] Ненов построява един граф с 15 върха принадлежащ на тази съвкупност, от където следва, че $F_e(3,3,5)$ е по-малко или равно на 15, т. е. 15 е една горна граница за това число, като до момента това е най-дбрата горна граница. Едва през 1999 г. с помощта на компютър чрез претърсване на цялата съвкупност е било установено от K. Piwakowski, S. Radziszowski, and S. Urbanski [76], че 15 е точната стойност на числото $F_e(3,3,5)$. Нека отбележим, че този факт без компютър е невъзможно да бъде установен. Това показва, че теорията на Фолкмановите числа е частен случай на един нов вид математика – “computer aided mathematics”в английска терминология, която установява математически истини не само чрез обичайните за стандартната математика доказателства, но и чрез ефективни компютърни програми претърсващи огромни съвкупности. Математическите резултати в дисертацията са именно от такъв тип, в което виждам нейната основна ценност. Такава една математика е сравнително нова за Българската математическа общност и трябва да бъде поощрявана поради нейната изключителна важност не само за теория на графите и комбинаториката, но и за някои приложни раздели на информатиката и изкуствения интелект. По повод достоверността на резултатите на тази нова математика някои скептици могат да възразят поради недоверие към коректността на съответните алгоритми и компютърни програми. Например, в предложената дисертация има описани 8 алгоритма, които са имплементирани в 8 програми (невключени в дисертацията), всяка от които е предназначена за решаване на конкретна задача, но може да се използва за решаване и на някои други задачи. Как е проверена коректността на тези алгоритми и програми? За всеки от алгоритмите е зададен неговия вход и изход и описание с какви процедури от входните данни се получават изходните данни. За всеки такъв алгоритъм се доказва теорема за коректност, която твърди, че чрез алгоритъма получаваме точно това, което се изисква от него. Например, теоремата за коректност на алгоритъма А1, описан на стр. 32 е точно Теорема 2.2. Един доста разпространен начин за проверка на коректността на получената от съответен алгоритъм програма е прилагането на тази програма към вече решени задачи с помощта на други програми и сравняване с получените преди това резултати. Този метод многократно е прилаган за програмите съответни на различните алгоритми в тази дисертация. Тук трябва да се спомене, че за да се реши успешно една компютърна задача за търсене в съвокупност с огромен брой елементи, съответния алгоритъм и програма трябва да бъдат достатъчно ефективни, за да решат задачата в разумно компютърно време, което изисква особено майсторство и изобретателност. Искам да отбележа, че именно такова майсторство е проявено при дизайна на осемте алгоритъма от дисертацията по отношение на тяхната ефективност и скорост. Напр. алгоритъма А2 е обобщение на А1 и с негова помощ могат да се повторят някои резултати получени с А1 с цел проверка на неговата коректност (ново и по-кратко доказателство на Теорема 2.17, която е главния резултат получен с А1). Алгоритъма А3 е оптимизирана версия на А2, като неговата оптимизация се базира на Твърдение 3.2 и Твърдение 3.3. и отново коректността на неговата програма се проверява чрез повтаряне на резултат от А2. Подобна е ситуацията с алгоритъм А4, който оптимизира А3 на базата на Твърденията 4.3, 4.4 и 4.5. Алгоритъмът А5 е специализирана версия на А3, удобна за генериране на всички не-Шпернерови графи, които се използуват в Глава 5. Коректността на програмите съответни на А6 , А7 и А8, които се използвт в Част II на дисертацията се проверява по подобен начин – чрез прилагане на алгоритмите към вече решени в литературата задачи.

Структура и кратко съдържание на дисертацията. Дисертацията съдържа Увод и 9 глави групирани в две части. Увода, който по същество съвпада с автореферата, съдържа кратко резюме и формулировка на получените математически резултати, чието количество е впечатляващо. Част I (стр. 18 – 103) е посветена на върховите числа на Фолкмън и е разделена на 6 глави, от които Глава 1 е предназначена за изброяване на основни дефиниции и помощни резултати.

Глави 2- 4 са посветени на пресмятането на числата $F_v(a_1,\dots,a_s,q)$ при q=m-1, където m е специална функция на $a_1,\dots,a_s$. Отбелязано е като факт, че са известни всички Фолкманови числа от вида $F_v(a_1,\dots,a_s, m-1)$ при $\max\{a_1,\dots,a_s\} < 5$. Глави 2,3 и 4 са посветени на пресмятането на числата $F_e(a_1,\dots,a_s, m-1)$ съответно при $\max\{ a_1,\dots,a_s\}=5$, 6 и 7 като специално при . $\max\{ a_1,\dots,a_s\}= 7$ числата $F_e(a_1,\dots,a_s, m-1)$ са пресметнати с точност до единица (Теорема 4.1). В Глава 2 са въведени алгоритмите А1 и А2, в Глава 3 – алгоритъма А3, а в Глава 4 – алгоритъма А4. Стратегията в тези глави е следната: с помощта на въведените алгоритми се намират точните стойности на конкретни Фолкманови числа от разглеждания клас и с тяхна помощ се пресмятат всички останали чрез използуване на общотеоретични резултати. Трудността на проблема във всяка следваща глава нараства, поради което се налага последователно усъвършенствуване на необходимите алгоритми. Глава 5 е посветена на изучаването на числата $F_v(a_1,\dots,a_s, m-2)$, за които много малко неща са известни. Например, не е известна точната стойност на нито едно такова число при $\max\{ a_1,\dots,a_s\}$ > или = 3 като за някои такива числа са известни само техни не много добри горни и долни граници. В тази глава се въвежда алгоритъма А5 и с негова помощ се подобряват оценките на две важни такива числа. В Глава 6 с помощта на въведените вече алгоритми се изучават числа от вида $F_v(a_1,\dots,a_s,q)$ при $q=\max\{ a_1,\dots,a_s\}+1$. Резултатите в тази глава са едни от най-трудните за получаване поради голямия брой на множествата от графи подлежащи на претърсване като необходимото компютърно време за извършване на изчисленията е около месец.

Част II е посветена на ребрените Фолкманови числа и съдържа 3 глави. Глава 7 е за въвеждане на съответните дефиниции, помощни резултати и кратка история на някои забележителни резултати, като пресмятането на

$F_e(3,3;5)$, за което бе споменато в началото и оценките на все още неизвестното число $F_e(3,3;4)$. В Глава 8 се изучават минималните графи в класа $H_e(3,3)$ от графи, които при оцветяване на ребрата в два цвята се получава едноцветен триъгълник. Най-напред се установяват някои теоретични резултатати и след това с помощта на алгоритъма A6 се намират всички минимални графи с брой на върховете между 6 и 12 включително. След това се описва един подобрен алгоритъм A7 и една негова частна версия A7M, чрез която се намират всички минимални графи с брой на върховете 13. Изследват се и специални свойства на намерените минимални графи, като с помощта на алгоритъма A7 се намират и оценки отгоре за числото на независимост на минималните графи. Глава 9 е посветена на подобряване на съществуващата най-добра до сега оценка отдолу за числото $F_e(3,3,4)$ дадена от Radziszowski è Xu [81]: $F_e(3,3,4)$ > или =19 където се отбелязва, че всяко подобряване на този резултат може да се тълкува като значителн принос. Основен резултат в Глава 9 е $F_e(3,3,4)$ > или =20. Той се получав с помощта на алгоритъм A8. Тук е отбелязано, че с помощтта на метода от [81] този резултат е невъзможно да се постигне и затова се е наложило да се конструира новия алгоритъм A8. Той повтаря резултата от [81] за по-малко от секунда, докато оригиналният алгоритъм от [81] е работил няколко часа.

Качества на изложението и резултатите. Текстът на дисертацията и в двете форми (българска и английска) е ясен, разсъжденията в съответните доказателства са проследими а самите резултати – впечатляващи. Вижда се еднакво и перфектно познаване както на теоретичните резултати в областта, а така и на всички известни компютърни резултати и алгоритмите, с които те са получени техните ограничения и възможни пътища за тяхното преодолване с цел получяване на нови резултати. Теоретичните резултати са умело комбинирани с компютърните, както за получаване на нови резултти, така и за оптимиране на компютърните алгоритми. Личи добре изградена професионална интуиция за областта, без която резултатите от тази дисертация не биха могли да се получат. В заключението към дисертацията не са отбелязани възможни приложения и модификации на разработената методика в сродни области, където екстремални свойства на големи множества от данни представляват практическа важност. Например, усъвършенствуване на GPS-програмите за най-къс маршрут в пътната мрежа между две географски точки, компютърни методи за търсене на оптимални алгоритми (напр. неотдавна бе открит с компютър „алгоритъмът на Бог за нареждането на кубът на Рубик“, съгласно който той може да се нареди от произволно положение за не-повече от 20 хода и това число е оптимално), компютърни методи, подпомагащи откриването на нови резултати в други области на математиката и др.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Представеният дисертационен труд съдържа сериозни и оригинални резултати в едно направление в екстремалната теория на графите – числа на Фолкман, в което класическите математически методи за доказателства успешно се комбинират с компютърни методи. При получаване на тези резултати дисертантът показва професионални умения, съчетаващи висока математическа култура и програмистки техники, а така също и дълбоко познаване на резултатите в областта. Резултатите вече са получили международно признание от водещи специалисти, което затвърдява мястото на България като една от водещите страни в това направление. Дисертацията напълно отговаря на критериите на Закона за развитието на академичния състав в Република България и съответните подзаконови наредби и правилници, отнасящи се до СУ и ФМИ за придобиване на научната и образователна степен „доктор“. Ето защо убедено препоръчвам да бъде присъдена на Александър Сотиров Биков образователната и научна степен „доктор“, а предложеният дисертационен труд да бъде квалифициран като изключително постижение.

10.09.2018 проф. дмн Димитър Вакарелов