Софийски Унивеситет "Св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика

Александър Сотиров Биков

ПРЕСМЯТАНЕ И ОЦЕНЯВАНЕ НА ФОЛКМАНОВИ ЧИСЛА

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация

за получаване на образователната и научна степен "доктор"

по професионално направление 4.5 Математика

докторска програма «Алгебра, топология и приложения»

Научен ръководител

проф. дмн Недялко Ненов

София, 2018

Разглеждат се само обикновени графи, т.е. крайни, неориентирани графи без кратни ребра и примки. Множеството от върховете и множеството от ребрата на графа G се означават съответно с $\mathrm{V}(G)$ и $\mathrm{E}(G)$. Пълният граф с n върха означаваме с K_n.

Една основна задача в теорията на графите е следната: Даден е клас от графи $\mathcal{H}$. Какъв е минимума на броят на върховете на графите в $\mathcal{H}$?

$$\min\{|\mathrm{V}(G)| : G \in \mathcal{H}\} =?$$

За много важни класове $\mathcal{H}$ тази задача все още не е решена. В тази дисертация разглеждаме такива задачи. В някои случаи ще пресметнем $\min\{|\mathrm{V}(G)|\}$ точно, а в други ще получим нови оценки за $\min\{|\mathrm{V}(G)|\}$.

Добре известно е, че във всяко оцветяване на ребрата на графа K_6 в два цвята има едноцветен триъгълник. Ще означаваме това свойство с $K_6 \overset{e}{\rightarrow} (3,3)$. Ясно е, че ако G съдържа K_6 като подграф, тогава $G \overset{e}{\rightarrow} (3,3)$. През 1967 година Erdös и Hajnal формулират следния проблем:

Съществува ли граф $G \overset{e}{\rightarrow} (3,3)$, който не съдържа K_6 ?

Означаваме:
$\mathcal{H}_e(3,3;q) = \left\{G : G \overset{e}{\rightarrow} (3,3) \text{ и } G \not\supseteq K_q\right\}$.

Ребреното Фолкманово число $F_e(3,3;q)$ се дефинира с:
$F_e(3,3;q) = \min\{|\mathrm{V}(G)| : G \in \mathcal{H}_e(3,3;q)\}$

От $K_6 \overset{e}{\rightarrow} (3,3)$ и $K_5 \overset{e}{\not\rightarrow} (3,3)$ следва, че $F_v(3,3;q) = 6$, $q \geq 7$. Първият пример за граф G, такъв че $G \not\supseteq K_6$ и $G \overset{e}{\rightarrow} (3,3)$ е даден от van Lint. По късно, Graham показва, че $K_3 + C_5 \overset{e}{\rightarrow} (3,3)$ и доказва $F_e(3,3;6) = 8$.

Пресмятането на числата $F_e(3,3;5)$ и $F_e(3,3;4)$ е много трудно. Числото $F_e(3,3;5)$ е пресметнато окончателно през 1998 година и има 30 годишна история. Оценката отгоре $F_e(3,3;5) \leq 15$ е получена от Ненов в [59], който построява първия 15-върхов граф в $\mathcal{H}_e(3,3;5)$. Оценката отдолу $F_e(3,3;5) \geq 15$ е получена много по-късно с помощта на компютър от Piwakowski, Radziszowski и Urbanski в [78]. Без компютър е невъзможно да се докаже, че $F_e(3,3;5) \geq 15$. По-подробен обзор на резултатите свързани с числото $F_e(3,3;5)$ е даден в статията [78] и в книгата [93].

Числото $F_e(3,3;4)$ не е пресметнато. Това е най-търсеното Фолкманово число. През 1970 година Folkman [22] доказва, че $\mathcal{H}_e(3,3;4) \neq \emptyset$. Графът получен с конструкцията на Folkman има много голям брой върхове. Поради това, през 1975 година Erdös [19] поставя проблема за доказването на неравенството $F_e(3,3;4) < 10^{10}$. През 1986 година Frankl и Rödl [24] почти решават този проблем като показват, че $F_e(3,3;4) < 7.02 \times 10^{11}$. През 1988 година Spencer [94] доказва неравенството $F_e(3,3;4) < 3 \times 10^9$ използвайки вероятностни методи. През 2008 година Lu [48] построява 9697-върхов граф в $\mathcal{H}_e(3,3;4)$, по този начин подобрявайки значително оценката отгоре за $F_e(3,3;4)$. Скоро след това, резултатът на Lu е подобрен от Dudek и Rödl [18], които доказват $F_e(3,3;4) \leq 941$. Най-добрата известна оценка отгоре за това число е $F_e(3,3;4) \leq 786$, получена през 2012 година от Lange, Radziszowski и Xu [43].

През 1972 година Lin [47] доказва, че $F_e(3,3;4) \geq 11$. Тази оценка отдолу е подобрена от Ненов [61], който през 1981 година показва, че $F_e(3,3;4) \geq 13$. През 1984 година Ненов [62] доказва, че всеки 5-хроматичен K_4-свободен граф има поне 11 върха, от където лесно се получава, че $F_e(3,3;4) \geq 14$. От $F_e(3,3;5) = 15$ [59][78] следва, че $F_e(3,3;4) \geq 16$. Най-добрата известна оценка отдолу за $F_e(3,3;4)$ е получена през 2007 година от Radziszowski и Xu [81], които доказват с помощта на компютър, че $F_e(3,3;4) \geq 19$. Според Radziszowski и Xu [81], всеки метод за подобряване на оценката $F_e(3,3;4) \geq 19$ би бил от значителен интерес.

Година	Статия	Оценка отдолу	Оценка отгоре
1970	Folkman [22]		съществува
1972	Lin [47]	11	
1981	Nenov [61]	13	
1984	Nenov [62]	14	
1986	Frankl, Rödl [24]		7.02×10^{11}
1988	Spencer [94]		3×10^9
1999	Piwakowski, Radziszowski, Urbanski [78]	16	
2007	Radziszowski, Xu [81]	19	
2008	Lu [48]		9697
2008	Dudek, Rödl [18]		941
2012	Lange, Radziszowski, Xu [43]		786

Таблица 1: История на Фолкмановото число $F_e(3,3;4)$

Историята на числото $F_e(3,3;4)$ е отразена в Таблица 1.

В последната Глава 9 на тази дисертация ние подобряваме оценката отдолу за $F_e(3,3;4)$ като доказваме, че $F_e(3,3;4) \geq 20$. Това е един от основните резултати в дисертацията.

Пресмятането на $F_e(3,3;q)$ е частен случай на следната по-обща задача:

За дадени естествени числа $a_1, ..., a_s$, q, $a_i \geq 2, i = 1, ..., s$, да се определи минимума на броя на върховете на графите, които не съдържат пълния граф с q върха K_q, и имат следното свойство: при всяко оцветяване в s цвята на ребрата съществува $i \in \{1, ..., s\}$, такова че има едноцветна a_i-клика от цвят i.

Този минимум се означава с $F_e(a_1, ..., a_s; q)$ и се нарича ребрено Фолкманово число. Известно е, че

(1) $$F_e(a_1, ..., a_s; q) \text{ съществува } \Leftrightarrow q > \max\{a_1, ..., a_s\}.$$

В случая $s = 2$, (1) е доказано от Folkman в [22], а в общия случай (1) е доказано от Nesetril и Rödl в [76].

Числата $F_e(a_1, ..., a_s; q)$ са обобщение на класическите числа на Ramsey $R(a_1, ..., a_s)$. Нещо повече, $F_e(a_1, ..., a_s; q) = R(a_1, ..., a_s)$, ако $q > R(a_1, ..., a_s)$.

Върховите Фолкманови числа $F_v(a_1, ..., a_s; q)$ се дефинират по същия начин като ребрените Фолкманови числа $F_e(a_1, ..., a_s; q)$, но вместо ребрата на графите се оцветяват върховете им. Много често резултати за числата $F_v(a_1, ..., a_s; q)$ се използват в пресмятането и оценяването на ребрените Фолкманови числа. Ще отбележим също, че числата от вида $F_v(2, ..., 2; q)$ определят минимума на броя на върховете на графите с дадено хроматично число и дадено кликово число (вж. [62], [37] и [26]).

Тази дисертация се състои от две части. Първата част е посветена на върховите Фолкманови числа, а втората - на ребреното Фолкманово число $F_e(3, 3; 4)$, което разгледахме в началото на увода. Връзката между двете части не е очевидна. Сложните компютърни изчисления за доказването на неравенството $F_e(3, 3; 4) \geq 20$ са направени с помощта на Алгоритъм A8. Този алгоритъм обаче е модификация на алгоритмите от първата част. Поради това, за да се разбере по-добре връзката между двете части, трябва внимателно да се проследят алгоритмите A1, ..., A8.

Резултатите в тази дисертация са получени чрез комбинация от теоретични и компютърни методи. Някои от основните теоретични резултати, които получаваме, са резултатите от Теорема 2.12, Теорема 3.15, и Теорема 3.19. Съгласно тези теореми, пресмятането на някои безкрайни редици от Фолкманови числа се свежда до пресмятането само на първите няколко техни члена. Друг основен теоретичен резултат е въвеждането на модифицираните върхови Фолкманови числа. С помощта на тези числа ние получаваме оценки отгоре за върховите Фолкманови числа (Теорема 1.19).

Разработени са осем нови компютърни алгоритъма за пресмятането и оценяването на Фолкманови числа, които означаваме с A1, ..., A8. Тези алгоритми са оптимизирани за бързодействие. Ползвайки новите алгоритми получаваме резултати които са недостижими за съществуващите алгоритми, дори ако се използва мощна изчислителна техника. Например, пресмятането на оценката отдолу $F_e(3, 3; 4) \geq 19$ в [81] е извършено за няколко часа, но е практически невъзможно да се използва същия метод за да се подобри тази оценка. За сравнение, с помощта на Алгоритъм A8 на подобен компютър ние получаваме резултата $F_e(3,3;4) \geq 19$ за по малко от секунда, и ни бяха необходими само няколко часа изчисления за получаването на оценката $F_e(3,3;4) \geq 20$. На пръв поглед, някои от представените алгоритми си приличат, но те имат съществени различия. Даден алгоритъм може да дава добри резултати в задачите, в които е използван, но да не бъде ефективен в други. Поради това, беше необходимо да разработим специфични алгоритми за различните проблеми които се разглеждат в тази дисертация.

Следва по-точно описание на основните резултати получени във всяка глава:

Глава 1

В тази глава се дават необходимите дефиниции от теория на графите и дефиниции свързани с върховите Фолкманови числа.

Нека $a_1, ..., a_s$ са естествени числа. Символът $G \overset{v}{\rightarrow} (a_1, ..., a_s)$ означава, че при всяко оцветяване на $\mathrm{V}(G)$ в s цвята (s-оцветяване) съществува $i \in \{1, ..., s\}$, такова че има едноцветна a_i-клика от i-я цвят.

Дефинираме:

$$\mathcal{H}_v(a_1, ..., a_s; q) = \left\{ G : G \overset{v}{\rightarrow} (a_1, ..., a_s) \text{ и } G \not\supseteq K_q \right\}.$$

Върховите Фолкманови числа $F_v(a_1, ..., a_s; q)$ се дефинират с равенството:

$$F_v(a_1, ..., a_s; q) = \min \left\{ |\mathrm{V}(G)| : G \in \mathcal{H}_v(a_1, ..., a_s; q) \right\}.$$

Folkman доказва в [22], че

$$F_v(a_1, ..., a_s; q) \text{ съществува } \Leftrightarrow q > \max \{a_1, ..., a_s\}. \tag{2}$$

За произволни естествени числа $a_1, ..., a_s$ се дефинират

$$m(a_1, ..., a_s) = m = \sum_{i=1}^{s} (a_i - 1) + 1 \quad \text{ и } \quad p = \max \{a_1, ..., a_s\}. \tag{3}$$

Лесно се вижда, че $K_m \overset{v}{\rightarrow} (a_1, ..., a_s)$ и $K_{m-1} \overset{v}{\not\rightarrow} (a_1, ..., a_s)$.

Следователно,

$$F_v(a_1, ..., a_s; q) = m,\ \ q \geq m + 1.$$

В [50] се доказва, че

$$F_v(a_1, ..., a_s; m) = m + p.$$

Малко е известно за върховите Фолкманови числа $F_v(a_1, ..., a_s; q)$, когато $q < m$. Благодарение на приносите на различни автори са получени точните стойности на всички числа от вида $F_v(a_1, ..., a_s; m-1)$, където $\max\{a_1, ..., a_s\} \leq 4$. Единственото друго известно число от този вид е $F_v(3, 5; 6) = 16$, [89].

Символът $G \overset{v}{\to} m\big|_p$ означава, че за всеки избор на естествени числа $a_1, ..., a_s$ (s не е фиксирано), такива че $m = \sum\limits_{i=1}^{s}(a_i - 1) + 1$ и $\max\{a_1, ..., a_s\} \leq p$, имаме $G \overset{v}{\to} (a_1, ..., a_s)$.

Дефинираме:

$$\widetilde{\mathcal{H}}_v(m\big|_p; q) = \left\{G : G \overset{v}{\to} m\big|_p \text{ и } G \not\supseteq K_q\right\}.$$

Модифицираните върхови Фолкманови числа се дефинират с равенството:

$$\widetilde{F}_v(m\big|_p; q) = \min\left\{|\operatorname{V}(G)| : G \in \widetilde{\mathcal{H}}_v(m\big|_p; q)\right\}.$$

На края на тази глава доказваме следния основен резултат. За удобство, вместо $F_v(\underbrace{2, ..., 2}_{m-p}, p; q)$ пишем $F_v(2_{m-p}, p; q)$.

Теорема 1.19. *Нека $a_1, ..., a_s$ са естествени числа, m и p са дефинирани с (3), и $q > p$. Тогава,*

$$F_v(2_{m-p}, p; q) \leq F_v(a_1, ..., a_s; q) \leq \widetilde{F}_v(m\big|_p; q).$$

По-нататък ще пресмятаме и оценяваме числата $F_v(a_1, ..., a_s; q)$ като пресмятаме и оценяваме граничните числа в Теорема 1.19, $F_v(2_{m-p}, p; q)$ и $\widetilde{F}_v(m\big|_p; q)$.

Глава 2

Разглеждат се върховите Фолкманови числа от вида $F_v(a_1, ..., a_s; m-1)$, където $\max\{a_1, ..., a_s\} = 5$. Съгласно (2), тези числа съществуват когато $m \geq 7$. В граничния случай $m = 7$, единствените числа от този вид са $F_v(2, 2, 5; 6)$ и $F_v(3, 5; 6)$. Известно е, че $F_v(3, 5; 6) = 16$ [89]. Доказваме

Теорема 2.7. $F_v(2, 2, 5; 6) = 16$.

С помощта на числото $F_v(2, 2, 5; 6)$ пресмятаме всички други числа от безкрайната редица $F_v(2_{m-5}, 5; m-1)$, $m \geq 7$, като доказваме

Теорема 2.17. $F_v(2_{m-5}, 5; m-1) = m + 9$, $m \geq 7$.

Получаваме точните стойности на всички модифицирани върхови Фолкманови числа от вида $\widetilde{F}_v(m\big|_5; m-1)$:

Теорема 2.20. *Верни са следните равенства:*

$$\widetilde{F}_v(m\big|_5; m-1) = \begin{cases} 17, & \text{ако } m = 7 \\ m+9, & \text{ако } m \geq 8. \end{cases}$$

На края на тази глава, използвайки Теорема 2.17 и Теорема 2.20, ние завършваме пресмятането всички числа от вида $F_v(a_1, ..., a_s; m-1)$, където $\max\{a_1, ..., a_s\} = 5$, като доказваме следния основен резултат:

Теорема 2.1. *Нека $a_1, ..., a_s$ са естествени числа, $m = \sum\limits_{i=1}^{s}(a_i - 1) + 1$, $\max\{a_1, ..., a_s\} = 5$ и $m \geq 7$. Тогава,*

$$F_v(a_1, ..., a_s; m-1) = m + 9.$$

Глава 3

Съгласно (2), върховите Фолкманови числа от вида $F_v(a_1, ..., a_s; m-1)$, където $\max\{a_1, ..., a_s\} = 6$, съществуват когато $m \geq 8$. В граничния случай $m = 8$, единствените числа от този вид са $F_v(2, 2, 6; 7)$ и $F_v(3, 6; 7)$. Пресмятаме точните стойности на тези числа като доказваме:

Теорема 3.8. *$F_v(2, 2, 6; 7) = 17$.*

Теорема 3.9. *$F_v(3, 6; 7) = 18$.*

В [41] Ненов и Колев задават следния въпрос:

Съществува ли естествено число p, за което $F_v(2, 2, p; p+1) \neq F_v(3, p; p+1)$?

Теорема 3.8 и Теорема 3.9 дават положителен отговор на този въпрос, и 6 е най-малката възможна стойност на p, за която $F_v(2, 2, p; p+1) \neq F_v(3, p; p+1)$.

С помощта на числото $F_v(2, 2, 6; 7)$ пресмятаме всички други числа от безкрайната редица $F_v(2_{m-6}, 6; m-1)$, $m \geq 8$. Използвайки числото $F_v(3, 6; 7)$ пресмятаме всички други числа от безкрайната редица $F_v(2_{m-8}, 3, 6; m-1)$:

Теорема 3.14. *$F_v(2_{m-6}, 6; m-1) = m + 9$, $m \geq 8$.*

Теорема 3.17. *$F_v(2_{m-8}, 3, 6; m-1) = m + 10$, $m \geq 8$.*

Получаваме точните стойности на всички модифицирани върхови Фолкманови числа от вида $\widetilde{F}_v(m\big|_6; m-1)$:

Теорема 3.18. *$\widetilde{F}_v(m\big|_6; m-1) = m + 10$, $m \geq 8$.*

Използвайки Теорема 3.14, Теорема 3.17, и Теорема 3.18, завършваме пресмятането на всички числа от вида $F_v(a_1, ..., a_s; m-1)$, където $\max\{a_1, ..., a_s\} = 6$, като доказваме следния основен резултат:

Теорема 3.1. *Нека* $a_1, ..., a_s$ *са естествени числа, такива че* $2 \leq a_1 \leq ... \leq a_s = 6$ *и* $m = \sum\limits_{i=1}^{s}(a_i - 1) + 1 \geq 8$. *Тогава:*

(a) $F_v(a_1, ..., a_s; m-1) = m + 9$, *ако* $a_1 = ... = a_{s-1} = 2$.

(b) $F_v(a_1, ..., a_s; m-1) = m + 10$, *ако* $a_{s-1} \geq 3$.

Понеже $F_v(a_1, ..., a_s; q)$ е симетрична функция на $a_1, ..., a_s$, всъщност в Теорема 3.1 ние пресмятаме всички числа от вида $F_v(a_1, ..., a_s; m-1)$, където $\max\{a_1, ..., a_s\} = 6$.

Глава 4

В тази глава разглеждаме върховите Фолкманови числа от вида $F_v(a_1, ..., a_s; m-1)$, където $\max\{a_1, ..., a_s\} = 7$. Съгласно (2), тези числа съществуват когато $m \geq 9$. Пресмятаме числото

Теорема 4.2. $F_v(2, 2, 7; 8) = 20$.

С помощта на числото $F_v(2, 2, 6; 7)$ пресмятаме всички други числа от безкрайната редица $F_v(2_{m-7}, 7; m-1)$, $m \geq 9$:

Теорема 4.8. $F_v(2_{m-7}, 7; m-1) = m + 11$, $m \geq 9$.

Получаваме следните оценки:

Теорема 4.1. *Нека* $a_1, ..., a_s$ *са естествени числа, такива че* $\max\{a_1, ..., a_s\} = 7$ *и* $m = \sum\limits_{i=1}^{s}(a_i - 1) + 1 \geq 9$. *Тогава,*

$$m + 11 \leq F_v(a_1, ..., a_s; m-1) \leq m + 12.$$

Глава 5

Много малко знаем за върховите Фолкманови числа от вида $F_v(a_1, ..., a_s; m-2)$. Точните стойности на тези числа не са пресметнати когато $\max\{a_1, ..., a_s\} \geq 3$. Ние получаваме нови оценки за двете най-малки неизвестни числа от този вид, а именно $F_v(2, 2, 2, 3; 4)$ и $F_v(2, 3, 3; 4)$:

Теорема 5.1. $20 \leq F_v(2, 2, 2, 3; 4) \leq 22$.

Теорема 5.2. $20 \leq F_v(2, 3, 3; 4) \leq 24$.

Глава 6

Да припомним, че:

$$F_v(a_1, ..., a_s; q) \text{ съществува } \Leftrightarrow q > \max\{a_1, ..., a_s\}.$$

Пресмятането на числата от вида $F_v(a_1, ..., a_s; q)$ в граничния случай $q = \max\{a_1, ..., a_s\} + 1$ е много трудно. Числата $F_v(2, 2, p; p+1)$, $p \leq 4$, и $F_v(3, p; p+1)$, $p \leq 5$, вече са пресметнати. Ние доказваме, че $F_v(2, 2, 5; 6) = 16$ (Теорема 2.7), $F_v(2, 2, 6; 7) = 17$ (Теорема 3.8), $F_v(3, 6; 7) = 18$ (Теорема 3.9), и $F_v(2, 2, 7; 8) = 20$ (Теорема 4.2). Единственото друго пресметнато число от този вид е $F_v(2, 2, 2, 2; 3) = 22$, [37].

Към числата $F_v(p, p; p+1)$ има значителен интерес. Единствените известни числа от този вид са $F_v(2, 2; 3) = 5$ и $F_v(3, 3; 4) = 14$, [59] [78]. Знаем следните общи оценки отдолу за тези числа:

(4) $$F_v(p, p; p+1) \geq 4p - 1.[101]$$

Ние получаваме следните оценки:

$$F_v(p,p;p+1) \geq F_v(2,2,p;p+1) + 2p - 6, \ p \geq 3. \tag{5}$$

В [65] е доказано, че $F_v(2,2,p;p+1) \geq 2p+4$. Ако $F_v(2,2,p;p+1) = 2p+4$, тогава неравенството (4) дава по-добра оценка за $F_v(p,p;p+1)$ от неравенството (5). Интересно е да се отбележи, че не е известно дали равенството $F_v(2,2,p;p+1) = 2p+4$ е вярно за някое p. Ако $F_v(2,2,p;p+1) = 2p+5$, тогава оценките за $F_v(p,p;p+1)$ от (4) и (5) съвпадат, а ако $F_v(2,2,p;p+1) > 2p+5$, тогава неравенството (5) дава по-добра оценка за $F_v(p,p;p+1)$.

Подобряваме оценките за числата от вида $F_v(p,p;p+1)$, които следват от (4) и (5), в случаите $p = 4,5,6,7$:

Теорема 6.5. *$F_v(4,4;5) \geq F_v(2,3,4;5) \geq F_v(2,2,2,4;5) \geq 19$.*

Теорема 6.1. *$F_v(5,5;6) \geq F_v(2,2,2,2,5;6) \geq 23$.*

Теорема 6.3. *Нека $a_1,...,a_s$ са естествени числа, такива че $\max\{a_1,...,a_s\} = 6$ и $m = \sum\limits_{i=1}^{s}(a_i - 1) + 1$. Тогава:*

(a) $22 \leq F_v(a_1,...,a_s;7) \leq F_v(4,6;7) \leq 35$ ако $m = 9$.

(b) $28 \leq F_v(a_1,...,a_s;7) \leq F_v(6,6;7) \leq 70$ ако $m = 11$.

Теорема 6.4. *Ако $m \geq 13$ и $\max\{a_1,...,a_s\} = 7$, тогава*

$$F_v(a_1,...,a_s;8) \geq 3m - 10.$$

В частност, $F_v(7,7;8) \geq 29$.

Глава 7

В тази глава се дават необходимите дефиниции свързани с ребрените Фолкманови числа.

Нека $a_1, ..., a_s$ са естествени числа. Символът $G \overset{e}{\rightarrow} (a_1, ..., a_s)$ означава, че при всяко оцветяване на $\mathrm{E}(G)$ в s цвята (s-оцветяване) съществува $i \in \{1, ..., s\}$, такова че има едноцветна a_i-клика от i-я цвят.

Дефинираме:

$\mathcal{H}_e(a_1, ..., a_s; q) = \left\{ G : G \overset{e}{\rightarrow} (a_1, ..., a_s) \text{ и } G \not\supseteq K_q \right\}.$

Ребрените Фолкманови числа $F_e(a_1, ..., a_s; q)$ се дефинират с равенството:

$$F_e(a_1, ..., a_s; q) = \min \{ |\mathrm{V}(G)| : G \in \mathcal{H}_e(a_1, ..., a_s; q) \}.$$

Числата $F_e(3, 3; q)$ представляват значителен интерес.

Глава 8

Графът G е минимален граф в $\mathcal{H}_e(3, 3)$ ако $G \overset{e}{\rightarrow} (3, 3)$, но всеки негов собствен подграф $H \overset{e}{\nrightarrow} (3, 3)$. Всички минимални графи в $\mathcal{H}_e(3, 3)$ с не повече от 9 върха са известни.

Ние намираме всички минимални графи в $\mathcal{H}_e(3, 3)$ с не повече от 13 върха. (**Теорема 8.9**, **Теорема 8.10**, **Теорема 8.11**, и **Теорема 8.20**)

Получаваме също всички минимални графи $G \in \mathcal{H}_e(3, 3)$ с $\alpha(G) \geq |\mathrm{V}(G)| - 8$, и всички минимални графи $G \in \mathcal{H}_e(3, 3; 5)$ с $\alpha(G) \geq |\mathrm{V}(G)| - 9$. Използвайки тези резултати, извеждаме следните оценки отгоре за числото на независимост на графите в $\mathcal{H}_e(3, 3)$:

Следствие 8.34. *Нека G е минимален граф в $\mathcal{H}_e(3, 3)$ и $|\mathrm{V}(G)| \geq 27$. Тогава $\alpha(G) \leq |\mathrm{V}(G)| - 9$.*

Следствие 8.36. *Нека G е минимален граф в $\mathcal{H}_e(3, 3)$, такъв че $G \not\supseteq K_5$ и $|\mathrm{V}(G)| \geq 30$. Тогава $\alpha(G) \leq |\mathrm{V}(G)| - 10$.*

На края на тази глава, получаваме следните оценки отдолу за минималната степен на минималните графи в $\mathcal{H}_e(3,3)$.

Теорема 8.37. *Нека G е минимален граф в $\mathcal{H}_e(3,3;5)$. Тогава $\delta(G) \geq 5$. Ако $v \in \mathrm{V}(G)$ и $d(v) = 5$, тогава $G(v) = N_{5.i}$ за някое $i \in \{1,2,3\}$ (вж. Фигура 8.10).*

Теорема 8.38. *Нека G е минимален граф в $\mathcal{H}_e(3,3;4)$. Тогава $\delta(G) \geq 8$. Ако $v \in \mathrm{V}(G)$ и $d(v) = 8$, тогава $G(v) = N_{8.i}$ за някое $i \in \{1,...,7\}$ (вж. Фигура 8.11).*

Глава 9

В началото на увода представихме с повече детайли историята на ребреното Фолкманово число $F_e(3,3;4)$. В тази глава, ние получаваме нова оценка отдолу за числото $F_e(3,3;4)$:

Теорема 9.1. $F_e(3,3;4) \geq 20$.

В тази тематика ме въведе моят научен ръководител професор Н. Ненов. Бих искал да благодаря на професор Ненов за помощта и подкрепата в разработката и подготвянето на тази дисертация.

Публикации

Всички резултати в дисертацията са публикувани в [2], [8], [4], [5], [3], [7], и [6]. Статията [7] е приета за печат. Всички останали статии са излезли от печат. Предварителни варианти на статиите са публикувани в ResearchGate и arXiv. Пет от тези статии са публикувани съвместно с моя научен ръководител професор Н. Ненов.

Цитирания

Статията [5] се цитира в [98], [97], [80], [83], и [84].

Статията [8] се цитира в [99].

Статията [7] се цитира в [99].

Статията [6] се цитира в [99].

В [99], непубликувани съвместни резултати с Н. Ненов се цитират като лична комуникация.

Апробация на резултатите

Резултатите от дисертацията са докладвани на следните научни конференции:

1. Пролетна Научна Сесия на Факултета по Математика и Информатика на Софийския Университет. София, България, Март 2016.

2. 45-та Пролетна Конференция на Съюза на Математиците в България. Плевен, България, Април 2016.

3. VI Congress of Mathematicians of Macedonia. Охрид, Македония, Юни 2016.

4. 46-та Пролетна Конференция на Съюза на Математиците в България. Боровец, България, Април 2017.

5. Юбилейна научна конференция "100 години от рождението на професор Тагамлицки". София, България, Септември 2017.

6. Национален Семинар по Теория на Кодирането "Професор Стефан Додунеков". Чифлика, България, Декември 2017.

Авторска справка

По мнение на автора, основните приноси на дисертацията са:

1. Представен е нов метод за оценяването на Фолкмановите числа $F_v(a_1, ..., a_s; q)$ чрез $F_v(2_{m-p}, p; q)$ и модифицираните Фолкманови числа $\widetilde{F}_v(m\big|_p; q)$.

2. Разработени са нови алгоритми за пресмятането и оценяването на Фолкманови числа (алгоритми А1, ..., А8).

3. Пресметнати са следните Фолкманови числа:
$F_v(2, 2, 5; 6) = 16$ (Теорема 2.7),
$F_v(2, 2, 6; 7) = 17$ (Теорема 3.8),
$F_v(3, 6; 7) = 18$ (Теорема 3.9),
$F_v(2, 2, 7; 8) = 20$ (Теорема 4.2).

4. Пресметнати са следните безкрайни серии от Фолкманови числа:
$F_v(a_1, ..., a_s; m-1)$, където $\max\{a_1, ..., a_s\} = 5$ (Теорема 2.1),
$F_v(a_1, ..., a_s; m-1)$, където $\max\{a_1, ..., a_s\} = 6$ (Теорема 3.1),
$F_v(\underbrace{2, ..., 2}_{m-7}, 7; m-1)$, където $m \geq 9$ (Теорема 4.8).

5. Получени са нови оценки за следните Фолкманови числа:
$20 \leq F_v(2, 2, 2, 3; 4) \leq 22$ (Теорема 5.1),
$20 \leq F_v(2, 3, 3; 4) \leq 24$ (Теорема 5.2).

6. Получени са нови оценки отдолу за числата от вида $F_v(p, p; p+1)$ в случаите $p = 4, 5, 6, 7$:
$F_v(4, 4; 5) \geq 19$ (Теорема 6.5),
$F_v(5, 5; 6) \geq 23$ (Теорема 6.1),
$F_v(6, 6; 7) \geq 28$ (Теорема 6.3),
$F_v(7, 7; 8) \geq 29$ (Теорема 6.4).

7. Намерени са всички минимални графи в $\mathcal{H}_e(3, 3)$ с не повече от 13 върха (Теорема 8.9, Теорема 8.10, Теорема 8.11, и Теорема 8.20).

8. Получени са нови оценки отгоре за числото на независимост на минималните графи в $\mathcal{H}_e(3,3)$.

9. Получени са нови оценки отдолу за минималната степен на минималните графи в $\mathcal{H}_e(3,3)$.

10. Доказана е новата оценка отдолу $F_e(3,3;4) \geq 20$.

Декларация

Декларирам, че представената във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в Софийски Университет "Св. Климент Охридски" дисертация на тема "Пресмятане и оценяване на Фолкманови числа" е мой труд, и в нейното разработване не са ползвани чужди публикации и разработки в нарушение на авторските им права. Цитиранията на всички източници на информация, текст, фигури, и други са обозначени според стандартите. Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

Литература

[1] A. Bikov. A computer research on critical Ramsey graphs (in Bulgarian), 2013. Master Thesis, Sofia University "St. Kliment Ohridski".

[2] A. Bikov. Small minimal $(3, 3)$-ramsey graphs. *Ann. Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*, 103:123–147, 2016. Preprint: arxiv:1604.03716, April 2016.

[3] A. Bikov. New bounds on the vertex Folkman number $F_v(2, 2, 2, 3; 4)$. *Mathematics and Education. Proceedings of the 46th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*, 46:137–144, 2017. Preprint arXiv:1611.06418, November 2016.

[4] A. Bikov and N. Nenov. Modified vertex Folkman numbers. *Mathematics and Education. Proceedings of the 45th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*, 45:113–123, 2016. Preprint: arxiv:1511.02125, November 2015.

[5] A. Bikov and N. Nenov. The edge Folkman number $F_e(3, 3; 4)$ is greater than 19. *GEOMBINATORICS*, 27(1):5–14, 2017. Preprint: arxiv:1609.03468, September 2016.

[6] A. Bikov and N. Nenov. Lower bounding the Folkman numbers $F_v(a_1, ..., a_s; m-1)$. *Ann. Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*, 104:39–53, 2017. Preprint: arxiv:1711.01535, November 2017.

[7] A. Bikov and N. Nenov. On the vertex Folkman numbers $F_v(a_1, ..., a_s; m - 1)$ when $\max\{a_1, ..., a_s\} = 6$ or 7. To appear in the *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, preprint: arxiv:1512.02051, April 2017.

[8] A. Bikov and N. Nenov. The vertex Folkman numbers $F_v(a_1, ..., a_s; m - 1) = m + 9$, if $\max\{a_1, ..., a_s\} = 5$. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 103:171–198, 2017. Preprint: arxiv:1503.08444, August 2015.

[9] G. Brinkmann, K. Coolsaet, J. Goedgebeur, and H. Mélot. House of Graphs, `https://hog.grinvin.org/`.

[10] J. Brown and V. Rödl. A new construction of k-Folkman graphs. *Ars Comb.*, 29:265–269, 1990.

[11] S. Burr, P. Erdös, and L. Lovász. On graphs of Ramsey type. *Ars. Combinatoria*, 1(1):167–190, 1976.

[12] S. Burr and V. Rosta. On the Ramsey multiplicities of Graphs - Problems and recent results. *Journal of Graph Theory*, 4:347–361, 1980.

[13] V. Chvátal. The minimality of the Mycielski graph. *Lecture Notes in Mathematics*, 406:243–246, 1979.

[14] J. Coles. Algorithms for bounding Folkman numbers, 2005. Master Thesis, RIT, `https://ritdml.rit.edu/bitstream/handle/1850/2765/JColesThesis2004.pdf`.

[15] J. Coles and S. Radziszowski. Computing the Folkman number $F_v(2, 2, 3; 4)$. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 58:13–22, 2006.

[16] F. Deng, M. Liang, Z. Shao, and X. Xu. Upper bounds for the vertex Folkman number $F_v(3, 3, 3; 4)$ and $F_v(3, 3, 3; 5)$. *ARS Combinatoria*, 112:249–256, 2013.

[17] A. Dudek and V. Rödl. New upper bound on vertex Folkman numbers. *Lecture Notes in Computer Science*, 4557:473–478, 2008.

[18] A. Dudek and V. Rödl. On the Folkman number $F(2, 3, 4)$. *Experimental Mathematics*, 17:63–67, 2008.

[19] P. Erdös. Problems and results on finite and infinite graphs. In *Recent Advances in Graph Theory, Proc. Second Czechoslovak Sympos.*, pages 183–192, April 1975.

[20] P. Erdös and A. Hajnal. Research problem 2-5. *J. Combin. Theory*, 2:104, 1967.

[21] G. Exoo and J. Goedgebeur. Bounds for the smallest k-chromatic graphs of given girth. Preprint: arxiv:1805.06713, May 2018.

[22] J. Folkman. Graphs with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 18:19–24, 1970.

[23] J. Fox and K. Lin. The minimum degree of Ramsey-minimal graphs. *J. of Graph Theory*, 54(2):167–177, 2006.

[24] P. Frankl and V. Rödl. Large triangle-free subgraphs in graphs without K_4. *Graphs and Combinatorics*, 2:135–144, 1986.

[25] A. Galuccio, M. Simonovits, and G. Simonyi. On the structure of co-critical graphs. *Graph theory, combinatorics and algorithms*, Vol 1, 2 (Kalamazoo, MI, 1992):1053–1071, 1995.

[26] J. Goedgebeur. On minimal triangle-free 6-chromatic graphs. Preprint: arxiv:1707.07581, August 2017.

[27] A. Goodman. On sets of acquaintances and strangers at any party. *Amer. Math. Monthly*, 66:778–783, 1959.

[28] R. Graham and S. Butler. *Rudiments of Ramsey Theory: Second Edition*. AMS and CBMS, 2015.

[29] R. L. Graham. On edgewise 2-colored graphs with monochromatic triangles containing no complete hexagon. *J. Combin. Theory*, 4:300, 1968.

[30] R. L. Graham. Some graph theory problems i would like to see solved. In *SIAM My Favorite Graph Theory Conjectures*, 2012.

[31] R. L. Graham and J. H. Spencer. On small graphs with forced monochromatic triangles. *Lecture Notes in Math.*, 186:137–141, 1971. Recent Trends in Graph Theory.

[32] F. Harary. *Graph Theory*. Addison - Wesley, 1969.

[33] F. Harary and G. Prins. Generalized Ramsey theory for graphs. IV: The Ramsey multiplicity of a graph. *Networks*, 4:163–173, 1974.

[34] R. Hill. and R.W. Irwing. On group partitions associated with lower bounds for symmetric Ramsey numbers. *European Journal of Combinatorics*, 3:35–50, 1982.

[35] M. Jacobson. A note on Ramsey multiplicity. *Discrete Math.*, 29:201–203, 1980.

[36] M. Jacobson. A note on Ramsey multiplicity for stars. *Discrete Math.*, 42:63–66, 1982.

[37] T. Jensen and G. Royle. Small graphs with chromatic number 5: a computer research. *Journal of Graph Theory*, 19:107–116, 1995.

[38] J. Kaufmann, H. Wickus, and S. Radziszowski. On some edge Folkman numbers small and large. In preparation, 2017.

[39] N. Kolev. A multiplicative inequality for vertex Folkman numbers. *Discrete Mathematics*, 308:4263–4266, 2008.

[40] N. Kolev and N. Nenov. The Folkman number $F_e(3, 4; 8)$ is equal to 16. *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*, 59(1):25–30, 2006.

[41] N. Kolev and N. Nenov. New recurrent inequality on a class of vertex Folkman numbers. In *Proceedings of the 35th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*, pages 164–168, April 2006.

[42] N. Kolev and N. Nenov. New upper bound for a class of vertex Folkman numbers. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 13, 2006.

[43] A. Lange, S. Radziszowski, and X. Xu. Use of MAX-CUT for Ramsey arrowing of triangles. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 88:61–71, 2014.

[44] J. Lathrop and S. Radziszowski. Computing the Folkman number $F_v(2,2,2,2,2;4)$. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 78:213–222, 2011.

[45] Y. Li and Q. Lin. On generalized Folkman numbers. *Taiwanese J. Math.*, 21:1–9, 2017.

[46] Q. Lin and Y. Li. A Folkman linear family. *SIAM J. Discrete Math.*, 29:1988–1998, 2015.

[47] S. Lin. On Ramsey numbers and K_r-coloring of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 12:82–92, 1972.

[48] L. Lu. Explicit construction of small Folkman graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 21:1053–1060, 2008.

[49] T. Luczak, A. Ruciński, and S. Urbański. On minimal vertex Folkman graphs. *Discrete Mathematics*, 236:245–262, 2001.

[50] T. Luczak and S. Urbański. A note on restricted vertex Ramsey numbers. *Periodica Mathematica Hungarica*, 33:101–103, 1996.

[51] B.D. McKay. Combinatorial data, `http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/`.

[52] B.D. McKay. Ramsey graphs, `http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html`.

[53] B.D. McKay and A. Piperino. Practical graph isomorphism, II. *J. Symbolic Computation*, 60:94–112, 2013. Preprint version at arxiv.org.

[54] J. Mycielski. Sur le coloriage des graphes. *Colloquium Mathematicum*, 3:161–162, 1955.

[55] N. Nenov. Up to isomorphism there exist only one minimal t-graph with nine vertices. (in Russian). *God. Sofij. Univ. Fak. Mat. Mekh.*, 73:169–184, 1979.

[56] N. Nenov. On the existence of a minimal t-graph with a given number of vertices. (in Russian). *Serdica*, 6:270–274, 1980.

[57] N. Nenov. On the independence number of minimal t-graphs. (in Russian). In *Mathematics and education in mathematics, Proc.* 9^{th} *Spring Conf. Union Bulg. Math*, pages 74–78, Sunny Beach / Bulgaria, 1980.

[58] N. Nenov. *Ramsey graphs and some constants related to them. (Bulgarian).* PhD thesis, University of Sofia, 1980.

[59] N. Nenov. An example of a 15-vertex Ramsey (3, 3)-graph with clique number 4. (in Russian). *C. A. Acad. Bulg. Sci.*, 34:1487–1489, 1981.

[60] N. Nenov. Certain remarks on Ramsey multiplicities. (in Russian). In *Mathematics and education in mathematics, Proc.* 10^{th} *Spring Conf. Union Bulg. Math*, pages 176–179, Sunny Beach / Bulgaria, 1981.

[61] N. Nenov. On the Zykov numbers and some its applications to Ramsey theory. *Serdica Bulgariacae Mathematicae*, 9:161–167, 1983. (in Russian).

[62] N. Nenov. The chromatic number of any 10-vertex graph without 4-cliques is at most 4. *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*, 37:301–304, 1984. (in Russian).

[63] N. Nenov. Application of the corona-product of two graphs in Ramsey theory. *Ann. Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*, 79:349–355, 1985. (in Russian).

[64] N. Nenov. On the small graphs with chromatic number 5 without 4-cliques. *Discrete Mathematics*, 188:297–298, 1998.

[65] N. Nenov. On a class of vertex Folkman graphs. *Ann. Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*, 94:15–25, 2000.

[66] N. Nenov. Computation of the vertex Folkman numbers $F(2,2,2,3;5)$ and $F(2,3,3;5)$. *Ann. Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*, 95:71–82, 2001.

[67] N. Nenov. A generalization of a result of Dirac. *Ann. Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*, 95:59–69, 2001.

[68] N. Nenov. On the 3-coloring vertex Folkman number $F(2,2,4)$. *Serdica Mathematical Journal*, 27:131–136, 2001.

[69] N. Nenov. Lower bound for a number of vertices of some vertex Folkman graphs. *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*, 55(4):33–36, 2002.

[70] N. Nenov. On a class of vertex Folkman numbers. *Serdica Mathematical Journal*, 28:219–232, 2002.

[71] N. Nenov. On the vertex Folkman numbers $F_v(2,...,2;q)$. *Serdica Mathematical Journal*, 35:251–272, 2009. Preprint: arXiv:0903.3812 March 2009.

[72] N. Nenov. Chromatic number of graphs and edge Folkman numbers. *C. A. Acad. Bulg. Sci.*, 63(8):1103–1110, 2010.

[73] N. Nenov. On the vertex Folkman numbers $F_v(2,...,2;r-1)$ and $F_v(2,...,2;r-2)$. *Ann. Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*, 101:5–17, Submitted in 2007, 2013. Preprint: arXiv:0903.3151 March 2009.

[74] N. Nenov and N. Khadzhiivanov(Hadziivanov). On edgewise 2-colored graphs containing a monochromatic triangle. (in Russian). *Serdica*, 5:303–305, 1979.

[75] N. Nenov and N. Khadzhiivanov(Hadziivanov). Every Ramsey graph without 5-cliques has more than 11 vertices. (in Russian). *Serdica*, 11:341–356, 1985.

[76] J. Nesetril and V. Rödl. The Ramsey property for graphs with forbidden complete subgraphs. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 20:243–249, 1976.

[77] K. Piwakowski and S. Radziszowski. The Ramsey Multiplicity of K_4. *Ars. Combinatorica*, LX:131–136, 2001.

[78] K. Piwakowski, S. Radziszowski, and S. Urbanski. Computation of the Folkman number $F_e(3,3;5)$. *Journal of Graph Theory*, 32:41–49, 1999.

[79] S. Radziszowski. Small Ramsey numbers. *The Electronic Journal of Combinatorics*, Dynamic Survey revision 14, January 12 2014.

[80] S. Radziszowski. Computers in Ramsey Theory. Testing, Constructions and Nonexistence. Computers in Scientific Discovery 8 Mons, Belgium, August 24, 2017.

[81] S. Radziszowski and X. Xiaodong. On the Most Wanted Folkman Graph. *Geombinatorics*, XVI(4):367–381, 2007.

[82] S. Radziszowski and X. Xu. On some open questions for Ramsey and Folkman numbers. *Graph Theory, Favorite Conjectures and Open Problems*, 1:43–62, 2016.

[83] S. Radziszowski, X. Xu, and M. Liang. Some Folkman problems. Chromatic vertex Folkman numbers, Existence and non-existence, Computational challenges. CanaDAM, Toronto, 13 June, 2017.

[84] S. Radziszowski, X. Xu, and M. Liang. Some Folkman problems. Existence and non-existence of generalized Folkman numbers, Computational challenges. GGTW, Ghent, 16 August, 2017.

[85] P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.*, 30:264–268, 1930.

[86] V. Rosta and L. Suranyi. A note on the Ramsy-multiplicity of the circuit. *Period. Math. Hung.*, 7:223–227, 1977.

[87] G. Royle. Combinatorial data, `http://staffhome.ecm.uwa.edu.au/~00013890/data.html`.

[88] Z. Shao, M. Liang, J. He, and X. Xu. New lower bounds for two multicolor vertex Folkman numbers. In *International Conference on Computer and Management (CAMAN)*, pages 1–3, 2011.

[89] Z. Shao, M. Liang, L. Pan, and X. Xu. Computation of the Folkman number $F_v(3, 5; 6)$. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 81:11–17, 2012.

[90] Z. Shao, X. Xu, and H. Luo. Bounds for two multicolor vertex Folkman numbers. *Application Research of Computers*, 3:834–835, 2009. (in Chinese).

[91] Z. Shao, X. Xu, and L. Pan. New upper bounds for vertex Folkman numbers $F_v(3, k; k + 1)$. *Utilitas Mathematica*, 80:91–96, 2009.

[92] Z. Shao, X. Xu, and L. Pan. Computation of the vertex Folkman number $F_v(3, 5; 6)$. *J. of Comb. Math. and Comb. Computing*, 81:11–18, 2012.

[93] A. Soifer. *The Mathematical Coloring Book*. Springer, 2008.

[94] J. Spencer. Three hundred million points suffice. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 49:210–217, 1988. Also see erratum by M. Hovey in 50:323.

[95] T. Szabó. On nearly regular co-critical graphs. *Discrete Math.*, 160:279–281, 1977.

[96] D. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, 2 edition, 2001.

[97] X. Xu, M. Liang, and S. Radziszowski. A note on upper bounds for some generalized Folkman numbers. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, in press. Preprint: arxiv:1708.00125, August 2017.

[98] X. Xu, M. Liang, and S. Radziszowski. On the nonexistence of some generalized Folkman numbers. *Graphs Combin.*, to appear. Preprint: arxiv:1705.06268, May 2017.

[99] X. Xu, M. Liang, and S. Radziszowski. Chromatic vertex Folkman numbers. Preprint: arxiv:1612.08136v2, May 2018.

[100] X. Xu, H. Luo, and Z. Shao. Upper and lower bounds for $F_v(4, 4; 5)$. *Electronic Journal of Combinatorics*, 17, 2010.

[101] X. Xu and Z. Shao. On the lower bound for $F_v(k, k; k+1)$ and $F_e(3, 4; 5)$. *Utilitas Mathematica*, 81:187–192, 2010.