Софийски университет
"Св. Климент Охридски"

Факултет по математика и информатика

Фрагментируемост и функционално-аналитичен подход към необходими условия за оптималност

Надежда Костадинова Рибарска

АВТОРЕФЕРАТ
на дисертация за присъждане на научната степен
ДОКТОР НА НАУКИТЕ
в направление 4.5 Математика

София, 2017г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на 30.08.2017г. на заседание на катедра “Математически анализ” на Факултета по математика и информатика на СУ“Св. Климент Охридски”.

Дисертационният труд е на английски език и съдържа 187 страници, от които 9 страници библиография, включваща 105 заглавия.

Дисертантът работи като професор във Факултета по математика и информатика на СУ“Св. Климент Охридски” (редовен трудов договор) и в секцията “Изследване на операциите, вероятности и статистика” на Института по математика и информатика към БАН (частичен трудов договор). Изследванията са извършени във Факултета по математика и информатика на СУ“Св. Климент Охридски” и в секцията “Изследване на операциите, вероятности и статистика” на Института по математика и информатика към БАН.

Предложената дисертация се състои от две относително независими глави. Изследванията, представени в тях, са разделени както от темата, така и от времето, в което са проведени. Общата основа на цялата дисертация са методите и идеите на функционалния анализ. Жизнеността на тези методи и идеи е подчертана в първата глава чрез резултати, мотивирани от въпроси, принадлежащи на геометрията на банаховите пространства. Те имат потенциала да продължат развитието на теорията и да заинтересуват учени и от други области (например общата топология и теоретичната оптимизация). Във втората глава е демонстрирано как специфичните методи на функционалния анализ могат да предложат нов поглед и да дадат нови резултати в добре утвърдени приложни области като вариационното смятане и оптималното управление.

1 Основни резултати в глава 1.

1.1 Увод

Първата глава на дисертацията е посветена на една част от геометрията на банаховите пространства, която лежи на границата между функционалния анализ, общата топология и оптимизацията. Една от основните идеи в тази дисертация е идеята за "фрагментируемост". Следната дефиниция се появява за пръв път в статията на J.E.Jayne и C.A.Rogers [50] от 1985 година:

Дефиниция 1.1. *Нека X е топологично пространство и нека ρ е метрика, дефинирана върху него. Нека ε е положително число. Казваме, че ρ ε-фрагментира X, ако всяко непразно подмножество Y на X има непразно релативно отворено подмножество с ρ-диаметър, по-малък от ε. Казваме, че X е фрагментирано от метриката ρ, ако ρ ε-фрагментира X за всяко $\varepsilon > 0$.*

Да отбележим, че фрагментируемостта и някои близки до нея понятия се появяват естествено в няколко различни ситуации преди 1985 година. Един от най-известните примери в това направление е геометричната характеризация на свойството на Радон-Никодим:

Теорема 1.2. *Следните твърдения са еквивалентни за произволно банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$:*

(i) X е дентабелно, тоест за всяко непразно ограничено подмножество M на X и за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $x^* \in X^*$ и $a \in R$ та-

кива, че отрезът $M \cap \{x^* > a\}$ е непразен и има диаметър, по-малък от ε;

(ii) X притежава свойството на Радон-Никодим, тоест за всяка абсолютно непрекъсната векторнозначна мярка τ с ограничена вариация, дефинирана върху σ-алгебрата от измеримите по Лебег подмножества на $[0,1)$ и със стойности в X, съществува измерима функция $g : [0,1) \longrightarrow X$ такава, че за всеки непрекъснат функционал $x^* \in X^*$ композицията $x^* \circ g$ е интегруема по Лебег и

$$\langle x^*, \tau(E) \rangle = \int_E \langle x^*, g(t) \rangle \,\mathrm{d}\lambda(t)$$

за всяко измеримо по Лебег множество $E \subset [0,1)$.

Близката връзка между свойството на Радон-Никодим и диференцируемостта на изпъкналите функции е един от класическите (и изненадващи) резултати в тази област. Да напомним някои дефиниции:

Дефиниция 1.3. *Банаховото пространство E се нарича асплундово (слабо асплундово), ако всяка изпъкнала функция, дефинирана върху отворено изпъкнало подмножество на E, е диференцируема по Fréchet (Gâteaux) във всяка точка от някое гъсто G_δ подмножество на дефиниционната си област.*

Повече информация за асплундовите и слабо асплундовите пространства читателят може да намери в книгата на Phelps [80]. Следната теорема принадлежи на Namioka, Phelps и Stegall:

Теорема 1.4. *Банаховото пространство E е асплундово тогава и само тогава, когато неговото спрегнато E^* има свойството на Радон-Никодим спрямо слабата със звезда топология (еквивалентно, спрегнатата норма фрагментира ограничените подмножества на (E^*, w^*)).*

Докато асплундовите пространства са подробно изучени и са известни няколко красиви и полезни техни характеризации, за слабо асплундовите пространства, въпреки че те също са важни обекти за оптимизацията, не е известна никаква характеризация. Изучаването на слабо асплундовите пространства е една от главните мотивации на работите, представени в първа глава.

Въпросите, свързани със свойството на Радон-Никодим, са само част от областите, в които се появява своството фрагментируемост. Всъщност

Jayne и Rogers въвеждат това понятие при изучаване на съществуването на "хубави" селектори на полунепрекъснати отгоре компактнозначни изображения (виж [50] и [40]):

Теорема 1.5. *Нека $F : X \longrightarrow Y$ е полунепрекъснато отгоре изображение с компактни непразни образи от метричното пространство X във фрагментираното хаусдорфово топологично пространство Y. Тогава съществува селектор f на F, който е σ-дискретен и от първи борелов клас по отношение на топологията на Y, и множеството от точките на прекъсване на f е множество от първа категория в X.*

Заключението на Теорема 1.5 не зависи от дадената метрика, която фрагментира Y, а само от съществуването на такава метрика. Същото е в сила за некои от теоремите, доказани от Christensen и Кендеров в [16], доколкото се интересуваме само от заключението за еднозначност.

Дефиниция 1.6. *Топологичното пространство X се нарича фрагментируемо, ако съществува метрика, дефинирана върху него, която фрагментира X.*

Разсъжденията на Christensen и Кендеров от [16] лесно могат да бъдат модифицирани, за да получим, че всяко минимално полунепрекъснато отгоре изображение с непразни компактни образи с дефиниционна област берово пространство и област от стойности фрагментируемо пространство е еднозначно в резидуално подмножество на дефиниционната си област. Оттук получаваме, че всяко банахово пространство E, чието спрегнато, снабдено със слабата със звезда топология, е фрагментируемо, е слабо асплундово. В [89] и [92] е показано, че известните достатъчни условия за слаба асплундовост на едно банахово пространство всъщност са достатъчни условия за фрагментируемост на (E^*, w^*). Също така, в [89] е доказано, че ако X е фрагментируем хаудорфов компакт, то $(C(X)^*, w^*)$ също е фрагментируемо пространство (и следователно $C(X)$ е слабо асплундово). В [52] Kalenda публикува първия пример на компактно нефрагментируемо пространство, което принадлежи на класа на Stegall. Кендеров, Moors и Sciffer в [56] дадоха пример на слабо асплундово пространство, чието спрегнато (снабдено със слабата със звезда топология) не е фрагментируемо. Все пак класът на банаховите пространства с фрагментируемо спрегнато е много широк, устойчив и успешно използван подклас на класа на слабо асплундовите пространства.

В [89] е намерена вътрешна характеризация на класа на фрагментируемите пространства чрез подходящи разбивания на пространството.

Дефиниция 1.7. *Добре наредената фамилия* $\mathcal{U} = \{U_\xi : 0 \le \xi \le \xi_0\}$ *от подмножества на топологичното пространство* X *се нарича релативно отворено разбиване на* X*, ако*

(i) $U_0 = \emptyset$*;*

(ii) U_ξ *се съдържа в* $X \setminus \left(\bigcup_{\eta<\xi} U_\eta\right)$ *и е релативно отворено в него за всяко* ξ*,* $0 < \xi < \xi_0$*;*

(iii) $X = \bigcup_{\xi<\xi_0} U_\xi$*.*

В [89] могат да бъдат намерени някои свойства на релативно отворените разбивания.

Дефиниция 1.8. *Фамилията* $\mathcal{U}$ *от подмножества на топологичното пространство* X *се нарича* σ*-релативно отворено разбиване на* X*, ако* $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$*, където* $\mathcal{U}^n$*,* $n = 1, 2, \dots$ *са релативно отворени разбивания на* X*. Казваме, че* $\mathcal{U}$ *разделя точките на* X*, ако за всеки два различни елемента* x *and* y *на* X *съществува естествено* n *такова, че* x *и* y *принадлежат на различни елементи на разбиването* $\mathcal{U}^n$*. В такъв случай казваме, че* X *притежава разделящо* σ*-релативно отворено разбиване.*

Следната вътрешна характеризация на фрагментируемите пространства е взета от [89]:

Теорема 1.9. *Топологичното пространство* X *притежава разделящо* σ*-релативно отворено разбиване тогава и само тогава, когато съществува метрика, фрагментираща* X*.*

Втората секция на първа глава е посветена на по-нататъшно изследване на някои свойства на фрагментируемите и σ-фрагментируемите (виж Дефиниция 1.10) пространства. В третата секция се изучава свойството "изброимо покритие с множества с малък локален диаметър" (виж Дефиниция 1.29). В четвъртата секция е доказан резултат, тясно свързан с това свойство.

1.2 Фрагментируемост на някои топологични пространства

Понятието σ-фрагментируемост е въведено от Jayne, Namioka и Rogers в [50].

Дефиниция 1.10. *Нека X е топологично пространство и нека ρ е метрика върху него. Казваме, че ρ σ-фрагментира X, ако за всяко положително число ε съществуват изброимо много подмножества X_ε^i на X такива, че $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_\varepsilon^i$ и ρ ε-фрагментираѕ X_ε^i за всяко естествено i.*

1.2.1 Кога σ-фрагментируемост влече фрагментируемост?

Първата теорема от тази подсекция е публикувана в [91] и скоро след това забелязах, че същата конструкция работи и в различна ситуация (виж Твърдение 1.12), но този резултат не е публикуван. Все пак тези изследвания имат своето по-нататъшно развитие в някои работи на испански математици.

Теорема 1.11. *Нека (X, τ) е топологично пространство и нека ρ е метрика, която σ-фрагментира (X, τ). Ако ρ е полунепрекъсната отдолу, то (X, τ) е фрагментируемо пространство.*

Твърдение 1.12. *Нека (X, τ) е хаусдорфово топологично пространство и нека ρ е метрика, която σ-фрагментира (X, τ). Ако τ_ρ (топологията, породена от ρ) е по-силна от оригиналната топология τ, то (X, τ) е фрагментируемо пространство.*

1.2.2 Свойство на трите пространства

В тази подсекция е доказано едно свойство на устойчивост на σ-фрагментируемостта и на изброимите покрития с множества с малък локален диаметър (виж Дефиниция 1.29), а именно "свойството на трите пространства". Частичен резултат в това направление е получен в [55] чрез игрова характеризация на σ-фрагментируемите пространства. Представеното в дисертацията доказателство следва схемата на "декомпозиционния метод" от [74]. Тази схема работи без проблем за "изброимо покритие с множества с малък локален диаметър", но в случая на σ-фрагментируемост се налага използването на нови идеи, а именно конструиране на подходящи релативно отворени разбивания.

Теорема 1.13. *Нека E е банахово пространство, H е негово затворено подпространство и $F = E/H$. Нека F и H са σ-фрагментируеми (тоест пространствата, снабдени със съответните слаби топологии, са σ-фрагментируеми от съответната норма). Тогава E също е σ-фрагментируемо.*

Следствие 1.14. *Нека E е банахово пространство, H е негово затворено подпространство и $F = E/H$. Нека H и F със съответните слаби топологии притежават изброими покрития с множества с малък локален диаметър в нормата. Тогава E притежава същото свойство.*

1.2.3 Слаба* фрагментируемост на спрегнатото кълбо

В тази подсекция се усилват две известни достатъчни условия за слаба асплундовост. Първото условие принадлежи на Asplund и е публикувано през 1968 (виж [3]):

Теорема 1.15. *Нека E е банахово пространство. Ако спрегнатото пространство E^* притежава спрегната строго изпъкнала еквивалентна норма, то E е слабо асплундово.*

Тъй като в този случай предспрегнатата еквивалентна норма на E е диференцируема по Gâteaux (извън нулата), естествено е да се зададе въпросът дали горната теорема на Asplund остава в сила за банахови пространства E, притежаващи еквивалентна норма, която е диференцируема по Gâteaux във всяка ненулева точка. Този въпрос стоя отворен много дълго и получи положителен отговор от Preiss, Phelps и Namioka в [82]:

Теорема 1.16. *Нека E е банахово пространство. Ако нормата на E е диференцируема по Gâteaux извън нулата, то E е слабо асплундово.*

Връзката между понятията "фрагментируемост" и "слаба асплундовост" е установена от следното твърдение, доказано в [16]:

Теорема 1.17. *Нека E е банахово пространство. Ако (E^*, w^*) е фрагментируемо, то E е слабо асплундово.*

Не беше ясно дали гореспоменатите теореми на Asplund и Preiss-Phelps-Namioka могат да бъдат получени като следствия от този резултат. Теорема 1.18 доказва, че това е вярно за теоремата на Asplund. Комбинирайки тази теорема с техниката, развита в [82], в Теорема 1.20 е доказано, че теоремата на Preiss-Phelps-Namioka също може да бъде разглеждана като следствие от Теорема 1.17.

Нашият подход не използва външни понятия за пространството (E^*, w^*) (игри и изображения) като статията [82]. При това даваме допълнителна информация за структурата на пространството (E^*, w^*).

Теорема 1.18. *Нека E е строго изпъкнало банахово пространство и τ е хаусдорфова локално изпъкнала линейна топология вьху него. Ако строго изпъкналата норма е полунепрекъсната отдолу спрямо τ, то (E, τ) е фрагментируемо пространство.*

Естествено е линейната топология τ (в Теорема 1.18) да бъде слабата топология в дадено банахово пространство или слабата със звезда топология в спрегнато банахово пространство, или топологията на поточковата сходимост в пространство от непрекъснати функции. Лекото усилване на теоремата на Asplund се дължи на добрите свойства на устойчивост на класа на фрагментируемите пространства (виж [89], Proposition 2.8).

Следствие 1.19. *Нека E е банахово пространство и E^* притежава спрегната строго изпъкнала еквивалентна норма. Тогава всяко затворено линейно подпространство F на E е слабо асплундово.*

Теорема 1.20. *Нека E е банахово пространство и $\|\cdot\|$ е диференцируема по Gâteaux норма върху него. Тогава топологичното пространство (E^*, w^*) е фрагментируемо.*

1.2.4 β-диференцируемост и β-малкост

Резултатите от тази подсекция обобщават теоремите от §3 на [82]. Те са включени в дисертационния труд, защото за автора е важен погледът към фрагментируемостта от гледна точка на еднозначност на изображения.

Дефиниция 1.21. *Нека β е фамилия от непразни ограничени подмножества S на банаховото пространство E, удовлетворяваща условията:*

(a) $\lambda S \in \beta$, ако $\lambda \in R$ и $S \in \beta$;

(b) обединението на краен брой елементи на β принадлежи на β;

(c) обединението на всички елементи на β съвпада с E.

Казваме, че непрекъснатата функция f, дефинирана в отворено изпъкнало подмножество D на E, е β-диференцируема в $x \in D$, ако за всички $S \in \beta$ границата на диференчното частно $\lim_{t\to 0}(f(x+ty) - f(x))/t$ съществува и е равномерна за y в S.

Естествени избори за β могат да бъдат: фамилията от крайните подмножества на E (диференцируемост по Gâteaux), фамилията от слабо компактните подмножества на E (диференцируемост по Hadamard), фамилията от ограничените подмножества на E (диференцируемост по Fréchet).

Казваме, че $U \subset E^*$ е околност на $x^* \in E^*$, ако съществува $S \in \beta$ с $x^* + S^0 \subset U$, където $S^0 = \{z^* \in E^* \ : \ \langle z^*, z\rangle \leq 1 \ \forall \ z \in S\}$. Лесно се проверява, че така е въведена линейна топология върху E^*. Ще наричаме тази топология също β.

Дефиниция 1.22. *Нека X е топологично пространство и $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$ е σ-релативно отворено разбиване на X. Нека τ е друга топология върху X. Казваме, че $\mathcal{U}$ е τ-малко, ако за всяко $x \in X$ и за всяка околност W на x съществува естествено число n и елемент U на $\mathcal{U}^n$ с $x \in U \subset W$.*

Следното твърдение е обобщение на Proposition 2.5 от [89].

Твърдение 1.23. *Нека (X, τ_1) е топологично пространство, τ_2 е друга топология върху X и нека X притежава разделящо τ_2-малко τ_1-σ-релативно отворено разбиване. Тогава всяко минимално полунепрекъснато отгоре изображение с непразни компактни образи $\varphi : B \longrightarrow (X, \tau_1)$ от беровото пространство B в (X, τ_1) е еднозначно и τ_2-полунепрекъснато отгоре във всяка точка от някое резидуално подмножество на B.*

Следствие 1.24. *Нека E е банахово пространство и β е фамилия от негови подмножества, удовлетворяваща условията от Дефиниция 1.21. Ако (E^*, w^*) притежава разделящо β-малко σ-релативно отворено разбиване, то всяка непрекъсната изпъкнала функция, дефинирана в отворено изпъкнало подмножество на E, е β-диференцируема във всяка точка от някое резидуално подмножество на дефиниционната си област.*

Теорема 1.25. *Да предположим, че нормата на банаховото пространство E е β-гладка. Тогава (E^*, w^*) притежава разделящо σ-релативно отворено разбиване.*

Комбинирайки резултатите от тази подсекция, можем да получим още веднъж класическата

Теорема 1.26. *Нека E е банахово пространство, чиято норма е гладка по Fréchet. Тогава спрегнатата норма фрагментира ограничените подмножества на (E^*, w^*).*

1.2.5 Едно свойство за устойчивост на σ-фрагментируемостта

Тази подсекция е посветена на доказателството на следната

Теорема 1.27. *Нека X и Y са компактни пространства. Нека $C(X)$ и $C(Y)$, снабдени със съответната топология на поточковата сходимост, са σ-фрагментируеми от равномерната норма. Тогава същото е в сила за пространството от непрекъснатите функции $C(X \times Y)$ върху тяхното декартово произведение.*

Доказателството се основава на игровата характеризация на σ-фрагментируемостта, разработена от Кендеров и Moors в [54] и [55].

1.3 Изброимо покритие с множества с малък локален диаметър

Известно е, че топологичните свойства на пространството (E, w), където E е банахово пространство и w е слабата топология върхи него, както и на пространството $C_p(X)$ от непрекъснатите функции върху X, снабдено с топологията на поточковата сходимост, са важни за изучаването на свойствата на банаховите пространства E и $C(X)$. Тези топологични свойства са близко свързани със свойствата на изображенията със стойности в съответното банахово пространство (например съществуването на селектори от първи беров клас, спрегнатото свойство на Namioka, еднозначност почти навсякъде на полунепрекъснато отгоре изображение с непразни компактни образи, виж [50], [48] и др.), с дескриптивните свойства на неговите подмножества (например съвпадение на бореловите σ-алгебри, породени от слабата и нормираната топология, виж [20], [85] и др.). Може би най-впечатляваща е близката връзка с възможните пренормирания на пространството. Да припомним някои дефиниции:

Дефиниция 1.28. *Нека E е линейно пространство τ е линейна топология върху него. Нормата $\|\cdot\|$ върху E се нарича τ-Kadec (или само Kadec, ако τ е слабата топология), ако τ и топологията, породена от нормата, съвпадат върху единичната сфера. Една норма се нарича локално равномерно изпъкнала (LUR), ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от елементи на единичната сфера и за ваяка точка x от единичната сфера, за която $\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2$, е в сила, че $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към x по норма.*

LUR нормите, които са τ-полунепрекъснати отдолу, са τ-Kadec.

В [46] Jayne, Namioka и Rogers въвеждат и изучават понятието σ-фрагментируемост. В частност те доказват, че всяко банахово пространство с еквивалентна Kadec норма е σ-фрагментируемо. Нещо повече, те показват, че такива банахови пространства притежават по-силно свойство, което те наричат "изброимо покритие с множества с малък локален диаметър":

Дефиниция 1.29. *Нека (X, τ) е топологично пространство и ρ е метрика, дефинирана върху него. Казваме, че X притежава изброимо покритие с множества с малък локален ρ-диаметър (ρ-SLD за краткост), ако за всяко положително число ε пространството може да бъде разбито на изброимо много части*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^{\varepsilon}$$

по такъв начин, че за всяко естествено n и за всяка точка $x \in X_n^{\varepsilon}$ съществува τ-отворено множество U, съдържащо x, за което

$$\rho - diam(U \cap X_n^{\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Moltó, Orihuela и Троянски в [74] характеризират банаховите пространства E, които притежават еквивалентна LUR норма, като тези пространства E, за които (E, w) има специален вид $\|\cdot\|$-SLD, а именно слабо отворените множества U в дефиницията на SLD трябва да бъдат отворени полупространства.

Топологичните свойства на пространствата, притежаващи σ-SLD, са сериозно изучени в [75], [39]. M. Raja [85] доказва, че в контекста на банаховите пространства, снабдени със слабата топология, $\|\cdot\|$-SLD е "почти еквивалентно" на съществуването на еквивалентна Kadec норма:

Теорема 1.30. *(виж [86], [85]). Нека E е банахово пространство, τ е линейна топология, по-слаба от топологията, породена от нормата, и нека $\overline{B}_E^{\tau}$ е ограничено. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*

(i) (E, τ) притежава $\|\cdot\|$-SLD;

(ii) За всяка константа $c > 1$ съществува неотрицателна симетрична положително хомогенна τ—полунепрекъсната отдолу функция F върху E с

$$\|\cdot\| \leq F \leq c\|\cdot\|$$

и такава, че топологията, породена от нормата, и τ съвпадат върху множеството

$$S = \{x \in E \;:\; F(x) = 1\}\ .$$

Тази секция е посветена на свойството изброимо покритие с множества с малък локален диаметър. В първата подсекция показваме, че за топологичното пространство (X, τ) съществуването на метрика ρ върху него такава, че X има ρ-SLD е "много близо" до това (X, τ) да е пространство на Gruenhage (виж Дефиниция 1.31). Последното понятие се появява преди тридесет години в [37]. В [90] е дадена характеризация на такива пространства, близка по дух на характеризацията на фрагментируемите пространства от [89] (виж Дефиниция 1.31).

Представеното изследване хвърля светлина върху общите черти и върху съществените различия между пространствата с ρ-SLD и фрагментируемите (σ-фрагментируемите) пространства. Оказва се, че има аналогия между отношението σ-фрагментируемост$\leftrightarrow$фрагментируемост, установено от Кендеров и Moors в [55], и отношението SLD$\leftrightarrow$пространства на Gruenhage, установено в първата подсекция. При това в контекста на банаховите пространства е в сила аналог на Теорема 1.4 от [55] (виж 1.34). Във втората подсекция използваме тези топологически резултати, за да докажем, че ако $C(X)$ притежава еквивалентна p-Kadec норма и $C_p(Y)$ има SLD спрямо нормата за две компактни пространства X и Y, то $C_p(X \times Y)$ притежава $\|\cdot\|$-SLD. В същност, нямаме нужда от пълната сила на предположението за $C(X)$. Можем да използваме функция F от вида, построен в теоремата на Raja (Теорема 1.30), ако в допълнение тази функция е *непрекъсната спрямо нормата.*

1.3.1 Пространства на Gruenhage и дескриптивни пространства

Следната дефиниция е взета от [90].

Дефиниция 1.31. *Добре наредената фамилия* $\mathcal{U} = \{U_\xi : \ 1 \leq \xi \leq \bar{\xi}\}$ *от подмножества на топологичното пространство* X *се нарича G-релативно отворено разбиване на* X*, ако*

(i) U_1 *е отворено* X*;*

(ii) $\mathcal{U} = \{U_\xi : \ 2 \leq \xi \leq \bar{\xi}\}$ *е дизюнктна фамилия от релативно отворени подмножества на* $X \setminus U_1$*;*

(iii) $U_{\bar{\xi}} = X \setminus \left(\bigcup_{\xi<\bar{\xi}} U_\xi\right)$.

Фамилията $\mathcal{U} = \{U_\xi : \ 2 \leq \xi \leq \bar{\xi}\}$ *ще бъде наричана средно ниво на* $\mathcal{U}$.

Фамилията $\mathcal{U}$ *от подмножества на* X *се нарича* $\sigma-G$*-релативно отворено разбиване, ако тя е обединение на изброимо много G-релативно* *отворени разбивания $\mathcal{U}^n$, $n = 1, 2, \dots$, на X. Казваме, че $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$ разделя точките на X, ако за всеки два различни елемента x и y на X съществува естествено n такова, че x и y принадлежат на различни елементи на $\mathcal{U}^n$. Топологичното пространство X се нарича пространство на Gruenhage, ако притежава разделящо σ-G-релативно отворено разбиване.*

Ако е дадено σ-G—релативно отворено разбиване $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$, означаваме с $\rho(\mathcal{U})$ следната метрика върху X:

$$\rho(\mathcal{U})(x, y) = \begin{cases} (\min \{n : \mathcal{U}^n \text{ разделя } x \text{ и } y\})^{-1} & \text{if } x \neq y, \\ 0 & \text{if } x = y. \end{cases}$$

Твърдение 1.32. *Нека (X, τ) е регулярно топологично пространство и нека ρ е метрика върху него, удовлетворяваща поне едно от следните две условия:*

(a) ρ е полунепрекъсната отдолу спрямо τ;

(b) τ_ρ (топологията, породена от ρ) е по-силна от τ.

Ако (X, τ) притежава изброимо покритие с множества с малък локален ρ-диаметър, то съществува разделящо σ-G-релативно отворено разбиване $\mathcal{U}$ на X. При това $\tau_{\rho(\mathcal{U})} \geq \tau_\rho$ в случай (a) и $\tau_{\rho(\mathcal{U})} \geq \tau$ в случай (b).

Твърдение 1.33. *Нека (X, τ) е топологично пространство и $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$ be a σ-G-релативно отворено разбиване, което разделя точките на X. Тогава X притежава изброимо покритие с множества с малък локален $\rho(\mathcal{U})$-диаметър. При това, ако ρ е метрика върху X с $\tau_{\rho(\mathcal{U})} \geq \tau_\rho$, то X притежава изброимо покритие с множества с малък локален ρ-диаметър.*

Corollary 1.34. *Нека E е банахово пространство, w е неговата слаба топология и A е непразно подмножество на E. Тогава (A, w) има $\|\cdot\|_E$-SLD точно тогава, когато (A, w) има ρ-SLD за някоя метрика ρ с $\tau_\rho \geq w$.*

1.3.2 Едно свойство на устойчивост за SLD

Следната теорема е най-важната за тази секция и идеите от нейното доказателство се използват в доказателството на основната теорема от следващата секция.

Теорема 1.35. *Нека X и Y са хаусдорфови компакти, за които $C_p(X)$ притежава еквивалентна p-Kadec норма и $C_p(Y)$ има $\|\cdot\|$-SLD. Тогава $C_p(X \times Y)$ също притежава $\|\cdot\|$-SLD.*

1.3.3 Едно свойство на устойчивост за LUR пренормиране

Резултатите в тази секция са публикувани в статията [95] и са изработени в сътрудничество с Владимир Бабев.

Съществуването на еквивалентна локално равномерно изпъкнала (LUR) норма за дадено банахово пространство е широко известно и интензивно изучавано свойство с важни приложения. Ние се интересуваме от устойчивостта на LUR-пренормирането при тензорни произведения. Началото на нашите изследвания беше дадено от следната теорема, доказана в [49]:

Теорема 1.36. *Нека $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, където Γ е произволно индексно множество, е фамилия от хаусдорфови компакти. Да предположим, че за всяко крайно подмножество Φ на Γ пространството*

$$C\left(\prod\{X_\varphi : \varphi \in \Phi\}\right)$$

има еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма. Тогава

$$C\left(\prod\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}\right)$$

има еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма.

Не беше ясно възможно ли е да се замести условието $C\left(\prod\{X_\varphi : \varphi \in \Phi\}\right)$ има еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма, с по-елегантното условие, че всяко пространство $C(X_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ има еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма. Този въпрос беше зададен в [49]. Отговорът е ясен, ако можем да докажем твърдението за декартовото произведение на два хаусдорфови компакта. Ние отговаряме положително на този въпрос. Всъщност, доказваме, че ако K е хаусдорфов компакт, E е банахово пространство и пространствата $C(K)$ и E имат еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма, то такава има и $C(K, E)$. При това можем да контролираме свойствата на полунепрекъснатост отдолу на новата локално равномерно изпъкнала норма. Разбира се, те зависят от свойствата на полунепрекъснатост отдолу на дадените LUR норми върху $C(K)$ и E спрямо някакви слаби топологии. За да бъдем по-точни, даваме следната дефиниция:

Дефиниция 1.37. *Ако Z е банахово пространство, едно подпространство Z' на неговото спрегнато се нарича нормиращо, ако*

$$\inf\left\{\left[\sup\frac{|\langle z^*, z\rangle|}{\|z^*\|.\|z\|}\ :\ z^*\in Z'\setminus\{0\}\right]\ :\ z\in Z\setminus\{0\}\right\}>0$$

Ще означаваме топологията на поточковата сходимост върху Z' с $\sigma(Z, Z')$.

Нека E е банахово пространство и K е хаусдорфов компакт. Ще разглеждаме върху тях слабите топологии $\tau_1 = \sigma(E, F)$ и $\tau_2 = \sigma(C(K), T)$, породени от някакви нормиращи линейни подпространства F и T на E^* и $C(K)^*$ съответно. Ще предполагаме, че τ_2 е по-силна от топологията на поточковата сходимост върху $C(K)$. Да разгледаме пространството $C(K, E)$ от всички непрекъснати функции, дефинирани върху K и приемащи стойности в E. Ако фиксираме линеен функционал μ върху E, който принадлежи на F, и непрекъсната E-значна функция $f : K \longrightarrow E$, то $\mu(f)$ е непрекъсната реалнозначна функция върху K, дефинирана чрез $\mu(f)(x) = \mu(f(x))$. Следователно стойността $\nu(\mu(f))$ (означавана с $(\nu\circ\mu)(f))$ за $\nu \in T$ е добре дефинирана. Така композицията $\nu\circ\mu$ може да бъде разглеждана като непрекъснат линеен функционал върху $C(K, E)$. Ще означаваме линейното подпространство на $C(K, E)^*$, което се състои от такива композиции, с

$$T(F) := \{\nu\circ\mu :\ \mu\in F,\ \nu\in T\}$$

Ще означаваме слабата топология $\sigma(C(K, E), T(F))$, породена от него, с $\tau = \tau_1\times\tau_2$. При тези предположения пространството $T(F)$ е нормиращо, ако $C(K, E)$ е снабдено с обичайната равномерна норма. Готови сме да формулираме основната за тази секция

Теорема 1.38. *Нека K е хаусдорфов компакт, E е банахово пространство и τ_1, τ_2, τ са като по-горе. Нека E притежава еквивалентна τ_1-полунепрекъсната отдолу локално равномерно изпъкнала норма и $C(K)$ притежава еквивалентна τ_2-полунепрекъсната отдолу локално равномерно изпъкнала норма. Тогава $C(K, E)$ притежава еквивалентна τ-полунепрекъсната отдолу локално равномерно изпъкнала норма.*

Нека сега X и Y са две хаусдорфови компактни пространства. Естествени слаби топологии върху $C(X)$ и $C(Y)$ са топологията на поточковата сходимост и слабата топология. Има естествен изоморфизъм между пространствата $C(X, C(Y))$ и $C(X\times Y)$

$$f(x)(y)\longleftrightarrow f(x, y)$$

който запазва и естествените слаби топологии. Така непосредствено получаваме

Следствие 1.39. *Ако $C(X)$ и $C(Y)$ притежава еквивалентни (поточково полунепрекъснати отдолу) LUR норми, то $C(X \times Y)$ също притежава еквивалентна (поточково полунепрекъсната отдолу) LUR норма.*

Използвайки горното следствие и Теорема 1.36, получаваме

Следствие 1.40. *Нека $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, където Γ е произволно индексно множество, е фамилия от хаусдорфови компакти. Да предположим, че за всяко $\gamma \in \Gamma$ пространството $C(X_\gamma)$ притежава еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма. Тогава*

$$C\left(\prod\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}\right)$$

притежава еквивалентна локално равномерно изпъкнала норма.

В [18] Deville и Godefroy отбелязват, че теоремата на Zizler за пренормиране запазва свойството на поточкова полунепрекъснатост отдолу на нормите. Така Теорема 1.36 остава в сила, ако заместим "еквивалентна LUR норма" с "еквивалентна поточково полунепрекъсната отдолу LUR норма" както в предположенията, така и в заключението. Това може да бъде разглеждано и като следствие на трансферната техника на Raja (виж [87]). Следователно Следствие 1.39 влече

Следствие 1.41. *Нека $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, където Γ е произволно индексно множество, е фамилия от хаусдорфови компакти. Да предположим, че за всяко $\gamma \in \Gamma$ пространството $C(X_\gamma)$ притежава еквивалентна поточково полунепрекъсната отдолу локално равномерно изпъкнала норма. Тогава*

$$C\left(\prod\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}\right)$$

притежава еквивалентна поточково полунепрекъсната отдолу локално равномерно изпъкнала норма.

Класическият подход към въпроса, от който се интересуваме, се среща със значителни трудности. Главният инструмент, от който се нуждаем в нашето изследване, е една характеризация на LUR пренормируемостта на дадено банахово пространство на Moltó, Orihuela и Троянски (виж [74]). Тази характеризация разкрива близката връзка между топологичните свойства на банаховото пространство, снабдено със слабата топология, и геометричните му свойства. Нужното топологично свойство е много близо до изброимо покритие с множества с малък локален диаметър, но има нужда и от изпъкналост. Точната формулировка е следната:

Дефиниция 1.42. *Нека Z е банахово пространство и $Z' \subset Z^*$. Казваме, че Z има Z'-sJNR, ако за всяко положително ε можем да разложим пространството на изброимо много части*

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n^{\varepsilon}$$

по такъв начин, че за всяко естествено n и за всяка точка $z \in Z_n^{\varepsilon}$ съществува функционал $z^* \in Z'$ и реално число α такива, че отрезът

$$\mathcal{S}(Z_n^{\varepsilon}, z^*, \alpha) = \{y \in Z_n^{\varepsilon} : z^*(y) > \alpha\}$$

съдържа z и е в сила $diam(\mathcal{S}(Z_n^{\varepsilon}, z^*, \alpha)) < \varepsilon$.

Да отбележим, че единствената разлика между свойствата “изброимо покритие с множества с малък локален диаметър” и “Z'-sJNR” в контекста на банахово пространство Z, снабдено със слабата топология $\sigma(Z, Z')$, е че произволното $\sigma(Z, Z')$-отворено множество U е заместено с $\sigma(Z, Z')$-отворено полупространство. Ще формулираме една по-точна версия на характеризацията на Moltó, Orihuela и Троянски, която принадлежи на M. Raja (виж Theorem A от [87]). Тя позволява да се контролира полунепрекъснатостта отдолу на нормата:

Теорема 1.43. *Нека Z е банахово пространство и Z' е нормиращо линейно подпространство на неговото спрегнато Z^*. Тогава следните са еквивалентни:*
(i) Z притежава еквивалентна $\sigma(Z, Z')$-полунепрекъсната отдолу локално равномерно изпъкнала норма;
(ii) Z има Z'-sJNR.

Близостта между свойствата “изброимо покритие с множества с малък локален диаметър” и “Z'-sJNR” позволява да използваме в доказателството на основната теорема конструкцията от доказателството на основната теорема от предишната секция. Така получаваме

Теорема 1.44. *Нека K, E, T и F са като в предположенията на главната теорема от тази секция. Нека E притежава еквивалентна τ_1-Kadec норма. Нека $(C(K), \tau_2)$ има изброимо покритие с множества с малък локален диаметър. Тогава $(C(K,E), \tau)$ има изброимо покритие с множества с малък локален диаметър.*

2 Основни резултати в глава 2.

2.1 Увод

Важността на теорията на оптималното управление няма нужда от изтъкване както от общоматематическа гледна точка, така и от гледна точка на многобройните ѝ приложения. В същото време тази теория е пресечна точка на оптимизацията, функционалния анализ и негладкия анализ и, от една страна, използва методи от тези важни области на съвременната математика, а от друга страна, е извор на нови задачи и нови идеи за аналистите. Тази глава е посветена на изследване на необходими условия за оптималност в безкрайномерни пространства чрез средствата и методите на функционалния анализ. Всички резултати в тази глава са получени в сътрудничество с Михаил Кръстанов, а за част от тях работихме заедно с Цветомир Цачев.

Преди почти десет години Владимир Вельов постави на Цветомир Цачев задачата да се обобщят резултатите от [34] (Принцип на максимума на Понтрягин за възрастово структурирана управляема система с нелокална динамика) за случай, когато има поточкови терминални ограничения. Това беше отправната точка на нашето детайлно изследване на задачи на оптималното управление в безкрайномерни фазови пространства. Благодарни сме на Владимир Вельов, че привлече вниманието ни към този проблем. Първият ни резултат в това направление беше доказването на принцип на максимума на Понтрягин за задача на оптималното управление с терминални ограничения с произволно банахово фазово пространство (виж [58]). Доказателството е стандартно, използващо вариационния принцип на Ekeland, но в този резултат има два нетривиални момента: първо, ние заместихме диференцирането на функцията разстояние с отделяне на изпъкнали множества, което ни позволи да избегнем обичайното предположение за сепарабелност на спрегнатото на фазовото пространство. Второ, и по-важно, ние въведохме понятието квазисолидност (виж Дефиниция 2.1) и го използвахме вместо понятието "крайна коразмерност", с което съществено обобщихме известните резултати. Квазисолидността се оказа много полезен инструмент в по-нататъшните ни изследвания. Ако C е затворено и изпъкнало подмножество на банахово пространство, то е квазисолидно, ако има непразна вътрешност в затворената си афинна обвивка. Разбира се, всички изпъкнали множества притежават това свойство, ако пространството е крайномерно. Това условие гарантира, че всяка гранична точка на C е опорна точка за C. Резултатите от [58] са изложени във втората секция на втора глава. Тази секция започва с подробен исторически обзор на съществуващите необходими условия за оптималност за задачи на оптималното управление в безкрайномерно фазово пространство.

Нашата следваща стъпка беше да анализираме по-подробно предположенията, необходими за верността на принципа на максимума на Понтрягин за задачи на оптималното управление с терминални ограничения в безкрайномерно фазово пространство. Събрахме най-често използваните вариации и сравнихме съответните множества от вариации и случаите, в които се използват (виж подсекция 2.1). При това ние успяхме да докажем предишния си резултат, използвайки съвършено различен метод. Приложихме идеите на класическото доказателство на принципа на максимума на Понтрягин в крайномерно фазово пространство. Опростено, схемата е следната. Апроксимираме с помощта на вариации достижимото множество на управляемата система в крайния момент в околност на крайната точка на оптималната траектория. Апроксимираме целта в околност на същата точка. Ако затворената обвивка на разликата на апроксимиращите множества съдържа околност на нулата, получаваме противоречие с оптималността на траекторията. В противен случай разделяме (чрез нетривиален непрекъснат функционал) апроксимиращите множества (което е същото като да разделим нулата от тяхната разлика). И двете стъпки са нетривиални, и при двете са необходими някакви предположения, за да можем да докажем съответното твърдение. За да направим първата стъпка, ние доказахме абстрактен резултат за неразделимост на две затворени множества, едното от които е изпъкнало (Теорема 2.4). Грубо казано, в този геометричен резултат анализираме поведението на две множества, едното от които е изпъкнало и затворено, а другото е множеството от стойностите на някакво непрекъснато изображение, в околност на тяхна обща точка. Изпъкналото множество е апроксимирано със сечението на кълбо с краен радиус и самото множество. Множеството от стойностите е апроксимирано със сечението на кълбо с краен радиус и сечението на множествата на контингентните вариации (виж Дефиниция 2.3) на изображението във всички точки от някаква околност на праобраз на фиксираната обща точка. Твърдим, че ако затворената обвивка на разликата на такива апроксимиращи множества съдържа околност на нулата и ако тези апроксимиращи множества имат нетривиално сечение, то самите множества не могат да бъдат локално отделени (тоест съществува редица, клоняща към фиксираната обща точка, всички членове на редицата са в сечението на двете множества и са различни от фиксираната обща точка). Оказва се, че е важно да имаме равномерност на апроксимацията (в случая, всеки елемент на апроксимиращото множество трябва да е контингентна вариация на изображението във всяка точка от фиксирана предварително околност на праобраз на фиксираната обща точка). Тази идея присъства още в [36]. Ние представяме пример (виж Пример 2.8), който доказва, че равномерността на апроксимацията е необходима за валидността на принципа на максимума на Понтрягин. За тази цел разглеждаме подробно два от най-често използваните класове вариации (иглени и дифузни), като се интересуваме какви свойства на равномерност притежават. За да можем да направим втората стъпка, предполагаме квазисолидност на затворената обвивка на разликата на апроксимиращите множества. Формулираме серия от принципи, чиито предположения могат да бъдат проверени в различни конкретни ситуации. Като следствия получаваме резултати от [66], основната теорема от [58], както и някои частни случаи на твърдения от [28] и [77]. Тези резултати са публикувани в [59] и са представени в трета секция от втора глава.

В статията [59] ние за пръв път се опитахме да погледнем към най-често използваните вариации в оптималното управление от гледна точка на негладкия анализ. Следвайки Sussmann, нашето убеждение е, че ключът към намирането на нови необходими достатъчни условия за оптималност са теоремите за неразделимост на множества (грубо казано, от неразделимост на апроксимиращите конуси и тяхното нетривиално пресичане трябва да следва неразделимост на самите множества - виж точните дефиниции в началото на четвърта секция). Оказва се, че допирателните конуси на Clarke са твърде "големи" апроксимации, за да е в сила свойството за неразделимост (в началото на четвърта секция е даден пример, доказващ това твърдение). Ние въвеждаме равномерни допирателни множества и равномерни допирателни конуси (Дефиниции 2.10, 2.11 и 2.12),изучаваме техните свойства и доказваме теорема за неразделимост. В някакъв смисъл тази теорема за неразделимост е обобщение на предишния ни резултат за неразделимост, защото не предполагаме изпъкналост на едното множество. Доказателството използва подобни идеи и, изненадващо, е по-кратко от предишното. Тези резултати са представени в подсекция 4.1. Следващата подсекция съдържа две приложения на теоремата за неразделимост. Първото от тези приложения е абстрактна теорема за множителите на Лагранж в банахово пространство. В нея отново присъства предположението за квазисолидност на разликата на апроксимиращите множества. Второто приложение е необходимо условие за оптималност от тип принцип на максимума на Понтрягин за задача на оптималното управление в безкрайномерно фазово пространство, като вече не се предполага изпъкналост на множеството, което искаме да достигнем в крайния момент (т.е. целта). Като следствия се получават основните теореми от [58] и [59]. Тези резултати са представени в секция 4 на втора глава и са публикувани в [61].

Естествена следваща стъпка е да приложим получената абстрактна теорема за множителите на Лагранж към задача на оптималното управление в крайномерно фазово пространство, разглеждана като оптимизационна задача в безкрайномерното пространство от съответните траектории. Съществуват много общи негладки необходими условия за оптималност (виж, например, книгите [13], [44] и тяхната библиография) за такива задачи. Ние разглеждаме най-простата, но нетривиална задача от този вид, а именно така наречената основна задача на вариационното смятане. Основният ни резултат е Теорема 2.23, която е много близка до Теорема 18.1 от [13]. Нашият подход е съвършено различен от техниката, представена в [13]. Ние не използваме вариационни принципи. Нашите доказателства се основават върху специфичните функционално-аналитични свойства на разглежданата задача и върху предишните ни резултати от [58], [59] и [61]. Задачата на вариационното смятане се състои в минимизиране на интегрален функционал $\varphi : L^\infty([a,b];\mathbf{R}^n) \times L^\infty([a,b];\mathbf{R}^n) \longrightarrow \mathbf{R}$ при ограничения $x(t) = x_a + \int_a^t u(s)\, ds$ за $t \in [a,b]$ и $x(b) = x_b$, където $(x,u) \in L^\infty([a,b];\mathbf{R}^n) \times L^\infty([a,b];\mathbf{R}^n)$ е аргументът на φ. Схемата е следната: трябва да апроксимираме епиграфиката на φ, както и ограничението чрез равномерни допирателни множества и да намерим подходящи условия върху интегранда на φ, които да влекат квазисолидност на затворената обвивка на разликата на равномерните допирателни множества, така че да е приложима нашата абстрактна теорема за множителите на Лагранж. Освен това е важно да се разбере при какви условия (по-ограничителни) върху интегранда можем да твърдим, че полученият множител на Лагранж е регулярен, тоест той принадлежи на предспрегнатото пространство $L^1([a,b];\mathbf{R}^n) \times L^1([a,b];\mathbf{R}^n)$ вместо на $(L^\infty([a,b];\mathbf{R}^n)\times L^\infty([a,b];\mathbf{R}^n))^*$ (за да бъде използваем). Схемата е проста, но има много технически трудности за преодоляване и много различни възможности за предположенията. Беше интересно, че се наложи да използваме някои теореми от геометрията на банаховите пространства, които не се срещат в уводните курсове по предмета (например теоремата на Banach-Dieudonné, операция на Суслин и др.). Надяваме се, че предложеният подход може да бъде развит с цел да се получат необходими условия и извън липшицовия случай. Този резултат е представен в секция 5 на втора глава.

2.2 Вариационен подход

Да разгледаме следната задача на оптималното управление:

$$J(u(\cdot),v) := \int_0^T f^0(t,y(t),u(t),v)\,dt \to \min \tag{1}$$

при условия

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = &\ f(t,y(t),u(t),v) \text{ п.н. в } [0,T],\\ y(0) = &\ \varphi(v),\\ y(T) \in &\ S,\\ u(\cdot) \in &\ \mathcal{U} := \{u(\cdot):[0,T]\to U,\ u(\cdot) \text{ е силно измерима}\},\\ v \in &\ \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{2}$$

Тук X и Z са банахови пространства, $S\subset X$ и са в сила следните предположения:

(H$_1$) S е затворено и изпъкнало подмножество на X, U е сепарабелно метрично пространство, $\mathcal{V}$ е ограничено изпъкнало подмножество на Z и $T>0$ е фиксирано;

(H$_2$) Функциите $f:[0,T]\times X\times U\times\mathcal{V}\to X$ и $f^0:[0,T]\times X\times U\times\mathcal{V}\to\mathbf{R}$ са силно измерими за всяко фиксирано $(x,u,v)\in X\times U\times\mathcal{V}$. При това f и f^0 са диференцируеми по Fréchet спрямо x за всяко фиксирано (t,u,v) и спрямо v за всяко фиксирано (t,x,u). Освен това функциите $f(t,\cdot,\cdot,\cdot)$, $f^0(t,\cdot,\cdot,\cdot)$, $f'_x(t,\cdot,\cdot,\cdot)$, $f^{0\prime}_x(t,\cdot,\cdot,\cdot)$, $f'_v(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $f^{0\prime}_v(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ са непрекъснати. Функцията $\varphi:Z\to X$ е непрекъснато диференцируема. Съществува $M>0$ такова, че $\|v\|\le M$, $\|\varphi'(v)\|\le M$ за всяко $v\in\mathcal{V}$,

$$\|f^{0\prime}_v(t,x,u,v)\|\le M,\ \|f'_v(t,x,u,v)\|\le M,\ \|f'_x(t,x,u,v)\|\le M,$$

$$\|f_x^{0\prime}(t,x,u,v)\| \le M,\ \|f(t,x,u,v)\| \le M \ \text{ и } \ |f^0(t,x,u,v)| \le M$$

за всяко $(t,x,u,v) \in [0,T] \times X \times U \times \mathcal{V}$.

Следната дефиниция се използва многократно:

Дефиниция 2.1. *Нека X е банахово пространство и S е подмножество на X. Множеството S се нарича квазисолидно, ако неговата затворена изпъкнала обвивка $\overline{\text{co}}\ S$ има непразна вътрешност в неговата затворена афинна обвивка, тоест ако съществува точка $x_0 \in \overline{\text{co}}\ S$ такава, че $\overline{\text{co}}\ \{S - x_0\}$ има непразна вътрешност в $\overline{\text{span}}\ (S - x_0)$ (затвореното подпространство, породено от $S - x_0$).*

Полагаме $\Xi := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Xi_k$, където

$$\Xi_k := \Big\{ \big(\{u_i(\cdot)\}_{i=1}^k, \{v_i\}_{i=1}^k, \{\lambda_i\}_{i=1}^k \big) :$$

$$u_i(\cdot) \in \mathcal{U},\ v_i \in \mathcal{V}, \lambda_i \ge 0,\ i = 1, \dots, k,\ \textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \Big\}.$$

за всяко естествено k, и дефинираме

$$\mathcal{P} := \Big\{ \zeta(T) \in X : \ \text{ съществува } \theta = \big(\{u_i(\cdot)\}_{i=1}^k, \{v_i\}_{i=1}^k, \{\lambda_i\}_{i=1}^k \big) \ \in \Xi,$$

$$\text{такова, че } \zeta(t) = \varphi'(\bar v) \circ \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i - \bar v \right) + \int_0^t f'_x(s, \bar x(s), \bar u(s), \bar v).\zeta(s)\, ds$$

$$+ \sum_{i=1}^k \lambda_i \int_0^t \left(f(s, \bar x(s), u_i(s), \bar v) - f(s, \bar x(s), \bar u(s), \bar v) \right)\ ds +$$

$$+ \int_0^t f'_v(s, \bar x(s), \bar u(s), \bar v)\, ds \circ \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i - \bar v \right),\ t \in [0,T] \Bigg\}.$$

Следното предположение е основно в доказателството на основната теорема:

(H_3) Подмножеството $\mathcal{P} - S$ на X е квазисолидно.

Теорема 2.2. *Нека са изпълнени предположенията (H_1), (H_2) и (H_3). Ако $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v})$ е оптимална тройка за задачата (1)–(2), то съществува нетривиална двойка $(\psi_0, \psi(\cdot)) \in \mathbf{R}^1 \times C_{w^*}([0,T], X^*)$ такава, че $\psi_0 \leq 0$,*

$$\psi(t) = \psi(T) + \int_t^T \left(f'_x(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s), \bar{v})\right)^* \psi(s)\, ds + \psi^0 \int_t^T f_x^{0\prime}(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s), \bar{v})\, ds$$

и

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}, \psi^0, \psi(t)) = \max_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), u, \bar{v}, \psi^0, \psi(t)) \text{ \textit{п.н. в} } [0,T],$$

$$\langle \psi(T), x_1 - \bar{x}(T) \rangle \leq 0 \quad \text{\textit{за всяко} } x_1 \in S,$$

$$\left\langle (\varphi'(\bar{v}))^* \ \psi(0) + \int_0^T {H_v}'(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{v}) \mathrm{d}t, (v - \bar{v}) \right\rangle \leq 0$$

за всяко $v \in \mathcal{V}$, където

$$H(t, x, u, v, \psi^0, \psi) = \langle \psi, f(t, x, u, v) \rangle + \psi^0 f^0(t, x, u, v).$$

2.3 Вариации и подход с отделяне

В тази секция ограничаваме изследването си до най-простия, но нетривиален случай на задача на оптималното управление в безкрайномерно фазово пространство - задача на Mayer с изпъкнала цел и без фазови ограничения.

2.3.1 Вариации

При разглеждане на задачи на оптималното управление един от основните методи е изучаването на изображението, съпоставящо на допустимо управление крайната точка на съответната траектория. Вариациите в някакъв смисъл са критерий на поведението на това нелинейно изображение около фиксирана референтна траектория (обикновено това е оптималната траектория).

Разглеждаме управляемата система

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = &\ Ax(t) + f(t, x(t), u(t)) \text{ a.e. in } [0,T], \\ x(0) = &\ x_0 \in X, \\ u(\cdot) \in &\ \mathcal{U} := \{u(\cdot) : [0,T] \to U \mid u(\cdot) \text{ е силно измерима}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Тук X е банахово пространство, U е пълно метрично пространство, линейният оператор A е инфинитизимален генератор на силно непрекъсната полугрупа $\{S(t) \mid t \geq 0\}$. Фиксираме елемент $\bar{u}$ на $\mathcal{U}$ и околност Ω на $\bar{u}$ в $(\mathcal{U}, \mathrm{dist})$.

Предполагаме, че е изпълнена (H_2) от предишната секция.

В тази подсекция ние напомняме строгата дефиниция на класическите иглени вариации (въведени от McShane в [71] и използвани в оригиналното доказателство на принципа за максимума на Понтрягин) около референтната траектория, съответстваща на $\bar{u}$, и ги означаваме с $\mathcal{V}_N(\bar{u})$. Разглеждаме също дифузните вариации (въведени, доколкото се простират нашите сведения, от Yao в [103] и от Li в [63]), резюмираме основните им свойства, и ги означаваме с $\mathcal{V}_D(\bar{u})$. Освен това разглеждаме абстрактните вариации от първи ред $\mathcal{V}(\bar{u})$, въведени от H. Frankowska в [36] и обобщените вариации на Frankowska $\mathcal{V}_{Fr}(\bar{u})$, въведени също в [36]. Доказваме, че

$$\mathrm{co}\, \mathcal{V}_D(\bar{u}) \subset \mathcal{V}_{Fr}(\bar{u}) \subset T\ \overline{\mathrm{co}}\ \mathcal{V}_N(\bar{u}) \subset T\ \mathcal{V}(\bar{u}).$$

Включванията могат да бъдат строги. Даваме пример, в който множеството $\mathcal{V}_{Fr}(\bar{u})$ има празна вътрешност, докато $\mathrm{co}\, \mathcal{V}_N(\bar{u})$ съдържа околност на нулата.

2.3.2 Неразделимост на множества

Да разгледаме пълното метрично пространство $\mathcal{U}$ и банаховото пространство X. Нека $G : \mathcal{U} \to X$ е еднозначно непрекъснато изображение. Следната дефиниция е взета от [36]:

Дефиниция 2.3. *Контингентна вариация на изображението G в точката u наричаме затвореното подмножество на X*

$$G^{(1)}(u) := \limsup_{h \to 0^+} \frac{G(B_h(u)) - G(u)}{h},$$

тоест $v \in G^{(1)}(u)$ точно тогава, когато съществуват редици $h_i \to 0^+$ и $v_i \to v$ такива, че $G(u) + h_i v_i \in G(B_{h_i}(u))$.

Независимо от общността на горната дефиниция, най-често ще мислим, че $G(u)$ е стойността на решението на управляемата система (3), съответстващо на управлението $u \in \mathcal{U}$, в момента $t = T$. Да напомним, че $(\mathcal{U}, \mathrm{dist})$ е пълно метрично пространство и $G(\cdot)$ е непрекъснато върху него (виж, например, Lemma 3.2 от [58]).

Ще означаваме с B (съотв. $\overline{B}$) отвореното (съотв. затвореното) единично кълбо на банаховото пространство X с център в нулата. В сила е следната теорема за неразделимост:

Теорема 2.4. *Нека $\mathcal{U}$ е пълно метрично пространство, X е банахово пространство и $G : \mathcal{U} \to X$ е еднозначно непрекъснато изображение. Нека $\bar{u} \in \mathcal{U}$ и нека C е затворено изпъкнало подмножество на X, съдържащо $G(\bar{u})$. Предполагаме, че:*

(i) съществува $M > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$ и $\rho > 0$ такива, че

$$\bigcap_{u \in B_{\bar{\varepsilon}}(\bar{u})} \left[MB \cap G^{(1)}(u) - C + G(\bar{u}) + \frac{\rho}{2} B \right] \supset \rho \overline{B}.$$

(ii) множеството $[C - G(\bar{u})] \bigcap G^{(1)}(\bar{u})$ съдържа ненулев елемент.

Тогава съществува редица $\{u_n\} \subset \mathcal{U}$, клоняща към $\bar{u}$ с $G(\bar{u}) \neq G(u_n)$ и $G(u_n) \in C$ за всяко естествено n.

Нека отново $\mathcal{U}$ е пълно метрично пространство, X е банахово пространство, $G : \mathcal{U} \to X$ е еднозначно непрекъснато изображение и $\bar{u}$ е фиксиран елемент на $\mathcal{U}$. Даваме следната

Дефиниция 2.5. *Казваме, че v е вариация от тип на Clarke в $\bar{u}$, ако за всички редици $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ с $h_i \to +0$ и всички редици $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}$ с $u_i \to \bar{u}$ съществуват редици $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ с $v_i \to v$ и $\{\bar{u}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}$ с $\bar{u}_i \to \bar{u}$ такива, че $G(\bar{u}_i) = G(u_i) + h_i v_i$. Означаваме с $\hat{T}_G(\bar{u})$ множеството от всички вариации от тип на Clarke в $\bar{u}$.*

До края на секцията $G(u)$ ще означава стойността на решението на управляемата система (3), съответстващо на управлението $u \in \mathcal{U}$, в момента $t = T$.

Твърдение 2.6. *Всяка иглена вариация в $\bar{u}$ е вариация от тип на Clarke в $\bar{u}$.*

Твърдение 2.7. *Множеството от всички дифузни вариации* $\mathcal{V}_D(\bar{u})$ *в* $\bar{u}$ *се съдържа в конуса* $T_G(\bar{u})$ *на вариациите от тип на Clarke в* $\bar{u}$ *и има следното свойство на равномерност: за всяко положително число* $\varepsilon > 0$ *съществува* $\delta > 0$ *такова, че за всяко* $w \in \mathcal{V}_D(\bar{u})$ *съществува* $v \in X$, $\|w - v\| < \varepsilon$ *със свойството: за всяко* $u \in \mathcal{U}$ *с* $dist(u, \bar{u}) < \delta$ *съществуват редици* $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ *с* $h_i \to +0$, $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ *с* $v_i \to v$ *и* $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}$ *с* $u_i \to u$ *такива, че* $G(u_i) = G(u) + h_i v_i$.

Оказва се, че разликата между тези два класа най-често използвани вариации е съществена. Даваме следния

Пример 2.8.

Нека $X \equiv l_1$ и нека $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ е неговият стандартен базис. Полагаме

$$\zeta := \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\right).$$

Очевидно $\zeta \in l_1 \setminus S$, където

$$S := \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_1 : \ x_i \in \left[-\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i}\right] \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Дефинираме $\varphi : \ l_1 \to \mathbf{R}$ чрез $\varphi(x) := e_1^*(x)$. Ясно е, че $\varphi(\cdot)$ е нетривиален непрекъснат линеен функционал. Полагаме също $C := \{t\zeta : \ t \in R\}$.

Полагаме $U = \left\{u_0, u_1\right\}$ и $f(t, u) := \begin{cases} 0, & \text{for } u = u_0; \\ g(t), & \text{for } u = u_1. \end{cases}$ където

$$g(t) := \begin{cases} -e_i + 2\dfrac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} e_i, & \text{for } t \in [t_{i-1}, t_i], \\ \\ 0, & \text{for } t = 1. \end{cases}$$

Разглеждаме следната задача

$$\varphi(x(1)) \to \min$$

при условия

$$\dot{x}(t) = f(t, u(t)), \ x(0) = 0, \ u \in \mathcal{U}, \ \text{и } x(1) \in C,$$

където $\mathcal{U} = \left\{ u : [0, 1] \to U : \ u \text{ е измерима} \right\}$ е множеството от допустимите управления.

Единственото допустимо управление на тази задача е $\bar{u}_0(t) := u_0$ и, разбира се, то е оптималното. За този пример не е в сила твърдение от типа на принципа на максимума на Понтрягин. От друга страна, затворената изпъкнала обвивка на множеството от иглените вариации в нулата съвпада с единичното кълбо на l^1. Виждаме, че не можем да сменим множеството от дифузните вариации с множеството от иглените вариации във формулировката на принципа на максимума на Понтрягин, доказан в [58]. Причината е липсата на допълнителното свойство на равномерност.

Разглеждаме задачата на оптималното управление

$$\varphi(x(T)) \to \min \tag{4}$$

при условия (3) и $x(T) \in C$, където $\varphi(\cdot)$ е диференцируема по Fréchet функция върху X и целевото множество C е затворено и изпъкнало подмножество на X. Запазваме предположенията върху X, U, A и динамиката. Припомняме, че $G(u)$ означава стойността на решението на управляемата система (3), съответстващо на управлението $u \in \mathcal{U}$, в момента $t = T$. Фиксираме $\bar{u} \in \mathcal{U}$. Полагаме $\bar{x}(T) := G(\bar{u})$.

Теорема 2.9. *Нека* $\tilde{C} := C \times (-\infty, \varphi(G(\bar{u}))]$ *и* $\tilde{G}(u) := (G(u), \varphi(G(u)) + dist(u, \bar{u})^2) \in X \times \mathbf{R}$.

(i) Ако съществуват $\bar{\varepsilon} > 0$ *и* $\rho > 0$ *такива, че*

$$\bigcap_{u \in B_{\bar{\varepsilon}}(\bar{u})} \left[\tilde{G}^{(1)}(u) - \tilde{C} + \tilde{G}(\bar{u}) + \frac{\rho}{2} B\right] \supset \rho \overline{B}$$

и множеството $\left[\tilde{C} - \tilde{G}(\bar{u})\right] \bigcap \tilde{G}^{(1)}(\bar{u})$ *съдържа ненулеви елементи, то* $\bar{u}$ *не е решение на задачата на оптималното управление (4).*

(ii) Ако нулата не принадлежи на вътрешността на множеството $\tilde{G}^{(1)}(\bar{u}) - \tilde{C} + \tilde{G}(\bar{u})$ *и ако съществува изпъкнало подмножество* $\mathcal{V}(\bar{u})$ *на* $G^{(1)}(\bar{u})$, *съдържащо* $\mathcal{V}_D(\bar{u})$ *и такова, че* $\mathcal{V}(\bar{u}) - C$ *е квазисолидно, то съществува нетривиална двойка* $(\psi(\cdot), \psi^0) \in C_{w^*}([0,T], X^*) \times [0, \infty)$ *такава, че*

$$\psi(t) = S(t-T)\psi(T) + \int_t^T S(t-s) \left(f'_x(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s))\right)^* \psi(s)\, ds,$$

$$H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)) = \max_{u\in U} H(t,\bar{x}(t),u,\psi(t)) \text{ \textit{п.н. в} } [0,T],$$

$$\big\langle \psi(T) - \psi^0\varphi'(\bar{x}(T)), x - \bar{x}(T) \big\rangle \geq 0 \text{ \textit{ for each} } x \in C$$

и

$$\langle \psi(T), v\rangle \leq 0 \text{ \textit{ for each} } v \in \mathcal{V}(\bar{u}),$$

където

$$H(t,y,u,\psi) = \langle \psi, f(t,y,u)\rangle \,.$$

2.4 Неразделимост на множества и условия за оптималност

От създаването на принципа за максимума на Понтрягин досега, са доказани много версии на този резултат, при различни технически предположения и с различни доказателства. В поредица статии (виж, например, библиографията на [101]), съответните доказателства се основават на теореми за неразделимост на множества, в които се твърди, че необходимо условие две множества A, B, съдържащи точката x_0, да бъдат локално отделими в x_0 (в смисъл че съществува околност Ω на x_0 такава, че $\Omega \cap A \cap B = \{x_0\}$) е C^A и C^B да не са силно трансверзални (конусите C^A и C^B се наричат силно трансверзални, ако $C^A - C^B = \mathbf{R}^n$ и $C^A \cap C^B \neq \{0\}$, виж Дефиниция 3.2 от [101]), където C^A и C^B са "допирателни конуси" към A и B съответно, в точката x_0. Такива теореми за неразделимост са в сила, ако "допирателни конуси" означава "допирателни конуси на Болтянский", а също така ако този термин означава "допирателни конуси на Clarke" (виж, например, [13]). A. Bressan построи пример (виж [8]) на две четиримерни отделими множества A и B в x_0, за които (изненадващо) апроксимиращите конуси C^A и C^B са силно трансверзални (C^A и C^B апроксимират множествата A и B в смисъл на Болтянский и, съответно, в смисъл на Clarke в точката x_0). В безкрайномерна постановка нещата се влошават: съществуват изпъкнали множества A и B, които са локално отделими в общата им точка x_0 и такива, че съответните апроксимиращи допирателни конуси C^A и C^B към множествата A и B, съответно, в x_0 са силно трансверзални (например хилбертова тухла и лъч). Това мотивира необходимостта да бъде намерен по-малък допирателен конус от конуса на Clarke, за който силната трансверзалност на два допирателни конуса в обща точка на две затворени множества влече тяхната локална неотделимост.

2.4.1 Теорема за неразделимост на множества без изпъкналост

В статията [61] ние предлагаме подход към задачата за неразделимост на множества, чиято основа е равномерността на апроксимацията по отношение на направлението.

Дефиниция 2.10. *Нека S е затворено подмножество на X и нека x_0 принадлежи на S. Казваме, че затвореното множество D е равномерно допирателно множество към S в точката x_0, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $v \in D$ и за всяка точка $x \in S \cap (x_0 + \delta\bar{\mathbf{B}})$ съществува $\lambda > 0$, за което $S \cap (x + t(v + \varepsilon\bar{\mathbf{B}}))$ е непразно винаги, когато $t \in [0, \lambda]$.*

Дефиниция 2.11. *Нека S е затворено подмножество на X и нека x_0 принадлежи на S. Казваме, че затвореното множество D е редично равномерно допирателно множество към S в точката x_0, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $v \in D$ и за всяка точка $x \in S \cap (x_0 + \delta\bar{\mathbf{B}})$ съществува редица от положителни числа $t_m \longrightarrow 0$, за които $S \cap (x + t_m(v + \varepsilon\bar{\mathbf{B}}))$ е непразно за всяко естествено m.*

Да отбележим някои свойства на равномерните допирателни множества: Затворената обвивка на (редично) равномерно допирателно множество D към S в x_0 е (редично) равномерно допирателно множество към S в x_0. Изпъкналата обвивка на равномерно допирателно множество D е равномерно допирателно множество към S в x_0. Ако A е затворено изпъкнало множество, съдържащо x_0, множеството $(A - x_0) \cap M\bar{\mathbf{B}}$ е равномерно допирателно множество към A в точката x_0.

Дефиниция 2.12. *Нека S е затворено подмножество на X и нека x_0 принадлежи на S. Казваме, че конусът C е равномерен допирателен конус към S в точката x_0, ако $C \cap \bar{\mathbf{B}}$ е равномерно допирателно множество към S в точката x_0. Казваме, че конусът C е редичен равномерен допирателен конус към S в точката x_0, ако $C \cap \bar{\mathbf{B}}$ е редично равномерно допирателно множество към S в точката x_0.*

Забележително е, че в крайномерния случай двете понятия, въведени по-горе, съвпадат. При това в крайномерно пространство стандартният допирателен конус на Clarke е (редичен) равномерен допирателен конус.

Следната теорема е основният резултат в [61]. Тя показва, че равномерните допирателни конуси притежават желаното свойство, че силната трансверзалност на два допирателни конуса в обща точка на две затворени множества влече локалната неразделимост на множествата.

Теорема 2.13. *Нека A и B са затворени подмножества на X, и нека $x_0 \in A \cap B$. Нека C^A е равномерен допирателен конус към множеството A в точката x_0 и C^B е редичен равномерен допирателен конус към множеството B в точката x_0, и нека са изпълнени следните условия:*

(A1) Съществуват константи $M > 1$ и $\varepsilon \in (0, 1/(9+8M))$ такива, че множеството

$$\big(C^A \cap\ M\bar{\mathbf{B}}\big) - \big(C^B \cap\ M\bar{\mathbf{B}}\big)$$

е ε-гъсто в единичната сфера $\{w \in X :\ \|w\| = 1\}$, тоест за всяко $v \in X$ с $\|v\| = 1$ съществуват $v_1 \in C^A \cap\ M\bar{\mathbf{B}}$ ud $v_2 \in C^B \cap\ M\bar{\mathbf{B}}$, за които $\|v - (v_1 - v_2)\| < \varepsilon$;

(A2) съществува v_0 с единична норма, което е ε-близо до C^A и до C^B (тоест, съществуват $\tilde{v}_0^A \in C^A$ и $\tilde{v}_0^B \in C^B$ с норма едно такива, че $\|\tilde{v}_0^A - v_0\| < \varepsilon$ и $\|\tilde{v}_0^B - v_0\| < \varepsilon$).

Тогава за всяко естествено число n съществува $\bar{x} \neq x_0$, което принадлежи на сечението $A \cap B$ и $\|\bar{x} - x_0\| < 1/n$.

Горната теорема остава в сила, ако заместим $C^A \cap\ M\bar{\mathbf{B}}$ (съответно $C^B \cap M\bar{\mathbf{B}}$) с равномерно допирателно множество към A в x_0, съдържащо се в $M\bar{\mathbf{B}}$ (съответно с редично равномерно допирателно множество към B в x_0, съдържащо се в $M\bar{\mathbf{B}}$).

2.4.2 Приложения

Получен е абстрактен резултат за множители на Лагранж като следствие от теоремата за неразделимост. По-точно, да разгледаме следната оптимизационна задача

$$\varphi(G(x)) \to \min \tag{5}$$

при условие:

$$G(x) \in S. \tag{6}$$

Тук X е пълно метрично пространство, Y е банахово пространство, S е затворено подмножество на Y, $G : X \to Y$ и $\varphi : Y \to \mathbf{R}$ са изображения. Разглеждаме банаховото пространство $Y \times \mathbf{R}$, снабдено с нормата $\|(y, r)\| := \max\{\|y\|, |r|\}$.

Теорема 2.14. *Нека $\bar{x}$ е решение на задачата (5)–(6). Полагаме*

$$\bar{y} := G(\bar{x}),\ \tilde{S} := S \times (-\infty, \varphi(\bar{y})] \text{ и}$$

$$\tilde{\mathcal{R}} := \{(G(x), \varphi(G(x)) + \|G(x) - \bar{y}\|^2) :\ x \in X\} \subset Y \times \mathbf{R}.$$

Нека C^S е равномерен допирателен конус към S в точката $\bar{y}$, нека $C^{\tilde{S}} = C^S \times (-\infty, 0]$ и нека $C^{\tilde{\mathcal{R}}}$ е равномерен допирателен конус към множеството $\tilde{\mathcal{R}}$ в точката $\tilde{y} := (\bar{y}, \varphi(\bar{y}))$. Предполагаме, че множеството

$$\left(C^{\tilde{S}} \cap\ \tilde{\mathbf{B}}\right) - \left(C^{\tilde{\mathcal{R}}} \cap\ \tilde{\mathbf{B}}\right)$$

е квазисолидно, където $\tilde{\mathbf{B}}$ е затвореното единично кълбо в $Y \times \mathbf{R}$. Тогава съществува двойка $(\xi, \eta) \in Y^* \times \mathbf{R}$ такава, че

(i) $(\xi, \eta) \neq (\mathbf{0}, 0)$*;*

(ii) $\eta \in \{0, 1\}$*;*

(iii) ξ *принадлежи на спрегнатия конус към* C^S*;*

(iv) $-(\xi, \eta)$ *принадлежи на спрегнатия конус към* $C^{\tilde{\mathcal{R}}}$*.*

Да разгледаме следната задача на оптималното управление

$$\varphi(x(T)) \to \min \tag{7}$$

при условия

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) =&\ Ax(t) + f(t, x(t), u(t)) \text{ п.н. в } [0, T], \\ x(0) =&\ x_0 \in Y,\ \ x(T) \in S \\ u(\cdot) \in&\ \mathcal{U} := \{u(\cdot) : [0, T] \to U \mid u(\cdot) \text{ е силно измерима}\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Тук Y е банахово пространство, S е затворено подмножество на Y, U е сепарабелно пълно метрично пространство, линейният оператор A е инфинитизимален генератор на силно непрекъсната полугрупа $\{\mathcal{K}(t) \mid t \geq 0\}$. Функцията $f : [0, T] \times Y \times U \to Y$ е силно измерима за всяко фиксирано $(x, u) \in Y \times U$, функцията f е диференцируема по Fréchet в x за всяко фиксирано (t, u), функцията φ е строго диференцируема по Fréchet, функциите $f(t, \cdot, \cdot)$ и $f'_x(t, \cdot, \cdot)$ са непрекъснати, $f'_x(t, \cdot, u)$ е локално равномерно непрекъсната функция равномерно спрямо $u \in U$ и $t \in [0, T]$. Съществува $M > 0$ такова, че

$$\|f'_x(t, x, u)\| \leq M \ \text{ and } \ \|f(t, 0, u)\| \leq M$$

за всяко $(t,x,u) \in [0,T] \times Y \times U$.

Означаваме с $\tilde{\mathbf{B}}$ единичното кълбо на $Y \times \mathbf{R}$ с център в началото и означаваме с $G(u) := x(T,u)$ решението на управляемата система (8), съответстващо на управлението $u \in \mathcal{U}$, в момента T. Фиксираме $\bar{u} \in \mathcal{U}$ и полагаме $\bar{x} := G(\bar{u})$.

Теорема 2.15. *Нека C^S е равномерен допирателен конус към целевото множество S в точката $\bar{x}$ и нека $C^{\mathcal{R}}$ е равномерен допирателен конус към достижимото множество $\mathcal{R} := \{G(u) :\ u \in \mathcal{U}\}$ в точката $\bar{x}$. Полагаме*

$$C^{\tilde{\mathcal{R}}} := \{(v, \varphi'(\bar{x})v) :\ v \in C^{\mathcal{R}}\} \text{ and } C^{\tilde{S}} := \{(v,r) :\ v \in C^S,\ r \le 0\}.$$

(i) Ако съществува $\rho > 0$ такова, че множеството

$$co\left(\left(C^{\tilde{\mathcal{R}}} \cap\ \tilde{\mathbf{B}}\right) - \left(C^{\tilde{S}} \cap\ \tilde{\mathbf{B}}\right)\right)$$

е гъсто в $\rho\tilde{B}$, то $\bar{u}$ не е оптимално;

(ii) Ако конусът $co\left(C^{\tilde{\mathcal{R}}} - C^{\tilde{S}}\right)$ не е гъст в $Y \times \mathbf{R}$ и $\overline{co}\ C^{\mathcal{R}}$ съдържа дифузните вариации в $\bar{u}$, то съществува нетривиална двойка

$$(\psi(\cdot), \psi^0) \in C_{w^*}([0,T], Y^*) \times (-\infty, 0] \text{ такава, че}$$

$$\psi(t) = \mathcal{K}(t-T)\psi(T) + \int_t^T \mathcal{K}(t-s)\left(f'_x(s,\bar{x}(s),\bar{u}(s))\right)^* \psi(s)\, ds,$$
$$H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)) = \max_{u \in U} H(t,\bar{x}(t),u,\psi(t)) \text{ п.н. в } [0,T],$$
$$\left\langle \psi(T) + \psi^0 \varphi'(\bar{x}(T)), v\right\rangle \ge 0 \text{ for each } v \in C^S$$

и

$$\langle \psi(T), v \rangle \le 0 \text{ for each } v \in C^{\mathcal{R}},$$

където

$$H(t,y,u,\psi) = \langle \psi, f(t,y,u) \rangle .$$

Следното следствие показва, че с предполагане на квазисолидност можем да преодолеем съществуващата празнина между условията (i) и (ii) на Теорема 2.15.

Следствие 2.16. *Нека $\bar{u} \in \mathcal{U}$ е решение на задачата на оптималното управление (7)–(8) и нека $\bar{x} := G(\bar{u})$. Нека C^S е равномерен допирателен конус към целевото множество S в точката $\bar{x}$ и $C^{\mathcal{R}}$ е равномерен допирателен конус към достижимото множество $\mathcal{R} := \{G(u) : \ u \in U\}$ в точката $\bar{x}$. Полагаме*

$$C^{\tilde{\mathcal{R}}} := \{(v, \varphi'(\bar{x})v) : \ v \in C^{\mathcal{R}}\} \text{ и } C^{\tilde{S}} := \{(v, r) : \ v \in C^S, \ r \leq 0\}.$$

Ако множеството

$$\left(C^{\tilde{\mathcal{R}}} \cap \ \tilde{\mathbf{B}}\right) - \left(C^{\tilde{S}} \cap \ \tilde{\mathbf{B}}\right)$$

е квазисолидно и $\overline{\text{co}}\ C^{\mathcal{R}}$ съдържа дифузните вариации в $\bar{u}$, то съществува нетривиална двойка $(\psi(\cdot), \psi^0) \in C_{w^*}([0, T], Y^*) \times (-\infty, 0]$ такава, че

$$\psi(t) = \mathcal{K}(t - T)\psi(T) + \int_t^T \mathcal{K}(t - s) \left(f_x'(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s))\right)^* \psi(s) \, ds,$$

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) = \max_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), u, \psi(t)) \text{ п.н. в } [0, T],$$

$$\left\langle \psi(T) + \psi^0 \varphi'(\bar{x}(T)), v \right\rangle \geq 0 \ \text{ for each } v \in C^S$$

и

$$\langle \psi(T), v \rangle \leq 0 \ \text{ for each } v \in C^{\mathcal{R}},$$

където

$$H(t, y, u, \psi) = \langle \psi, f(t, y, u) \rangle \, .$$

2.5 Функционално аналитичен подход към една задача на Bolza

Нека Z е банахово пространство. Ще означаваме с $\mathbf{B}_Z$ ($\bar{\mathbf{B}}_Z$) отвореното (затвореното) единично кълбо на Z с център в нулата. Ако A е подмножество на Z, неговата поляра е множеството $A^0 := \{z^* \in Z^* : \ z^*(z) \leq 1 \text{ за всяко } z \in A\}$. Ако B е подмножество на Z^*, неговата предполяра е множеството $B_0 := \{z \in Z : \ z^*(z) \leq 1 \text{ за всяко } z^* \in B\}$.

Разглеждаме класическата задача на вариационното смятане:

$$\varphi(x) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) \, dt \to \min \text{ при условия } x(a) = x_a \text{ и } x(b) = x_b,$$

където $x : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ е абсолютно непрекъсната крива. Тази класическа задача е разглеждана при различни предположения относно интегранда L и са получени различни необходими условия. Тук засега ще предполагаме само непрекъснатост на $L : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Ще означаваме с X банаховото пространство $L^1([a,b];\mathbf{R}^n)$ и с X^* неговото спрегнато $L^\infty([a,b];\mathbf{R}^n)$. Разглеждаме интегралния функционал $\varphi : X^* \times X^* \to \mathbf{R}$, дефиниран с

$$\varphi(x,u) = \int_a^b L(x(t),u(t))\, dt.$$

Полагаме

$$P := \left\{ (x,u) \in X^* \times X^* :\ x(t) = x_a + \int_a^t u(s)\, ds,\ t \in [a,b] \right\}$$

и

$$Q := \left\{ (x,u) \in X^* \times X^* :\ \int_a^b u(s)\, ds = x_b - x_a \right\},$$

където x_a и x_b са фиксирани точки в $\mathbf{R}^n$. Разглеждаме оптимизационната задача

$$\textbf{(VP)} \qquad \varphi(x,u) \to \min \qquad \text{при условие } (x,u) \in P \cap Q.$$

Нека $(\bar{x},\bar{u}) \in X^* \times X^*$ е решение на **(VP)** и нека $A := P \cap Q - (\bar{x},\bar{u})$. Очевидно е, че $A \cap \mathbf{B}_{X^* \times X^*}$ е равномерно допирателно множество към ограничението. Следният вариант на класическата Лема на du Bois-Raymond е в сила:

Лема 2.17. *Множеството A е w^*-затворено линейно подпространство на $X^* \times X^*$ и неговата предполяра е множеството*

$$A_0 = \{(y,v) \in X \times X : v \text{ абсолютно непрекъсната, } \dot{v}(t) = y(t) \text{ п.н. в [a,b]}\}.$$

Полагаме $Y := X \times X \equiv L^1([a,b];\mathbf{R}^{2n})$ и $Y^* := X^* \times X^* \equiv L^\infty([a,b];\mathbf{R}^{2n})$. Ще изучаваме допирателни конуси към епиграфиката

$$\text{Epi } (\varphi) := \{(y,r) \in Y^* \times \mathbf{R} :\ \varphi(y) \le r,\ y \in Y\}$$

в точката $(\bar{y},\varphi(\bar{y}))$. Разглеждаме $Y^* \times \mathbf{R}$, снабдено с равномерната норма $\|(y,r)\| := \max\{\|y\|,|r|\}$. Означаваме с $\hat{T}_{epi\ L}(\bar{y}(t),L(\bar{y}(t)))$ допирателния конус на Clarke към епиграфиката $epi\ L \subset \mathbf{R}^{2n+1}$ на L в точката $(\bar{y}(t),L(\bar{y}(t)))$.

Нека $R : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ е произволна неотрицателна измерима функция, за която $R \geq 1$ върху $[a,b]$. Разглеждаме многозначното изображение

$$t \to G_R(t) := \hat{T}_{epi\ L}(\bar{y}(t), L(\bar{y}(t))) \cap \left(\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{R}^{2n}} \times [-R(t), R(t)]\right), \quad t \in [a,b].$$

Лема 2.18. *Многозначното изображение $G_R : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^{2n+1}$ е измеримо.*

Полагаме

$$B_R := \left\{ (v,r) \in Y^* \times \mathbf{R} : \begin{array}{c} \text{съществува измерима функция } r_v \text{ с} \\ r = \displaystyle\int_a^b r_v(t)dt \text{ и за почти всички } t \in [a,b] \\ \text{е в сила } (v(t), r_v(t)) \in G_R(t) \end{array} \right\}.$$

Означаваме с C конуса, породен от B_R, тоест $C = \{\lambda y :\ y \in B_R,\ \lambda \geq 0\}$. Следната дефиниция е добре известна:

Дефиниция 2.19. *Казваме, че множеството $\mathcal{F}$ от сумируеми функции $f : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ е равномерно интегруемо, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко измеримо подмножество E на $[a,b]$ с meas $(E) < \delta$ е в сила $\displaystyle\int_E |f(t)|dt < \varepsilon$ за всяко $f \in \mathcal{F}$.*

Ще се нуждаем от следното важно предположение (**SA**):

Съществува $\bar{\delta} > 0$ такова, че множеството от сумируеми функции

$$\mathcal{F} := \left\{ \frac{L(y+\lambda v) - L(y)}{\lambda} - r_v : \begin{array}{l} y \in Y^* \text{ with } \|y - \bar{y}\| < \bar{\delta}, \lambda \in (0, \bar{\delta}), \\ (v,r) \in B_R \text{ with } r = \displaystyle\int_a^b r_v(t)dt \\ \text{и за почти всички } t \in [a,b] \\ \text{ е в сила } (v(t), r_v(t)) \in G_R(t) \end{array} \right\}$$

е равномерно интегруемо.

Лема 2.20. *Ако е в сила* **(SA)**, *то B_R е равномерно допирателно множество към Epi (φ) в точката $(\bar{y}, \varphi(\bar{y}))$.*

Да въведем множеството от всички сумируеми селекции на субдиференциала на Clarke на L по оптималната траектория $\bar{y}(t)$, $t \in [a,b]$, тоест

$$K := \{w \in Y :\ w(t) \in \partial_C L(\bar{y}(t)) \text{ a.e. in } [a,b]\}.$$

Означаваме също

$$\tilde{K} := \{\lambda(w, -1) : \ \lambda \geq 0, \ w \in K\}.$$

Лема 2.21. *Да предположим, че* $\partial_C L(\bar{y}(t)) \subset R(t)\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{R}^n}$ *за почти всички* $t \in [a, b]$ *и* R *е сумируема. Тогава* C *е слабо със звезда затворен,* $C_0 = \tilde{K}$ *и* $C = \tilde{K}^0$*. При това, ако е в сила (SA), то* C *е равномерен допирателен конус към* Epi φ *в точката* $(\bar{y}, \varphi(\bar{y}))$.

Лема 2.22. *Да предположим, че* $\partial_C L(\bar{y}(t)) \subset R(t)\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{R}^n}$ *за почти всички* $t \in [a, b]$ *и* R *е сумируема. Тогава* C *има непразна вътрешност и* $C^0 = J(C_0) = J(\tilde{K})$*, където* J *е каноничното влагане на* $Y \times \mathbf{R}$ *в* $Y^{**} \times \mathbf{R}$.

Теорема 2.23. *Нека* $L : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ *е непрекъснато. Нека* $\bar{y} = (\bar{x}, \bar{u})$ *е решение на* ***(VP)****. Да предположим, че съществува неотрицателна сумируема функция* R *върху* $[a, b]$ *такава, че* $\partial_C L(\bar{y}(t)) \subset R(t)\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{R}^n}$ *за почти всички* $t \in [a, b]$*. Нека е в сила (SA). Тогава съществува абсолютно непрекъсната функция* $p : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ *такава, че*

$$(\dot{p}(t), p(t)) \in \partial_C L(\bar{y}(t)) \ \text{п.н. в } [a, b] \ .$$

3 Авторска справка

1. Доказано е, че ако една полунепрекъсната отдолу метрика σ-фрагментира дадено топологично пространство, то пространството е фрагментируемо.

2. Доказано е, че ако едно банахово пространство притежава еквивалентна диференцируема по Gâteaux норма, то неговото спрегнато, снабдено със слабата със звезда топология, е фрагментируемо.

3. Доказано, че σ-фрагментируемостта (т.е. нормата в дадено банахово пространство фрагментира пространството, надарено със слабата топология) е свойство на трите пространства (three-space property).

4. Изследвана е връзката между топологичните пространства, притежаващи "изброимо покритие с множества с малък локален диаметър" ("countable cover by sets of small local diameter"), и пространствата на Gruenhage.

5. Доказано е, че ако X и Y са хаусдорфови компакти и $C_p(X)$ има p-кадецова норма, а $C_p(Y)$ има изброимо покритие с множества с малък локален диаметър в нормата, то $C_p(X \times Y)$ също има изброимо покритие с множества с малък локален диаметър в нормата.

6. Доказано е, че ако K е хаусдорфов компакт, E е банахово пространство и $C(K)$ и E притежават еквивалентна локално изпъкнала норма, то $C(K, E)$ (пространството от непрекъснатите функции, дефинирани в K и приемащи стойности в E) също притежава еквивалентна локално изпъкнала норма.

7. Доказан принципът на максимума на Понтрягин в бекрайномерно фазово пространство, като съществено се разширяват съществуващите резултати.

8. Въведени и изучавани са равномерни допирателни множества. Доказана е теорема за неразделимост на множества.

9. Доказана е абстрактна теорема за множителите на Лагранж.

10. Предложен е функционално-аналитичен подход към изучаване на основната задача на вариационното смятане.

4 Апробация на резултатите

Резултатите, включени в дисертацията, са публикувани в:

1. N.K.Ribarska, *A note on fragmentability of some topological spaces*, C.R.Acad. Bulgare Sci., 43(1990), 13-15.

2. N.K.Ribarska, *The dual of a Gâteaux smooth Banach space is weak star fragmentable*, Proceedings of the AMS, 114, no.4 (1992), 1003-1008.

3. N.K.Ribarska, *Three space property for σ-fragmentability*, Mathematika, 45(1998), 113-118.

4. N.K.Ribarska, *On the property "countable cover by sets of small local diameter"*, Studia Mathematica 140, 2 (2000), 99-116.

5. N.K.Ribarska, V.D.Babev, *A stability property for locally uniformly rotund renorming*, J.Math.Anal.Appl. 350(2009), 811-828.

6. M.I.Krastanov, N.K.Ribarska, Ts.Y.Tsachev, *A Pontryagin maximum principle for infinite-dimensional problems*, SIAM J. Control Optimization, 49, no. 5 (2011), 2155-2182.

7. M.I.Krastanov, N.K.Ribarska, Ts.Y.Tsachev, *On the Geometry of the Pontryagin Maximum Principle in Banach Spaces*, Set-Valued and Variational Analysis, 23, no. 3 (2015), 443-463.

8. M.I.Krastanov, N.K.Ribarska, *On the Geometry of the Pontryagin Maximum Principle in infinite-dimensional Spaces*, Mathematics and education in mathematics, 2016, 58-65.

9. M.I.Krastanov, N.K.Ribarska, *Nonseparation of sets and optimality conditions*, SIAM J. on Control and Optimization, 55, no. 3 (2017), 1598-1618.

10. M.I.Krastanov, N.K.Ribarska, *A functional analytic approach to a Bolza problem*, submitted.

Освен това в дисертацията е използван един непубликуван (но цитиран) ръкопис. В горния списък има 8 статии в списания с импакт фактор.

Резултатите, включени в дисертацията, са докладвани от мен на следните конференции (без претенция за изчерпателност):

1. *On the Basic Problem of the Calculus of Variations*, 11th International Conference on "Large-Scale Scientific Computations България/Созопол 2017

2. *On the geometry of the Pontryagin maximum principle in infinite dimensional spaces*, ЧЕТИРИДЕСЕТ И ПЕТА ПРОЛЕТНА КОНФЕРЕНЦИЯ на СМБ, България/Плевен 2016

3. *A Pontryagin Maximum Principle For Infinite-Dimensional Problems*, Functional analysis Valencia, Валенсия, 7-10 юни 2010

4. *Countable cover by sets of small local diameter and fragmentability*, 29th Winter School in Abstract Analysis, Lhota, Czech Republic, 3-10 February 2001

5. *A stability property of LUR renorming*, Functional Analysis Valencia 2000 , Валенсия, 3-7 юли 2000

6. *On the property countable cover by sets of small local diameter*, VII Workshop on Well-posedness in Optimization and Related Topics, Gargnano, Italy, 13-18 септември 1999

Освен това Михаил Кръстанов е докладвал част от резултатите от втора глава на следните конференции:

1. *On the Pontryagin maximum principle*, Mathematical Control Theory, Франция 2017

2. *On the Pontryagin maximum principle in Banach spaces*, 13th Viennese Workshop on Optimal Control and Dynamic Games, Виена, Австрия, 13 май - 16 май 2015

3. *On the Pontryagin maximum principle*, Mathematics Days in Sofia, София, 7 юли - 10 юли 2014

Справка за забелязаните цитирания на автора може да се намери в системата "Авторите" на Софийския университет. В момента според нея статиите, включени в дисертацията, имат 72 цитирания (от общо 282 на автора) и 4 цитирания на непубликувания ръкопис. От тях 38 (141 от общия списък) са в списания с импакт фактор, 7 (49 от общия списък) са в книги и 14 (32 от общия списък) са в дисертации.

5 Благодарности

Удоволствие за мен е да благодаря на колегите си от катедрата "Математически анализ" на Факултета по математика и информатика на СУ"Св. Климент Охридски", както и на колегите от секцията "Изследване на операциите, вероятности и статистика" на Института по математика и информатика към БАН. Бих искала да изкажа огромната си благодарност към проф. д.м.н. Михаил Кръстанов за неизменната му приятелска подкрепа. Без неговите идеи и настойчивост втората глава на тази дисертация не би била възможна.

Литература

[1] A.P. Afanas'ev, V.V. Dikusar, A. A. Miljutin, S.A. Chukanov, Necessary condition in optimal control, Nauka, Moscow, 1990 (in Russian).

[2] N. Arada, J.-P. Raymond, Dirichlet Boundary Control of Semilinear Parabolic Equations, Part 2: Problems with Pointwise State Constraints, Appl. Math. Optim., 45, (2002), 145-167.

[3] E.Asplund, *Fréchet differentiability of convex functions,* Acta Math. 121 (1968), 31-47.

[4] N. Basile, M. Mininni, *An extension of the maximum principle for a class of optimal control problems in infinite-dimensional spaces*, SIAM J. Control Optimization, 28, No. 5 (1990), 1113-1135.

[5] R.-M. Bianchini, M. Kawski, Needle variations that cannot be summed, SIAM Journal of Control and Optimization 42 No.1 (2003), 218-238.

[6] A. Bouziad, *The class of co-Namioka compact spaces is stable under product*, PAMS, 124(1996), 983-986.

[7] A. Bressan, A high order test for optimality of bang-bang controls, SIAM J. Control and optimization, 23, No. 1, 38–48.

[8] A. Bressan, On the Intersection of a Clarke Cone with a Boltyanskii Cone, Siam Journal on Control and Optimization, 45 (6) (2007), 2054-2064.

[9] M. Brokate, Pontryagin's principle for control problems in age-dependent population dynamics, J. Math. Biol., 23 (1985), 75-101.

[10] A.G. Butkovsky, Maximum principle of optimal control for distributed parameter systems, Avtomatika & Telemekhanika, 22 (1961), 1288-1301 (in Russian).

[11] E. Casas, J.-P. Raymond, H. Zidani, Pontryagin's principle for local solutions of control problems with mixed control-state constraints, SIAM J. Control Optimization, 39, No. 4, (2000), 1182-1203.

[12] C. Castaing, M. Valadier, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lecture Notes in Mathematics 580, Springer, 1977.

[13] F. Clarke, Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control, Springer, 2013.

[14] F. Clarke, Y. Ledyaev, R. Stern and P. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[15] M.M.Čoban and P.S.Kenderov, *Generic Gâteaux differentiability of convex functionals in $C(T)$ and the topological properties of T,* Math. and Education in Math. 1986 (Proc. 15th Conf. Union of Bulg. Mathematicians, 141-149.

[16] H.P.R.Christensen and P.S.Kenderov, *Dense strong continuity of mappings and the Radon-Nikodym property,* Math. Scand. 54 (1984), 70-78.

[17] K. Deimling, Multivalued differential equations, Walter de Gruyter, 1992.

[18] R.Deville, G.Godefroy, *Some applications of projective resolution of identity,* Proc. London Math. Soc. 67 (1993), 183-199.

[19] R.Deville, G.Godefroy, V.Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces,* Longman, UK, 1993.

[20] G.E.Edgar, *Measurability in a Banach space,* Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 559-579.

[21] A.I. Egorov, Necessary optimality conditions for distributed parameter systems, SIAM J. Control, 5 (1967), 352-408.

[22] Yu.V. Egorov, Optimal control in Banah spaces, Dokl. Acad. Nauk SSSR, 150, (1963), 241-244 (in Russian).

[23] Yu.V. Egorov, Necessary conditions for optimality of a control in Banach spaces, Matem. Sbornik, 64, No. 1 (1964), 79-101 (in Russian).

[24] I.Ekeland, On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[25] R.Engelking, *General topology,* Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.

[26] M. Fabian,P. Habala,P. Hajek, V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler, Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, Springer, 2001.

[27] H.O. Fattorini, A unified theory of necessary conditions for nonlinear nonconvex control systems, Applied Mathematics and Optimization, 15 (1987), 141-185.

[28] H.O. Fattorini, Infinite dimensional optimization and control theory, Cambridge University Press, 1999.

[29] H.O. Fattorini, H. Frankowska, Infinite dimensional control problems with state constraints, Modelling and inverse problems of control for distributed parameter systems, Proc. IFIP-IIASA Conf., Laxenburg/Austria 1989, Lect. Notes Control Inf. Sci. 154 (1991), 52-62.

[30] G. Feichtinger, R. Hartl, P. Kort, V.M. Veliov, Anticipation effects of tech- nological progress on capital accumulation: a vintage capital approach. J. Econom. Theory, 126 (2006), 143-164.

[31] G. Feichtinger, R. Hartl, P. Kort, V.M. Veliov, Capital accumulation under technological progress and learning: a vintage capital approach. European J. Oper. Res., 172 (2006), No. 1, 293-310.

[32] G. Feichtinger, R. Hartl, P. Kort, V.M. Veliov, Environmental policy, the Porter hypothesis and the composition of capital. Journal of Environmental Economics and Management, 50 (2005), No. 2, 434-446.

[33] G. Feichtinger, A. Prskawetz, V.M. Veliov (2004), Age-structured optimal control in population economics. Theoretical Population Biology, v. 65, 373-387.

[34] G. Feichtinger, G. Tragler, V.M. Veliov, Optimality conditions for age-structured control systems, Journal of Mathematical Analytical Application, 288, No. 1 (2003), 47-68.

[35] M. K. Fort, *Points of continuity of semi-continuous functions*, Publ. Math., Debrecen **2** (1951), 100-102.

[36] H. Frankowska, Some inverse mapping theorems, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire 7, No.3 (1990), 183-234.

[37] G.Gruenhage, *A note on Gul'ko compact spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 371-376.

[38] M.E. Gurtin, R.C.MacCamy, Nonlinear age-dependent population dynamics, Arch. Rational Mech. Anal., 54 (1974), 281-300.

[39] R.W.Hansell, *Descriptive sets and the topology of nonseparable Banach spaces,* preprint(1989), Serdica Math J, vol.27, no 1 (2001), 1-66.

[40] R.W.Hansell, J.E.Jayne and M.Talagrand, *First class selectors for weakly upper semi-continuous multi-valued maps in Banach spaces,* J. fur reine und angew. Math. 361 (1985), 201-220 and 362(1986), 219-220.

[41] Z.-R. He, Optimal birth control of age-dependent competitive species, J. Math. Anal. Appl., 296 (2004), no. 1, 286-301.

[42] Z.-R. He, Optimal birth control of age-dependent competitive species. II. Free horizon problems, J. Math. Anal. Appl., 305 (2005), no. 1, 11-28.

[43] H. Hermes, *The generalized differential equation* $\dot{x} \in R(t,x)$, Adv. Math. 4 (1970), 149-169.

[44] A. D. Ioffe, Optimality Alternative: a Non-Variational Approach to Necessary Conditions, Variational Analysis and Applications, Nonconvex Optimization and Its Applications 79 (2005), Part 2, 531-552.

[45] A. D. Ioffe, Variational Analysis of Regular Mappings Theory and Applications, manuscript, 2017.

[46] J.E.Jayne, I.Namioka, C.A.Rogers, *σ-fragmentable Banach spaces,* Mathematika, 39(1992), 161-188 and 197-215.

[47] J.E.Jayne, I.Namioka, C.A.Rogers, *Fragmentability and σ-fragmentability,* Fund. Math. 143 (1993), 207-220.

[48] J.E.Jayne, I.Namioka, C.A.Rogers, *Topological properties of Banach spaces,* Proc. London Math. Soc. 66(1993), 651-672.

[49] J.E.Jayne, I.Namioka, C.A.Rogers, *Continuous functions on products of compact Hausdorff spaces,* Mathematika 46, 2 (1999), 323-330.

[50] J.E.Jayne, C.A.Rogers, *Borel selectors for upper semicontinuous set-valued maps,* Acta Math., 155(1985), 41-79.

[51] T. Jech, Set theory, Academic press (1978), 621.

[52] ONDŘEJ KALENDA, *Stegall compact spaces which are not fragmentable*, Topology and its Applications, 96 (1999), 121-132.

[53] P.S.Kenderov, *Most of the optimization problems have unique solution,* Internat. Ser. Numer. Math. 72, Birkhäuser-Verlag, Basel 1984, 203-216.

[54] P.KENDEROV AND W.MOORS, *Game characterization of fragmentability of topological spaces*, Proc. 25 Spring Conf. Union Bulg. Math., April 1996.

[55] P.Kenderov and W.Moors, *Fragmentability and sigma-fragmentability of Banach spaces,* J. London Math. Soc. 60 (1999), 203-223.

[56] PETAR S. KENDEROV, WARREN B. MOORS, SCOTT SCIFFER, *A weak Asplund space whose dual is not weak star fragmentable*, PAMS, 129 (2001), 3741-3747.

[57] G.L. Kharatishvili, The maximum principle in the theory of optimal processes with delay, Soviet Math. Dokl., 2 (1961), 28-32.

[58] M.I. Krastanov, N.K. Ribarska and Ts. Y. Tsachev, A Pontryagin maximum principle for infinite-dimensional problems, SIAM Journal on Control and Optimization, 49 (2011), No 5, 2155-2182.

[59] M. I. Krastanov, N. K. Ribarska, Ts. Y. Tsachev, On the Geometry of the Pontryagin Maximum Principle in Banach Spaces, Set-Valued and Variational Analysis (2015), 443-463.

[60] M.I.Krastanov, N.K.Ribarska, On the Geometry of the Pontryagin Maximum Principle in infinite-dimensional Spaces, Mathematics and education in mathematics, 2016, 58-65.

[61] M. I. Krastanov, N. K. Ribarska, Nonseparation of sets and optimality conditions, SIAM J. on Control and Optimization, 55, no. 3 (2017), 1598-1618.

[62] M.I.Krastanov, N.K.Ribarska, A functional analytic approach to a Bolza problem, submitted.

[63] X. J. Li, Vector Measure and the Necessary Conditions for the Optimal Control Problems of Linear Systems, Proceedings of the Third IFAC Symposium on the Control of Distributed Parameter Systems, Toulouse, France 1982.

[64] X.J. Li, S.N. Chow, Maximum principle of optimal control for functional differential systems, J. Optimization Theory Appl., 54 (1987), 335-360.

[65] X.J. Li, Y. Yao, Maximum principle of distributed parameter systems with time lags, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 75 (1985), Springer, 410-427.

[66] X.J. Li, Jiongmin Yong, Optimal control theory for infinite dimensional systems, Basel, Birkhäuser, 1994.

[67] St. Lojasiewicz, jr., Some theorems of Scorza Dragoni type for multifunctions with application to the problem of existence of solutions for differential multivalued equations, Mathematical control theory, Banach Cent. Publ. 14 (1985), 625-643.

[68] Z. Luo, Z.-R. He and W.-T. Li, Optimal birth control for an age-dependent n-dimensional food chain model, J. Math. Anal. Appl., 287 (2003), 557-576.

[69] M. McAsey, L. Mou, A multiplier rule on a metric space, J. Math. Anal. Appl. 337 (2008), 1064-1071.

[70] M. McAsey, L. Mou, A proof of a general maximum principle for optimal controls via a multiplier rule on a metric space, J. Math. Anal. Appl. 337 (2008), 1072-1088.

[71] E. J. McShane, On multiplyiers for Lagrange problems, American J. on Mathematics 61 (1939), No. 4, 809-819.

[72] A. A. Miljutin, The maximum principle in the general optimal control problem (Printsip maksimuma w obshtei zadache optimal'nogo upravleniia (in Russian)), Fizmatlit, Moscow, 2001.

[73] A. A. Milyutin, N. P. Osmolovskii, Calculus of Variations and Optimal Control, Translations of Mathematical Monogrophs, v. 180, American Math. Society, 1998.

[74] A.Moltó, J.Orihuela, S.Troyanski, *Locally uniformly rotund renorming and fragmentability,* Proc. London Math. Soc., v.75, no.3(1997), 619-640.

[75] A.Moltó, J.Orihuela, S.Troyanski, M.Valdivia, *On weakly locally uniformly rotund Banach spaces,* Journal of Functional Analysis 163(1999), 252-271.

[76] B. S. Mordukhovich, Variational Analysis and Generalized Differentiation I, Basic Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[77] B S. Mordukhovich, Variational Analysis and Generalized Differentiation II, Applications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[78] I.Namioka, *Radon-Nikodym compact spaces and fragmentability,* Mathematika 34 (1987), 258-281.

[79] A. Nijenhuis, Strong derivatives and inverse mappings, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 969-980.

[80] R. R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability,* Lecture Notes in Math. 1364, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1989.

[81] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, Selected works. Vol. 4. The mathematical theory of optimal processes. Ed. and with a preface by R. V. Gamkrelidze. Transl. from the Russian by K. N. Trirogoff. Transl. ed. by L. W. Neustadt. With a preface by L. W. Neustadt and K. N. Trirogoff. Reprint of the 1962 Engl. translation. Classics of Soviet Mathematics. New York, NY: Gordon and Breach Science Publishers, 360 p. (1986).

[82] D.Preiss, R.R.Phelps and I.Namioka, *Smooth Banach spaces, weak Asplund spaces and monotone or usco mappings,* Israel J. Math., October 1990, Volume 72, Issue 3, 257-279.

[83] A. Prskawetz, V.M. Veliov, Age specific dynamic labor demand and human capital investment. Journal of Economic Dynamics and Control, 31 (2007), 3741-3777.

[84] A. Prskawetz, Ts.Tsachev, V.M. Veliov, Optimal education in an age-structured model under changing labor demand and supply, Macroeconomic Dynamics, Volume 16, Issue 2 (2012), 159-183.

[85] M.Raja, *Kadec norms and Borel sets in a Banach space,* Studia Math. 136 (1999), 1-16.

[86] M.Raja, *On topology and renorming of Banach space,* C. R. Acad. Bulgare Sci. 52 (1999), 13-16.

[87] M.Raja, *Locally uniformly rotund norms,* preprint(1998).

[88] J. P. Raymond, H. Zidani, Pontryagin's principles for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls, SIAM J. Control Optim., 36 (1998), 1853-1879.

[89] N. Ribarska, *Internal characterization of fragmentable spaces*, Mathematika 34 (1987), No.2, 243-257.

[90] N.K.Ribarska, *A Radon-Nikodym compact which is not a Gruenhage space,* C. R. Acad. Bulgare Sci. 41 (1988), 9-11.

[91] N.K.Ribarska, *A note on fragmentability of some topological spaces,* C.R.Acad. Bulgare Sci., 43(1990), 13-15.

[92] N.K.Ribarska, *The dual of a Gâteaux smooth Banach space is weak star fragmentable,* Proceedings of the AMS 114, no.4 (1992), 1003-1008.

[93] N.K.Ribarska, *Three space property for σ-fragmentability,* Mathematika, 45(1998), 113-118.

[94] N.K.Ribarska, *On the property "countable cover by sets of small local diameter* Studia Mathematica 140 (2000), 99-116.

[95] N.K.Ribarska, V.D.Babev, *A stability property for locally uniformly rotund renorming,* J.Math.Anal.Appl. 350(2009), 811-828.

[96] R. T. Rockafellar, Clarke's tangent cones and the boundaries of closed sets in $\mathbf{R}^n$, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 3 (1) (1979), 145-154.

[97] R.Tyrrell Rockafellar, *Roger J.-B. Wets*, *Variational analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 317, Springer, 1998.

[98] C.Stegall, *A class of topological spaces and differentiation of functions on Banach spaces,* Vorlesungen Fachbereich Math. Univ. Essen 10 (1983), 63-77.

[99] C.Stegall, *More Gâteaux differentiability spaces,* Banach spaces Proceedinigs, Missouri 1984, Lecture notes in Math. 1166, Springer-Verlag, Berlin 1985, 158-168.

[100] Hećtor Sussmann's Weizmann Institute course, Fall 2000, http://www.math.rutgers.edu/˜ sussmann/

[101] H. Sussmann, On the validity of the transversality condition for different concepts of tangent cone to a set, Proceedings of the 45-th IEEE CDC, San Diego, CA, December 13-15, 2006, 241-246.

[102] V.M. Veliov, Optimal Control of Heterogeneous Systems: Basic Theory, J. Math. Anal. Appl., 346 (2008), 227-242.

[103] Y. Yao, Vector Measure and Maximum Principle of Distributed Parameter Systems, Sci. Sinica Ser., 26, 102-112 (1983).

[104] K. Yosida, Functional analysis, Springer, 1980.

[105] V.Zizler, *Locally uniformly rotund renormig and decomposition of Banach spaces,* Bull.Austral.Math.Soc. 29(1984), 259-265.