



**СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“  
ФАКУЛТЕТ ПО НАЧАЛНА И ПРЕДУЧИЛИЩНА ПЕДАГОГИКА  
КАТЕДРА „НАЧАЛНА УЧИЛИЩНА ПЕДАГОГИКА“**

---

**Гергана Илиева Христова**

**„ВАРИАТИВЕН МОДЕЛ ЗА ОБУЧЕНИЕ ПО  
ГЕОМЕТРИЯ НА 9-10 ГОДИШНИ УЧЕНИЦИ“**

**АВТОРЕФЕРАТ**

на дисертационен труд  
за присъждане на образователната и научна степен „Доктор“  
в професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по...  
(Методика на обучението в детската градина и началното училище по  
математика и информационни технологии)

Научен ръководител:  
**доц. д-р Габриела Кирова**

**София, 2018 г.**

Дисертационният труд е обсъден на заседание на катедра „Начална училищна педагогика” към ФНПП на СУ „Св. Климент Охридски” на 23.04.2018 г. и е насочен за защита пред специализирано научно жури.

Дисертационният труд е с обем от 286 страници, от които 273 страници са текст-изложение и в отделно тяло 37 страници приложения /Приложения 5 и 6/. Структурата му включва увод, пет глави и заключение. Библиографията включва 166 заглавия, от които 109 източници на кирилица, 39 на латиница и 17 от интернет. Включени са 6 приложения – 1 брой анкетна карта за начални учители, 4 броя тестове за установяване на знания за входно и изходно ниво (за две групи), 1 брой карта за самооценка, вариативен модел за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици /въвеждащи задачи/ и вариативен модел за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици. В дисертационния труд са включени общо 87 таблици, 28 диаграми и 187 фигури.

В увода на дисертационния труд е обоснована актуалността на проблема и е представена концепцията на изследването. В първа глава се разглеждат теоретичните постановки по изследваната тема. Във втора глава е представена методиката за изучаване на геометричните знания. Трета глава включва анализ на учебното съдържание за III клас по геометрия в България, Русия, Украйна, Германия, САЩ, Гърция и Франция. В четвъртата глава е представен вариативният модел от задачи и упражнения за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици. В нея са описани методологията и организационните параметри на изследването. В последната пета глава е направен анализ на резултатите от проведеното изследване. В заключението са формулирани изводите и обобщенията, както и приносите на дисертационното изследване.

Публичната защита на дисертационния труд ще се състои на ..... от.....в зала ..... на ФНПП, на заседание на научното жури в състав:

проф. д-р Здравко Лалчев  
проф. д-р Маргарита Върбанова  
проф. д-р Ангелина Манова-Мунтова  
доц. д-р Маргарита Тенева  
доц. д-р Габриела Кирова

## Съдържание

Увод.....	5
<b>Първа глава</b> Теоретична постановка на проблема.....	7
1.1. Развитие на идеите за обучение по геометрия. Древните учени за геометрията.....	7
1.2. История на геометрията в началното училище.....	8
1.3. Съдържание на обучението по геометрия в началните класове.....	8
1.4. Актуални аспекти на геометричното учебно съдържание.....	9
1.5. Цел, задачи, функции и значение на обучението по геометрия в началните класове.....	10
1.6. Свързване на аритметичните и геометричните знания.....	12
<b>Втора глава</b> Методика за изучаване на геометричните знания.....	12
2.1. Общи методически насоки.....	12
2.2. Пространствени представи и понятия.....	13
2.3. Запознаване с новите понятия за III клас по учебна програма.....	15
2.3.1. Права линия и крива линия.....	15
2.3.2. Лъч.....	15
2.3.3. Ъгъл. Елементи на ъгъла (връх, рамене).....	15
2.3.4. Видове ъгли (прав, остър, тъп).....	15
2.3.5. Видове триъгълници според ъглите (правоъгълен, остроъгълен, тъпоъгълен).....	15
2.3.6. Геометрична фигура.....	15
2.3.7. Аспекти на съвременната реформа в обучението по математика в началните класове.....	15
<b>Трета глава</b> Анализ на геометричното учебно съдържание в български и чуждестранни учебници за III клас. Геометрията в съвременното начално училище.....	16
3.1. Характеристика на учебните комплекти за трети клас.....	16
3.1.1. Учебен комплект на М. Богданова и колектив.....	16
3.1.2. Учебен комплект на А. Манова и колектив.....	18
3.1.3. Учебен комплект на З. Новакова и колектив.....	21
3.2. Сравнителен анализ на учебните комплекти по математика за трети клас в България.....	23
3.3. Анализ на учебното съдържание за III клас по геометрия в учебници от Русия, Украйна, Германия, САЩ, Гърция и Франция.....	26
3.3.1. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от Русия.....	26
3.3.2. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от Украйна.....	27
3.3.3. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от Германия.....	29
3.3.4. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от САЩ.....	29
3.3.5. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от Гърция.....	30
3.3.6. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от Франция.....	32
3.4. Сравнителен анализ на геометричното съдържание в българските и чуждестранни учебници по математика за трети клас.....	33
<b>Четвърта глава</b> Вариативен модел за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици.....	35

4.1. Описание на вариативния модел.....	35
4.2. Анализ на резултатите от приложението на вариативния модел при експерименталното обучение.....	51
4.3. Анализ на резултатите от приложението на карта за самооценка при експерименталното обучение.....	51
<b>Пета глава</b> Анализ на резултатите от проведено експериментално обучение.....	52
5.1. Анализ на анкетно проучване мнението на действащи начални учители.....	53
5.2. Анализ на резултатите от входно ниво.....	58
5.3. Анализ на резултатите от изходно ниво.....	59
5.4. Сравнителен анализ на резултатите от изследването.....	60
5.4.1. Сравнителен анализ на резултатите от входното ниво по математика на експерименталната и контролната групи.....	61
5.4.2. Сравнителен анализ на получените резултати от изходното ниво по математика на експерименталната и контролната групи.....	62
5.4.3. Входно и изходно ниво – вътрешногрупово сравнение.....	63
5.4.4. Входно и изходно ниво – междугрупово сравнение.....	65
5.4.5. Дисперсионен анализ.....	66
5.4.6. Анализ на резултатите по училища.....	69
<b>Заклучение</b> .....	70
<b>Изводи и обобщения</b> .....	70
<b>Приносни моменти в дисертационния труд</b> .....	71
<b>Използвана литература</b> .....	72
<b>Списък на публикациите, свързани с дисертационния труд</b> .....	78
<b>Благодарности</b> .....	79

## Увод

Математиката е наука за количествените, пространствените и времеви отношения на обектите от реалния свят. Геометрията, заедно с аритметиката, е основна част от математиката. Тя е една от най-старите и дълго развиващи се математически дисциплини. Трудно могат да се изброят многобройните ѝ приложения в други клонове на математиката, в други науки, в техниката, бита и ежедневието. Това определя мястото на геометрията в училище като съществен компонент от предмета математика.

През последните години образованието в България следва тенденциите, налагани от Европейския съюз, свързани с овладяването на някои основни ключови компетентности. Те способстват за подобряването на знанията, уменията, способностите и нагласите на учениците и тяхната по-успешна социална реализация.

Настоящият дисертационен труд на тема „Вариативен модел за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици” е опит да се даде принос в теорията и практиката на математическото образование в началния етап на основната образователна степен у нас. Направен е сравнителен анализ на учебниците по математика за трети клас в България, Русия, Украйна, Германия, САЩ, Гърция и Франция с цел да се създаде вариативен модел от задачи и упражнения, похвати на работа по геометрия за задължителните форми на работа в III клас.

Изборът на тази тема е поради факта, че геометричният материал, който се изучава в началните класове дава на учениците основните знания за пространството, развива мисленето, въображението и е предпоставка за изучаване на геометрията в следващите образователни степени. Чрез класификацията на типовете задачи в учебното съдържание по геометрия се цели разкриване на вариативен модел за изучаване на геометричния материал в началното училище. С прегледа на учебното съдържание е представено разнообразието и различните начини за поднасяне на геометричните знания на учениците в началните класове.

Причините за избора на трети клас са следните:

- учебното съдържание по геометрия в трети клас е с най-голям относителен дял от учебното съдържание по математика от всички класове;
- учениците вече са натрупали набор от необходими знания и умения по геометрия (познават геометричните фигури квадрат, кръг, триъгълник, правоъгълник; измерват отсечки и чертаят отсечки по зададена дължина в см; определят видове триъгълници според страните; чертаят триъгълник, квадрат, правоъгълник върху квадратна мрежа; намират обиколка на триъгълник и правоъгълник).

Анализираните в дисертационния труд чуждестранни учебници са от страните Германия, Франция и Гърция, които са членове на Европейския съюз. Изборът на страните Германия и Франция е поради факта, че те са силно развити европейски държави с традиции в образованието, а Гърция е съседна на нас балканска страна. Русия и Украйна са страни, където има традиционно силно развито математическо образование. Обучението в САЩ естествено представлява интерес.

Разработената дисертационна тема засяга един от важните аспекти на съдържанието на учебниците по математика за началните класове – геометричните задачи. През последните години у нас все повече се обръща внимание на резултатите от международни изследвания, свързани с постиженията на учениците по математика. В учебниците по математика в България не са включени вариативни и алтернативни геометрични задачи от вида на международното изследване TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study). Това изследване на уменията по математика и природни науки на учениците от IV клас е сред най-авторитетните проучвания в света. TIMSS отчита тенденциите в постиженията на учениците и изучава различията между националните образователни системи в повече от 60

страни, за да подпомогне подобряването на преподаването и ученето по света. От 1995 г. то се провежда на всеки четири години, като обхваща учениците от IV клас и от VIII клас. В изследването TIMSS относителния дял на геометричните задачи е 35% от съдържателните области по математика за IV клас. Включват се геометрични фигури, точки, прави, ъгли и тела.

Учениците от началното училище участват в международни състезания и олимпиади, което води до необходимостта от решаване на повече задачи с геометрично съдържание от съответните специфични видове. Това дава възможност за изследване и извеждане на собствен вариативен модел за обучение по геометрия. Предназначението на модела е да способства за разширяване на пространствените представи на учениците, за развитие на тяхното мислене и въображение. Предложеният вариативен модел за обучение може да бъде използван от авторите при разработването на нови учебници по математика, а също и като ориентир от учителите при избор на подходящ учебник, с който да работят. Тези функции на модела разкриват значимостта и приложимостта на избраната дисертационна тема.

**Цел на изследването** е да се разработи и апробира експериментален вариативен модел в учебния процес по математика (геометрия) за задължителните форми на работа в III клас. Вариативният модел включва разработване на уроци с включени задачи изцяло с геометрично учебно съдържание и прилагането им при експериментално обучение с ученици от трети клас.

**Задачи на изследването:**

- да се представи съдържанието на обучението по геометрия в началното училище чрез теоретичен преглед на литературните източници;

- да се разгледа методиката на преподаване на геометричния материал и начина на формиране на геометрични понятия у децата в начална училищна възраст;

- да се анализира геометричното съдържание в съвременните учебни комплекти по математика в България, Русия, Украйна, Германия, САЩ, Гърция и Франция, с които се обучават учениците от трети клас;

- да се изследва мнението на действащи начални учители за степента на овладяване на геометричните знания от учениците в трети клас и за проблемите в обучението по математика, касаещи геометричното учебно съдържание;

- да се проведе педагогически експеримент, включващ констатиращо изследване за степента на овладяване на учебното съдържание по геометрия за ученици от III клас, при експериментална и контролна група;

- да се представят и анализират конкретните данни от получените резултати и да се направят съответните изводи и препоръки.

**Хипотеза** – В настоящото дисертационно изследване се допуска, че предлаганият вариативен модел, включващ алтернативни и вариативни на традиционните у нас задачи и упражнения по геометрия в задължителните форми на работа в III клас ще допринесе за по-високите постижения на учениците от експерименталните паралелки, за техните по-задълбочени и разширени знания и умения по геометрия.

**Обект на изследването** е процесът на обучение по математика в трети клас /геометрично учебно съдържание/.

**Предмет на изследването** е усвояването на геометричните знания и умения от учениците от трети клас чрез прилагането на вариативен модел за обучение по геометрия.

**Методи на изследването:**

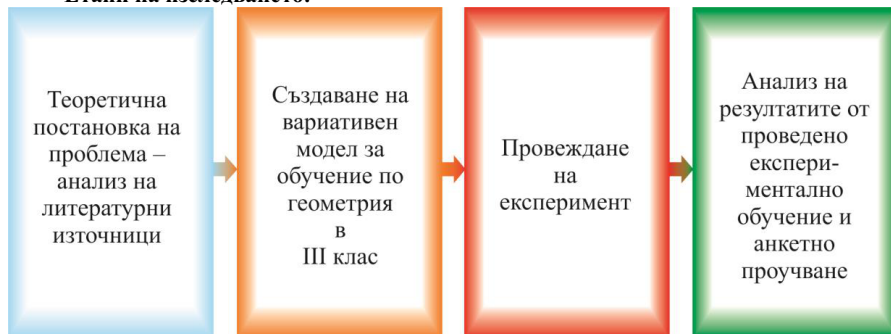
1. Теоретичен анализ на научната литература по проблема.
2. Анализ на съдържанието по геометрия в учебните комплекти по математика за трети клас в България, Русия, Украйна, Германия, САЩ, Гърция и Франция.
3. Моделиране – създаване на вариативен модел за обучение по геометрия в задължителните форми на работа в III клас.
4. Анкетно проучване мнението на действащи начални учители по темата.
5. Анализ на резултатите от констатиращ дидактичен експеримент.

6. Математико-статистически методи за обработка на емпирични данни – за установяване на различие между постиженията на учениците в експерименталните и контролните паралелки.

**Обхват на изследването:**

- 299 ученици от III клас от различни начални училища, разпределени в контролна група – 150 ученици и експериментална група – 149 ученици;
- 79 действащи начални учители от осем различни училища.

**Етапи на изследването:**



Фигура 1. Етапи на изследването

## Първа глава

### Теоретична постановка на проблема

**Геометрия** (от гръцки  $\gamma\eta$  – земя,  $\mu\epsilon\tau\rho\omega$  – измервам) – клон на математиката, изучаващ пространствените отношения.

#### 1.1. Развитие на идеите за обучение по геометрия. Древните учени за геометрията

В този параграф са представени идеите за обучение по геометрия на различни математици, философи и мислители.

Учението на древногръцкия математик и философ Питагор (ок. 580-500 г. пр. н. е.) включва предимно хармония, геометрия, теория на числата, астрономия. Той приема числото за основа на нещата и обединява геометрията с аритметиката.

Гръцкият историк Херодот (480-425 г. пр. н. е.) изтъква, че геометрията е родена в Египет, тя е „дар от Нил“ поради честите наводнения, причинени от реката, които изискват да се определят отново с прецизност границите на крайбрежните ниви.

Древногръцкият математик Евклид (ок. 356-300 г. пр. н. е.) е ученик на Платон. Най-прочутото му произведение са 13-те книги на неговите “Начала” (латинизирано название “Елементи”). В “Началата” на Евклид са изложени основите на планиметрията и стереометрията, за пръв път е направен опит за логическо построяване на геометрията върху основата на аксиоматика. (Новакова, 2004)

В „Правила за ръководство на ума“ Декарт (1596-1650г.) разглежда геометрията и аритметиката само като частен случай на това, което нарича „всеобща математика“. Под това той разбира наука по принцип: „тъй като терминът „математика“ означава просто наука, останалите науки не биха имали по-малко право от самата геометрия да се наричат математика“.

## **1.2. История на геометрията в началното училище**

В този параграф е направен литературен обзор на историята и развитието на геометрията от древността до днес.

Историята на зараждането на геометрията по същество е сходна с историята на зараждането на аритметиката. Първите геометрични понятия и сведения също водят началото си от доисторическо време и също са възникнали в процеса на практическата дейност.

Маджаров отбелязва, че човекът е заимствал геометричните форми от самата природа (Маджаров, Христоматия, 1985). Кръгът и сърпът на луната, повърхността на езерото, правилността на лъча или стройното дърво са съществували дълго преди човека и са стояли пред него постоянно. Човекът е изграждал представа за геометричните фигури като активно е възприемал природата и следвайки своите практически потребности е изработвал предмети с все по-правилна форма.

Швейцарският педагог Йохан Х. Песталоци (1746-1827г.) пръв издига изискването да се изучават геометрични знания в началното училище. Той смята, че числото, формата и езика, взети заедно, са елементарни средства за преподаване. Според него при обучението педагога трябва да се опира на тази тройна основа. Песталоци препоръчва децата да се научат да познават формата на всеки предмет, т.е. размерите и вътрешните му съотношения.

Според Ал. Маджаров със създаването на учебния предмет математика за началните класове в теорията и в практиката се налага разбирането за изучаване на геометричните знания в единство с аритметичните и отделянето на геометрията като самостоятелен учебен предмет или интегриран с аритметиката. (Маджаров, Методика на обучението по математика в началните класове, 1997)

Курсът по геометрия, който се изучава в началното училище, има пропедевтичен характер. Той подготвя систематичното изучаване на геометрията в по-горните класове. Във връзка с включването на геометрични знания в началното училище се очертават два проблема: първият – как да се изучава геометричния материал (като самостоятелен учебен предмет или не), и вторият – в каква последователност да се изложи пред малките ученици.

Практиката в началните класове показва целесъобразността на изучаването на геометрични знания в единство с аритметичните в рамките на учебния предмет математика. Руският методик А. М. Пишкало, отчитайки възрастовите особености на малките ученици, неустойчивостта на тяхното внимание, подчертава необходимостта от разнообразяване на характера на тяхната дейност при изучаване на геометрия.

Геометричните знания и умения допринасят за общото и математическото развитие на учениците. Те способстват за развитие на наблюдателност, логическо и пространствено мислене, въображение, конструктивни способности, съобразителност и творческа инициатива у децата. Учениците се учат да моделират с графични средства конкретни житейски ситуации.

Изучаването на геометричния материал подпомага обучението по другите учебни предмети в началните класове, особено по технологии и предприемачество (домашен бит и техника) и изобразително изкуство.

Обучението по геометрия съдейства за естетическото възпитание на учениците. Прецизността на изпълнението на чертежите, геометричните задачи, свързани с красиви орнаменти, шевици, симетрия, спомагат за изграждане на естетически вкус у децата.

## **1.3. Съдържание на обучението по геометрия в началните класове**

За целите на настоящето изследване в този параграф е разгледано съдържанието на обучението по геометрия в началните класове.

Обучението по математика в началните класове е сложен дидактико-психологичен процес с взаимодействие между учениците и учителя. В този процес у учениците се формират начални математически знания, както и умения за геометрично виждане, а също се въвеждат и геометрични понятия. Учениците в началните класове трябва да разпознават изображенията на прости геометрични фигури: точка, отсечка, триъгълник, кръг, окръжност, правоъгълник. (Герасимова, 1998)



При подбора на съдържанието на обучението по геометрия е необходимо да се спазват изискванията за системност, последователност и логическа връзка на знанията; да се осигуряват възможности за аналитико-синтетична дейност, сравняване, абстрахиране и обобщаване от страна на учениците; да се дават последователно и равномерно (без струпане по много наведнъж) нови, достъпни за учениците знания; да се осигурява възможност за практическа дейност на учениците, както и широко участие на въображението при решаване на достъпни задачи и пр.

Геометричните знания, с които се запознават учениците в началните класове са абстрактни и трябва да са съобразени с възрастовите особености на малките ученици – преобладаващото им конкретно-образно мислене, както и да бъдат с пропедевтичен характер.

Според van Hiele могат да се отделят пет равнища на мислене в областта на геометрията:

На първо равнище геометричните фигури се разглеждат като единно цяло и се различават само по своята форма, без да се анализират свойствата им.

На второто равнище възприеманите геометрични фигури се анализират, установяват се техните свойства. На това равнище се установява логическа връзка между фигурите, те се описват, без да се дефинират.

На третото равнище се осъществява логическо подреждане на геометричните фигури и на техните свойства. Част от свойствата на фигурите се извеждат чрез разсъждения, но учениците не са в състояние да обхванат дедуктивната система като цяло.

На четвъртото равнище се осмисля значението на дедукцията като начин за построяване и развитие на цялата геометрична теория. Изяснява се същността на аксиомите, определенията, теоремите, логическата структура на доказателствата.

На петото равнище геометричната теория се откъсва от всякаква конкретна интерпретация и се развива като абстрактна дедуктивна система (Новакова, 2004).

Опитът показва, че в началното училище изучаването на геометричния материал се осъществява предимно на първо и второ равнище. Геометричните знания се преподават на нагледно-практическа основа в единство с аритметичните знания.

Във връзка с геометричните знания – представи и понятия, у учениците се формират и умения за измерване и чертане. От първи до четвърти клас геометричните представи на учениците се надграждат и дообогатяват постепенно. Например: В първи клас се въвежда общо понятие за фигурата триъгълник; обиколка на триъгълник и видове триъгълници според страните (II клас) и видове триъгълници според ъглите (III клас). В българските учебници е реализирана истинска интеграция между аритметичните и геометричните знания. Те не са механично събрани в общо съдържание. Например: След изучаване на сбор на три събираеми се въвежда намиране обиколка на триъгълник. Във връзка с изучаване на таблично умножение с 3 се въвежда намиране обиколка на равнобедрен триъгълник по дадена дължина на едната му страна. Когато се изучи умножение с 4 се въвежда намиране обиколка на квадрат по дадена дължина на едната му страна. (Кирова, 2014)

Основната цел на обучението по геометрия е ориентирана към следното: чрез специфичните особености на геометричното съдържание, интерпретирано съобразно с възрастовите особености на малките ученици, да се съдейства за цялостното развитие на личността на детето и да се изгради основа за обучението по геометрия в следващите класове.

#### **1.4. Актуални аспекти на геометричното учебно съдържание**

Учебното съдържание по геометрия, изучавано в началните класове запознава малките ученици с: права и крива линия, отсечка; измерване и чертане на отсечки; точка, ъгъл, лъч, видове ъгли: прав ъгъл, остър ъгъл, тъп ъгъл, измерване и чертане на ъгли; триъгълник, видове триъгълници според страните и според ъглите им, намиране обиколка на триъгълник, чертане на правоъгълен триъгълник; правоъгълник, чертане на правоъгълник, намиране

обиколка и лице на правоъгълник, квадрат, намиране обиколка и лице на квадрат; окръжност и кръг, чертане на окръжност. (Новакова, 2004)

Съдържанието на знанията по геометрия включва овладяването на следните моменти:

1. *Знания за геометрична форма.* При обучението по геометрия геометричната форма е предмет на специално изучаване. Малките ученици се запознават с отсечка, прав ъгъл, правоъгълник, квадрат, триъгълник (видове) и др. като се учат да ги разпознават и да ги чертаят върху квадратна мрежа.

2. *Знания за пространствена големина, разстояние и умения за измерване.* Знанията за пространствена големина и разстояние и уменията за тяхното определяне и използване в практиката се усвояват заедно с изучаването на геометричните форми и техните свойства. Голяма роля за формирането им играе изучаването на мерките с техните количествени съотношения и практическата дейност за измерване на различни величини. В различните измервания се уточняват представите за големина, свързват се пространствените с количествените отношения.

3. *Знания за посока и за взаимно положение.* Ориентирането на човека в пространството става по две системи: 1) по страните на човешкото тяло; 2) по страните на хоризонта.

В своите изследвания съветската авторка О. И. Галкина установява, че най-напред децата усвояват разположението на предметите по вертикална ос: горе-долу, и по хоризонтална ос: отпред-отзад. Значително по-късно усвояват ляво-дясно. Това може да се обясни с постепенното развитие на съвместната работа на двете големи мозъчни полукуълба. (Радев, 1970)

4. *Графични знания, умения и навици.* Успоредно със знанията за геометрична форма, пространствена големина и посока у учениците от началните класове се формират и първите знания и умения за чертане с помощта на чертожни инструменти: линейка, чертожен триъгълник. В началните класове основни видове чертожни работи са: 1) чертане на отсечка с дадена дължина в сантиметри; 2) построяване на прав, остър и тъп ъгъл върху квадратна мрежа; 3) дочертаване на правоъгълник, квадрат и триъгълник върху квадратна мрежа. (Радев, 1970)

Формирането на чертожни умения у учениците от началните класове е сложен и продължителен процес. Уменията за чертане се изграждат целенасочено, последователно и системно.

### **1.5. Цел, задачи, функции и значение на обучението по геометрия в началните класове**

В този параграф са представени целта, задачите, функциите и значението на обучението по геометрия в началните класове.

Обучението по геометрия в началното училище е неразделна част от обучението по математика. Това изисква геометричните представи и понятия, които се формират в началното училище, както и съответната терминология, която се въвежда, да отговарят на изискванията на съвременната геометрична наука.

Геометрията в началните класове има за цел да създаде у учениците умения да изграждат образ, да оперират с него и да възприемат структурата на този образ. В началното училище децата се учат да отделят обекта от фона, формират се представите за обект и фон.

Основната задача на обучението по геометрия в началното училище е да създаде у учениците ясни и правилни представи за някои геометрични фигури и елементарните им свойства; да развива пространствените представи, логическото мислене и въображение; да формира знания, умения и навици за чертане и измерване, които имат голямо практическо значение, и по този начин да ги подготви успешно за по-нататъшното обучение по геометрия.

Наред с това обучението по геометрия трябва да подпомогне цялостното обучение в началните класове. То играе и първостепенна роля за развиване на пространствените представи. В тях се включват отделни представи за форма, големина, положение, посока и

други пространствени отношения и връзки. Геометричната форма се разглежда абстрахирано от реалните предмети. Първите пространствени представи, възникнали в играта и главно в началното обучение, са необходима предпоставка за формиране и развиване на абстрактни геометрични представи и понятия с каквито борави науката геометрия.

Според Новакова при изучаването на геометричния материал се поставят следните задачи:

1) Да се формират у учениците общи представи за точка, права и крива линия, отсечка, лъч, ъгъл, триъгълник, правоъгълник, квадрат, окръжност, кръг; някои техни свойства; видове ъгли, видове триъгълници. Представите за геометричните фигури постепенно се уточняват по класове, разширяват, достигат до по-висока степен на обобщеност.

2) Да се изградят умения за чертане на геометрични фигури с помощта на чертожни инструменти: линия, пергел, както и за разчитане на чертежи.

3) Да се формират умения за измерване на дължина на отсечка и големина на ъгъл, като се използват съответни уреди: сантиметрова линия, ъгломер (транспортир).

4) Да се усвоят знания и умения за намиране на обиколка на геометрична фигура и лице на правоъгълник, за решаване на задачи, свързани с практиката.

5) Да се съдейства за развитие у учениците на пространствени представи, на пространствено мислене и въображение. (Новакова, 2004)

Друга основна задача, която стои пред обучението по геометрия в началното училище е да запознае учениците с основните мерни единици за дължина на отсечка, обиколка и лице на геометрична фигура, както и да формира съответни умения за измерване, преминаване от една мерна единица за дължина (лице) в друга.

В обучението по математика геометрията, геометричните понятия и задачи, както и всички математически задачи играят двустранна роля: като цел и като средство на обучението. Методологическата функция на геометрията като цел на обучението формира у обучаваните знания за същността на геометрията; за смисъла, природата и историята на възникване на геометричните знания и умения. Под функция на геометрията като средство за обучение се разбира същността на геометрията въобще, както и математическите знания в частност.

Според И. Ф. Шаригин и неговата „Концепция за геометричното образование” изучаването на геометрията способства за културното, духовното, интелектуалното, естетическото и творческото развитие на обучаваните. Поради това развиващата функция на геометрията може да се раздели на:

1) Културно-развиваща функция. Културно-развиващата функция като цел на обучението се разглежда като формираща геометричната култура на човека. Критерий за постигане на тази култура е свободното опериране на учениците с материала (геометричните обекти) на ниво разпознаване.

Под културно-развиваща функция като средство на обучението се разбира функцията на геометрията за формиране на представите за развитието на човека и човечеството, значението на геометрията за културата, науката и производството.

2) Духовно-развиваща функция.

3) Интелектуално-развиваща функция. Интелектуално-развиващата функция като цел на обучението формира пълни геометрични познания и техните логически взаимовръзки като носител на собствен метод за познаването на света.

Интелектуално-развиващата функция като средство на обучението формира мисленето (логическо и образно), създава умения за изпълнение на логически операции (анализ, синтез, сравнение, обобщение, класификация и др.).

4) Творческо-развиваща функция.

5) Естетико-развиваща функция. Естетико-развиващата функция като цел на обучението развива и формира у учениците чувство за красотата на геометрията (геометрични понятия, геометрични форми).

Естетико-развиващата функция като средство на обучението по геометрия формира у учениците художествен възглед, развива изобразителната им култура, умение да се види красотата на обкръжаващия свят и обектите, направени от човека. (<http://www.itmathrepetitor.ru/i-f-sharygin-celi-obucheniya-v-koncepcii/>)

Значението на изучаването на геометричния материал се състои в това, че обучението по геометрия съдейства за: 1) пространствените представи на учениците; 2) допринася както за общото развитие, така и за математическото развитие на учениците – наблюдателност, въображение, конструктивни дейности; 3) подпомага изучаването на други дисциплини – изобразително изкуство, домашен бит и техника и др.; 4) създава добра основа за изучаване на геометрията в горните класове. (Сутягина, 2002)

### **1.6. Свързване на аритметичните и геометричните знания**

Една от главните насоки в програмата по математика за началните класове е органическото свързване на аритметичните и геометричните знания.

Основните въпроси на училищния курс по аритметика в началните класове обхваща четири основни групи:

- 1) редица на естествените числа;
- 2) аритметичните действия с естествените числа;
- 3) свойства на аритметичните действия;
- 4) решаване на аритметични задачи.

И в четирите раздела, когато се изясняват аритметичните знания, широко място могат да заемат геометричните фигури като нагледни средства. По този начин успоредно с аритметичните знания се усвояват и геометричните.

Знанията по геометрия имат голямо значение за опознаване на действителността. Пространствените представи и геометричните понятия, графичните умения и навици са важна част от изучаването на геометричните знания в началното училище като пропедевтика на системния курс по геометрия в следващите училищни степени.

## **Втора глава**

### **Методика за изучаване на геометричните знания**

#### **2.1. Общи методически насоки**

В съвременната методика основни насоки за преподаване на геометричните знания в съответствие със задачите на обучението са: да се формират ясни пространствени представи и геометрични понятия; да се развие логическо мислене и творческо въображение; да се усвоят правилни измерителни и графически знания, умения и навици; да се осъществи тясна връзка между геометричните и аритметичните знания; да се придобият умения и навици за решаване на задачи, свързани с живота. (Радев, 1970)

В този параграф са представени основни методически насоки за въвеждане на геометричните знания и начините на усвояването им от учениците в начална училищна възраст.

М. Върбанова (Върбанова, 2013) отбелязва, че основна задача при разглеждане на геометричните понятия в началните класове е да се извършват елементарни класификации на множества от геометрични обекти: отсечки (равни и с различни дължини); триъгълници (равностранен, равнобедрен, разностранен); ъгли (прав, остър, тъп); триъгълници (остроъгълен, правоъгълен, тъпоъгълен); прави (успоредни, пресекателни, перпендикулярни); многоъгълници, съобразно броя на ъглите (триъгълник, четириъгълник и т. н.) и др.

При изучаване на геометричния материал в началното училище могат да се отделят някои общи методически положения:

1) геометричните знания трябва да се изучават на нагледно-практическа основа. По своя характер геометричните знания са абстрактни. Това налага широко използване на нагледността. Тя се прилага по следния начин: от наблюдаване на обекти, предмети и техни отношения от околната действителност (например в класната стая) към модели на геометрични фигури от хартия, дърво, пластмаса; използване на чертеж. Важно е учениците да не са само пасивни наблюдатели и слушатели на обясненията на учителя, а да се включват в различни дейности с тези нагледни средства;

2) поради преобладаващото конкретно-образно мислене при малките ученици, те се насочват към някои несъществени признаци на наблюдаваните геометрични фигури. С цел да се открият съществените признаци на изучаваните фигури е добре да се използва варирането на несъществените им признаци: положение в равнината (въртене на фигурата в равнината), размери на страните, цвят, буквено означаване и т.н.;

3) за осмисляне на съществените признаци на изучаваните геометрични фигури допринася сравнението, което се осъществява в две основни форми: съпоставяне и противопоставяне. При съпоставянето се отделят съществените признаци, общи за редица обекти (позитивна страна на абстракцията), а при противопоставянето се отделя това, от което трябва да се отвлечем при отделяне на съществените признаци (негативна страна на абстракцията). Учениците сравняват модели на триъгълници, модели на различни ъгли с модел на прав ъгъл и т.н.;

4) геометричните знания се изграждат спираловидно: върви се от конкретни представи за отделните геометрични фигури към общи представи, които ще улеснят прехода към формиране на съответните понятия в по-горните класове;

5) при изучаването на геометрични знания се осъществява връзка с аритметичния материал. Естествените числа се изобразяват върху числовия лъч;

6) за усвояване на изучавания геометричен материал от учениците може да се изисква: да открият формата на даден предмет, взаимното разположение на обекти; да назоват дадена фигура, да я начертаят, да разчетат даден чертеж; да направят модел на фигура (с пръчици, пластилин, от хартия); да извършат измервания върху предмети, модели, чертежи; да се опитат „на око“ да определят някои размери, видове ъгли, видове триъгълници; да решат задачи с геометрично съдържание. (Новакова, 2004)

## **2.2. Пространствени представи и понятия**

В този параграф са разгледани пространственото мислене и творческото въображение, както и начини за формиране на пространствени представи и понятия.

Мисленето е един от основните психически процеси. Р. С. Немов говори за видовете мислене като теоретично отделя понятийното от образното. Една от разновидностите на образното мислене е пространственото мислене. То е вид умствена дейност, която създава съзнателни пространствени образи. (Немов, 2003)

Н. Колева определя пространственото мислене като процес на създаване на пространствени образи и установяването между тях на отношения по пътя на оперирането със самите образи и техните елементи. (Колева, 2004)

Развитието на пространственото мислене има важно значение за общото психическо развитие на децата. Високото ниво на развитие на пространственото мислене способства за успешно развитие по много дисциплини като математика, човекът и обществото, технологии и предприемачество (домашен бит и техника) и др.

Работата за формиране на първите пространствени представи и понятия трябва да бъде особено добре методически подготвена, за да се овладеят съзнателно и активно от учениците.

Формирането на пространствени представи дава възможност на учениците не само да работят с пространствените признаци на предметите, но и мислено да възприемат образа на обекта и измененията, които стават с него в пространството. Възприемането на

пространственото отношение позволява на децата да се ориентират в пространството. При ориентирани в пространството децата трудно разбират положението на предмета в съвкупността от предмети. За малките ученици това става схема, по която те възприемат телата, т.е. това им позволява да се ориентират и различават отношенията на предметите в пространството – отпред-отзад, високо-ниско, ляво-дясно, между тях. (Кочеткова, 1996)

Според М. Богданова формирането на геометрично понятие е необходимо да става едновременно с изучаването на числата, за да могат децата да добият представа за безкрайността на числовата редица. След това се преминава към връзката на предходно изученото и последно придобитите знания. (Богданова, 2001)

Главно условие за формиране на понятия за формите, пространствените отношения и др. е да се открият съществените им признаци.

Важно средство за откриване съществените признаци на наблюдаваните обекти е варирането с несъществените им признаци.

Резултатен начин за откриване, осъзнаване и запомняне на съществените признаци е сравняването. Чрез него се постига отдиференциране на сходни и противоположни форми, понятия и др. Противопоставянето на коренно различни и съпоставянето на сходни форми, свойства, понятия и др. допринася да се изтъкне съответно същественото различие или същественото сходно в тях.

Когато сравняват, учениците боравят главно със свойствата на различните форми и отношения. Това допринася да се формират по-качествени представи и понятия за тях. Учениците прилагат знанията си при различни ситуации.

Обикновено при обучението понятията се изясняват по следния начин: 1) с показване и назоваване; 2) с описание; 3) с определение.

Определянето на понятието се предшествва от разглеждане на редица частни случаи, които постепенно и последователно разкриват съдържанието му. Самото определение на понятието трябва да се дава само след като учениците знаят за какво става дума. На първо време, особено когато учениците току-що са пристъпили към изучаване на геометричен материал, е достатъчно те да се ограничават с поясняване на новото понятие, с отбелязване на най-необходимите му признаци. Пълно определение трябва да се дава само след като напълно са опознали понятието.

За формиране на понятия може да се постъпи по два начина:

1) като се върви от конкретното към абстрактното (конкретно-индуктивен подход) и 2) като се върви от абстрактното към конкретното (абстрактно-дедуктивен подход). Съветският проф. М. Н. Шардаков, специалист в областта на психологията на мисленето, подчертава предимствата на първия от тези начини при обучението. Според същия автор този начин е особено подходящ за малките ученици.

Цялостната работа за формиране на пространствените понятия трябва да води преди всичко към натрупване на запас от представи чрез непосредствено запознаване с материални и материализирани образи на геометрични обекти. Това става с участието на различни анализатори при наблюдение и практическа дейност на учениците. С този запас от представи се осигурява необходимата сетивна основа на пространствените понятия.

Постепенно получените представи се усъвършенстват. Все по-голямо значение придобиват словесните означения на пространствените признаци и отношения. Названията и определенията започват да играят все по-голяма роля в различаването и приложението на геометричните форми. Засилва се ролята на абстрахирането и обобщението. Учениците стигат до осъзнати пространствени представи. Учениците натрупват опит да си представят геометрични форми и пространствени отношения, да оперират все по-свободно и самостоятелно с тях в процеса на мисловната и практическата си дейност. Формират се умения и навици за използване на пространствените представи и понятия за решаване на разнообразни практически задачи. (Радев, 1970)

### **2.3. Запознаване с новите понятия за III клас по учебна програма**

Този параграф съдържа методиката на изучаване на геометричните знания, които се въвеждат и усвояват по учебна програма в трети клас: права и крива линия, лъч, ъгъл (елементи на ъгъла), видове ъгли, видове триъгълници според ъглите и геометрична фигура. Тук са представени и аспектите на съвременната реформа в обучението по математика в началните класове, като е направена съпоставка на промените в учебните програми.

#### **2.3.1. Права линия и крива линия**

#### **2.3.2. Лъч**

#### **2.3.3. Ъгъл. Елементи на ъгъла (върх, рамене)**

#### **2.3.4. Видове ъгли (прав, остър, тъп)**

#### **2.3.5. Видове триъгълници според ъглите (правоъгълен, остроъгълен, тъпоъгълен)**

#### **2.3.6. Геометрична фигура**

#### **2.3.7. Аспекти на съвременната реформа в обучението по математика в началните класове**

Образователната реформа е образователна политика, която има за цел подобряване на държавното образование.

От учебната 2016/2017 г. обучението в българските училища е в съответствие с новия Закон за предучилищното и училищното образование. Съгласно този закон учениците се обучават по нови учебни програми и учебни комплекти за съответния клас.

Според новите учебни програми общообразователната подготовка на учениците от I-IV клас обхваща основни групи ключови компетентности.

В учебните програми, действащи от учебната 2016/17 г. „Ядрата на учебното съдържание“ от *Числа, Равнинни фигури, Измерване и Моделиране* вече се наричат „Области на компетентност“ – *Числа, Геометрични фигури и тела, Измерване и Моделиране*.

В сравнение с предишната учебна програма новото учебно съдържание за учениците от първи клас е:

- въвеждане на числата 10, 20, 30, ... 100;
- броене до 100 по десетици в прав и обратен ред;
- сравняване на тези числа;
- извършване на действията събиране и изваждане с числата до 100 по десетици;
- познаване на банкнотите от 20 лв., 50 лв., 100 лв., както и монетите от 20 ст. и 50 ст.

Тези знания преди са изучавани във втори клас.

В сравнение с предишната учебна програма новото учебно съдържание за учениците от втори клас е:

- въвеждане на понятието „числов израз“;
- въвеждане на понятието „геометрична фигура“;
- записване съкратено на текстови задачи.

Тези знания преди са изучавани в III клас.

В сравнение с предишната учебна програма единствената промяна в учебното съдържание за учениците от трети клас е:

- изучаването на единицата за време „секунда“ заедно с връзките и зависимостите: 1 час = 60 минути, 1 минута = 60 секунди, което преди се е изучавало в IV клас;
- графично изобразяване на понятието половинка като  $1/2$ , третинка като  $1/3$ , четвъртинка като  $1/4$  и десетинка като  $1/10$ .

В сравнение с предишната учебна програма новото учебно съдържание за учениците от четвърти клас е:

- разпознаване на геометричните тела куб, правоъгълен паралелепипед, кълбо, цилиндър, конус, пирамида;
- запознаване с елементите на геометричните тела куб и правоъгълен паралелепипед – стена, връх, ръб;

- чертане на ъгъл по дадена градусна мярка и окръжност по даден радиус (преди по шаблон).

Геометричните знания и умения са от голямо значение за общото и математическото образование на децата. Те имат и голямо значение за развитието на наблюдателността, логическото мислене и творческото въображение. Геометрията е плод на определена степен на развитие на абстрактното мислене и поради това нейното усвояване съдейства за развитието на такова мислене у учениците в начална училищна възраст. Наред с това се овладяват точни термини, развиват се чувство за симетричност, хармония и естетика.

### **Трета глава** **Анализ на геометричното учебно съдържание в български и** **чуждестранни учебници за III клас. Геометрията в съвременното** **начално училище**

В тази глава за целите на дисертационното изследване са анализирани учебници по математика за III клас, по които се обучават учениците в България, Русия, Украйна, Германия, САЩ, Гърция и Франция. След направения анализ на всички геометрични задачи в изследваните учебници същите са систематизирани и се оформи обща класификация, включваща следните типове:

- Разпознаване, сравняване, преброяване на геометрични фигури;
- Измерване;
- Чертане;
- Именуване;
- Намиране на обиколка;
- Геометрични текстови задачи;
- Ориентиране в пространството;
- Логически геометрични задачи;
- Многоъгълници;
- Площ (лице на фигура) -  $\text{мм}^2$ ,  $\text{см}^2$ ,  $\text{дм}^2$ ,  $\text{м}^2$ ;
- Кръг, окръжност;
- Трапец, ромб;
- Задачи за построение на квадрат, правоъгълник, триъгълник, кръг;
- Множества;
- Геометрични тела (3D фигури);
- Сечение на фигури;
- Симетрия;
- Координатна система;
- Обем;
- Триъгълни числа;
- Успоредни прави;
- Работа с карта, план.

Посочените типове задачи са представени в таблици и диаграми, разкриващи наличието, броя и процентното им отношение в българските и чуждестранните учебници по математика за III клас.

#### **3.1. Характеристика на учебните комплекти за трети клас**

##### **3.1.1. Учебен комплект на М. Богданова и колектив**

В уроците, включени в учебника по математика за III клас на изд. „Булвест 2000“ с автори М. Богданова и колектив геометричният материал е залегнал цялостно в 14 урока, а присъства като елемент в 32 урока.



Броят на геометричните задачи в уроците с цялостна геометрична насоченост е 58, а в уроците с частично геометрично съдържание – 39.

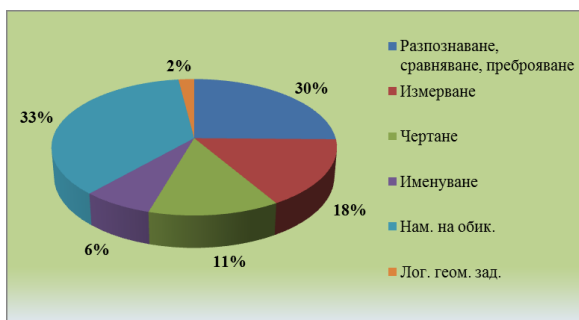
В учебника по математика за III клас на Мариана Богданова и колектив геометричните задачи представляват 17 % от общия брой включени задачи. Относителният дял на геометричните задачи е предствен чрез *Диаграма 1*.



*Диаграма 1.* Относителен дял на геометричните задачи в учебника по математика за III клас на М. Богданова

За целите на дисертационното изследване задачите с геометрично съдържание в този учебник са класифицирани в шест типа, които са показани в таблици и диаграми.

Класификацията на типовете геометрични задачи в учебника е предствена на *Диаграма 2*.

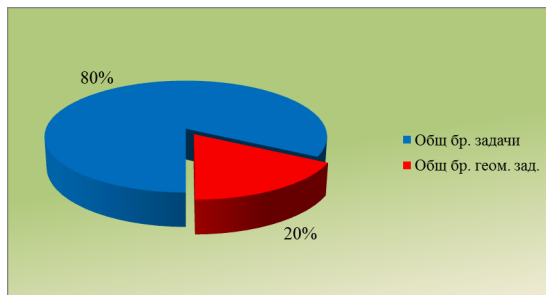


*Диаграма 2.* Класификация на типовете задачи с геометрично съдържание в учебника по математика за III клас на М. Богданова

- задачите за разпознаване, сравняване и преброяване са 30 %. Много от тях са комбинирани със задачи за измерване, оцветяване и намиране на обиколка;
- задачите за измерване са 18 %;
- задачите за чертане са комбинирани със задачи за именуване – 11 %;
- задачите за именуване на геометрични фигури, които са комбинирани със задачи за разпознаване, измерване, оцветяване – 6 %;
- задачите за намиране на обиколка или страна по дадена обиколка са 33 % от всички задачи с геометрично съдържание. Те са комбинирани със задачи за измерване и чертане;
- логическите задачи с геометрично съдържание са 2 %.

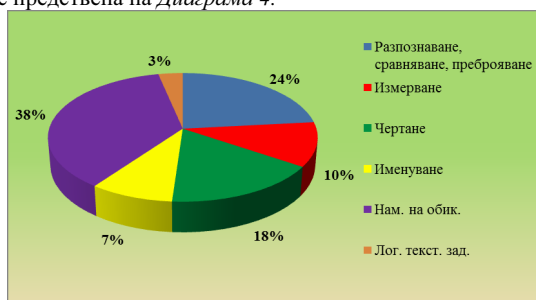
Броят на геометричните задачи в разработките на уроците в двете учебни тетрадки по математика за III клас с автори Мариана Богданова и колектив е 90.

В двете учебни тетрадки по математика за III клас на Мариана Богданова и колектив частта на геометричните задачи спрямо общия брой задачи е 20 % (виж *Диаграма 3*).



Диаграма 3. Относителен дял на геометричните задачи в учебните тетрадки по математика за III клас на М. Богданова

Задачите, включени в учебните тетрадки също са класифицирани в шест типа и са представени в таблици и диаграми. Класификацията на типовете геометрични задачи в учебните тетрадки е предствена на *Диаграма 4*.



Диаграма 4. Класификация на типовете задачи с геометрично съдържание в учебните тетрадки по математика за III клас на М. Богданова

- задачите за разпознаване, сравняване и преброяване са 24 % от общия брой геометрични задачи. Комбинирани са със задачи за именуване, оцветяване и обиколка;
- задачи за измерване – 10 %. Комбинирани са със задачи за намиране на обиколка и чертане;
- задачите за чертане са 18 %. Този тип задачи са комбинирани със задачи за именуване и намиране на обиколка;
- задачите за именуване на геометрични фигури са 7 % и са комбинирани със задачи за измерване;
- задачите за намиране на обиколка или страна по дадена обиколка – 38 %. Задачите са комбинирани с такива за сравняване;
- логическите геометрични задачи са 3 % и са комбинирани със задачи за изрязване и намиране на обиколка.

В заключение може да се каже, че в учебника на М. Богданова и колектив са включени шест типа задачи с геометрично съдържание, което е добра основа за усвояване на геометричния учебен материал от третокласниците.

### 3.1.2. Учебен комплект на А. Манова и колектив

При анализа на уроците, включени в учебника по математика за III клас на изд. „Просвета“ с автори А. Манова и колектив се установи, че геометричният материал е залегал цялостно в 8 урока, а присъства чрез отделни задачи в 30 урока.

За целите на дисертационното изследване в таблици са представени броят и типовете геометрични задачи в уроците с цялостна геометрична насоченост и в уроците с частично геометрично съдържание.

Броят на геометричните задачи в уроците с цялостна геометрична насоченост е 35, а в уроците с частично геометрично съдържание – 44. Броят на логическите геометрични задачи в уроците от учебника е 15.

В учебника по математика за III клас на Ангелина Манова и колектив частта на геометричните задачи спрямо общия брой задачи е 16 % (виж *Диаграма 5*).



*Диаграма 5.* Относителен дял на геометричните задачи в учебника по математика за III клас на А. Манова

При анализа на учебника на Манова и колектив геометричните задачи бяха класифицирани в осем типа (виж *Диаграма 6*).



*Диаграма 6.* Класификация на типовете задачи с геометрично съдържание в учебника по математика за III клас на А. Манова

- задачи за разпознаване, сравняване и преброяване, които представляват 29 % от общия брой геометрични задачи. Някои от тях са комбинирани със задачи за намиране на обиколка, именуване и оцветяване;
- задачи за измерване – 5 %. Комбинирани са със задачи за мерни единици;
- задачите за чертане са 3 %, които са в комбинация със задачи за именуване;
- задачите за именуване на геометрични фигури са 10 % и са комбинирани със задачи за измерване;
- задачите за намиране на обиколка или страна по дадена обиколка – 25 %. Задачите са комбинирани с такива за измерване;
- геометричните текстови задачи са 2 %;
- интересно е присъствието на задачи за ориентиране в пространството, които са не малък процент - 3 %;

- логическите задачи правят този учебник интересен. В края на почти всеки урок има такава задача, но от тях тези с геометрично съдържание са 23 %.

Броят на геометричните задачи в разработките на уроците в трите учебни тетрадки по математика за III клас с автори Ангелина Манова и колектив е 38.

В трите учебни тетрадки по математика за III клас на Ангелина Манова и колектив частта на геометричните задачи спрямо общия брой задачи е 11 % (виж *Диаграма 7*).

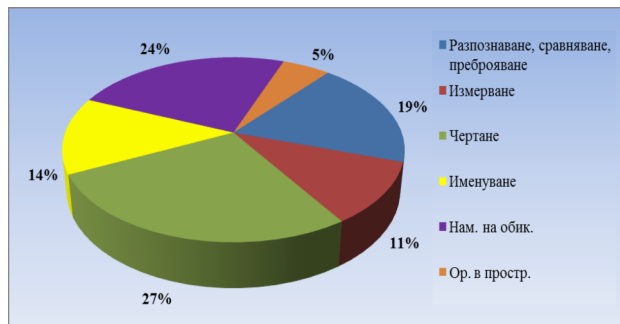


*Диаграма 7.* Относителен дял на геометричните задачи в учебните тетрадки по математика за III клас на А. Манова

Задачите, включени в учебните тетрадки са класифицирани в шест типа.

Класификацията на типовете геометрични задачи в учебните тетрадки е предствена на

*Диаграма 8.*



*Диаграма 8.* Класификация на типовете задачи с геометрично съдържание в учебните тетрадки по математика за III клас на А. Манова

- задачите за разпознаване, сравняване и преброяване са 19 % от общия брой геометрични задачи. Те са комбинирани със задачи за оцветяване;

- задачи за измерване – 11 %. Комбинирани са със задачи за именуване и чертане;

- задачите за чертане са 27 %, което е показател за развитие на чертожните умения на третокласниците с молив и чертожна линия;

- задачите за именуване на геометрични фигури са 14 %;

- задачи за намиране на обиколка или страна по дадена обиколка – 24 %.

- задачи за ориентиране в пространството – 5 %.

Типовете задачи, които са включени в учебника за трети клас с автори А. Манова и колектив са осем и с добре балансиран относителен дял. Наблюдава се превес на задачите за чертане и намиране на обиколка или страна на геометрична фигура по дадена обиколка.

Задачите за ориентиране в пространството развиват полезни качества и умения у учениците, необходими всекидневно в живота на човека.

### 3.1.3. Учебен комплект на З. Новакова и колектив

В учебника по математика за III клас на изд. „Просвета“ с автори З. Новакова и колектив геометричният материал е залегнал цялостно в 5 урока, а присъства частично в 63.

За целите на дисертационното изследване в таблици са представени броят и типовете геометрични задачи в уроците с цялостна геометрична насоченост и в уроците с частично геометрично съдържание.

Броят на геометричните задачи в уроците с цялостна геометрична насоченост е 13, а в уроците с частично геометрично съдържание – 88.

В учебника по математика за III клас на Здравка Новакова и колектив относителният дял на геометричните задачи спрямо общият брой е 16 %, както е показано на *Диаграма 9*.



*Диаграма 9.* Относителен дял на геометричните задачи в учебника по математика за III клас на З. Новакова

Задачите в учебника са разпределени в седем типа.

Класификацията на типовете геометрични задачи в учебника е изобразена на *Диаграма 10*.



*Диаграма 10.* Класификация на типовете задачи с геометрично съдържание в учебника по математика за III клас на З. Новакова

- задачите за разпознаване, сравняване и преброяване са 27 % от общия брой геометрични задачи. Те са комбинирани със задачи за преброяване, изрязване и оцветяване;

- задачите за измерване са 14 % като някои от тях са комбинирани със задачи за именуване и намиране на обиколка;

- 13 % от общия брой са задачите за чертане като някои от тях са комбинирани със задачите за намиране на обиколка и именуване;
- задачите за именуване са 7 %;
- задачите за намиране на обиколка или страна по дадена обиколка са най-голяма част – 33 % от общия брой.
- текстовите задачи с геометрично съдържание са 2 %;
- логическите задачи с геометрично съдържание са 4 %.

Броят на геометричните задачи в разработките на уроците в трите учебни тетрадки по математика за III клас с автори Здравка Новакова и колектив е 60.

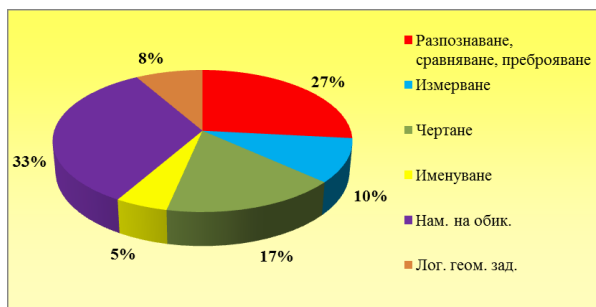
В трите учебни тетрадки по математика за III клас на Здравка Новакова и колектив частта на геометричните задачи спрямо общия брой задачи е 19 % (виж *Диаграма 11*).



*Диаграма 11.* Относителен дял на геометричните задачи в учебните тетрадки по математика за III клас на З. Новакова

Задачите в учебни тетрадки № 1, № 2 и № 3 са разпределени в шест типа, като уроците са с частично геометрично съдържание.

Класификацията на типовете геометрични задачи в учебните тетрадки е изобразена на *Диаграма 12*.



*Диаграма 12.* Класификация на типовете задачи с геометрично съдържание в учебните тетрадки по математика за III клас на З. Новакова

- задачите за разпознаване, сравняване и преброяване са близо една трета от общия брой геометрични задачи – 27 %. Те са комбинирани със задачи за измерване и оцветяване;
- задачите за измерване са 10 % като някои от тях са комбинирани със задачите за намиране на обиколка;

- 17 % от общия брой са задачите за чертане като някои от тях са комбинирани със задачи за измерване, именуване и оцветяване. Това са задачи за дочертване на фигури в квадратна мрежа;

- задачите за именуване на геометрични фигури са 5 %, което е малко;

- задачите за намиране на обиколка или страна по дадена обиколка са комбинирани със задачи за измерване и чертане. Те са 33 % от общия брой;

- задачите с логическо геометрично съдържание са 8 %.

След прегледа на различните типове геометрични задачи, включени в учебника за трети клас на З. Новакова и колектив може да се направи извод, че геометричният материал е представен в достатъчен обем за овладяване от учениците. Включените типове геометрични задачи са общо седем. Най-голям е броят на задачите за намиране на обиколка. Задачите за разпознаване, чертане, измерване и именуване също заемат сравнително голяма част от общия брой геометрични задачи.

### **3.2. Сравнителен анализ на учебните комплекти по математика за трети клас в България**

В трите учебни комплекта по математика, съобразени с програмата на МОН за обучение на учениците от трети клас съществува многообразие от геометричен материал, съобразен с ДООИ. Целта на геометричните знания в началното училище е формиране на умения за ясно, бързо и точно ориентиране и прилагане на получените знания и придобитите навици. Чрез геометрията се постига висока познавателна активност, развитие на мисленето и мисловните операции у учениците в урока по математика.

Проучването на геометричното учебно съдържание в учебните комплекти за трети клас на трите авторски колектива беше направено с цел да се систематизират и нагледно представят относителният брой на задачите, съдържащи геометрични знания, като представянето на уроците е направено съобразно подредбата им в съответните учебници и по видове уроци (нови знания, затвърдяване, обобщение, проверка и оценка).

От обобщените данни в таблиците и диаграмите може да се направи извод, че в учебниците и на трите авторски колектива по математика за трети клас са спазени изискванията по учебна програма, като новите понятия са въведени в следната последователност:

- При авторският колектив М. Богданова, К. Никова и Н. Димитрова формирането на новите геометрични знания започва със запознаването на учениците още при преговора на материала от втори клас с понятието геометрична фигура (Урок № 9). Следващите понятия, които се въвеждат са права и крива линия (Урок № 13). Те се изучават в един урок, за да могат учениците да ги сравнят и по-добре да осъзнаят разликата между тези две понятия. След това третокласниците усвояват геометричната фигура лъч (Урок № 14), учат се да я именуват и четат. Понятието ъгъл и неговите елементи се разглежда, като се актуализират знанията на учениците за лъч (Урок № 30). Правия ъгъл е първият от видовете ъгли, с който се запознават учениците от трети клас (Урок № 31). На тяхното внимание са представени и описателните определения за видовете ъгли. Остър и тъп ъгъл се представят в един урок като се разглеждат като по-големи или по-малки от правия ъгъл. В урок № 32 се въвежда, че геометричната фигура квадрат е вид правоъгълник („Квадратът е правоъгълник, но с равни по дължина страни”). На практическа основа учениците усвояват тази зависимост като измерват страните и ъглите на квадрата. В урок № 43 третокласниците чертаят прав ъгъл в квадратна мрежа. Последното геометрично понятие според учебната програма – видове триъгълници според ъглите се отработва в урок № 67, като на учениците се дават и определенията за видовете триъгълници според ъглите.

В учебния комплект освен новите геометрични понятия се упражняват и затвърдяват стари знания за геометрични фигури, изучавани в предходните учебни години. От общо 110 урока в учебника 46 представят и изграждат геометрични знания. Учебните тетрадки също съдържат голямо количество геометричен материал – 52 урока. Това показва, че в този учебен

комплект геометричният материал е поднесен достъпно за учениците, в достатъчно на брой уроци (около половината от учебното съдържание) и допринася за цялостното и правилно формиране на геометричните знания, като неразделна част от обучението по математика в трети клас.

- В учебника по математика за трети клас на А. Манова, Р. Рангелова и Ю. Гарчева новият геометричен материал се въвежда с права и крива линия, както е според учебната програма. Представата за права линия се изгражда в сравнителен план с тази за крива линия (Урок № 7). Понятието геометрична фигура се обяснява на учениците в следващия урок, който представя новото знание – лъч. От урок № 45 започва запознаването на третокласниците с ъгъл и елементите му – връх и рамене. Знанията на учениците се разширяват и задълбочават с въвеждането на видовете ъгли, което става в един урок. В урок № 47 се обръща внимание на това, че квадратът е правоъгълник, защото е четириъгълник с четири прави ъгъла. След това се въвеждат видовете триъгълници според ъглите (Урок № 54), както и описателните определения за тях. В учебника авторите са включили и това, че именуването на геометричните фигури става с главни букви. Уменията на третокласниците за чертане на ъгъл и триъгълник върху квадратна мрежа се отработват в уроци № 47, № 55, № 66 и № 67.

В този учебник намират място всички геометрични понятия, които трябва да бъдат овладяни от учениците в трети клас. Авторите разнообразяват дейността на учениците с много логически задачи, свързани с геометрията, като например тези в урок № 33 и № 44. В 38 урока от общо 109 в учебника се формират и затвърдяват нови и предходни знания на учениците в областта на геометрията. Геометричното съдържание в трите учебни тетрадки, които са част от учебния комплект също е добре подбрано, подредено и точно дозирано в 22 урока и е в единство с дейностите, заложените в учебника. Уроците, в които се изграждат необходимите геометрични знания са достатъчно на брой, правилно разпределени във времето, съобразени с методическите изисквания при преподаването на геометричния материал.

- Анализът на учебния комплект по математика за трети клас по математика с авторски колектив З. Новакова, Т. Вълкова и С. Иванов показва, че въвеждането на новите понятия, свързани с геометричния материал, който се изучава от третокласниците започва с права и крива линия (Урок № 24). Понятието геометрична фигура се изяснява в урок № 33. Геометричната фигура лъч е представена при ъгъл и елементите му (Урок № 39). Запознаването с видовете ъгли започва с прав ъгъл, а остър и тъп ъгъл се изучават в отделен урок, като се сравняват с правия (Урок № 54). Разпознаването на квадрата като вид правоъгълник малките ученици усвояват в урок № 63, като им се обръща внимание на това, че както правоъгълникът, така и квадратът имат четири прави ъгъла, но разликата е, че страните на квадрата са равни. Видовете триъгълници според ъглите се усвояват в един урок (Урок № 75), като на третокласниците се дават и определенията. Учениците именуваат и четат видовете триъгълници.

В този учебен комплект са предвидени голям брой уроци за упражнение на новите знания, а също продължава затвърдяването на знанията от втори клас, особено за видовете триъгълници според страните и намиране на обиколка на триъгълник и правоъгълник. Учебното съдържание е поднесено занимателно с помощта на различни рубрики, герои, математически турнири, „Аз знам” и др., с което учителят получава обратна връзка за степента на овладяните от учениците знания, дава се възможност и на самите третокласници по-пълно да усвоят и затвърдят знанията си. Основните геометрични знания в учебника са представени в 68 от общо 109 урока. В трите учебни тетрадки, които допълват съдържанието на учебника са включени общо 54 тематични разработки с геометрична насоченост. Често в учебните тетрадки в уроци, които се състоят от две задачи, едната е геометрична. Това разпределение на геометричните знания, в повече от половината уроци се съдържат геометрични елементи и задачи, говори за всеобхватност на геометричния материал и



допринася за пълно овладяване и цялостно формиране на геометричните знания у учениците в трети клас.

В Таблица 1 са представени типовете задачи в учебниците и учебните тетрадки за III клас по авторски колективи. Разкрит е броят на геометричните задачи по типове като е посочен и относителният им дял спрямо общия брой задачи в учебниците.

Таблица 1. Брой и относителен дял на типовете геометрични задачи в българските учебници и учебни тетрадки за III клас

№	Типове задачи	Учебник за III клас			Учебни тетрадки за III клас		
		Богданова	Манова	Новакова	Богданова	Манова	Новакова
1.	Разпознаване, сравняване, преброяване	29	27	27	22	7	16
2.	Измерване	17	5	15	8	3	6
3.	Чертане	11	3	13	16	10	10
4.	Именуване	6	9	6	6	5	3
5.	Намиране на обиколка	32	23	35	35	11	20
6.	Геометрични текстови задачи	-	2	2	-	-	-
7.	Ориентиране в пространството	-	3	-	-	2	-
8.	Логически геометрични задачи	2	22	3	3	-	5
9.	Общ брой задачи по типове	97	94	101	90	38	60
10.	Относителен дял спрямо всички задачи в %	17%	16%	16%	20%	11%	19%
11.	Общ брой задачи в учебник/ учебна тетрадка	577	576	629	436	360	316

От Таблица 1 е видно, че учебниците и учебните тетрадки по математика за трети клас съдържат различни типове задачи, чрез които се въвеждат и затвърдяват различни знания, свързани с формирането на геометричните представи и понятия у учениците. Броят на геометричните задачи в учебниците е почти равен. Най-голям брой геометрични задачи от различните типове се наблюдава в учебника на М. Богданова и колектив. Най-много са типовете задачи с геометрично съдържание в учебния комплект на А. Манова и колектив, като са включени задачи за ориентиране в пространството и голям брой логически геометрични задачи. По отношение на броя и типовете задачи, включени в учебните тетрадки може да се обобщи, че чрез тях се усъвършенстват формираните в урока знания и умения на учениците и се допълва учебното съдържание, включено в учебниците.

### **3.3. Анализ на учебното съдържание за III клас по геометрия в учебници от Русия, Украйна, Германия, САЩ, Гърция и Франция**

Представява интерес въпросът как е структуриран геометричния материал в съвременните чуждестранни учебници по математика.

В този параграф са разгледани учебници по математика за трети клас от Русия и Украйна, държави от Европейския съюз и САЩ. Представени са геометричните задачи в разработките на уроци с геометрично съдържание, като са приведени примери чрез снимки, илюстриращи различните типове задачи и упражнения (виж *Фигура* от 2 до 148 в дисертационния труд). Целта е да се очертаят спецификите на съответната образователна система и да се разкрият разликите с българската.

#### **3.3.1. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от Русия**

Анализираният руски учебник по математика за трети клас е онлайн издание, включващо видеуроци към всяка тема от учебното съдържание (<http://interneturok.ru/ru/school/matematika/3-klass>) с автори, водещите в областта на методиката на обучение по математика в началните класове М.И. Моро, М.А. Бантова и др. Учебникът се състои от 2 части.

Първата част на учебника съдържа 6 теми (общо 60 урока). Първата тема е преговор на изученото във втори клас – геометричният материал е свързан с обозначаването на геометрични фигури с букви. Следващите теми, в които знанията за геометричните фигури присъстват в отделни уроци са:

- „Умножение и деление“;
- „Таблично умножение и деление“;
- „Числата от 1 до 1000. Номерация“ – събиране и изваждане;
- „Писмено изчисляване“;
- „Устно изчисляване“.

Втората част на учебника съдържа 2 теми (общо 16 урока). Първата е „Числата от 1 до 100“, а втората „Числата от 1 до 1000“ – умножение и деление.

В настоящият параграф са представени геометричните задачи в разработките на уроци с геометрично съдържание, като са приведени примери (виж *Фигура* от 2 до 17 в дисертационния труд).

#### **Урок 1 - Обозначаване на геометрични фигури с букви – преговор от втори клас (към тема Преговор)**

1. Различни способи за обозначаване на точки - чрез свързване на точки по произволен начин.
2. Обозначаване на точки с букви от латинската азбука А, В, С, D, Е, F и т.н.
3. Обозначаване на отсечки с букви от латинската азбука АВ и CD.
4. Обозначаване на многоъгълник с букви от латинската азбука А, В, С, D, Е, F и т.н. (ABCD за правоъгълник или квадрат; ABC за триъгълник).

#### **Урок 2 - Площ. Способи за сравняване на фигури по площ (към тема Умножение и деление)**

1. Сравняване на кръг и квадрат по площ.
2. Сравняване на фигури чрез наблюдение.
3. Сравняване на фигури чрез способ налагане на една фигура върху друга.
4. Измерване на площите на фигурите и сравняването им чрез зададена мярка.

#### **Урок 3 - Единица за площ – квадратен сантиметър (към тема Умножение и деление)**

1. Наблюдение за измерване на площ на фигури с различни мерки.
2. Запознаване с единицата за площ – квадратен сантиметър.
3. Измерване на площ на фигура с помощта на квадратен сантиметър.

#### **Урок 4 - Площ на правоъгълник (към тема Умножение и деление)**

1. Намиране на площ на правоъгълник с помощта на мерки.

2. Практическа работа за намиране на площ на правоъгълник.
3. Въвеждане на правила за намиране на площ на правоъгълник:
  - умножаване на числата, изразяващи дължините на страните на правоъгълника;
  - измерване на площта на правоъгълника с помощта на линийка.

**Урок 5 - Единица за площ – квадратен дециметър (към тема Умножение и деление)**

1. Запознаване с единицата за площ – квадратен дециметър.
2. Превръщане на квадратен дециметър в квадратни сантиметри.

**Урок 6 - Единица за площ – квадратен метър (към тема Умножение и деление)**

1. Запознаване с единицата за площ – квадратен метър.
2. Установяване на съотношение между квадратен метър и квадратен дециметър.

**Урок 7 - Кръг. Окръжност (център, радиус, диаметър) (към тема Умножение и деление)**

1. Окръжност – сравняване с други фигури.
2. Радиус и диаметър.
3. Кръг.

**Урок 8 - Видове триъгълници според страните и ъглите (към тема „Писмено изчисляване“)**

1. Запознаване с основните свойства на триъгълника – наличие на три страни и три ъгла.
2. Изучаване на видове триъгълници според ъглите - остроъгълен, правоъгълен и тъпоъгълен.
3. Изучаване на видове триъгълници според страните – равностранен, равнобедрен и разностранен.

**Урок 9 - Геометрични фигури – триъгълник, квадрат, правоъгълник, трапец, ромб (към тема „Числата от 1 до 1000“ – умножение и деление)**

Този учебник включва девет урока, които формират геометрични знания. Те са представени и онагледени посредством много чертежи и примери. В края на всеки урок има включени задачи за упражнение и затвърдяване на получените знания, както и задачи за домашна работа. Към всеки урок има тест, с който учениците и учителите могат да проверят степента на овладяване на учебния материал.

**3.3.2. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от Украйна**

Учебникът за трети клас от Украйна е онлайн издание (<http://4book.org/uchebniki-ukraina/3-klass/1601-matematika-3-klass-bogdanovich-rus>).

Учебникът съдържа 175 страници. Той включва пет раздела – „Преговор на материала от 2 клас. Запознаване с уравнение“, „Хиляда. Номериране на трицифрени числа“, „Събиране и изваждане до 1000“, „Устно събиране и изваждане“, „Писмено събиране и изваждане на числа“, „Умножение и деление до 1000“, „Устно умножение и деление“, „Умножение и деление“, „Деление от вида 39:3, 72:6“, „Проверка на умножение и деление“, „Деление от вида 64:16, 125:25“, „Част“, „Деление с остатък“ и „Преговор на изученото през годината. Запознаване с писмено умножение и деление“. След всеки раздел на 2-3 страници има „Допълнителни упражнения“. Всяка част от допълнителните упражнения включва 1 или 2 геометрични задачи.

Учебникът е конструиран така, че няма отделен раздел, посветен на геометричния материал. Всеки урок включва различен брой задачи (9, 11, 12 и т.н.). Освен аритметични във всеки урок присъстват и различен брой геометрични задачи.

В този параграф са представени геометричните задачи в разработките на уроци с геометрично съдържание, като са приведени примери (виж *Фигура* от 18 до 35 в дисертационния труд). Геометричният материал е свързан с:

- 1) Обиколка на многоъгълник. Чергане:

- обиколка на правоъгълник;
  - чертане на четириъгълник ABCD;
  - чертане на правоъгълник по дадени страни и намиране на обиколката му.
- 2) Кръг. Окръжност. Радиус, диаметър:
- назоваване на точки, които лежат на окръжността;
  - чертане на окръжност по даден радиус.
- 3) Метър, сантиметър, дециметър и милиметър.
- 4) Задачи за построение – задачи с повишена трудност:
- квадрат;
  - правоъгълник;
  - окръжност;
  - триъгълник (Колко най-малко пръчици са необходими, за да се построят 6 триъгълника? Начертай);
  - шестоъгълник;
- 4.1.) Геометрични текстови задачи за построение - задачи с повишена трудност:
- Построй правоъгълник с ширина 3 см и го раздели на четири равни квадрата. Намери обиколката на дадения правоъгълник.
  - Начертай окръжност с радиус 3 см. Построй в нея два триъгълника с обща страна, като върховете им са на окръжността.
  - Построй квадрат и триъгълник, така че общата им част да бъде: 1) четириъгълник; 2) петоъгълник.
  - От четири еднакви квадрата построй един общ. Намери обиколката на фигурата, ако обиколката на малкия квадрат е 8 см. Начертай големия квадрат и един малък квадрат. Колко пъти обиколката на малките квадрати е по-голяма от обиколката на големия квадрат?
  - Дължината на страната АВ на правоъгълника ABCD е 8 см. Разположи кръгове в правоъгълника. Намери широчината на правоъгълника.
  - Разгледай рисунката. Открий и запиши 16 триъгълника и 7 четириъгълника.
  - Намери общия признак на елементите на множествата А и В.
  - Построй права линия и обозначи на нея точката О. От дадената точка построй противоположни отсечки  $AO = 45$  мм и  $OB = 53$  мм. Измери и изчисли дължината на отсечката АВ.
  - Построй шестоъгълник и начертай в него две отсечки, краищата на които лежат на страните му. Каква фигура се образува? Разгледай различни случаи.
  - Ученик е построил права линия като разположил на нея отсечки, които са страни на правоъгълника ABCD. Измери дължината на получената отсечка.
  - Построй права и последователно сложи на нея отсечки, които са страни на правоъгълника КМОР. Намери обиколката на правоъгълника.
- 5) Измерване страните на дадени триъгълници и сравняване на обиколките им;
  - 6) Означаване на триъгълник, правоъгълник и квадрат;
  - 7) Отсечка. Чертане на отсечка. Сравняване дължини на отсечки;
  - 8) Начупена линия;
  - 9) Видове ъгли;
  - 10) Видове триъгълници според страните и ъглите;
  - 11) Намиране на обиколка на триъгълници;
  - 12) Чертане на триъгълник и квадрат върху квадратна мрежа.

Учебникът е богато онагледен и включва голям обем от задачи, формиращи геометрични знания. Впечатление правят задачите с повишена трудност, които са главно за чертане и построение. Част от тях са и като задачи за домашна работа.

### 3.3.3. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от Германия

Анализираният учебник за III клас от Германия е от провинция Рейнланд-Пфалц. Учебникът за трети клас за немското училище (Rinkens, Hans-Dieter., Kurt, Hanisch, 2011) включва 137 страници и 14 теми.

В настоящия параграф са представени геометричните задачи от разработките на уроци с геометрично съдържание, като са приведени примери (виж *Фигура* от 36 до 62 в дисертационния труд):

- първата тема, която изучават немските ученици е „Преговор“;
- следва темата „Хиляди“ (тук е включен материалът за метър и километър);
- третата тема е посветена на геометрични тела (3D фигури) – „Тела в околната среда“ (паралелепипед - правоъгълен паралелепипед, куб, сфера (кълбо), цилиндър, конус, пирамида. Учениците се учат да ги разпознават и описват;
- правоъгълен паралелепипед;
- разглежда се и темата за сечение на фигури (геометрични тела);
- следват мерните единици метър и километър. Учениците сравняват разстояния от дадена точка до друга;
- „Събиране и изваждане“ – на числа до и над хиляда;
- следващи теми са „Размери“, „Умножение“, „Дати и информация“, „Писмено събиране“, „Сантиметър и милиметър, метър и сантиметър“;
- „Симетрия“;
- широко застъпена в учебното съдържание е симетрията (определяне ос на симетрия);
- „Писмено изваждане“, „Данни, случайности и вероятности“, „Деление“;
- „Ориентиране в пространството“ – учениците решават много задачи, свързани с ориентиране в пространството, работа с карти и координатна система;
- в учебника са включени и геометричните фигури кръг, триъгълник, правоъгълник, квадрат, многоъгълник;
- присъстват и задачи за търсене и отгатване на правилния отговор.

Например: Учителката нарисувала на дъската триъгълник и квадрат. Заедно фигурите имат 21 ъгъла. Колко квадрата е нарисувала учителката?

A: 2                      B: 3                      C: 4                      D: 5.

- задачи за вероятности – монети и зарове;
- учениците рисуват планове, правят чертежи и съставят скици на стаи и къщи;
- в учебното съдържание са включени и правоъгълни и кръгови диаграми;
- учениците работят с пъзели, в които фигурите са с различни геометрични форми.

Като цяло в немския учебник прави силно впечатление, че съдържанието на геометричния материал е значително по-малко в сравнение с аритметичния. Включени са интересни и развиващи въображението и пространствените представи на учениците от трети клас задачи. Широко застъпена е симетрията, както и геометричните тела (3D фигури), които присъстват в ежедневието на децата, те са навсякъде около тях.

### 3.3.4. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от САЩ

Анализираният тук учебник по математика за трети клас, използван в американските начални училища е на издателска къща Макмилиан, с автори Т. Тобърн, Дж. Форбс и Р. Бечъл и съдържа 426 страници, включващи и учебна тетрадка. В учебника се изучават 11 теми, отделени с различни цветове (кафяв, оранжев, зелен и др.). Първата тема е „Събиране и изваждане“, „Стойност“, „Събиране на големи числа“, „Изваждане на по-големи числа“, „Време и пари“, „Умножение“, „Деление“, „Измерване“, „Геометрия“, „Умножение и деление“ и „Дробни и десетични дробни“. След всяка тема има преговорен урок и тест. Тема 8 е свързана с измерване и включва 6 урока за нови знания и 4 урока за затвърдяване на знанията.

Геометричният материал е отделен в самостоятелна тема 9, която съдържа 7 урока за нови знания и 3 урока за затвърдяване на знанията.

Учениците от трети клас в американските начални училища изучават мерните единици см, м, км. Те измерват в инчове и половин инчове. Други мерни единици, с които се запознават учениците са фут, ярд и миля. В края на учебника са поместени таблици с мерните единици и преобразуването им, както и речник на термините.

В този параграф са представени геометричните задачи в разработките на уроци с геометрично съдържание, като са приведени примери (виж *Фигура* от 63 до 75 в дисертационния труд).

Първият урок с геометрично съдържание е свързан с изучаването на криви линии (крива отворена и крива затворена линия). В САЩ учениците от трети клас изучават освен геометрични фигури и геометрични тела (пирамида, куб, призма, цилиндър, сфера, конус). В учебната програма по математика за трети клас в училищата в САЩ са включени площ и обем. Учениците използват квадратна мрежа за чертаене на геометрични фигури. В учебното съдържание широко е застъпена и симетрията.

Учебното съдържание по геометрия не присъства само в тема 9, а и в други уроци чрез отделни задачи и чертежи. Първият урок от учебното съдържание в тема 8 „Измерване” е свързан с мерната единица за дължина см, представена чрез сравняване на предмети по дължина. Измерва се даден предмет и се съпоставя колко пъти се нанася на друг предмет. Дължините се измерват с линия.

Учениците изучават геометричните фигури триъгълник, правоъгълник и квадрат и техните обиколки. Учениците в САЩ изучават и многоъгълници.

Учебникът е представен в едно книжно тяло, което е удобно, тъй като целият учебен материал се намира в него и при необходимост учениците могат да си припомнят изучено учебно съдържание. Всеки урок е представен на две страници с много задачи и упражнения. Онагледяването чрез илюстративен материал е много полезно за малките ученици. Геометричният материал е свързан с житейския опит на учениците и е поднесен по разбираем и асоциативен начин.

### **3.3.5. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от Гърция**

В този параграф са представени геометричните задачи в разработките на уроци с геометрично съдържание, като са приведени примери (виж *Фигура* от 76 до 125 в дисертационния труд).

Гръцкият учебник за трети клас (Папагеоргиу, Ел., Леонидас Кириакидис, Парпунас, Хр., 2012) се състои от четири части – учебник „Алфа - А”, „Бета - В”, „Гама - Г” и „Делта - Д” ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ). Той е богато илюстриран и съдържа следния геометричен материал:

#### **1) учебник „Алфа - А”:**

- измерване на дължини и височини в метри и сантиметри;
- сравняване на дължини;
- откриване на геометрични тела и оцветяване на тези тела във фигура на човек – цилиндър, конус, кълбо, куб, паралелепипед;
- чертане на окръжност и квадрат с използване на предметен шаблон – кубче и чашка;
- откриване на многоъгълник сред геометрични фигури – шестоъгълник и осмоъгълник;
- чертане на фигури по даден модел върху квадратна мрежа;
- сравняване на разстояния в км и метри, изобразени чрез прави и начупени линии;
- намиране обиколка на геометрични фигури – нанасяне на данни в таблица;
- текстови задачи с геометрично съдържание от вида – Дължината на страната на равностранен триъгълник е 8 см. Обиколката на триъгълника е с 6 см по-малка от

обиколката на друг триъгълник. Намери дължините на страните на втория триъгълник;

- използване на 2 триъгълника, с които при допиране един до друг се образува четириъгълник. Пречертване в тетрадките и намиране на обиколката на получената фигура.

## 2) учебник „Бета - В”:

- редици/мотиви с геометрични фигури;
- класификация на геометрични фигури и систематизиране на данните в таблица;
- свързване на точки до получаване на отсечки или фигури;
- права и начупена линия. Намиране дължина на начупена линия;
- свързване на точки в квадратна мрежа за откриване на най-краткото разстояние;
- образуване на геометрични фигури (триъгълник, квадрат) от кибритени клечки;
- редици/мотиви с цветни форми. Оцветяване на геометрични фигури върху квадратна и триъгълна мрежа (задачи от тип „Пентамино“, свързани с построяване на фигури с помощта на дадени квадратчета с дължина 1 см в квадратна мрежа.) (Лалчев, 2009)
- лице на правоъгълник – въвежда се чрез квадратни единици върху квадратна мрежа;
- чертане на правоъгълник върху квадратна мрежа с дължини на страните, получени при хвърляне на зарче;
- чертане на правоъгълник върху квадратна мрежа по зададено лице в квадратни единици. Откриване и записване в таблица на различни комбинации от дължините на страните на правоъгълник при лице 24 квадратни единици (6x4, 2x12, 1x24 и 3x8);
- разпознаване на геометрични фигури и оцветяването на групи от четириъгълници и триъгълници в различни цветове (карта за игра с геометрични фигури).

## 3) учебник „Гама - Г”:

- създаване на мотиви/редици чрез чертане на мозайка върху квадратна мрежа;
- изобразяване на човешка фигура от геометрични фигури върху квадратна мрежа;
- чертане на квадрат в квадратна мрежа. Намиране на лице на квадрат по зададени дължини на страни в квадратна мрежа;
- симетрия – дорисуване на фигури и самостоятелно чертане на симетрични фигури;
- определяне на ос на симетрия;
- откриване на симетрия в букви от азбуката;
- геометрични тела (куб, триъгълна призма, пирамида). Преброяване на стените на тези фигури;
- разгъвки на геометрични тела;
- ъгъл, прав ъгъл – ъгъл по-голям от правия и ъгъл по-малък от правия.

Включени са задачи за отбелязване на прав ъгъл в геометрични фигури и пречертване на фигури с два прави ъгъла;

- правоъгълни триъгълници – съединяване на триъгълници за получаване на правоъгълник (пречертване и изрязване на триъгълници);
- координатна система.

## 4) учебник „Делта - Д”:

- видове триъгълници според страните. Именуване на триъгълници с една буква, записана върху тях;
- въвеждане на определение за равнобедрен триъгълник и чертане върху квадратна мрежа;
- равнобедрен триъгълник. Обиколка (Направи равнобедрен триъгълник с дължина на страната една кибритена клечка; Направи равнобедрен триъгълник с дължина на страната две кибритени клечки);

- свързване на фигури за получаване на равностранен триъгълник;
- разрязване на фигури за получаване на триъгълници;
- чертане на равностранен триъгълник върху триъгълна мрежа по дадени дължини на страни;
- образуване на равностранен триъгълник от три кибритени клечки;
- триъгълни числа;
- лице на правоъгълник - построяване на библиотека за книги (пресмятане дали дървеният материал ще стигне). Чертане на скица на библиотеката с рафтове;
- задачи за намиране на сбор, разлика, произведение и частно с числа, записани върху геометрични фигури.

Прави силно впечатление обемът на учебниците за трети клас в Гърция – 4 броя. Учебният материал е представен с много илюстрации и примери. Учениците моделират с геометрични фигури. Към края на четвъртата част на учебника е включена задача, която изисква голяма съобразителност и пространствено мислене, а именно задача за чертане на скица за библиотека и съпоставяне дали даден дървен материал ще бъде достатъчен за изпълнение на задачата.

### **3.3.6. Анализ на геометричното учебно съдържание в учебник по математика за трети клас от Франция**

Френският учебник за трети клас (Brissiaud, R., Pierre Clerc, 2005) включва 6 теми. В края на всяка тема има преговорен урок. Учебното съдържание по геометрия е представено в отделни уроци за нови знания, както и в уроци за затвърждаване на знанията. Изучаваният материал е в рамките на една страница. В горния ляв ъгъл на всяка страница се намира номера на урока, а в десния ъгъл – вида на изучавания материал. Някои от уроците за затвърждаване на знанията са разположени на две или три страници, включващи много задачи за упражнение. В учебника са представени двама герои Матилде и Матю, които водят учениците през учебния материал. Под формата на разговор те въвеждат основни понятия и правят коментар на изученото.

Учебникът започва с раздел за преговор на знанията от предходния клас, включващ 6 урока. Първият урок припомня мерната единица см и чертане на отсечка чрез свързване на точки. В следващия урок учениците измерват дължини на отсечки с линия в мм и см. Преговорният материал продължава с чертане на криви линии и припомняне на зависимостта между см и дм. След това учениците си припомнят геометричната фигура триъгълник – обозначаване и намиране на обиколка.

В този параграф са представени геометричните задачи в разработките на уроци с геометрично съдържание, като са приведени примери (виж *Фигура* от 126 до 148 в дисертационния труд).

В учебника са включени 12 урока, даващи на учениците нови геометрични знания. Темите на уроците са:

- Ъгли. Видове ъгли. Чертане;
- Окръжност, радиус, диаметър;
- Класификация на фигури;
- Построяване на фигури;
- Построяване на фигури по дадени ъгли;
- Успоредници. Чертане;
- Ромб;
- Многоъгълници;
- Четириъгълници;
- Правоъгълници;
- Симетрия;
- Площ;



По отношение на измерването френските ученици в трети клас изучават:

- измерване на ъгли;
- дължина и разстояние – метър, километър, инч, фут;
- мерна единица за площ – кв. см, кв. дм, кв. мм, кв. м.

В учебника са включени задачи за геометрично построяване:

- Начертай отсечка АВ с дължина 1 дм. Постави точка I върху отсечката АВ на 3 см от т. А. Постави точка С, която не принадлежи на отсечката АВ. Свържи СI и ВС;
- Начертай триъгълник АВС. Дължината на страната АВ е 12 см. Постави точка I по средата на страната АВ, след това постави точка J по средата на страната ВС и точка К по средата на страната СА. Свържи страните на триъгълника IJK. Ако построението е правилно ще установиш, че IJ е успоредна на АС, IK е успоредна на ВС и KJ е успоредна на АВ. Ако построението е правилно ще видиш, че дължината на IJ е наполовина на АС, дължината на IK е наполовина на ВС и дължината на KJ е наполовина на АВ;
- Начертай окръжност с център А и радиус 5 см. Постави точка В на окръжността. Свържи точките А и В. Върху АВ постави точка С на 4 см от точка А. Начертай окръжност с център С и радиус 4 см.

Учениците се запознават с мерната единица за дължина метър. Интерес представляват задачи за сравняване по размер на предмети от заобикалящия учениците свят – лъвът е дълъг 18 мм, 18 см, 18 дм или 18 м; вратата в стаята е висока 2 мм, 2 см, 2 дм или 2 м; гардеробът е висок 200 мм, 200 см, 200 дм или 200 м и т.н.

В урока „Прави и успоредни линии“ учениците се запознават с различното положение на правите в равнината.

В следващия урок „Многоъгълници“ се представят различни по вид многоъгълници. Учениците намират обиколка на начертан многоъгълник по дадени дължини на страни в различни мерни единици (см, мм) или сами измерват страните на фигура и попълват данни в таблица.

В учебника геометричният материал е представен с много чертежи и присъства в почти всеки урок под формата на задача за построение, намиране на обиколка на фигура или чертеж. Включени са много задачи за превръщане от една мерна единица в друга. Учениците използват карти и схеми за определяне на разстояние от едно населено място до друго.

В края на учебника е представена класификация на геометричните фигури, което е много полезно за учениците. Така те виждат и запомнят геометричните фигури, както и техните съществени белези.

### 3.4. Сравнителен анализ на геометричното съдържание в българските и чуждестранни учебници по математика за трети клас

Учебно-възпитателният процес по математика в трети клас трябва да се реализира на богата нагледно-практическа основа, осигуряваща условия за включване на учениците в различни видове дейности. При неговото осъществяване учителят е необходимо да отдели място на самостоятелната работа не само в уроците за затвърдяване и обобщаване, но и при усвояване на новите знания. Широко приложение трябва да намерят също и индивидуалната и груповата учебна дейност.

В Таблица 2 е показано наличието или отсъствието на геометрични задачи от съответните типове, включени в изследваните учебници за III клас, по които се обучават учениците в българските и чуждестранни училища.

Таблица 2. Включени типове задачи в изследваните учебници за III клас

№	Типове задачи	Бълга-рия	Русия	Украй-на	Герма-ния	САЩ	Гърция	Франция
1.	Разпознаване, сравняване, преброяване	+	+	+	+	+	+	+

2.	Измерване	+	+	+	+	+	+	+
3.	Чертане	+	+	+	+	+	+	+
4.	Именуване	+	+	+	-	-	+	+
5.	Намиране на обиколка	+	+	+	-	+	+	+
6.	Геометрични текстови задачи	+	-	+	-	-	+	+
7.	Ориентиране в пространството	+	-	-	+	-	+	+
8.	Логически геометрични задачи	+	-	+	+	-	-	-
9.	Многоъгълници	-	+	+	+	+	+	+
10.	Площ (лице на фигура) - мм <sup>2</sup> , см <sup>2</sup> , дм <sup>2</sup> , м <sup>2</sup>	-	+	-	+	+	+	+
11.	Кръг, окръжност	-	+	+	-	-	-	+
12.	Трапец, ромб	-	+	-	-	-	-	+
13.	Задачи за построение на квадрат, правоъгълник, триъгълник, кръг	-	-	+	-	-	+	+
14.	Множества	-	-	+	-	-	-	-
15.	Геометрични тела (3D фигури)	-	-	-	+	+	+	-
16.	Сечение на фигури	-	-	-	+	-	-	-
17.	Симетрия	-	-	-	+	+	+	+
18.	Координатна система	-	-	-	-	+	+	-
19.	Обем	-	-	-	-	+	-	-
20.	Триъгълни числа	-	-	-	-	-	+	-
21.	Успоредни прави	-	-	-	-	-	-	+
22.	Работа с карта, план	-	-	-	+	-	-	+
23.	Общ брой типове задачи	8	9	11	11	10	14	15

Видно от Таблица 2 е, че типовете задачи са най-много в учебника от Франция, следван от този от Гърция. В учебниците за трети клас от останалите изследвани страни разпределението на типовете задачи е приблизително еднакво. Прави впечатление, че в сравнение с България чуждестранните ученици в трети клас изучават многоъгълници, лице на геометрични фигури и съответните мерни единици, окръжност и кръг, което според действащите учебни програми у нас се изучава в четвърти клас. В анализираниите учебници от

чуждите държави широко са застъпени типове задачи с геометрично съдържание, които у нас се въвеждат и изучават след четвърти клас. Това са геометричните фигури трапец и ромб, както и различни задачи за построение, задачи за успоредни прави, координатна система и сечение. Силно застъпена в почти всички учебници е симетрията (ос на симетрия). Знанията за геометричните тела (3D фигури) също присъстват в повечето от чуждестранните учебници.

Съгласно новия Закон за предучилищното и училищното образование, който влезе в сила от учебната 2016/2017 г. и новите учебни програми учениците в IV клас в българските училища също ще се учат да разпознават геометричните тела куб, правоъгълен паралелепипед, кълбо, цилиндър, конус, пирамида, както и ще се запознаят с елементите на геометричните тела куб и правоъгълен паралелепипед – стена, връх, ръб. Учениците в България вече ще чертаят ъгъл по дадена градусна мярка и окръжност по даден радиус, ще извличат информация от различни източници – таблици и чертежи (Учебна програма по математика за първи клас, МОН, 2015; Учебна програма по математика за втори клас, МОН, 2016; Учебна програма по математика за трети клас, МОН, 2017).

От направения анализ на учебниците за трети клас става ясно, че учебното съдържание по геометрия в изследваните чуждестранни страни е сходно. Изучават се симетрия, геометрични тела (3D фигури), работа с карта (план), многоъгълници, лица на неправилни геометрични фигури, логически задачи с геометрично съдържание, разгъвки на геометрични тела, успоредни прави – съдържание, което не е застъпено в учебната програма и съответните учебници в България.

## Четвърта глава

### Вариативен модел за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици

#### 4.1. Описание на вариативния модел

Пред съвременния учител стои предизвикателството да подготвя своите ученици с оглед на тяхната социална реализация. Необходимо е ученикът да бъде заинтригуван и провокиран да мисли, за да развива творческите си способности, да търси и намира нестандартни решения в живота.

Обучението на учениците по геометрия е от решаващо значение както за повишаване педагогическата ефективност на учебно-възпитателния процес по математика (геометрия), така и за развитието на математическите способности и пространствените представи на учениците в начална училищна възраст. Правилният подбор на задачи от учителя е изключително важно методическо условие, което спомага за усвояването на геометричното съдържание.



Фигура 2. Концептуална рамка на вариативния модел за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици

Въз основа на откритите силни страни при представяне и онагледяване на геометричното учебно съдържание в анализирания учебници, в разработения авторски вариативен модел за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици са заимствани добри практики, като те са адаптирани съобразно заложеното в българската учебна програма за обучение по математика за трети клас.

Разработването на вариативен модел изисква правилно да се определят, анализират и експериментално проверят всички негови структурни компоненти: **цел, съдържание, средства, методи и форми на обучение, диагностика за установяване на постиженията на учениците.**

**Целта** на обучението по геометрия на учениците от трети клас (9-10 годишни ученици) е подчинена на общата цел на обучението в началното училище. Реализирането на образователните цели изисква да се използват форми, методи и средства на обучение, които да гарантират усвояване и интерпретиране на учебното съдържание, да стимулират мисловната дейност и да осигуряват мотивация за учене на ученика.

Геометричният учебен материал по математика, изучаван в трети клас в България включва права и крива линия, лъч, ъгъл – връх и рамо, видове ъгли, видове триъгълници според ъглите. В първи и втори клас учениците са се запознали с геометричните фигури квадрат, кръг, триъгълник, правоъгълник; измерване на отсечка и чертане на отсечка по зададена дължина в см; видове триъгълници според страните, чертане на триъгълник, квадрат, правоъгълник върху квадратна мрежа, намиране обиколка на триъгълник и правоъгълник.

Към геометричните задачи, които е предвидено да решават учениците от трети клас в България чрез предлагания модел включвам вариантни задачи, каквито решават техни връстници в чужди страни. В голямата си част тези задачи се решават на нагледно-практическа основа. Това са вариативни и алтернативни геометрични задачи (от вида на TIMSS), включващи:

- Симетрия;
- Определяне координати на обекти върху квадратна мрежа;
- Работа с карта (план);
- Геометрични тела (3D фигури);
- Многоъгълници;
- Класификация и сериация на геометрични фигури;
- Пропедевтика на понятието „сечение“;
- Пространствено ориентиране;
- Логически задачи с геометрично съдържание;
- Разгъвки на геометрични тела.

Тези задачи и упражнения ще развият мисловните и графичните способности на учениците, както и пространственото им мислене.

Вариативният модел за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици включва в съдържателен аспект методика на работа с общо 104 различни по тип геометрични задачи (31 въвеждащи задачи и 73 затвърждаващи задачи, разпределени в 11 теми, които са предназначени за работа в един учебен час). В началото на часа по математика учителят представя темата и насочва третокласниците към изучаването на конкретната тема, използвайки въвеждащите задачи, чрез които се извършва актуализация на предходни знания и умения на всеки ученик. В хода на урока всеки третокласник получава задачите, които предстои да бъдат изпълнявани в съответния учебен час на работни листа. Работи се по конкретната тема от вариативния модел, в която се изпълнява всяка задача, съобразно целта, знанията и уменията, които се усвояват чрез нея. Знанията и уменията на учениците се установяват чрез включените задачи, както и чрез наблюдение на учителя и докторанта. Вариативният модел включва и инструментариум за диагностика на постиженията по геометрия в трети клас.

**Учебното съдържание** е структурирано за два етапа – въвеждащ и затвърждаващ.

Въвеждащият етап цели актуализирането на знания и умения за решаване на геометрични задачи – знанията за геометричните фигури и уменията за чертане на изучени геометрични фигури и др. Тук основната роля е на началния учител.

Изяснява се начинът за решаване на дадена задача:

- чрез сравнение – откриване прилики и разлики между геометрични фигури;
- чрез класификация на геометрични фигури според броя на страните, броя на страните и ъглите, дължините на страните;
- чрез чертане или дочертване на геометрични фигури в квадратна мрежа;
- чрез разделяне на дадена геометрична фигура на части или групирането на части от нея в едно цяло.

Към този етап са разработени различен брой въвеждащи геометрични задачи по всяка тема от вариативния модел за обучение (видно от *Приложение 5* към дисертационния труд).

На затвърждаващия етап се решават задачи и упражнения, включващи варианти на геометрични задачи (видно от *Приложение 6* към дисертационния труд). Така учениците ще използват, покажат и развият натрупаните знания и умения.

**Средствата за обучение** на учениците включват вариативни задачи и упражнения, подпомагащи изграждането на знания и умения за решаване на конкретни геометрични задачи.

Когато дадена задача или геометрична фигура не е изучавана и е непозната за учениците, те търсят начин за решаване по аналогия, използвайки житейския си опит и по този начин усвояват математически знания и умения. При решаване на дадена геометрична задача от вариативния модел, третокласникът е необходимо да анализира условието ѝ, да определи точно (прецизно) как ще я реши, да намери, съобрази и приложи основните действия, които са адекватни за решението на поставената задача.

Задачите във вариативния модел са градиращи по трудност, подбрани са съобразно психическите особености и възприемателните възможности на учениците от трети клас. Включените задачи и упражнения развиват пространственото мислене на учениците (чрез геометрични задачи за изчисление), творческото им мислене и въображение (работа с разгъвки на геометрични фигури), както и графичните им способности (чрез геометрични задачи за построение по дадени размери и чертане в квадратна мрежа).

Чрез вариативния модел за обучение по геометрия ще се въвеждат вариативно учебно съдържание на практическа основа и нови похвати на работа с учениците от трети клас.

**Методите на обучение** целят усвояване на похвати от учениците за решаване на различни типове геометрични задачи. За експерименталното обучение са разработени следните похвати за усвояване на геометричния учебен материал:

- сравняване на геометрични фигури;
- разделяне на дадена геометрична фигура на части;
- решаване на геометрични задачи за построение;
- съставяне и решаване на геометрични задачи за изчисление;
- класификация на геометрични фигури;
- обосноваване на решения.

**Формите на обучение** са фронтална, групова, индивидуална в зависимост от спецификата и сложността на конкретната геометрична задача, която решават третокласниците.

**Диагностиката за установяване на постиженията на учениците** се осъществява чрез провеждане на тестове в началото и края на експерименталното обучение. Подготвен бе инструментариум за установяване на равнището на овладените от учениците знания и умения.

Разработеният вариативния модел за обучение на учениците от трети клас е апробиран със 149 ученици в различни начални училища под формата на експериментално обучение, което беше проведено през месеците март, април и май 2017г. В една учебна седмица се провеждаха по един или два урока по преценка на учителя в зависимост от изучаваното учебно съдържание. Обучението с прилагане на вариативния модел е реализирано от учителите на учениците от съответния клас в присъствието на докторанта.

Вариативният модел от задачи и упражнения за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици се състои от 11 теми:

1. Обиколка на фигури – урок 1;
2. Обиколка на фигури – урок 2;
3. Отсечки. Криви и начупени линии;
4. Логически задачи – урок 1;
5. Логически задачи – урок 2;
6. Многоъгълници – урок 1;
7. Многоъгълници – урок 2;
8. Геометрични задачи;
9. Огледален образ;
10. Геометрично построяване;
11. Животни от геометрични фигури.

Тези 11 теми са изцяло с геометрично съдържание и са предназначени за апробиране в експерименталните паралелки. Включените задачи и упражнения допълват учебния материал по геометрия заложен в учебната програма за трети клас. Целта е учениците да получат нови знания и развият своите пространствени представи чрез нов тип задачи и така да се подпомогне и обогати учебния процес. Темите и задачите, които са представени чрез вариативния модел за обучение по геометрия могат да се използват в уроци за нови знания, както и в уроци за затвърдяване на знанията и формиране на умения (упражнение), съобразно методиката на обучение по математика в началните класове (Новакова, 2004; Върбанова, 2013).

Преди създаването на вариативния модел за обучение са анализирани типичните грешки по геометрия, които допускат учениците след проведените констатиращ експеримент в началото на трети клас. Установено бе, че някои от учениците изпитват затруднения при разпознаване на геометрични фигури по форма – отсечка и кръг. Поради това е включена тема, свързана с чертане и измерване на отсечки. Учениците се затрудняват и при определянето на видовете триъгълници според страните. В задачата, свързана с откриване на брой триъгълници и правоъгълници в начертана геометрична фигура, грешките на учениците се дължат или на неразбиране условието на задачата или на липса на опит в решаването на подобни или сходни задачи.

Друга трудност срещат учениците при работата с квадратна мрежа. Повечето ученици не определят правилно страните на посочени геометрични фигури върху квадратната мрежа, тъй като те трябва да съобразят, че едно от квадратчетата на мрежата отговаря на 1 см и така да открият дължините на страните на квадрат или правоъгълник. От тук идват и проблемите с намирането на обиколка на начертани квадрат или правоъгълник върху квадратна мрежа. Поради абстрактния характер на този учебен материал е добре да се решават по-често подобни задачи.

Сериозни грешки и липса на знания показват учениците при намиране на обиколка на квадрат по дадена страна или при намиране на страна на квадрат по дадена обиколка, както и при намиране на обиколка на правоъгълник по дадена една страна и другата, изразена чрез зависимост „...пъти по-малко“ или намиране широчината на правоъгълник по дадена обиколка и дължина.

При определяне броя на триъгълници на комбиниран чертеж учениците посочват само явните триъгълници без да съобразят, че може да се образуват триъгълници от обединяване на два по-малки и т.н.

Поради гореизложените типични грешки на учениците, показани в началото на трети клас, включвам подобни задачи с геометрично съдържание във вариативния модел. Отделните теми съдържат различен брой задачи между 6 и 9. Някои от задачите могат да се решават самостоятелно от учениците, а други изискват фронтална работа и пояснения от страна на учителя. В началото на учебния час се провежда актуализиране на знанията и уменията на учениците чрез предложените въвеждащи задачи (видно от *Приложение 5* към дисертационния труд), както и се представят сходни задачи на тези, които ще се решават с

цел запознаване с новия тип задачи. След това на учениците се раздават страници със задачите по конкретната тема, за да могат да работят. Темите, респективно задачите са съставени така, че с тяхна помощ да се затвърдят знанията и уменията на учениците, придобити по време на учебния час. Включени са и занимателни, логически и творчески задачи, които повишават мотивацията на учениците. (видно от *Приложение 6* към дисертационния труд)

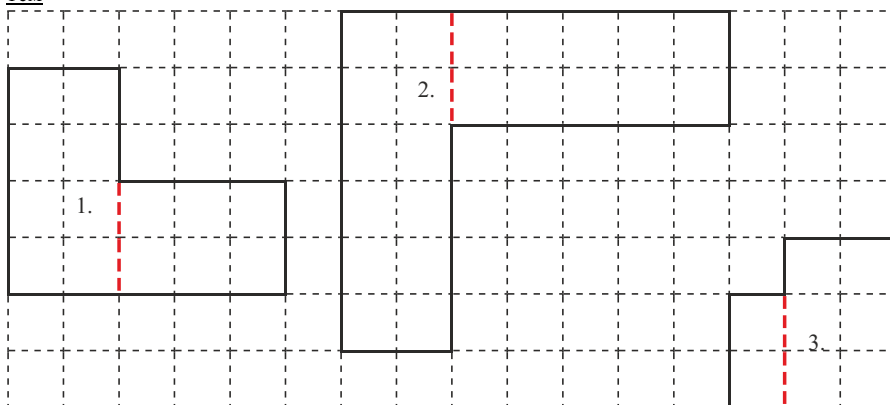
### 1. Обиколка на фигури – урок 1

**Методика на работа:** В началото на учебния час учителят актуализира знанията на учениците за намиране на обиколка на геометрични фигури като използва въвеждащите задачи. (видно от *Приложение 5* към дисертационния труд) Втората въвеждаща задача е свързана с работа с квадратна мрежа и намиране на обиколка на неправилни фигури. На учениците е необходимо да се припомни, че едно квадратче от мрежата е с дължина 1 см. При решаване на четвъртата задача учителят е добре да обърне внимание на общата страна на квадрата и триъгълника, за да се изключи при намирането на обиколката на цялата фигура.

Първата тема е „Обиколка на фигури”, която е представена в два урока. Това се налага поради необходимостта от повече задачи, които да решават учениците, свързани с този учебен материал по геометрия. Целта е да се затвърдят знанията на учениците и същевременно да се представят различни и нови по вид задачи, свързани с намиране обиколка на фигури. (видно от *Приложение 6* към дисертационния труд)

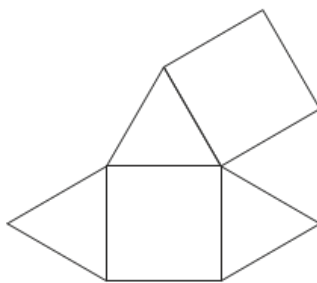
В първия урок задачите са 8 на брой. В първата задача се търси обиколка на триъгълник по дадени три страни. Следващата задача е за намиране на обиколката на триъгълник, чиито страни са по 9 см, т.е. учениците трябва да съобразят, че триъгълникът е равностранен. В следващите две задачи се търсят страните на триъгълници по дадени обиколки и дължини на другите страни, като се използва и зависимостта “с ... по-голямо”. Петата задача изисква от учениците съобразителност и работа с квадратна мрежа за намиране на обиколка на неправилни фигури.

1 см



Фигура 3

В шестата и седмата задачи учениците е необходимо да съобразят размерите на общи страни на дадените фигури, за да намерят търсените обиколки. Учителят може да изиска от учениците да пресметнат обиколките на триъгълника и на квадрата, за да се упражнят и след това обиколката на цялата фигура.



Фигура 4

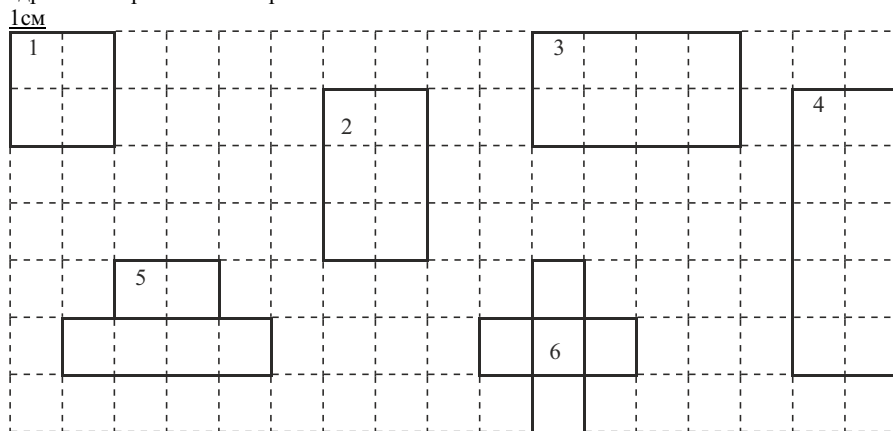
Последната задача представлява квадрат, разделен на 25 малки квадрата. Обиколката на всеки от малките квадрати е 80 см. Учениците трябва да намерят обиколката на целия квадрат. Това е задача с избираем отговор.

## 2. Обиколка на фигури – урок 2

Методика на работа: Учебният час може да започне с актуализация на знанията на учениците за намиране на обиколка на геометрични фигури и да продължи с решаване на въвеждащите задачи към тази тема (видно от *Приложение 5* към дисертационния труд). За втората задача учителят насочва третокласниците да мислят логично и да съобразят размерите на страните на малките квадрати спрямо дадените дължина и ширина на големия правоъгълник. В третата задача е важна ролята на учителя, който да припомни какво знаят учениците за равностранния триъгълник. След това да ги насочи към дадените данни в задачата, наблягайки на факта, че обиколката на всеки триъгълник е 24 см.

Във втория урок на тема „Обиколка на фигури“ задачите са седем и са градираны по трудност. Чрез първите две задачи се затвърдяват знанията и уменията на учениците за намиране на обиколка по дадени страни на начертани триъгълници. Тук се проверяват знанията на учениците за видовете триъгълници според страните. Разбира се освен геометрични знания чрез тези задачи се разкрива и овладяването на действие умножение. (видно от *Приложение 6* към дисертационния труд)

Третата задача е свързана с работа с квадратна мрежа като учениците трябва да посочат коя от начертаните фигури има най-голяма обиколка, имайки предвид, че едно квадратче от мрежата отговаря на 1 см.

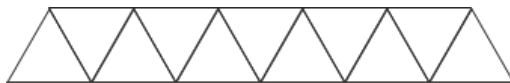


Фигура 5

Последните три задачи изискват съобразителност и развиват логическото мислене у учениците. Едната задача изисква преминаване от едни мерни единици в други (см, дм, м), за да се пресметне и посочи правилния избираем отговор.



Задача 7 представя фигура образувана при долеянето на 11 равностранни триъгълника, като всеки един от тях е с обиколка 21 см. Търси се обиколката на фигурата. Учениците са улеснени отново с посочване на избираеми отговори. Задачата изисква от учениците да намерят страните на равностраните триъгълници по дадената обиколка и след това да съобразят да изключат общите страни за всеки триъгълник за правилното решение на задачата.



Фигура 6

### 3. Отсечки. Криви и начупени линии

**Методика на работа:** Актуализацията на знанията и уменията на учениците за геометричната фигура отсечка може да се направи чрез задача, в която учениците е необходимо да открият броя на отсечки сред други фигури (задачата е на класната дъска). След това урокът може да продължи с решаване на въвеждащите задачи към темата (видно от Приложение 5 към дисертационния труд). За решението на първата и втората задача учениците си припомнят правилното използване на чертожната линия при чертане и измерване на отсечка. Необходимо е учителят да обърне специално внимание на правилното поставяне на линейката. Добре е учителят да дискутира допусканата грешка, а именно измерване от първото, вместо от нулевото деление, за да може учениците да я преодолеят. Задачите са включени поради факта, че това е една много често допускана грешка (Кирова, 2009).

Тази тема обединява два от елементите на геометричното съдържание от учебните програми по математика за началните класове. Тук са включени 6 задачи – 4 за отсечки, свързани с чертане на отсечки по дадени техни дължини в сантиметри и откриване на дължини на отсечки според зависимостите между тях „по-дълга” и „по-къса”. (видно от Приложение 6 към дисертационния труд)

Двете задачи, които целят затвърдяване на новия за трети клас учебен материал за криви и начупени линии са свързани с разпознаване и преброяване на ъгли в квадратна мрежа, както и определяне на видове ъгли.



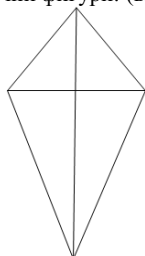
Фигура 7

### 4. Логически задачи – урок 1

**Методика на работа:** Урокът може да започне с решаване на първа задача от въвеждащите към темата (видно от Приложение 5 към дисертационния труд). Учителят насочва вниманието на учениците, че е необходимо да се преброи и големия триъгълник. Втората задача е аналогична като учениците преброяват триъгълниците, образувани в правоъгълника. За правилното осмисляне и решение на третата задача е важно учениците да разгледат редицата от фигури и да открият в каква последователност се повтарят. При четвъртата задача учителят може да използва цветни пластмасови клечки или сламки с различна дължина за образуване на триъгълници. Фронталната работа е свързана с приближаване краищата на клечките или сламките до получаване на триъгълник. На класната дъска може да бъдат начертани различни по вид триъгълници спрямо страните и спрямо ъглите.

Темата „Логически задачи“ е разгледана в два урока. Логическите задачи са интересни за третокласниците. Целта на тези задачи е да развият логическото мислене на учениците чрез решаване на геометрични задачи. В темата са включени 9 задачи.

Първите две задачи са свързани с откриване на брой триъгълници и правоъгълници в комбинирани геометрични фигури. (видно от *Приложение 6* към дисертационния труд)



Фигура 8



Фигура 9

В третата задача от учениците се изисква да открият закономерността в подредбата на дадени фигури и след това да дорисуват нужната редица. Оставено е място да обяснят своето решение.



Фигура 10

Следващата задача е сходна, като са дадени избираеми отговори.



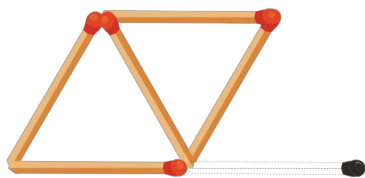
Фигура 11



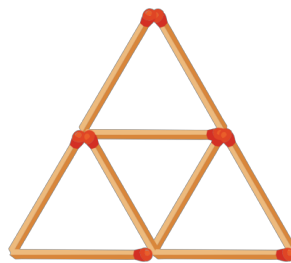
Фигура 12

В задача 5 учениците трябва да открият в колко от правоъгълниците се намира звездичка. От тях се изисква да преброят правилно правоъгълниците. Целта е учениците сами да стигнат до вярното решение на задачата като съобразят, че е необходимо да преброят и големия правоъгълник.

Задачи седем, осем и девет са свързани с работа с кибритени клечки. Учениците построяват последователно свързани триъгълници. Те откриват какъв е минималния брой клечки, които е необходимо да се премахнат, за да остане един триъгълник от композиция от няколко триъгълника.



Фигура 13

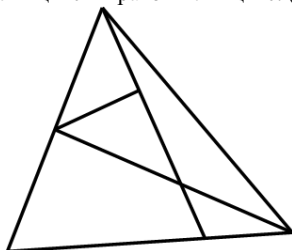


Фигура 14

## 5. Логически задачи – урок 2

**Методика на работа:** Актуализацията на знанията на учениците се осъществява чрез трите въвеждащи задачи към темата (видно от *Приложение 5* към дисертационния труд). След това учениците работят самостоятелно по задачите от вариативния модел.

В следващия урок, посветен отново на логическите задачи, се въвеждат по-сложни задачи, свързани с определяне на брой фигури. Общо задачите са седем. Те представляват комбинирани геометрични фигури, като целта е учениците да преброят вярно броя на триъгълниците и правоъгълниците. (видно от *Приложение 6* към дисертационния труд)



Фигура 15



Фигура 16

Тук отново са включени и задачи за дорисуване и откриване на редица от фигури, както и задача с кибритени клечки. Целта на втория урок, включващ логически задачи е учениците да работят самостоятелно, тъй като вече са решавали сходни задачи в предния учебен час.

## 6. Многоъгълници – урок 1

**Методика на работа:** Урокът може да започне с показване на модели на триъгълник и правоъгълник, с което да се актуализират знанията и уменията на учениците за определяне броя и вида на ъглите в тези геометрични фигури. След това да се премине към трите въвеждащи задачи към темата, като се преброяват ъглите в посочените фигури (видно от *Приложение 5* към дисертационния труд). Учителят може да разшири работата в урока като изиска от учениците освен да преброят ъглите на начертаните фигури и да посочат дали те са прави, остри или тъпи.

Темата „Многоъгълници“ е застъпена отново в два урока. По същество с включените задачи не се цели въвеждане на определение за многоъгълник и наименованията на различните видове многоъгълници, тъй като този учебен материал не се изучава в трети клас. Идеята е да се покаже и докаже, че учениците могат да решават задачи, в които начертаните или дадени фигури имат повече ъгли от изучените от тях триъгълник, правоъгълник и квадрат. Всичко се случва на практическа основа и така учениците надграждат усвоените от тях знания и умения по геометрия. (видно от *Приложение 6* към дисертационния труд)

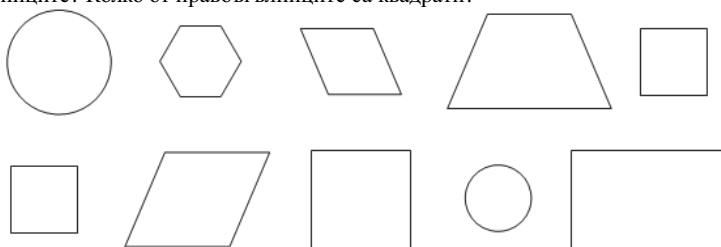
В първата задача от общо шестте в урока, само една от посочените фигури е изучавана, но условието на задачата изисква да се посочи коя от фигурите има четири ъгъла. Останалите фигури са познати на учениците от бита и натрупания житейски опит на 9-10 годишна възраст. Те са срещали тези геометрични фигури под формата на различни кутии от бонбони, опаковки, украси и др. Различният брой ъгли, повече от изучените до момента до четири ъгъла (триъгълник, правоъгълник и квадрат), не затрудняват третокласниците в хода на урока.



Фигура 17

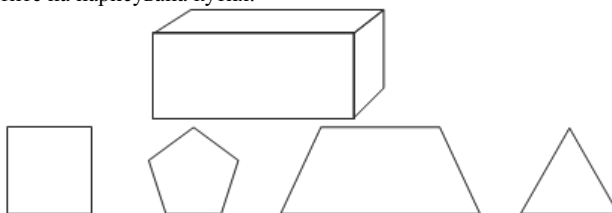
Втората задача цели да провери и затвърди знанията на учениците за видовете ъгли, както и правилото, че квадратът е правоъгълник, на който четирите страни са равни. Въпросите в задачата са: Кои от фигурите на чертежа имат прави ъгли? Колко са

правоъгълниците? Колко от правоъгълниците са квадрати?



Фигура 18

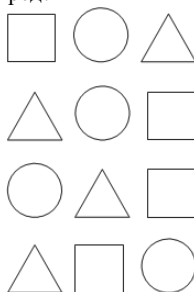
В третата задача на практическа основа се търси коя от посочените фигури е с формата на една от частите на нарисувана кутия.



Фигура 19

В следващите две задачи се търсят брой ъгли в начертани фигури.

Последната задача е занимателна за учениците. Тя изисква от третокласниците да познаят и преброят геометричните фигури (кръг, квадрат и триъгълник), както и правилно да се ориентират в посоките (ляво и дясно). Условието на задачата е: Колко са фигурите на чертежа? Колко са квадратите? Колко са триъгълниците? Каква е фигурата в долния ляв ъгъл? Каква е фигурата в средата на първия ред?



Фигура 20

### 7. Многоъгълници – урок 2

Методика на работа: Урокът започва с решаване на двете въвеждащи задачи към темата, като учителят съдейства на учениците при необходимост (видно от Приложение 5 към дисертационния труд).

Във вторият урок за многоъгълници са включени пет задачи (видно от Приложение 6 към дисертационния труд). В първата задача учениците трябва да посочат кои от фигурите имат четири ъгъла.

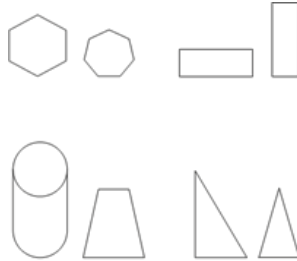


Фигура 21

Втората задача учениците могат да решат като използват житейския си опит. Те лесно се ориентират коя от дадените геометрични фигури има формата на част от кутията за грах.

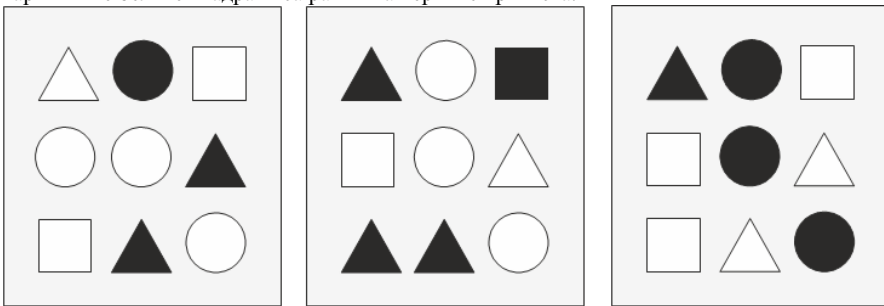
Третата задача е интересна за третокласниците. Тя представлява медена пита, чийто ъгли е необходимо да се запишат.

Четвъртата задача изисква от учениците да открият в коя от двойките фигурите са еднакви по род. Фигурите са представени в различно положение в равнината, някои са с различен брой ъгли и форма. Третокласниците трябва да съобразят, че остроъгълният и правоъгълният триъгълник са триъгълници, както и различните по разположение в равнината правоъгълници.



Фигура 22

Последната задача е по-скоро логическа. В нея учениците трябва да посочат на коя от картинките белите квадрати са равни на черните кръгчета.



Фигура 23

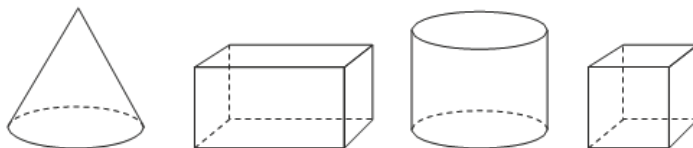
С последните две задачи се работи върху класификацията и сериацията на равнинни фигури. Според Ж. Пиаже при учениците се развиват две логически операции: *класификация* по един признак (групиране, сортиране на предмети и обекти по един признак) и *сериация* (градирано степенувано подреждане на предмети и обекти по зададен признак – височина, нюанси на цвят и др.). (Piaget, 1983)

## 8. Геометрични задачи

Методика на работата: Урокът е добре да започне с трите въвеждащи задачи към темата, които се решават последователно (видно от Приложение 5 към дисертационния труд). Преди решаването на третата задача, която е за чертане и измерване, учителят е необходимо да припомни на учениците как се поставя линията и как се чертае и измерва правилно. От учениците е добре да се изисква старание и прецизност при решаването на тези типове задачи.

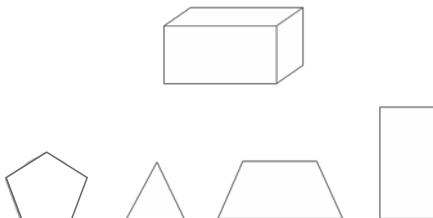
В тази тема са включени задачи с геометрични тела (3D фигури) – сфера, пирамида, конус, цилиндър, куб, паралелепипед. На практическа основа учениците откриват на кои геометрични фигури имат форма дадените тела. Третокласниците не се запознават с наименованията на посочените геометрични тела, макар че някои от тях са им познати от натрупания житейски опит и се срещат в бита. Учениците познават пирамидата, куба и конуса, като често употребяват тези наименования в ежедневието си. С тази тема се извършва начална пропедевтика на изучаването на тези геометрични тела.

Темата е наречена „Геометрични задачи“ и съдържа осем задачи. Първите четири задачи са свързани с определяне на различни форми. Например задача 2 има следното условие: Коя от фигурите има форма на кубче? (видно от Приложение 6 към дисертационния труд)



Фигура 24

Третата и четвъртата задачи са сходни като е променено само положението на фигурите в равнината. Например: Коя от частите на кутията съответства на изброените по-долу фигури?

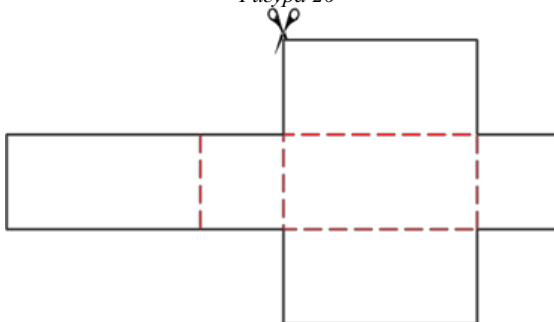


Фигура 25

Петата и шестата задачи изискват от учениците да изрежат и сгънат фигури по пунктирани линии, за да открият на кои от посочените предмети приличат. Тук третокласниците работят с разгъвки на геометрични тела. Например задача 5: Изрежи и сгъни. На кой от предметите прилича твоя модел?



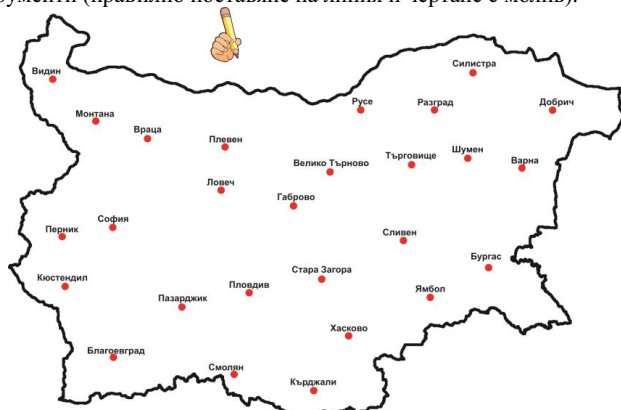
Фигура 26



Фигура 27

Седмата и осмата задачи от тази тема са свързани с работа с карта (план). Третокласниците свързват последователно с отсечки определени точки на градове от картата на България, за да получат триъгълник или правоъгълник. Целта е след като учениците свържат точките и получат дадена фигура да определят и запишат каква е тя – за триъгълника (какъв е по вид според страните и според ъглите) и за четириъгълника – какъв е той

(правоъгълник или квадрат). В тези задачи се упражняват и знанията и уменията за работа с чертожни инструменти (правилно поставяне на линия и чертане с молив).



Фигура 28

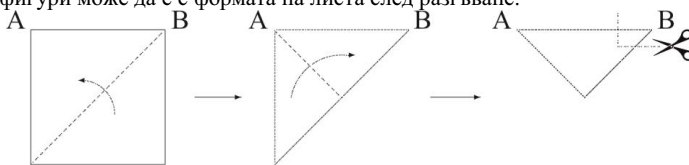
### 9. Огледален образ

Методика на работа: За въвеждане в темата на урока може да се използва огледало и учениците да видят изображения на различни предмети в него. След това учителят преминава към изпълнението на трите въвеждащи задачи към темата (видно от Приложение 5 към дисертационния труд).

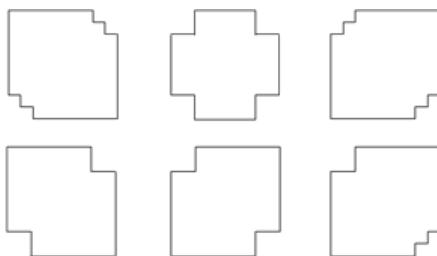
За първата задача от вариативния модел за обучение (видно от Приложение 6 към дисертационния труд) е добре учениците да се насочат към групова работа (учениците на един чин да работят заедно). Важно е учителят да обясни на учениците да следват показаната схема за прегъване и изрязване на листа. След това учителят минава по чиновете, за да види как се справят учениците и оказва съдействие при необходимост.

Тази тема включва 8 задачи. На практическа основа учениците упражняват симетрия, като отново понятие не се дава и затова темата е озаглавена „Огледален образ“.

Първата задача е творческа и изисква от учениците да сгънат квадратен лист хартия веднъж (виж Фигура 29 и Фигура 30) и после да го прегънат още веднъж. След това да изрежат листа в единия край, както е показано на схемата. Те трябва да открият коя от посочените фигури може да е с формата на листа след разгъване.



Фигура 29



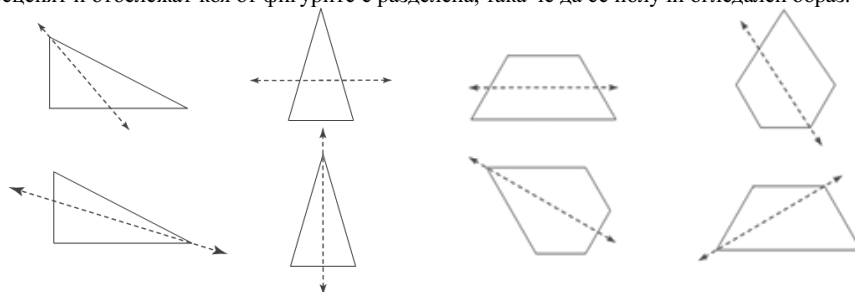
Фигура 30

Следващите две задачи изискват от учениците да покажат на коя от дадените фигури, представени с шахматна дъска и картинки (усмихнати човечета, емотикони) е показано изображение в огледалото.



Фигура 31

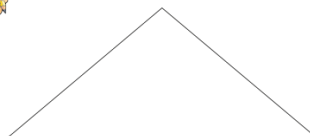
Три от останалите задачи са с избран отговор. В тях третокласниците трябва са преценят и отбележат коя от фигурите е разделена, така че да се получи огледален образ.



Фигура 32

Фигура 33

Последните две задачи са за построение. Учениците трябва да разделят с линия (линии) дадените геометрични фигури на две еднакви части.



Фигура 34

## 10. Геометрично построяване

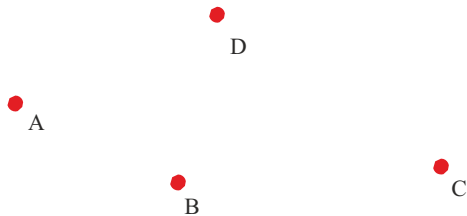
**Методика на работа:** Урокът започва с изпълнението на трите въвеждащи задачи към темата (видно от *Приложение 5* към дисертационния труд). Първите две задачи са свързани с чертане и измерване. Учителят припомня правилата за работа с чертожни инструменти. При третата задача учителят обяснява на учениците къде се намира точка К (т. К) върху квадратната мрежа и как да записват буквата и цифрата в скобите, съгласно посочения пример. С тази задача от вариативния модел се прави пропеевтика на координатна система и определяне на местоположение на точки в координатната система.

Преди преминаване към решението на трета задача от вариативния модел за обучение (видно от *Приложение 6* към дисертационния труд) учителят е добре да обясни на учениците, че могат да начертаят фигурите в различно положение в равнината.

Темата съдържа 6 задачи и е избрана, тъй като развива мисленето и пространствените предсти на учениците. Упражняват се и уменията за чертане и работа с квадратна мрежа.

Първата задача изисква от учениците да свържат точки в квадратна мрежа и да запишат какви са получените фигури. Втората отново е за чертане – намиране на разстояние от т. А до т. С.

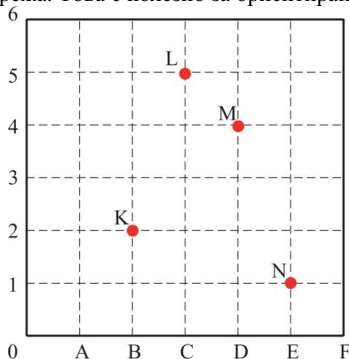




Фигура 35

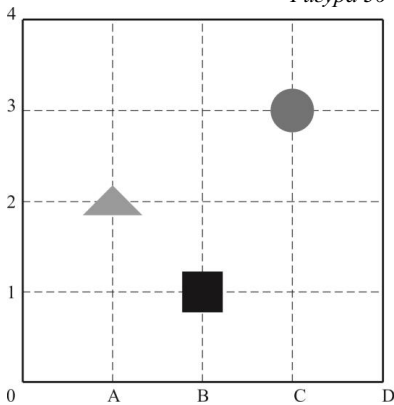
В третата и четвъртата задачи учениците работят с квадратна мрежа като е необходимо да начертаят квадрат с обиколка 8 см и правоъгълник с обиколка 8 см, който не е квадрат. Тук третокласниците могат да покажат вариантност при чертането на правоъгълника – дължини по 1 см и ширини по 3 см или дължини по 3 см и ширини по 1 см (различно положение в равнината).

Последните две задачи са свързани с определяне координати на обекти върху квадратна мрежа. Това е полезно за ориентирването в пространството на учениците.



Фигура 36

1. т. К се намира на (B;2)
2. т. L се намира на (.....)
3. т. M се намира на (.....)
4. т. N се намира на (.....)

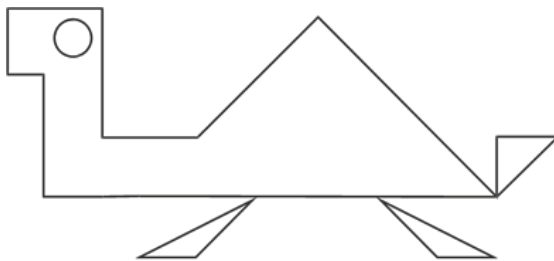


Фигура 37

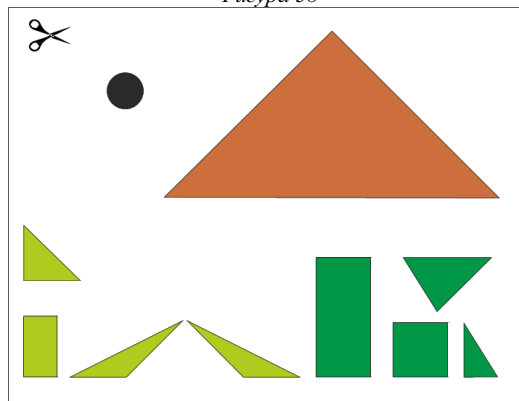
1. ▲ се намира на (.....)
2. ■ се намира на (.....)
3. ● се намира на (.....)

## 11. Животни от геометрични фигури.

Методика на работа: Урокът започва с изпълнението на поставените задачи. В тази тема са включени три фигури на животни (костенурка, риба и патица), като задачата на учениците е да изрежат дадените геометрични фигури и да ги подредят по шаблона, за да получат животното. (видно от Приложение 6 към дисертационния труд)



Фигура 38



Фигура 39

С включените задачи във вариативния модел се постига актуализиране на предходни знания и умения на третокласниците за основните изучавани геометрични фигури (кръг, квадрат, правоъгълник и триъгълник), затвърдяват се и се разширяват техните знания за намиране на обиколка на фигури, чертане на отсечки, определяне на видовете триъгълници според страните и ъглите, решаване на логически задачи с геометрично съдържание, като същевременно се развиват и умения за ориентиране в пространството. Задачите от симетрия (огледален образ), определяне координати на обекти върху квадратна мрежа, работа с карта (план), геометрично построяване, многоъгълници, геометрични тела (3D фигури), разгъвки на геометрични тела, животни от геометрични фигури развиват наблюдателността, устойчивостта на вниманието, логическото мислене, пространственото мислене и ориентиране, възпитават учениците в точност и прецизност при изпълнение на практически задачи.

Добре е в урочната работа да се използват разнообразни и нови по вид задачи, чрез които математическите знания и умения на учениците постепенно се обогатяват, да се разкрият индивидуалните възможности на всяко дете и така да се стимулира развитието на умствените операции и пространственото ориентиране.

Предложеният вариативен модел за обучение по геометрия спомага не само за усвояване, а и за възпроизвеждане на придобити знания и умения, но преди всичко за формиране и развитие на компетенции, позволяващи на учениците активно да овладеят нужните знания. Така учениците ще изградят умения за самостоятелно придобиване на нови знания и тяхното осмисляне, както и създаване на условия за развитие на абстрактно мислене на база на включените в модела знания за геометричните фигури. Задачите от вариативния модел предразполагат третокласниците към самостоятелно прилагане на придобитите знания и умения за експериментиране в различни ситуации.

#### **4.2. Анализ на резултатите от приложението на вариативния модел при експерименталното обучение**

Включените във вариативния модел геометрични задачи са с нарастваща сложност. Част от тях изискват нестандартно мислене, разбиране и систематизиране на познатите знания и умения, както и откриване на нови характеристики на изучаваните елементи.

В предложеният вариативен модел за обучение по геометрия се използват различни иновативни и експериментални задачи, като целта е да се установи какви резултати показват изследваните третокласници при усвояването новите знания и умения.

В началото на урока учителят актуализира знанията и уменията на учениците по конкретната тема. Чрез беседа, демонстрация и фронтална работа третокласниците решават сходни (въвеждащи) задачи на включените във вариативния модел за обучение. Учениците придобиват първоначални знания и умения за решаване на конкретни вариативни задачи. След това набор от страници, включващ задачите от вариативния модел се раздава на всеки ученик. Третокласниците започват да работят самостоятелно като могат да задават допълнителни въпроси.

За целите на дисертационното изследване в този параграф в таблици са представени верните (В) и неправилните (Н) отговори, които дават учениците при решаване на поставените задачи по всяка тема от вариативния модел. Направен е анализ на типичните грешки и проблемни моменти при решаване на определени задачи.

#### **4.3. Анализ на резултатите от приложението на карта за самооценка при експерименталното обучение**

След решаване на определена тема от вариативния модел за обучение по математика на учениците от трети клас беше раздадена карта за самооценка, която те попълваха в края на учебния час. Въпросите, които са включени в нея са със свободен отговор. Те са, както следва:

1. Много ли са задачите, които реши?
2. Лесно ли ги реши?/ Бързо ли ги реши?
3. Коя задача **не** те затрудни?
4. Коя задача ти беше най-трудна?
5. Задачата, която ти хареса най-много е ...

За целите на дисертационното изследване в този параграф в таблици са представени отговорите на учениците и това как те оценяват своята работа по отделните теми. Направен е анализ на посочените мнения на третокласниците при решаване на отделните задачи.

Включените задачи в 11 теми от вариативния модел за обучение по геометрия на учениците от трети клас са изцяло с геометрично съдържание. Към всяка от темите, предназначени за работа в един учебен час, е представена методика на работа и въвеждащи задачи.

От представените относителни дялове на верните и на неправилните отговори, посочени от третокласниците при решаването на задачите от всяка тема от вариативния модел може да се заключи, че по-голяма част от изследваните учениците са се справили успешно с поставените задачи. Те не са затруднили третокласниците, което е видно и от изказаното лично мнение на всеки ученик в представената карта за самооценка.

Вариативният модел за обучение представлява иновативен подход за приложение на разнообразни геометрични задачи в обучението на учениците от трети клас. Прилагането на този модел дава възможност да се преосмислят съществуващите към момента процедури и практики в обучението по математика у нас и да се потърсят нови форми и средства за доближаване на българското учебно съдържание по математика към чуждестранното, както и съобразяване със съвременните условия и нужди на математическото обучение за осъществяване на качествено образование на подрастващото поколение.

## Пета глава

### Анализ на резултатите от проведено експериментално обучение

За правилното формиране и развитие на математическите знания, умения и навици у децата в начална училищна възраст, е необходимо изследване нивото на овладяване от тях на учебния материал.

Това може да бъде осъществено емпирично. По този начин ясно ще се види степента на придобитите от учениците знания, както и възможностите за тяхното допълване и развиване, което ще подпомогне учителите в стремежа им да усъвършенстват своята педагогическа дейност.

За целите на дисертационния труд бе проведена и анкета сред действащи начални учители за проучване експертното им мнение относно обучението по геометрия в трети клас. Дадени са препоръки за бъдеща дейност.

**Цел на изследването:** Да се установи влиянието на създаденият и апробиран вариативен модел за повишаване на резултатите от обучението по геометрия в III клас.

#### **Задачи на изследването:**

- да се определи нивото на знания по геометрия на учениците в началото на III клас (контролна и експериментална групи);
- да се създаде вариативен модел за обучение по геометрия, включващ учебно съдържание и методика на работа;
- да се създаде диагностичен инструментариум за измерване резултатите от експерименталното обучение;
- да се проведе изследване нивото на геометричните знания и умения на учениците в края на III клас (контролна и експериментална групи).

#### **Провеждане на изследването:**

Изследването се проведе с общо 299 ученици от III клас през учебната 2016/2017 г., разпределени в контролна (150 ученици) и експериментална (149 ученици) групи.

Тестовите за определяне на овладените знания от втори клас включват задачи, които са разработени за две групи. Използваните задачи са градиращи по трудност.

В теста за установяване на **входното ниво** по геометрия на учениците в началото на трети клас включвам задачи, свързани с познаване на геометрични фигури по форма – отсечка и кръг, откриване на брой отсечки, определяне на видове триъгълници според страните, посочване на квадрат или правоъгълник, откриване брой триъгълници и правоъгълници във фигури, посочване характеристиките на квадрат и правоъгълник, намиране страни на начертани квадрат или правоъгълник върху квадратна мрежа, намиране на обиколка на начертани квадрат или правоъгълник върху квадратна мрежа, намиране на обиколка на квадрат по дадена страна/ намиране на страна на квадрат по дадена обиколка, намиране на обиколка на правоъгълник по дадена страна и зависимост с „пъти по-малко“/намиране широчината на правоъгълник по дадена обиколка и дължина, определяне броя на триъгълници на чертеж. В теста присъства и логическа задача за определяне на последователност (редица) от геометрични фигури в модел.

Задачите в теста за определяне на **изходното равнище** на учениците в края на трети клас са съобразени с възрастовите им особености, учебния материал, както и със спецификата и целта на изследването.

Задачите, включени в теста дават основание за разкриване степента на овладяване на геометричния материал за III клас според учебната програма за съответния клас, одобрена от МОН. Изследването беше проведено през месец май, в края на учебната година, за да има възможност да се проверят знанията и уменията на учениците, свързани с конкретно учебно съдържание. Чрез използваните задачи в теста се провери усвояването на новите понятия, които трябва да се формират у учениците в III клас, както и не бяха пренебрегнати и основни геометрични знания от предходни години:

- права и крива линия; лъч; ъгъл, елементи на ъгъла (върх, рамо); видове ъгли (прав, остър, тъп); видове триъгълници според ъглите (правоъгълен, остроъгълен, тъпоъгълен); понятие за геометрична фигура;

- триъгълник; видове триъгълници според страните (разностранен, равнобедрен, равностранен); страна; обиколка на триъгълник и правоъгълник;

- квадрат, кръг, триъгълник, правоъгълник, отсечка.

Началните учители се нуждаят от информация за затрудненията, които срещат учениците при усвояване на математическите знания, за да могат да подобрят своята работа и да преодолеят този проблем. През учебната 2008/2009 г. е проведено изследване на типичните грешки, допускани от учениците по математика в началните класове (Кирова, 2009). В статията са посочени грешките на учениците от втори и трети клас, свързани с геометричния материал – не разпознават квадрата като вид правоъгълник, не чертаят квадрат по дадена негова обиколка върху квадратна мрежа, грешат при определяне на видовете триъгълници според страните и ъглите.

### 5.1. Анализ на анкетно проучване мнението на действащи начални учители

За целите на дисертационното изследване проведох анкета с действащи начални учители в осем училища – 6 в гр. София и 2 в други населени места в България, които са:

- 144 СУ „Народни будители“, гр. София – 17 учители;
- 135 СУ „Ян Амос Коменски“, гр. София – 3 учители;
- 119 СУ „Акад. Михаил Арнаудов“, гр. София – 24 учители;
- 93 СУ „Александър Теодоров – Балан“, гр. София – 4 учители;
- 83 ОУ “Елин Пелин”, кв. Панчарево, гр. София – 9 учители;
- 41 ОУ „Св. Патриарх Евтимий“, гр. София – 17 учители;
- СУ "Цанко Церковски", гр. Полски Тръмбеш – 3 учители;
- ОУ „Христо Ботев“, с. Остров – 2 учители.

Общият брой на попълнените анкетни карти е 79.

Целта на проведеното анкетно проучване е да установи мнението на началните учители за геометричния материал, включен в действащите учебни комплекти по математика; да се посочат проблемите при овладяване на учебния материал по геометрия, които срещат учениците от трети клас. Търсят се и препоръки за подобряване на обучението по геометрия в началното училище.

Анкетата се състои от 13 въпроса. Четири от въпросите са със свободен отговор. Включени са въпроси, които показват пола, възрастта и педагогическия стаж на учителите.

Таблица 3. Разпределение на анкетираните учители по признаците пол, възраст и педагогически стаж

Общо анкетирани:		79	Относителен дял (%)
Пол	Жена	74	93,67%
	Мъж	5	6,33%
Възраст	до 30 години	15	18,99%
	между 31 и 40 години	21	26,58%
	над 40 години	43	54,43%
Педагогически стаж	по-малко от 5 години	25	31,65%
	от 5 до 15 години	18	22,78%
	повече от 15 години	36	45,57%

Анкетирани са общо 79 учители – 74 жени и 5 мъже. Това представлява съотношение на жени към мъже – 93,67% към 6,33%. Поради феминизацията на учителската професия преобладаващият процент учители дали своето мнение за геометричното учебно съдържание в анкетното допитване са жени.

По отношение на възрастта на анкетиранияте учители се забелязва високия процент на учителите на възраст над 40 години - 54,43%. Началните учители, участвали в анкетното проучване на възраст между 31 и 40 години са 26,58%. Най-малък е относителният дял на младите учители под 30 години -18,99%. В сравнение с началните учители на възраст над 40 години, действащите млади учители са два пъти по-малко.

Относно професионалния опит на изследваните лица се получи следният профил на обследваните: 31,65 % имат стаж до 5 години, 22,78 % имат стаж от 5 до 15 години, а 45,57 % имат стаж от повече от 15 години. Най-голям относителен дял от анкетиранияте учители са със стаж над 15 години. Това е гаранция за тяхното експертно и професионално мнение по въпросите от изследването.

В Таблица 4 са посочени включените въпроси в анкетната карта и броя/процента на началните учители, които са отговаряли на посочените в нея вариантни отговори.

Въпросите с номера 2, 7, 9 и 10 са със свободен отговор. Компетентното мнение на анкетиранияте учители е представено по-долу (Таблица 5).

Таблица 4. Отговори на въпросите от анкетната карта

Въпроси	Отговори	Брой/процент отговорили учители	
		Брой	Процент
Въпрос 1: Каква е формата на Вашето преподаване на геометричния материал в трети клас?	1) без нагледна опора	1	1,27%
	2) с нагледна опора – бяла дъска	54	68,35%
	3) с нагледна опора – компютър, проектор, интернет	22	27,85%
Въпрос 3: Усвояват ли учениците напълно новите знания по време на урока?	1) не, винаги имат нужда от допълнителна работа	26	32,91%
	2) по-скоро не	8	10,13%
	3) по-скоро да	41	51,90%
	4) да, успяват да разберат и запомнят новият материал напълно	4	5,06%
Въпрос 4: Колко време средно изразходват учениците за изпълнение на дадена задача с геометрично съдържание в час?	1) до 3 минути	10	12,66%
	2) от 3 до 10 минути	49	62,03%
	3) повече от 10 минути	8	10,13%
	4) не всички ученици успяват да завършат поставената задача	12	15,19%
Въпрос 5: Имат ли учениците нужда от допълнително онагледяване, за да разберат по-добре абстрактните геометрични понятия?	1) не, не е необходимо	2	2,53%
	2) по-скоро не	5	6,33%
	3) по-скоро да	30	37,97%
	4) да, задължително	42	53,16%
Въпрос 6: Изискват ли учениците индивидуална помощ във връзка с геометричния материал по време на час или след това?	1) не	4	5,06%
	2) по-скоро не	7	8,86%
	3) да, понякога	50	63,29%
	4) да	18	22,78%
Въпрос 8: Необходимо ли е	1) не, не е необходимо	5	6,33%

учениците да отделят повече време за самостоятелна подготовка, свързана с учебния материал по геометрия?	2) по-скоро не	11	13,92%
	3) по-скоро да	36	45,57%
	4) да, задължително	27	34,18%

Видно от таблицата е, че 68,35% от анкетираните учители използват бяла дъска при обучението на учениците си при задачите с геометрично съдържание. Висок е и процентът на отговорите, които дават учителите във връзка с използването на компютър, проектор и интернет (27,85%). Резултатите показват още, че 1,27 % от учителите не използват нагледна опора в своята работа, което е обезпокоително.

Въпрос 3 от анкетата се отнася до мнението на учителите за степента на овладяване на новите знания от учениците по време на урока. Повече от половината учители (51,90%) преценяват, че учениците по-скоро се справят, а 5,06% от специалистите споделят, че третокласниците успяват да разберат новия материал в рамките на учебния час. Висок е процентът на отговорите, свързани с нуждата от допълнителни занимания с геометрични задачи (32,91%). От всички анкетираните учители 10,13 % смятат, че учениците по-скоро не успяват да получат необходимите знания по време на урока.

От получените резултати става ясно, че 12,66% от анкетираните учители посочват, че техните ученици решават дадена геометрична задача до 3 минути. Висок е процентът на учителите (62,03%), които споделят мнението, че учениците се справят от 3 до 10 минути. От запитаните 10,13% са на мнение, че учениците се нуждаят от повече от 10 минути, за да решат задача с геометрично съдържание. Според мнението на 15,19% не всички ученици успяват да приключат с решението на поставената им задача.

Данните от таблицата показват необходимостта от задължителното използване на допълнително онагледяване при изучаване на геометричния материал (53,16%). Висок е и процентът на отговорите на анкетираните учители, които смятат, че по-скоро трябва да се прилага онагледяване (37,97%). Интересно е наличието на отговори от учителите, както и разпределението на процентите (2,53% и 6,33%), свързани с липсата на нужда от използване на допълнителна нагледна опора, което за формирането на абстрактните геометрични понятия е от изключителна важност.

Получените високи резултати (63,29% и 22,78%), свързани с нуждата на учениците от индивидуална помощ, свидетелстват за необходимостта от повече занимания по геометрия. Само 5,06% от анкетираните учители смятат, че третокласниците не се нуждаят от допълнителни обяснения по изучавания геометричен материал. Останалите 8,86% от запитаните специалисти смятат, че учениците по-скоро не търсят тяхната помощ.

От анкетираните учители 45,57% са на мнение, че учениците трябва да обръщат по-голямо внимание на геометричния материал при самостоятелната си подготовка. Учителите, които смятат, че е задължително да се решават допълнителни задачи са 34,18%. Тези високи проценти насочват към необходимостта от повече занимания на третокласниците извън училище с цел упражняване и затвърдяване на получените геометрични знания. Резултатите, свързани с липсата на нужда от отделяне на повече време за допълнителни занимания на учениците са с нисък относителен дял (6,3% и 13,92%).

В *Таблица 5* подробно са разгледани и описани отговорите на анкетираните начални учители по четирите въпроса, изискващи свободен отговор. Обобщени са мненията и препоръките на действащите учители, свързани с геометричния материал, изучаван в начална училищна възраст и в частност в трети клас.

*Таблица 5.* Отговори на въпросите със свободен отговор от анкетната карта

Въпроси	Отговори
Въпрос 2: По коя част от учебния материал по	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ видове ъгли – чертане и измерване;</li> <li>▪ работа с транспортир;</li> </ul>

<p>геометрия смятате, че има нужда от допълнителни занимания?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ работа с квадратна мрежа - чертане и измерване на геометрични фигури;</li> <li>▪ обиколка на фигури. Намиране на страна на правоъгълник по дадена обиколка и/или друга страна;</li> <li>▪ обиколка на фигури. Учениците не съобразяват да умножат по 2 за намиране страните на правоъгълник и по 4 за квадрат;</li> <li>▪ разпознаване на квадрата като вид правоъгълник;</li> <li>▪ видове триъгълници според ъглите;</li> <li>▪ именуване на ъгли и геометрични фигури;</li> <li>▪ лице на правоъгълник;</li> <li>▪ окръжност и кръг;</li> <li>▪ геометрични и логически задачи;</li> <li>▪ мерни единици за дължина и преобразуването им;</li> <li>▪ според индивидуалните затруднения на учениците;</li> <li>▪ по целия геометричен материал.</li> </ul>
<p>Въпрос 7: Какво би спомогнало за по-добро овладяване на материала, свързан с геометрични знания?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ повече уроци за упражнения;</li> <li>▪ повече занимания, свързани с намиране на обиколка на геометрични фигури;</li> <li>▪ повече часове и задачи, свързани с геометричния материал;</li> <li>▪ решаване на повече практически задачи – работа по групи;</li> <li>▪ диференцирана работа с ученици, които се затрудняват;</li> <li>▪ работа с квадратна мрежа;</li> <li>▪ чертожни материали и нагледни средства;</li> <li>▪ онагледяване на учебния материал по геометрия чрез примери;</li> <li>▪ използване на компютър, проектор, интернет и видеоуроци;</li> <li>▪ обособяване на отделен раздел по геометрия;</li> <li>▪ издаване на сборник за начален етап изцяло с геометрични задачи;</li> <li>▪ дидактични игри;</li> <li>▪ използване на интерактивни методи на обучение;</li> <li>▪ включване на иновативни форми на обучение.</li> </ul>
<p>Въпрос 9: Смятате ли, че нещо трябва да се промени в обучението по геометрия в трети клас?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ да се облекчи учебното съдържание;</li> <li>▪ да се предвидят повече уроци за упражнение и затвърдяване на знанията на учениците; системни упражнения;</li> <li>▪ по-голям брой часове за геометричния материал;</li> <li>▪ по-достъпно представяне на геометричния материал, съобразено с възрастовите особености на учениците;</li> <li>▪ да се наблегне на онагледяването и използването на нагледни средства – модели и шаблони;</li> <li>▪ да се чертае само с използването на молив;</li> <li>▪ да се обърне допълнително внимание на измерването в мм;</li> <li>▪ включване в учебниците на отделен раздел по геометрия;</li> <li>▪ въвеждане на формули за намиране на обиколка на геометрични фигури.</li> </ul>



<p>Въпрос 10: С какво бихте подобрили учебния процес по геометрия?</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ използване на повече задачи с практическа насоченост;</li> <li>▪ допълнителни часове за решаване на геометрични задачи;</li> <li>▪ да се онагледява и използват нагледни материали – макети на фигури, релефни фигури, табла, постери;</li> <li>▪ включване на интерактивни методи на обучение;</li> <li>▪ спазване на стриктни изисквания при решаване на геометрични задачи;</li> <li>▪ индивидуална работа с учениците;</li> <li>▪ включване на повече геометричен материал в учебниците;</li> <li>▪ даване на възможност за повече самостоятелна работа на учениците;</li> <li>▪ по-достъпен учебен материал и съобразяване с индивидуалните и възрастовите особености на учениците;</li> <li>▪ включване на иновативни форми на обучение;</li> <li>▪ повече задачи за измерване;</li> <li>▪ използване на компютър, проектор – презентации; интерактивна дъска, анимирани картинки на фигури от ежедневието;</li> <li>▪ отделяне на пет минути за решаване на геометрични задачи във всеки учебен час по математика.</li> </ul>
--	---

Освен дадените компетентни отговори, поместени в *Таблица 5* в анкетните карти фигурират и следните отговори - „не мога да преценя”, „не смятам”, „не”, „за сега не”, „за сега с нищо”, „необходими са допълнителни занимания по целия геометричен материал”, „винаги има нужда от допълнителни упражнения”, „геометричният материал е добре представен”.

Представен е и относителният дял на анкетираните учители, които са дали мнение на въпросите със свободен отговор. Като цяло под  $\frac{1}{4}$  от обследваните учители са изразили позицията си по този вид въпроси:

- въпрос 2 „По коя част от учебния материал по геометрия смятате, че има нужда от допълнителни занимания?” – 22,78 %; (18 души)
- въпрос 7 „Какво би спомогнало за по-добро овладяване на материала, свързан с геометрични знания?” – 25,32 %; (20 души)
- въпрос 9 „Смятате ли, че нещо трябва да се промени в обучението по геометрия в трети клас?” – 17,72 %; (14 души)
- въпрос 10 „С какво бихте подобрили учебния процес по геометрия?” – 21,52 %; (17 души)
- по горепосочените въпроси със свободен отговор без мнение са 12,63 %. (10 души)

Може да се обобщи, че анкетираните учители дават експертно мнение и оценяват предимствата и недостатъците на актуалните учебници по математика, в частност включения геометричен материал. Посочените препоръки са адекватни и съобразени с възрастовите възможности на учениците. Те са свързани с използването на повече задачи с практическа насоченост; допълнителни часове за решаване на геометрични задачи; онагледяване и използване на нагледни материали – макети на фигури, табла, постери; включване на повече геометричен материал в учебниците; по-достъпен учебен материал и съобразяване с индивидуалните и възрастовите особености на учениците; включване на иновативни форми на обучение; използване на компютър, проектор – презентации; интерактивна дъска; отделяне на пет минути за решаване на геометрични задачи във всеки учебен час по математика.

## 5.2. Анализ на резултатите от входно ниво

Резултатите от емпиричните изследвания са обработени с помощта на утвърдени математико-статистически методи. На тази база са изведени научни изводи и обобщения.

Констатиращият експеримент цели установяване на входното равнище на знанията и уменията на учениците по геометрия в началото на трети клас. Тестовите са разработени за две групи. Проучването е проведено в края на месец септември и началото на месец октомври 2016 г. с ученици от различни училища.

Таблица 6. Брой изследвани ученици по училища

Училище	Контролна група	Експериментална група
144 СУ „Народни будители“, гр. София	61	65
135 СУ „Ян Амос Коменски“, гр. София	38	17
93 СУ „Александър Теодоров – Балан“, гр. София	20	19
83 ОУ „Елин Пелин“, кв. Панчарево	15	16
СУ „Цанко Церковски“, гр. Полски Тръмбеш	16	32

Таблица 7. Брой и относителен дял на верните отговори на изследваните ученици – резултати от входно ниво

Входно ниво (Изследвани ученици - контролна група 150 бр. ученици и експериментална група - 149 бр. ученици)				
Критерии	Дали правилен отговор			
	Контролна група		Експериментална група	
	Брой	Процент	Брой	Процент
1.Познаване на геометрични фигури по форма – отсечка и кръг	119	79,33%	128	85,91%
2.Откриване на брой отсечки	132	88,00%	125	83,89%
3.Определяне на видове триъгълници според страните	76	50,67%	80	53,69%
4.Посочване на квадрат или правоъгълник	123	82,00%	119	79,87%
5. Откриване на брой триъгълници и правоъгълници във фигури	59	39,33%	62	41,61%
6.Посочване на характеристиките на квадрат и правоъгълник	103	68,67%	99	66,44%
7а. Намиране на страни на начертани квадрат или правоъгълник върху квадратна мрежа	76	50,67%	73	48,99%
7б. Намиране на обиколка на начертани квадрат или	71	47,33%	80	53,69%

правоъгълник върху квадратна мрежа				
8а. Намиране на обиколка на квадрат по дадена страна/ Намиране на страна на квадрат по дадена обиколка	83	55,33%	91	61,07%
8б. Намиране на обиколка на правоъгълник по дадена страна и зависимост с „пъти по-малко“/ Намиране ширината на правоъгълник по дадена обиколка и дължина	55	36,67%	53	35,57%
9. Определяне броя на триъгълници на чертеж	62	41,33%	60	40,27%
10. Логическа задача – определяне на последователност от геометрични фигури в модел	88	58,67%	85	57,05%
<b>Общо:</b>	<b>58,16%</b>		<b>59%</b>	

За целите на дисертационното изследване съгласно посочените данни в *Таблица 7* са обобщени проблемните моменти в усвояването на учебния материал по геометрия от учениците в началото на трети клас.

От анализиранияте резултати може да се заключи, че средният резултат на решените правилно поставените задачи ученици от контролната група е 58,16%, а от експерименталната група – 59%. Следователно нивото на знанията и уменията на учениците от контролната и експерименталната група в началото на трети клас е относително еднакво. Прави впечатление общото незадоволително ниво на успеваемост на учениците при овладяване на геометричното съдържание (под 60%). Това говори за нуждата от повече занимания, свързани с решаване на задачи с геометрично съдържание.

### 5.3. Анализ на резултатите от изходно ниво

Решаването на задачите за две групи, целящи определяне на изходното ниво на учениците от трети клас в края на учебната 2016/2017 година е проведено през месец май 2017 г. с общо 299 ученици, от които контролната група включва 150 ученици, а експерименталната група – 149 ученици.

*Таблица 8.* Брой и относителен дял на верните отговори на изследваните ученици – резултати от изходно ниво

<b>Изходно ниво (Изследвани ученици - контролна група 150 бр. ученици и експериментална група - 149 бр. ученици)</b>				
<b>Критерии</b>	<b>Дали правилен отговор</b>			
	<b>Контролна група</b>		<b>Експериментална група</b>	
	<b>Брой</b>	<b>Процент</b>	<b>Брой</b>	<b>Процент</b>
1. Познаване на геометрични фигури по форма – лъч	134	89,33%	142	95,30%
2. Определяне на видове триъгълници според ъглите	114	76,00%	127	85,23%

3. Намиране на дължина на бедро на равнобедрен триъгълник по зададени обиколка и основа	89	59,33%	96	64,43%
4. Намиране на обиколка на правоъгълник по дадена страна и зависимост с „пъти по-голяма“ от нея	95	63,33%	104	69,80%
5. Определяне на видове ъгли	131	87,33%	137	91,95%
6. Работа с квадратна мрежа – чертане на правоъгълник, който не е квадрат по дадена обиколка	85	56,67%	93	62,42%
7. Логическа задача – откриване на последователност от геометрични фигури в модел	91	60,67%	121	81,21%
8. Посочване на огледален образ на поредица от фигури	93	62,00%	111	74,50%
9. Геометрично построяване - свързване на точки в квадратна мрежа за получаване на триъгълник, квадрат и правоъгълник	136	90,67%	145	97,32%
10. Логическа задача – модели на триъгълник от кибритени клечки	76	50,67%	84	56,38%
<b>Общо:</b>	<b>69,60%</b>		<b>77,85%</b>	

За целите на дисертационното изследване на базата на посочените данни в *Таблица 8* са обобщени усвоените знания и умения по геометрия от учениците в края на трети клас.

Видно от анализирания резултат е, че средният успех на учениците от контролната група е 69,60%, а от експерименталната група – 77,85%. Следователно нивото на знанията и уменията на учениците от контролната и експерименталната група в края на трети клас се различават с 8,25% в полза на експерименталните паралелки. Процентът на успеваемост на третокласниците е близо до и над 70%. Показаните от експерименталните паралелки знания свидетелстват за правилния подбор на задачи и упражнения с геометрично съдържание в предложения вариативен модел за обучение.

#### 5.4. Сравнителен анализ на резултатите от изследването

Експерименталната група обхваща 149 ученици, а контролната група включва 150 ученици. С третокласниците са проведени тестове за установяване на входното и изходното ниво на знанията им по математика (геометрично учебно съдържание). Резултатите от педагогическия експеримент са обработени със специализиран софтуер за статистическа обработка на данни SPSS и Microsoft Excel 2010.

За да се провери надеждността (равнището на вътрешна съгласуваност на тестовете) на приложените тестове се използва коефициент на надеждност на Кронбах (Cronbach's Alpha). Стойността на алфа е функция на два основни фактора: *средното равнище* на интеркорелации на айтъмите и *дължината* на теста. Максималната стойност на  $\alpha$  е равна на единица. Стойности  $\alpha \approx 0,8$  се приемат за много добри. Стойности от порядъка  $\alpha \approx 0,6$  показват все още

задоволителна надеждност. Стойността на  $\alpha$  нараства по естествен начин с увеличаване броя на айтърмите.

Таблица 9. Коефициент на вътрешна съгласуваност Алфа на Кронбах

Алфа на Кронбах ( $\alpha$ )	Вътрешна съгласуваност
$\alpha \geq 0,9$	Високи стойности
$0,7 \leq \alpha < 0,9$	Много добри стойности
$0,6 \leq \alpha < 0,7$	Задоволителни стойности
$0,5 \leq \alpha < 0,6$	Слаби стойности
$\alpha < 0,5$	Незадоволителни стойности

След статистическата обработка на данните чрез Алфа на Кронбах за използваните тестове с учениците от трети клас от експерименталната и контролната група на входа и изхода се установи, че получените коефициенти за двете групи на входно и изходно ниво се оценяват като задоволителни, клонящи към много добри. Поради тази причина се доказва надеждността на тестовете (виж Таблица 10 и Таблица 11).

Таблица 10. Вътрешна съгласуваност на отговорите от теста за входно ниво

Входно ниво		
Група	Cronbach's Alpha	N of Items
Експериментална	0,603	12
Контролна	0,716	12

Таблица 11. Вътрешна съгласуваност на отговорите от теста за изходно ниво

Изходно ниво		
Група	Cronbach's Alpha	N of Items
Експериментална	0,618	10
Контролна	0,562	10

Статистическият анализ е направен на базата на верните отговори от самостоятелните работи на третокласниците от контролната и експерименталната група. Разгледан е и допълнителен показател – процент верни отговори по училища. В зависимост от получените стойности резултатите от изследването се представят в таблици и диаграми.

#### 5.4.1. Сравнителен анализ на резултатите от входното ниво по математика на експерименталната и контролната групи

Приема се нулевата статистическа хипотеза ( $H_0$ ): Между резултатите на входните нива в контролната и експерименталната група няма статистически значима разлика. Алтернативната статистическа хипотеза ( $H_1$ ), свързана с наличието на статистически значима разлика се отхвърля. Критичното равнище на значимост, прието при анализа на резултатите от изследването е  $\alpha = 0,05$ . Първо ще се разгледат резултатите на третокласниците при изпълнението на теста, установяващ входното ниво (виж Таблица 12).

Таблица 12. Резултати на третокласниците от теста за входно ниво

Общо	Входно ниво		Изходно ниво		Промяна	t	$\alpha$
	Среден процент верни отговори	Стандартно отклонение	Среден процент верни отговори	Стандартно отклонение			
Експериментална	59,0	20,1	77,9	18,7	18,8	12,02	0,000
Контролна	58,2	22,9	69,6	19,8	11,4	5,63	0,000
Разлика	0,8		8,3		7,4		
t	0,34		3,71		2,89		
$\alpha$	0,737		0,000		0,004		

Видно от таблицата по-горе е, че няма статистически значимо различие между двете групи на входното ниво, т.е. приема се нулевата статистическа хипотеза ( $H_0$ ), тъй като равнището на значимост ( $\alpha$ ) е по-голямо от приетото  $\alpha = 0,05$  и е  $0,737$ .

Стандартното отклонение между контролната и експерименталната група на резултатите от входния тест е  $2,8\%$ . Така може да се определи дали резултатите на изследваните групи са близки. Колкото е по-малко стандартното отклонение, толкова по-близки са резултатите на групите – данните са много по-близко групирани до средната стойност.

Наблюдава се разлика при решаването на отделните задачи между експерименталната и контролната групи, която е  $0,8\%$ . От това следва, че незначително по-високи резултати са постигнати в експерименталната група.

Крайнният резултат от входното ниво на параметрите на математическите нива е представен в Таблица 13.

Таблица 13. Резултати от входно ниво за контролна и експериментална група

	Контролна група	Експериментална група
Брой	150	149
Средно аритметично в %	58,2	59,0
Стандартна грешка на средно аритметично	1,9	1,6
Стандартно отклонение	22,9	20,1

От данните в Таблица 13 може да се обобщи, че между резултатите получени от входните тестове на контролната и експерименталната група няма статистически значима разлика.

#### 5.4.2. Сравнителен анализ на получените резултати от изходното ниво по математика на експерименталната и контролната групи

Приема се алтернативната статистическа хипотеза ( $H_1$ ): Между резултатите на изходните нива в контролната и експерименталната група има статистически значима разлика. Така се отхвърля нулевата статистическа хипотеза ( $H_0$ ), т.е. няма статистически значима разлика. Критичното равнище на значимост, прието при анализа на резултатите от

изследването е  $\alpha = 0,05$ . Първо ще се разгледат резултатите на третокласниците при изпълнението на теста, установяващ изходното ниво (виж *Таблица 14*).

*Таблица 14.* Резултати на третокласниците от теста за изходно ниво

Общо	Входно ниво		Изходно ниво		Промяна	t	$\alpha$
Група	Среден процент верни отговори	Стандартно отклонение	Среден процент верни отговори	Стандартно отклонение			
Експериментална	59,0	20,1	77,9	18,7	18,8	12,02	0,000
Контролна	58,2	22,9	69,6	19,8	11,4	5,63	0,000
Разлика	0,8		8,3		7,4		
t	0,34		3,71		2,89		
$\alpha$	0,737		0,000		0,004		

Видно от таблицата по-горе има статистически значимо различие между двете групи на изходното ниво, т. е. приема се алтернативната статистическа хипотеза ( $H_1$ ).

Стандартното отклонение между контролната и експерименталната група на резултатите от изходния тест е 1,1%.

Наблюдава се разлика при решавашето на отделните геометрични задачи между експерименталната и контролната групи, която е 8,3 %. От това следва, че по-високи резултати са постигнати в експерименталната група.

Крайният резултат от изходното ниво на параметрите на математическите нива е представен в *Таблица 15*.

*Таблица 15.* Резултати от изходно ниво за контролна и експериментална група

	Контролна група	Експериментална група
Брой	150	149
Средно аритметично в %	69,6	77,9
Стандартна грешка на средно аритметично	1,6	1,5
Стандартно отклонение	19,8	18,7

От данните в *Таблица 15* може да се обобщи, че между резултатите получени от изходните тестове на контролната и експерименталната група има статистически значима разлика.

### 5.4.3. Входно и изходно ниво – вътрешногрупово сравнение

Представена е съпоставка между входното и изходното ниво на двете групи, за да се проследи как се променят геометричните знания и умения на изследваните третокласници от контролната и експерименталната група. Ще бъде установено и влиянието върху учениците на вариативния модел за обучение по геометрия чрез показаните резултати от входното и изходното ниво. Целта е да се констатират промените в началото и края на проведения

експеримент. Разгледани са средните проценти на изпълнение на задачите, заедно със статистическите параметри – средна стойност, стандартно отклонение, стандартна грешка, корелация, значимост.

Анализът на резултатите в двете групи е свързан с разликите при решаването на задачите според фактора „вярно решена задача“ в началото и в края на експеримента.

Първо ще бъде разгледан вътрешногруповият анализ Paired Samples Test, чрез който може да се установи промяната във всяка една отделна група (виж *Таблица 16*).

*Таблица 16.* Вътрешногрупово сравнение на средните стойности от две независими извадки

Paired Samples Statistics						
Група			Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Експериментална	Pair 1	Изходно ниво (процент верни отговори)	77,9	149	18,7	1,5
		Входно ниво (процент верни отговори)	59,0	149	20,1	1,6
Контролна	Pair 1	Изходно ниво (процент верни отговори)	69,6	150	19,8	1,6
		Входно ниво (процент верни отговори)	58,2	150	22,9	1,9

От получените стойности се вижда, че има разлика между показаните резултати от учениците при входното и изходното ниво на експеримента и в двете групи, като в експерименталната се забелязва по-голямо увеличение на средната стойност (Mean) в сравнение с контролната.

*Таблица 17.* Разпределение на средните стойности в експерименталната и контролната група

Paired Samples Correlations			N	Correlation	Sig.
Експериментална	Pair 1	Изходно ниво (процент верни отговори) & Входно ниво (процент верни отговори)	149	0,514	0,000
Контролна	Pair 1	Изходно ниво (процент верни отговори) & Входно ниво (процент верни отговори)	150	0,328	0,000

Приема се алтернативната статистическа хипотеза ( $H_1$ ): Между резултатите на входното и изходното ниво на контролната и експерименталната групи има статистически



значима разлика. Отхвърля се нулевата статистическа хипотеза ( $H_0$ ), която предполага липсата на статистически значима разлика.

Таблица 18. Значимост на различията между експерименталната и контролната група  
**Paired Samples Test**

Група	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
				Lower	Upper			
Експериментална	18,8	19,1	1,6	15,7	21,9	12,02	148	<b>0,000</b>
Контролна	11,4	24,9	2,0	7,4	15,4	5,63	149	<b>0,000</b>

Достигнатото равнище на значимост Sig. (2-tailed) в последната колона (0,00) на Таблица 18 от вариационният анализ е по-малко от 0,05, с което се приема, че разликата в експерименталната и в контролната група е статистически достоверна, т.е. приема се алтернативната статистическа хипотеза ( $H_1$ ). С това се отхвърля нулевата хипотеза ( $H_0$ ), че няма разлика между двете групи.

От тук следва, че в експерименталната група има увеличение на успеваемостта при решаване на поставените задачи от входното и изходното ниво (от 77,9 % на 59,0%, т.е. 18,9%).

#### 5.4.4. Входно и изходно ниво – междугрупово сравнение

По същия начин е представено сравнението между двете групи – по време на входно и изходно ниво на изследването (виж Таблица 19).

Таблица 19. Междугрупово сравнение на средните стойности

Група		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Входно ниво (процент верни отговори)	Експериментална	149	59,0	20,1	1,6
	Контролна	150	58,2	22,9	1,9
Изходно ниво (процент верни отговори)	Експериментална	149	77,9	18,7	1,5
	Контролна	150	69,6	19,8	1,6
Прираст (процент верни отговори)	Експериментална	149	18,8	19,1	1,6
	Контролна	150	11,4	24,9	2,0

Както на входното, така и на изходното ниво се наблюдава промяна между средните стойности (Mean), стандартното отклонение (Std. Deviation) и стандартната грешка (Std. Error Mean). Учениците от експерименталната група имат по-висок резултат, както на входящата диагностика, така и на изходящата. Следва да се провери дали тази разлика е статистически

значима. Това се установява по метода на Левин чрез теста за хомогенност на дисперсиите на две независими извадки. Ако достигнатото равнище на значимост Sig. (2-tailed) е по-малко от 0,05, разликата в дисперсиите се приема за статистически значима.

Таблица 20. Сравнение на показателите между контролната и експерименталната група на входното и изходното ниво

#### Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Входно ниво (процент верни отговори)	Equal variances assumed	7,29	0,007	0,34	297	<b>0,737</b>	0,8	2,5	-4,1	5,7
	Equal variances not assumed			0,34	292,517	<b>0,737</b>	0,8	2,5	-4,1	5,7
Изходно ниво (процент верни отговори)	Equal variances assumed	0,441	0,507	3,71	297	<b>0,000</b>	8,3	2,2	3,9	12,6
	Equal variances not assumed			3,71	296,239	<b>0,000</b>	8,3	2,2	3,9	12,6
Прираст (процент верни отговори)	Equal variances assumed	4,58	0,033	2,89	297	<b>0,004</b>	7,4	2,6	2,4	12,5
	Equal variances not assumed			2,89	279,603	<b>0,004</b>	7,4	2,6	2,4	12,5

Таблица 20 показва резултатите от проведения тест на Левин. В колоната Sig. (2-tailed) (Значимост, двустранна) е дадена най-важната информация, а именно дали *t*-статистиката е статистически значима. Тъй като получената стойност в колоната Sig. (2-tailed) за входното ниво е по-голяма от 0,05 (0,737) може да се направи извод, че извадките се различават статистически. Поради това, че при изходното ниво данните в колоната Sig. (2-tailed) са по-малки от 0,05 разликата в дисперсиите се приема за статистически достоверна и извадките не се различават статистически.

#### 5.4.5. Дисперсионен анализ

Дисперсионният анализ е статистически метод, с помощта на който се проверяват хипотези за равенство между две и повече от две средни. Дисперсионният анализ се отнася към методите за изследване на връзки и зависимости. Чрез дисперсионния анализ може да се установи дали между изследваните явления съществува зависимост.

Дисперсионният анализ включва в себе си Within subject (вътрешногрупов) или Between subject (междугрупов) анализи или и двата. Целта е да се установи дали промяната между входното и изходното ниво на експеримента е статистически значима, което може да се установи от таблицата за сравнение на зависими извадки или вътрешногрупов анализ (Test of Within Subjects Effects). В Таблица 21 е представен тестът на Маучли за сферичност.

Таблица 21. Тест на Маучли

**Mauchly's Test of Sphericity**

Measure: Процент

Within Subjects Effect	Mauchly's W	Approx. Chi-Square	df	Sig.	Epsilon <sup>b</sup>		
					Greenhouse-Geisser	Huynh-Feldt	Lower-bound
Ниво	1,000	0,000	0		1,000	1,000	1,000

Таблица 22. Вътрешногрупов анализ на промяна в експерименталната и контролната група

**Tests of Within-Subjects Effects**

Measure: Процент

Source		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Ниво	Sphericity Assumed	34270,681	1	34270,681	139,113	<b>0,000</b>
	Greenhouse-Geisser	34270,681	1,000	34270,681	139,113	<b>0,000</b>
	Huynh-Feldt	34270,681	1,000	34270,681	139,113	<b>0,000</b>
	Lower-bound	34270,681	1,000	34270,681	139,113	<b>0,000</b>
Ниво * Група	Sphericity Assumed	2054,683	1	2054,683	8,340	<b>0,004</b>
	Greenhouse-Geisser	2054,683	1,000	2054,683	8,340	<b>0,004</b>
	Huynh-Feldt	2054,683	1,000	2054,683	8,340	<b>0,004</b>
	Lower-bound	2054,683	1,000	2054,683	8,340	<b>0,004</b>
Error (Ниво)	Sphericity Assumed	73166,470	297	246,352		
	Greenhouse-Geisser	73166,470	297,000	246,352		
	Huynh-Feldt	73166,470	297,000	246,352		
	Lower-bound	73166,470	297,000	246,352		

Стойностите на равнището на значимост Sig. са 0, което е по-малко от 0,05, което означава, че промяната между входното и изходното ниво е статистически достоверна. Това доказва, че има взаимодействие между промяна и група, т.е. промяната протича с различна скорост при двете групи. Нулевата хипотеза ( $H_0$ ) се отхвърля.

Следва да се направи сравнение между двете групи. Резултатите от междугруповия анализ (Test of Between Subjects Effects) могат да се видят в Таблица 23.

Таблица 23. Междугрупов анализ на промяна в експерименталната и контролната група

**Tests of Between-Subjects Effects**

Measure: Процент

Transformed

Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	2617177,205	1	2617177,205	4452,511	0,000

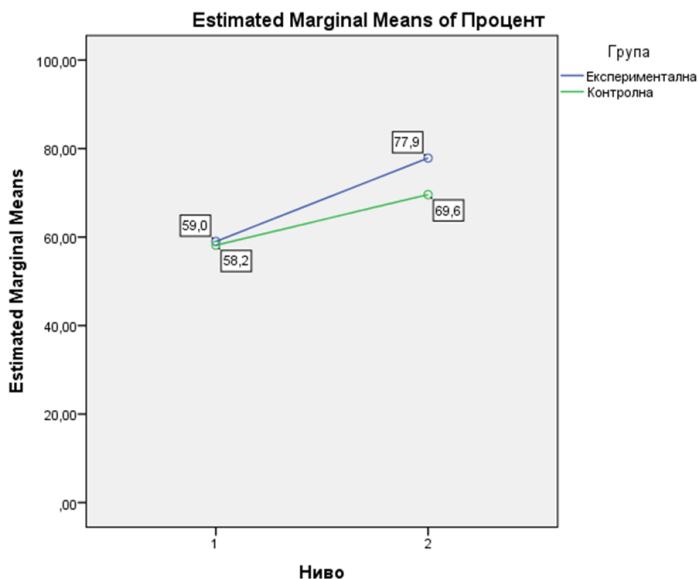
Група	3088,297	1	3088,297	5,254	0,023
Error	174576,001	297	587,798		

Видно от горната таблица е наличието на различие между решаването на поставените задачи от експерименталната и контролната групи. Приема се алтернативната хипотеза ( $H_1$ ), т.е. между резултатите на двете групи има статистически значима разлика. Нулевата хипотеза ( $H_0$ ) се отхвърля.

Съгласно данните от таблиците по-горе става ясно, че има значимо различие между двете групи, тъй като стойностите на равнището на значимост са 0, което е по-малко от 0,05.

Като обобщение може да се представят три вида промени, които да се „обединят“, за да се установи вътрешногруповата и междугруповата промяна в края на експеримента:

- 1) във всяка отделна група (експериментална и контролна);
- 2) между отделните групи;
- 3) взаимодействие между промяна и група.



Диаграма 13. Сравнение между резултатите на експерименталната и контролната група в началото и в края на педагогическия експеримент

Диаграмата е генерирана с дисперсионен анализ Repeated Measures за повтарящи се изследвания и дава обобщена представа за промяната в средните стойности от оценките на експерименталната и контролната група по време на входното и изходното ниво от изследването. Получава се резултат, който показва, че промяната в експерименталната група е в посока нагоре, както и в контролната група. Разликата между двете групи в края на експеримента е по-голяма от разликата в началото на изследването. Това предполага, че формиращият експеримент с приложението на вариативен модел на обучение по геометрия е повлиял положително върху изграждането и затвърдяването на система от знания, умения и навици, развиващи математическото, логическото и пространственото мислене при учениците от експерименталната група. Предвид доказаната достоверност на стойностите на равнищата

на значимост по отделните показатели, свързани с вътрешногруповата и междугруповата промяна, нулевата хипотеза ( $H_0$ ) се отхвърля и за достоверна се приема алтернативната.

#### **5.4.6. Анализ на резултатите по училища**

В изследването се прави сравнение, за да се установи дали разликите в усвоените математически знания от третокласниците от отделните училища са съществени. Получените данни са представени в таблици и диаграми, които разкриват резултатите от показаните верни отговори на третокласниците от контролната и експерименталната група по училища.

Сравнението между резултатите на експерименталната и контролната група в началото и в края на експеримента в 135 СУ показва, че в експерименталната група се наблюдава нарастване на резултатите на успеваемост (среден процент верни отговори) на учениците от началото до края на експеримента от 50,0% на 64,1%. В контролната група учениците показват по-малко увеличение между входното и изходното ниво от 58,6% на 60,3%. В началото на изследването учениците от контролната група са показали по-високи резултати в сравнение с експерименталната (58,6% и 50,0%), докато в края на проведеното експериментално обучение учениците от експерименталната група показват по-високи резултати в сравнение с контролната (64,1% и 60,3%).

Сравнението между резултатите на експерименталната и контролната група в началото и в края на експеримента в 144 СУ разкрива, че в експерименталната група се наблюдава по-висок бал на третокласниците от началото до края на експеримента от 60,9% на 80,5%. В контролната група учениците показват също повишени резултати между входното и изходното ниво от 60,4% на 68,5%. В началото на изследването учениците от двете групи показват близки резултати 60,9% и 60,4%, като разликата е 0,5%. В края на експерименталното обучение експерименталната група показва по-високи резултати в сравнение с контролната (80,5% и 68,5%). Разликата в полза експерименталната група е значима - 12%.

При сравнението между резултатите на експерименталната и контролната група в началото и в края на експеримента в 83 ОУ се наблюдава нарастване на средния брой верни отговори на учениците от експерименталната група от началото до края на експеримента от 67,2% на 85,0%. Положителната промяната е 17,8%. Учениците от контролната група също имат увеличение на показаните резултати между входното и изходното ниво от 70,6% на 76,0%. В началото на изследването учениците от контролната група са показали по-високи резултати в сравнение с експерименталната (70,6% и 67,2%), докато в края на проведеното експериментално обучение учениците от експерименталната група показват по-високи резултати в сравнение с контролната (85,0% и 76,0%). Превес има при показаните резултати на експерименталната група.

Според показаните резултати на учениците от 93 СУ може да се направи извода, че в експерименталната група се наблюдава по-висока успеваемост на третокласниците от началото до края на експеримента от средна стойност 65,8% на 83,2%. В контролната група учениците показват повишение на знанията, свързани с геометричния учебен материал между входното и изходното ниво от 50,4% на 80,5%. Това е нарастване с 30,1%. В началото на изследването учениците от двете групи показват следните резултати 65,8% и 50,4% в полза на експерименталната група. В края на изследването средните проценти на постигнатите резултати на двете групи са почти сходни (83,2% и 80,5%), като средния бал на експерименталната група е по-висок.

Съгласно показаните резултати на третокласниците от СУ Ц. Церковски може да се заключи, че в контролната група на входа и изхода на изследването се наблюдава увеличение на резултатите с точно 21,3% (от 51,8% на 73,1%). В експерименталната група учениците също показват по-задълбочени математически знания между входното и изходното равнище от 46,9% на 76,3%. Промяната е значима 29,4%. В началото на експеримента третокласниците от двете групи показват резултати 51,8% и 46,9% в полза на контролната група. В края на изследването експерименталната група показва по-добри резултати в сравнение с контролната група, като средния брой верни отговори е с почти изравнени проценти (76,3% и 73,1%).

Анализът на статистическите резултати показва, че работата с вариативния модел за обучение по геометрия на 9-10 годишни ученици се отразява благоприятно върху показаните резултати на изследваните 149 ученици от експерименталната група и най-вече върху способностите им за прилагане на математически знания. В процеса на обучение тези третокласници показват повишение на успеваемостта си с 18,9%.

## **Заклучение**

В настоящото изследване е направен опит в максимална степен да бъдат изпълнени поставените цел и задачи, като подробно е разгледано геометричното съдържание в съвременните учебни комплекти по математика за трети клас в България, Русия, Украйна, Германия, САЩ, Гърция и Франция. Представена е методиката на преподаване на геометричния материал за начална училищна възраст. Анкетата с действащи начални учители за установяване степента на овладяване на геометричните знания от третокласниците и проблемите в обучението по математика, касаещи геометричното учебно съдържание допринесе за усъвършенстването на създадения вариативен модел. Разработеният и приложен модел за обучение по геометрия включва вариативни задачи, които в голямата си част се решават на нагледно-практическа основа. Това са вариативни и алтернативни геометрични задачи, свързани с определяне координати на обекти върху квадратна мрежа, симетрия, работа с карта (план), геометрични тела (3D фигури), многоъгълници, класификация и сериация на равнинни фигури, пространствено ориентиране, логически задачи с геометрично съдържание и разгъвки на геометрични тела. Тези задачи развиват мисловните и графичните способности, благоприятстват и формирането на пространствените представи на учениците.

Чрез включените задачи във вариативния модел се създават условия за стимулиране на интереса и активността на обучаемите третокласници, както и успешно са реализирани междупредметни връзки в обучението по математика, изобразително изкуство и технологии и предприемачество. Извършено е системно мотивиране за усвояване на новите геометрични знания и умения, както и практическото им прилагане.

Приложеният вариативен модел за обучение по геометрия чрез включените иновативни задачи и упражнения има неоспорими предимства за поэтапно формиране и овладяване на нови знания и умения, както и за актуализиране и затвърждаване на вече усвоени понятия.

Качеството, приложимостта и ефективността на вариативния модел за обучение по геометрия са оценени и доказани статистически. Отношението на учениците към използвания вариативен модел е проследено чрез анкета (карта за самооценка) на учениците след прилагането му в обучението.

Въз основа на получените резултати може да се обобщи, че успешното обучение изисква повече време за активно, действено учене чрез решаване на повече геометрични задачи, които се осмислят веднага и дават на учениците самочувствие и увереност от показаните постижения.

## **Изводи и обобщения**

Най-важните **изводи и обобщения** са следните:

- От изпълнението на основната цел стана ясно, че с разработения и апробиран вариативен модел за обучение по геометрия на учениците от трети клас се отчетоха по-високи постижения. Достигнати са по-задълбочени знания и умения на учениците по геометрия, което свидетелства за необходимостта от изучаване на този учебен материал с използването на вариативни задачи. Разнообразният геометричен материал, представен чрез различни геометрични задачи за чертане или дочертване в квадратна мрежа, измерване, именуване, изчисление, построение, класификация на геометрични фигури и откриване на зависимости между сходни геометрични фигури способства за развиване на мисленото и пространствените представи на третокласниците.

- Реализирането на задачите, свързани с разкриването на съдържанието на геометричния материал в началното училище; анализа на съвременните учебници за трети клас (9-10 годишни ученици) в България, както и в посочените държави; методиката на преподаване на геометричните знания; изследване мнението на действащи начални учители за проблемите в обучението по геометрия и проучването на степента на възприетите от учениците геометрични понятия говорят за това, че е необходимо геометрията да се изучава в по-широк обем в началното училище. Геометричният материал трябва да бъде правилно разпределен и съобразен с изискванията за преподаване и възрастовите особености на учениците от начална училищна възраст, тъй като играе важна роля при цялостното формиране на учениковата личност.

- От анализа на съдържанието на учебниците по математика за трети клас стана ясно, че в тях преобладава аритметичният материал, но геометричните знания също са застъпени в сравнително еднаква степен. Въпреки, че геометричното съдържание има второстепенна роля в обучението по математика в началното училище, доколкото аритметиката е водещата в математическото учебно съдържание за началните класове, чрез геометричните задачи в учебниците и учебните тетрадки се развиват мисленето, въображението, пространствените представи на учениците и се подготвят за изучаване на геометричния материал в следващите класове.

Принципът за нагледност в обучението по математика е изцяло реализиран във всичките учебни комплекти. Онагледяването не само илюстрира учебното съдържание, но стимулира развитието на мисленето. Стремещт за създаване и поддържане на положителни мотиви към учебния процес се постига чрез умело подбрани задачи с игрови и забавни елементи.

Учебните комплекти са разработени така, че учениците да могат да работят самостоятелно, дори без пряка помощ на учителите, както и сами да проверяват своите знания. Те съдействат за активното отношение на децата в урока и за бързото им ориентиране в предложените задачи, като се използва опитът на децата до този момент.

Включването на геометричен материал в уроците е свързано с различни видове познавателна дейност на учениците, което внася разнообразие. Задачите в учебниците са логически обвързани и степенувани по трудност, което подпомага учениците и ги подготвя за предизвикателствата на новото време.

- От анализа на решените задачи от вариативния модел и проведените тестове с изследваните ученици се установи статистически значима разлика в резултатите, показани от експерименталната група в сравнение с тези на контролната в полза на експерименталната.

#### **Приноси моменти в дисертационния труд**

Направеното експериментално изследване способства за усъвършенстване и надграждане на учебното съдържание по геометрия в III клас и дава насоки за подобряване на знанията и уменията на учениците чрез допълнителни занимания и решаване на по-голям брой геометрични задачи. Това би допринесло за подобряване и на цялостната учебно-възпитателна работа по математика. От настоящото изследване може да се определят следните приносни моменти:

1. Проучена е литература от български и чуждестранни автори и е направен теоретичен анализ на обучението по математика (геометрично учебно съдържание) в началното училище.

2. Направен е преглед на теоретични и изследователски концепции във връзка с методиката за изучаване на геометричните знания в трети клас.

3. Извършен е анализ на геометричното учебно съдържание за III клас в действащи учебници в България, като общият брой геометрични задачи в тях е 480. Анализиран е и геометричния учебен материал в учебници за III клас от Русия, Украйна, Германия, САЩ, Гърция и Франция с общ брой задачи 652.

4. Разработен е и е апробиран със 149 ученици от различни училища (в различен тип населени места) авторски вариативен модел за обучение по геометрия на ученици от III клас. Вариативният модел съдържа 104 задачи (31 въвеждащи задачи и 73 затвърждаващи задачи). Включените задачи са подбрани така, че да отговарят на изискванията на учебната програма по математика, като са съобразени с възрастовите особености и възприемателните възможности на третокласниците. Задачите във вариативния модел са градиращи по трудност. Те развиват пространственото мислене на учениците (чрез геометрични задачи за изчисление), творческото им мислене и въображение (работа с разгъвки на геометрични фигури), както и графичните им способности (чрез геометрични задачи за построение по дадени размери и чертане в квадратна мрежа).

5. Разработен е и е апробиран диагностичен инструментариум за оценяване на математическите знания на третокласниците. Изготвена е анкета (карта за самооценка) за разкриване на самооценката на учениците при решаване на поставените задачи.

6. Проведена е анкета със 79 действащи начални учители за установяване на проблемите, свързани с преподаването и усвояването на геометричния материал.

7. Статистически се доказва по категоричен начин положителното влияние на вариативния модел върху развитието на математическите знания и умения по геометрия на изследваните ученици от III клас.

## Използвана литература

1. Андреев, М., Процесът на обучението. Дидактика, УИ „Св. Климент Охридски“, С., 1996.
2. Атанасова, М., Формиране на умения за чертане у учениците от началните класове, Начално образование, кн. 10/1996, с. 29.
3. Атанасова, М., Ив. Ставрева, Дончева, Д., Развитие на рефлексивните способности чрез обучението по математика (III клас), Начално образование, кн. 1/2009, с. 24.
4. Баев, М., Методика на обучението по аритметика и геометрия в началното училище, Наука и изкуство, С., 1965.
5. Бижков, Г., и В. Краевски. Методология и методи на педагогическите изследвания, УИ „Св. Климент Охридски“, С., 2007.
6. Богданова, Е. А., Формирование эмпирических предпонятий об основных объектах геометрии, Начальная школа, № 10-2001, с. 47.
7. Богданова, М. и др., Учебен комплект по математика за III клас, Булвест 2000, С., 2004.
8. Богданова, М., Математика за 1 клас, Булвест 2000, С., 2002.
9. Богданова, М., Математика за 4 клас, Булвест 2000, С., 2005.
10. Богданова, М., К. Никова, Н. Димитрова. Книга за учителя по математика за 2. клас., Булвест-2000, С., 2003.
11. Богданова М., К. Никова, Н. Георгиева, Математика за 2. клас, Булвест 2000, С., 2003.
12. Богданова, М., К. Никова, Н. Димитрова, Тетрадка по математика за 2. клас: Част 1, Булвест 2000, С., 2003.
13. Богданова, М., К. Никова, Н. Димитрова, Тетрадка по математика за 2. клас: Част 2, Булвест 2000, С., 2003.
14. Богданова М. и Мария Темникова, Учебно помагало по Математика за 3. клас „Тестове и самостоятелни работи по математика за 3. клас“, сборник със задачи, Булвест 2000, С., 2008.
15. Богданова М., Мария Темникова и Благовеста Калоянова, Учебно помагало по Математика за 2. клас „Задачи по математика за бързоуспяващи ученици в 2. Клас“, сборник със задачи, Булвест 2000, С., 2008.
16. Богданова М., Мария Темникова и Благовеста Калоянова учебно помагало по Математика за 3. клас „Задачи по математика за бързоуспяващи ученици в 3. клас“, сборник със задачи, Булвест 2000, С., 2008.
17. Богданова М., За диагностиката на геометричните знания и умения на учениците от началното училище, Начално образование, кн. 6/1999, с. 22.
18. Богданович, М.В., Лишенко Г. П., Математика 3 класс, Издательство Киев, „Генеза“, 2014.
19. Василева, Е., Съвременното начално училище - реалност и предизвикателства, УИ „Св. Климент Охридски“, С., 2004.
20. Василева, Е., Съременно начално училище, Просвета, С., 2008.
21. Вълкова, Т., Бележки върху учебните програми по математика за I - IV клас., 120 години Софийски университет „Св. Климент Охридски“ и развитие на педагогическата наука., Вѳда Словѳна - ЖГ, С., 2008, с. 166-171.
22. Вълкова, Т., Проблемът за съдържанието на оценяваните знания и умения по математика в I-IV клас, Начално образование, кн. 10/1996, с. 22.
23. Върбанова, М. Методика на обучението по математика в началните класове, изд. Астарта, Пловдив, 2013.
24. Върбанова, М., и З. Лалчев., Кратки сведения за образованието по математика в началните класове., 120 години Софийски университет „Св. Климент Охридски“ и развитие на педагогическата наука, изд. Вѳда Словѳна - ЖГ, С., 2008, с.132-137.
25. Герасимова, А. Д., Формирование “математического видения” периметра геометрической фигуры, Начальная школа, № 2-1998, с. 39.



26. Гроздев, С., И. Шаркова, Задачите на Рѹ 1-4 клас Европейско кенгуру 2008-2013 г., Архимед, 2013.
27. Димитров, Д., Приемственост в обучението по математика в началните класове, УИ „Неофит Рилски“, Бл., 2001.
28. Димитров, Д., И. Шопова, За обучението на учениците в геометрична пропедевтика в III клас, сп. Начално образование, кн. 3/2000, с. 3-11.
29. Държавни образователни изисквания, МОН, 2000.
30. Иванов, Ст., З. Новакова, Сборник по математика за 3 клас, Хермес, 2005.
31. Кирова, Г., Занимателни елементи при работата по проект „Математика от приказния свят в първи и втори клас.“ Приемственост и перспективи в развитието на педагогическата теория и практика – 125 години предучилищно образование в България, изд. Веда Словена - ЖГ, С., 2007, с. 283-285.
32. Кирова Г. Практически упражнения по дидактика на математиката. Формиране на ключови компетентности в обучението по математика, Авангард Прима, С., 2014.
33. Кирова, Г., Типични грешки по математика, допускани от учениците при самостоятелни работи (изходно ниво) в подготвителната група/клас и в началните класове, Начално образование, кн. 4/2009, с. 24.
34. Кирова, Г., Типични грешки при овладяване на математически знания и умения в подготвителния и в началните класове, установени при проведено външно оценяване.“, 120 години Софийски университет „Св. Климент Охридски“ и развитие на педагогическата наука, изд. Веда Словена - ЖГ, С., 2008, с.148-154.
35. Колева, Н., Особенности при осъзнаване от обучаващите на мисливните операции в процеса на решаване на практически задачи, сп. Начално образование, кн. 5/2004, с. 19.
36. Кочеткова, Г. Г., Развитие пространственного мышления младших школьников, Начальная школа, № 12-1996, с. 54.
37. Крапивина, Е. А., Развитие пространственных представлений у первоклассников – шестилеток, Начальная школа, № 12-1996, с.58.
38. Лалчев, З., Математика – книга първа, изд. „Веда словена – ЖГ“, С., 1995.
39. Лалчев, З. Математика в задачи и методи Книга 1 : За учителя в началните класове, УИ „Св. Климент Охридски“, С., 2009.
40. Лалчев, З. Математика в задачи и методи Книга 2: За учителя в началните класове, УИ „Св. Климент Охридски“, С., 2009.
41. Маджаров, А., Р. Радев, З. Новакова. Общи проблеми на методиката на обучението по математика, Първа част, Веда Словена-ЖГ, С., 1994.
42. Маджаров, А., Р. Радев, З. Новакова. Дидактико-методически технологии в обучението по математика в началните класове, Втора част, Веда Словена-ЖГ, С., 1993.
43. Маджаров, Ал. и др., Методика на учебно-възпитателната работа по математика I-III клас, изд. “Народна просвета”, С., 1988.
44. Маджаров, А., Р. Радев, З. Новакова. Методика на обучението по математика в началните класове, С., 1992.
45. Маджаров, А., В. Михайлов, и Д. Френкев. Методика на обучението по математика в I-III клас. С., 1980.
46. Маджаров, А., Дидактико-методически технологии по математика в началните класове, С., 1993.
47. Маджаров, А., Русанка Петрова, Методика на обучението по математика в началните класове, изд. Аксиос, Ш., 1997.
48. Маджаров, А, А. Манова, Ананиева, Д. и др., Христоматия по методика на обучението по математика в началните класове, Бл., 1985.
49. Манова, А., Р. Рангелова, и Р. Гарчева-Янева. Учебна тетрадка по математика № 2 за 2. клас., „Просвета“, С., 2003.
50. Манова, А., Р. Рангелова, и Ю. Гарчева-Янева. Книга за учителя по математика за 2. клас, „Просвета“, С., 2003.
51. Манова, А., Р. Рангелова, и Ю. Гарчева-Янева, Математика за 2. клас, „Просвета“, С., 2003.

52. Манова, А., Р. Рангелова, и Ю. Гарчева-Янева, Учебна тетрадка по математика № 1 за 2. клас, „Просвета“, С., 2003.
53. Манова, А., Р. Рангелова, и Ю. Гарчева-Янева, Учебна тетрадка по математика № 3 за 2. клас, „Просвета“, С., 2003.
54. Манова, А. и др., Учебен комплект по математика за III клас, “Просвета”, С., 2008, 2013.
55. Манова, А. Математика за първи клас, Просвета, С., 2002.
56. Манова, А. Математика за втори клас, Просвета, С., 2003.
57. Манова, А. Математика за четвърти клас, Просвета, С., 2005.
58. Министерство на образованието и науката, „Национална стратегия за учене през целия живот за периода 2014-2020“, С., 2014.
59. Министерство на образованието и науката, Наредба №5 от 30.11.2015 г. за общообразователната подготовка, С., 2015 г. [https://www.mon.bg/upload/4182/nrdb5\\_30.11.2015\\_obshtoobr\\_podgotovka\\_1.pdf](https://www.mon.bg/upload/4182/nrdb5_30.11.2015_obshtoobr_podgotovka_1.pdf) (отваряно на 05.12.2017 г.).
60. Министерство на образованието и науката, Наредба № 4 от 30 ноември 2015 г. за учебния план, С., 2015 г. [https://www.mon.bg/upload/4183/nrdb4\\_30.11.2015\\_ucheben\\_plan.pdf](https://www.mon.bg/upload/4183/nrdb4_30.11.2015_ucheben_plan.pdf) (отваряно на 07.12.2017 г.).
61. Митева, Г. „Решаване на логически задачи в школа по математика.“ 120 години Софийски университет „Св. Климент Охридски“ и развитие на педагогическата наука. София: Вѳда Словѳна - ЖГ, 2008, с. 183-189.
62. Моро М.И., Бантова М.А. и др. Математика: Учебник. 3 клас: в 2-х частях, часть 1. – М.: „Просвѳщение“, 2012.
63. Моро М.И., Бантова М.А. и др. Математика: Учебник. 3 клас: в 2-х частях, часть 2. – М.: „Просвѳщение“, 2012.
64. Моро М.И., Пышкало А.М. Методика обучения математике в 1-3 классах. Пособие учителя. Изд.2-е, перераб и доп., - М., „Просвѳщение“, 1978.
65. Новакова, З., Методика на обучението по математика в началните класове, ИК “Хермес”, Пловдив, 2004.
66. Немов, Р. С., Психология, - М., Владос, 2003.
67. Новакова, З., Учебен комплект по математика за III клас, “Просвета”, С., 2004.
68. Новакова З. Книга за учителя по математика за 1, 2, 3 и 4 клас, С., 2002, 2003, 2004, 2005.
69. Новакова, З. Тенденции в обучението по математика в началните класове. – В Образованието днес – образованието утре, С., 1999.
70. Новакова, З., и З. Чакалова. Учебна тетрадка по математика № 1 за 2. клас, „Просвета“, С., 2007.
71. Новакова, З., и С. Мелоян. Учебна тетрадка по математика № 2 за 2. клас, „Просвета“, С., 2007.
72. Новакова, З., и С. Терзиева. Учебна тетрадка по математика № 3 за 2. клас, „Просвета“, С., 2007.
73. Новакова, З., Т. Вълкова, и С. Иванов. Математика за 2. клас. „Просвета“, С., 2007.
74. Новакова, З. Математика за първи клас, Просвета, С., 2002.
75. Новакова, З. Математика за втори клас, Просвета, С., 2003.
76. Новакова, З. Математика за четвърти клас, Просвета, С., 2005.
77. Папагеоргиу, Ел., Леонидас Кириакидис, Парпунас, Хр., Математика за 3 клас  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , 2012.
78. Пенков, Б., Проблеми на съвременната математика – том първи, „Наука и изкуство“, С., 1973.
79. Песталоци, Й. Х. Моите възпитателни опити, УИ „Св. Климент Охридски“, С., 2008.
80. Петров, П., Дидактика, изд. „Вѳда словѳна – ЖГ“, С., 2001.
81. Петрушина, С. В., О развитии пространственного мышления младших школьников, Начальная школа, № 8-2004, с. 56.

82. Пишкало, А., Методика обучения элементам геометрии в начальных классах. М., Просвещение, 1973.
83. Пишкало, А., Наглядные пособия по математике, Москва, 1962.
84. Подходова, Н. С., Геометрия в развитии пространственного мышления младших школьников, Начальная школа, № 1-1999, с. 90.
85. Подходова, Н. С., Подготовка учащихся к изучению геометрии, К проблеме построения личностно-ориентированных курсов в I-IV классах, Начальная школа, № 1-2002, с. 67.
86. Политова, Л., и П. Гергова. „Задачи, създаващи интерес към математиката у учениците 1-4 клас.“ Приемственост и перспективи в развитието на педагогическата теория и практика – 125 години предучилищно образование в България, Вѳда Словѳна - ЖГ, С., 2007, с. 265-269.
87. Попов, Н., М. Пиронкова. Образователната система в България. Бюро за педагогически услуги. С., 2007.
88. Попов, Н. Американското образование. II издание. УИ „Св. Климент Охридски“, С., 2002.
89. Попов, Н., Сравнение на структурните аспекти на началното образование в 90 страни, Педагогика, бр. 1/2001, с. 57-70.
90. Попов, Н., Началното образование в Европа, сп. Начално образование, кн. 1/1994, с. 48.
91. Радев, Пл. Обща училищна дидактика или събития, ситуации, обекти, Пловдив, 2005.
92. Радев, Р., Начални геометрични знания, изд. Народна просвета, С., 1970.
93. Радев, Р., Графическа нагледност при обучението по математика в 1-3 клас, С., 1982.
94. Радев, Р., Групова работа на учениците в учебно-възпитателния процес, Начално образование, кн. 8/1996, с. 17.
95. Стефанова, Д., Помагало по математика 3 клас/Искам да знам..., Слово, В. Търново, 2005.
96. Стоименова, Я., Методика за развитие на математически способности у 7-11 годишни ученици, ИУ „Неофит Рилски“, Бл., 2004.
97. Стоянова, Р. Дидактическа технология за групова работа в обучението по математика в началните класове, С., 2010.
98. Суягина, В. И., Функции геометрии в начальном обучении математике, Начальная школа, № 11-2002, с. 31.
99. Тотев, Ст., Използване на технологичния подход в самостоятелната работа по математика в начална училищна степен, Начално образование, кн. 2/2008, с. 24.
100. Христова, К. Помагало по математика за 3. клас I част. Математическите пътешествия на Мечо и Медунка из България, ИК „Кронос“, С., 2014.
101. Христова, К. Помагало по математика за 3. клас II част. Математическите пътешествия на Мечо и Медунка из България, ИК „Кронос“, С., 2014.
102. Учебна програма по математика за I клас, МОН, С., 2002.
103. Учебна програма по математика за II клас, МОН, С., 2002.
104. Учебна програма по математика за III клас, МОН, С., 2003.
105. Учебна програма по математика за I клас, МОН, С., 2015 (<https://www.mon.bg/bg/1699>).
106. Учебна програма по математика за II клас, МОН, С., 2016 (<https://www.mon.bg/bg/1997>).
107. Учебна програма по математика за III клас, МОН, С., 2017 (<https://www.mon.bg/bg/1689>).
108. Чехларова, Т., Задачи с часовник за развитие на пространствената интелигентност, Начално образование, кн. 2/2009, с. 8.
109. Чехларова, Т., Преброяване на правоъгълници (в избираемо обучение по математика), Начално образование, кн. 4/2009, с. 31.

110. Barmby, P., L. Bilsborough, T. Harries, и S. Higgins. Primary Mathematics. Teaching for Understanding. Berkshire: Open University Press, 2009.
111. Battista, M.T. The importance of spatial structuring in geometric reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 6 (3), 1999, p. 170-177.
112. Battista, M. T. The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2). Charlotte, NC: Information Age, 2007, p. 843-908.
113. Bell, J. Doing your research project: a guide for first-time researchers in education and social science (3rd. ed.). Buckingham: Open University Press, 1999.
114. Berthelot, R., & Salin, M.H. The role of pupils spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998, p. 71-78.
115. Brissiaud, R., Pierre Clerc, J'apprendes les maths - CM1, Paris, 2005.
116. Charlesworth, R., и K. K. Lind. Math & Science For Young Children. Wadsworth: Cengage Learning, 2010.
117. Clements, D. H., и Battista, M. T. Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 1992, p. 420-464.
118. Clements, D., и J. Sarama. Young Children Ideas about Geometric Shapes. Buffalo: The National Council of Teachers of Mathematics, 2000.
119. Cronbach, L. „Internal consistency of tests: Analyses old and new.“ *Psychometrika*. Vol. 53, No. 1, 1988, p. 63-70.
120. Dyer, J. R. „Cognitive Development.“ Or Child Development, or N. Salkind, New York: Macmillan Reference, 2002, p. 87-92.
121. Duval, R. Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998, p. 37-52.
122. Fischbein, E. The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2), 1993, p. 139-162.
123. Haapasalo, L., Kadijevich, Dj. „Two Types of Mathematical Knowledge and Their Relation.“ *Journal für Mathematik-Didaktik* 21 (2), 2000, p. 139-157.
124. Haylock, D. Mathematics Explained for Primary Teachers. London: SAGE, 2010.
125. Hayes, D., Foundations of Primary Teaching. 5th ed. London: David Fulton, 2012.
126. Herbart, J. F. The Science of Education: Its General Principles deduced from its Aim. Boston: D. C. Heath & Co., 1903.
127. Hiele, Pierre Van. Geometric Thinking and Geometric Concepts in Elementary. Boston: Allyn and, 2001.
128. Houdement, C. Geometrical working space, a tool for comparison, In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for the Research of Mathematics Education*. University of Cyprus, 2007, p. 972-981.
129. Houdement, C., & Kuzniak, A. Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3*, Bellaria, Italy, 2003.
130. Jacques K. and Hyland R. (eds) Professional Studies in the Primary and Early Years. Exeter: Learning Matters, 2007.
131. Kidder, F. R. Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7 (1), 1976, p. 40-52.
132. Kramer, K. Teaching Elementary School Mathematics. Boston: Allyn & Bacon, 1978.
133. Liping Ma. Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, 1999.
134. Musser, G., & Burger, W. Mathematics for Elementary Teachers. New York: Macmillan Publishing Company, 1988.
135. Nunnes, T., и P. Bryant. Children Doing Mathematics. Oxford: Blackwell, 1996.
136. Piaget, J., & Garcia, R. *Psychogenèse et histoire des sciences [Psychogenesis and the History of Science]*. Paris: Flammarion, 1983.

137. Piaget, J., B. Inhelder, и A. Szeminska. The child's conception of geometry. London: Routledge and Kegan Paul, 1960.
138. Piaget, J., и B. Inhelder. The child's conception of space (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.). New York: W. W. Norton, 1967.
139. Pollard, A. & Bourne, J. Teaching and Learning in the Primary School. Routledge, 1994.
140. Rinkens, Hans-Dieter., Kurt, Hanisch, Welt der Zahl 3, Schroedel, 2011.
141. RS/JMC (Royal Society and Joint Mathematical Council) *Teaching and Learning Geometry*. London: Royal Society/Joint Mathematical Council, 2001, p. 11-19.
142. Thoburn Tina, Jack E. Forbes, Robert D. Bechtel, Macmillan Mathematics, Macmillan Publishing Company, New York, USA, 2010.
143. Toom. A., Review of the book "Mathematical Circles (Russian Experience)" by Dmitri Fomin, Sergey Genkin, and Iliа Itenberg, AMS, 1996. The American Mathematical Monthly, May 1997, p. 474-477.
144. van Hiele, P. M. *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic Press, 1986.
145. van Hiele, P. M. Begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 6, 1999, p.310-316.
146. Weyl, Hermann., Symmetry, Prinseton University Press, 1952.
147. Whitebread, D. The Psychology of Teaching and Learning in the Primary School. RoutledgeFalmer, 2000.
148. Wragg, E. An introduction to classroom observation. London:Routledge, 1994.
149. <http://www.mon.bg>
150. <https://www.britannica.com/topic/symmetry-definition>
151. <http://www.ibe.unesco.org>
152. [http://www.partners-in-education.com/pages/greece/The\\_Greek\\_Educational\\_System.html](http://www.partners-in-education.com/pages/greece/The_Greek_Educational_System.html)
153. [http://prema2.iacm.forth.gr/docs/National\\_Report\\_GR\\_Draft.pdf](http://prema2.iacm.forth.gr/docs/National_Report_GR_Draft.pdf)
154. <http://education.stateuniversity.com/pages/543/Greece-EDUCATIONAL-SYSTEM-OVERVIEW.html>
155. <http://www.russianschool.com/curriculum>
156. <ftp://math.stanford.edu/pub/papers/milgram/russian-grade-4-problems.pdf>
157. <http://mathworld.wolfram.com/topics/Geometry.html>
158. Education System in Bulgaria. Retrieved from Education Database: <http://www.classbase.com/Countries/bulgaria/Education-System>
159. Hayes, D. (2006). Primary Education, The Key Concepts. Retrieved from Google Books: [http://books.google.bg/books?id=bC5rVJ8XR\\_0C&printsec=frontcover&dq=primary+education&hl=bg&sa=X&ei=3OI6UrmRNInLtAbcYD4DA&redir\\_esc=y#v=onepage&q=primary%20education&f=false](http://books.google.bg/books?id=bC5rVJ8XR_0C&printsec=frontcover&dq=primary+education&hl=bg&sa=X&ei=3OI6UrmRNInLtAbcYD4DA&redir_esc=y#v=onepage&q=primary%20education&f=false)
160. Primary Education in Bulgaria. Retrieved from JustLanded: <http://www.justlanded.com/english/Bulgaria/Bulgaria-Guide/Education/Primary-education-in-Bulgaria>
161. <http://interneturok.ru/ru/school/matematika/3-klass>
162. <http://4book.org/uchebniki-ukraina/3-klass/1601-matematika-3-klass-bogdanovich-rus>
163. [http://www.jstor.org/stable/30213607?seq=1#page\\_scan\\_tab\\_contents](http://www.jstor.org/stable/30213607?seq=1#page_scan_tab_contents); The Teaching of Geometry at the Primary Level
164. <http://www.education.com/activity/geometry/>; Geometry Activities For Kids
165. <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11858-015-0693-4>; New opportunities in geometry education at the primary school; June 2015, Volume 47, Issue 3, p. 319-329.
166. <http://www.itmathrepetitor.ru/i-f-sharygin-celi-obucheniya-v-koncepcii/>

## Списък на публикациите, свързани с дисертационния труд

**1. Христова, Г.,** Сравнителен анализ на учебното съдържание по геометрия за 9-10 годишни ученици, Есенните докторантски четения на Факултета по начална и предучилищна педагогика, София, 18-19 ноември 2016 г., Сборник с доклади, Том 2, стр. 184-197, ISSN 2534-9252

**2. Христова, Г.,** Проучване мнението на начални учители относно геометричния материал в учебното съдържание по математика за трети клас, В: Електронно списание за наука, култура и образование, бр. 7, София: ФНПП, 2017, ISSN 2367-6396 [http://fnpp.uni-sofia.bg/magazine/broi7/FNPP\\_EPUB\\_2017\\_broi7.pdf](http://fnpp.uni-sofia.bg/magazine/broi7/FNPP_EPUB_2017_broi7.pdf)

**3. Христова, Г.,** Овластяване на геометричния материал по математика в началото на трети клас, XV th Jubilee International Scientific Conference, Bansko, Bulgaria, December 15 th - 17 th of 2017, vol. 20.1, p. 337-342, ISSN 2545-4439

**4. Христова, Г.,** Овластяване на геометричния материал по математика в края на трети клас, В: Електронно списание за наука, култура и образование, бр. 8, София: ФНПП, 2017, ISSN 2367-6396 [http://fnpp.uni-sofia.bg/magazine/broi8/FNPP\\_EPUB\\_2017\\_broi8.pdf](http://fnpp.uni-sofia.bg/magazine/broi8/FNPP_EPUB_2017_broi8.pdf)

## Благодарности

Искрено признателна и благодарна съм на научния си ръководител доц. д-р Габриела Кирова за професионалните насоки, всеотдайната подкрепа и съдействие при разработването на настоящия дисертационен труд.

Благодарна съм и на проф. д-р Здравко Лалчев за подготовката по математика, която ми даде по време на следването ми във Факултета по начална и предучилищна педагогика.

Изказвам своята благодарност на гл. ас. д-р Любка Алексиева и гл. ас. д-р Иван Душков за отзивчивостта и помощта, която ми оказаха.

Благодаря и на всички колеги от катедра „Начална училищна педагогика“ за отправените препоръки, оказаното ми съдействие и подкрепа.

Сърдечно благодаря на семейството си за търпението и подкрепата.

