# СТАНОВИЩЕ

от доц. д-р Андрей Стефанов Андреев

за дисертацията Драгомир Ивов Алексов, на тема
„Неравенства от типа на Марков в $L_2$-норми при тегла на Гегенбауер",
представена за получаване на образователна и научна степен „Доктор",
докторска програма „Изчислителна математика",
професионално направление: 4.5 Математика

Дисертацията съдържа 65 страници, разпределени по същество в 5 глави (една от тях Увод), апробация на резултатите, литература, авторска справка и два други раздела. Резултатите, представени в дисертацията, са публикувани в една самостоятелна и две съвместни статии, като научният ръководител проф. Г. Николов е съавтор и в двете статии, а в една от тях съавтор е проф. А. Шадрин, известен учен в теорията на апроксимациите. Това е естествено, тъй като тематиката на дисертацията е обект на десетки години изследвания както от проф. Г. Николов, така и от неговия научен ръководител академик Б. Боянов. Определено личи, че дисертантът е много добре запознат с класическата и съвременната история на проблемите (и редица други, близки до тях), разгледани в дисертацията, които в момента са важен инструмент при изграждането на редица направления в Теорията на апроксимациите и Числения анализ. Ето защо смятам, че темата на дисертацията е актуална както в теоретичен, така и в приложен аспект. Без съмнение дисертантът има равностойно участие в постигнатите резултати - не само самостоятелната статия е потвърждение за това, а и добре подреденото представяне на материала.

Двете съвместни статии са публикувани в едно от най-представителните издания в областта на Теорията на апроксимациите – *J. Approx. Theory* – 2016 и 2018 год. Другата статия е публикувана в *Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Inf.* – 2015 год. Като отчетем, че *5-Year Impact Factor* на списанието *J. Approx. Theory* е 0.855, то едно от основните изисквания в **Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени...във ФМИ на СУ „Св. Кл. Охридски"** (Глава 3, Член 4) е напълно удовлетворено.

В Увода, съдържащ 11 страници, е направена научна и историческа справка за произхода на задачата за оценка на нормата на производните на алгебричен полином чрез неговата норма през 1889 год. и нейното развитие до наши дни. Резултатите на братята Андрей и Владимир Маркови (удивително е, че тук има място и името на световно известния химик Д. Менделеев) от края на 19 век и половин век по-късно обобщението на тези резултати през 1941 год. от американските математици Дафин и Шефер слагат началото на много интересни изследвания в теоретичен и приложен аспект в математиката. За актуалността на задачата може да се съди по факта, че върху неравенството на Марков за оценка на производната на алгебричен полином $p$ от степен $n$,

$$|p'(x)| \leq \frac{2n^2}{b-a} || p ||, x \in [a, b],$$

се гради голяма част от теорията в областта на апроксимациите. Съществена част от резултатите са свързани с полиномите на Чебишев (те са частен случай при определени тегла на Гегенбауер), които играят значителна роля не само в математиката, но са важен инструмент в нейните приложения в числените методи, електротехниката и др. Казано накратко, в тази посока дисертантът е доказал:

- редица нови двустранни оценки за най-добрите константи в неравенсвото на Марков в $L_2$-норми при тегла на Гегенбауер;

- изследвана е четността на екстремалния полином в неравенсвото на Марков за първата производна в $L_2$-норми при тегла на Гегенбауер и е намерена характеристика на най-добрата константа.

Част от увода е добро въведение към основните резултати в дисертацията, споменати по-горе. Представени са известните точни или двустранни оценки за константата на Марков

$$c_n^{(k)} = sup_{P\in\pi_n}\frac{\|P^{(k)}\|}{\|P\|}, \pi_n - \text{алгебр. полиноми от степен } n,$$

по-специално в $L_2$-норма при тегла на Ермит, Лагер, Гегенбауер. Тъй като споменатите тегла зависят от редица параметри, при Лагер теглото е $\omega_\alpha(t) = t^\alpha e^{-t}, \alpha > -1$, при Гегенбауер теглото е $\omega_\gamma(t) = (1-t^2)^{\gamma-\frac{1}{2}}, \gamma > -\frac{1}{2}$, то поведението на константата на Марков $c_n^{(k)}$ е изследвано в редица случаи по отношение на $n, k, \alpha, \gamma$ (разбира се различните норми водят до увеличаване на случаите). За популярността и важността на изследванията на $c_n^{(k)}$ говори фактът, че редица известни математици в продължение на повече от 100 години са работили в тази област (като се почне от 1889 г. – А. Марков, 1932 – Шмид, 1937 – Хил, Сегьо, Тамаркин и други и се стигне до последните години, където съществен принос имат и български математици – Б. Боянов, Г. Николов и др.).

Глава 2 също има уводен характер, но насочен директно към инструментариума, използван от автора за изследване на $c_n^{(1)}$ в неравенството на Марков в $L_2$-норма при тегла на Гегенбауер – означението е $c_n^{(1)} := c_n(\gamma)$. Използвайки характеризацията на $c_n^{(1)}$ в $L_2$-норма чрез най-голямата собствена стойност на симетрична и положително определена матрица е получена оценката $c_n(\gamma)^2 = 4max\{\tau_{\lfloor n/2\rfloor}, \tau_{\lfloor n+1/2\rfloor}\}$, където $\tau_{\lfloor n/2\rfloor}, \tau_{\lfloor n+1/2\rfloor}$, са двете най-големи собствени стойности на две положително определени матрици.

По-нататък ще отбележа накратко основните резултати на докторанта представени в глави 3, 4 и 5. Изрично подчертавам, че резултатите са оригинални и в голяма степен са резултат от развитие на методите на научния му ръководител проф. Г. Николов.

Основният резултат в Глава 3 е двустранната оценка при тегло на Гегенбауер единица ($\gamma = \frac{1}{2}$)

$$0.317837(n+\tfrac{1}{2})^2 \leq c_n(\tfrac{1}{2}) \leq 0.325779(n+\tfrac{3}{5})^2.$$

Въпреки, че от тази оценка не следва асимтотическата константа на Шмид от 1932 год., $\frac{1}{\pi}$, но е добра нейна апроксимация,

$$0.317837 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{c_n(\frac{1}{2})}{n^2} = \frac{1}{\pi} = 0.318309886\ldots \leq 0.325779,$$

смятам, че този резултат има стойност предвид на новата техника, с която е доказан. Доказателството за представянето на $c_n(\gamma)^2, \gamma \geq 0$, (Теорема 3.2), показва, че докторантът умее да използва сложни математически пресмятания.

В четвърта глава е намерена оценка отгоре за $c_n(\gamma), \gamma > -1/2$,

$$c_n(\gamma) < \frac{(n+1)(n+2\gamma+1)}{2\sqrt{2\gamma+1}},$$

чрез оценяване отгоре на най-големите собствени стойности на две положително определени матрици. Използван е фактът, че най-големите собствени стойности на такива матрици не надвишават техните следи. Доказателството е следствие на явното представяне на следите (с помощта на 4 леми).

Друг важен резултат в четвърта глава е доказателството в $L_2$ за съществуване на екстремален полином при теглата на Гегенбауер, т.е. дали, ако заменим израза (използван по-горе)

$$c_n(\gamma)^2 = 4max\{\tau_{\lfloor n/2 \rfloor}, \tau_{\lfloor n+1/2 \rfloor}\},$$

с еквивалентния му $\|p'\|^2 \le 4max\{\tau_{\lfloor n/2 \rfloor}, \tau_{\lfloor n+1/2 \rfloor}\}\|p\|^2$, съществува полином $p$, за който равенството се достига. Показано е, че екстремалният полином е четен (нечетен) в зависимост от четността му.

В пета глава са изследвани двустранни оценки за константата $c_n(\gamma)$ при $\gamma > -\frac{1}{2}$. Като следствие от тях са получени редица двустранни оценки за конкретни стойности на $\gamma$, а именно,

$0.472135n^2 \le c_n(0) \le 0.472871(n+\frac{9}{8})^2$, полиноми на Чебишев,

$0.317837(n+\frac{1}{2})^2 \le c_n(\frac{1}{2}) \le 0.319472(n+\frac{7}{4})^2$, тегло константа,

$$0.248549n^2 \le c_n(1) \le 0.250987(n+\frac{19}{8})^2.$$

Ще отбележа и намирането на двустранна оценка за асимтотиката по отношение на $\gamma$, $\lim_{\gamma\to-\frac{1}{2}}(2\gamma+1)c_n(\gamma)^2$. Техниката на доказване използва връзката между $c_n(\gamma)^2$ и най-малкия корен на подходящ ортогонален полином.

Авторефератът отразява точно съдържанието на дисертацията и научните приноси, по-точно той е копие на Увода на дисертацията.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ:**

**От казаното по-горе правя извода и определено считам, че в дисертацията са разгледани и доказани важни и трудни нови резултати в Теорията на апроксимациите. Убедено предлагам на почитаемото Научно жури да присъди на докторанта Драгомир Ивов Алексов образователната и научна степен „Доктор", в професионално направление 4.5 „Математика", докторска програма „Изчислителна математика".**

**14.02.2018**

**С уважение:**

**/доц. А.Андреев/**