СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

НА ДИСЕРТАЦИЯ ЗА НАУЧНА СТЕПЕН

ДОКТОР НА НАУКИТЕ

В НАПРАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИКА

ВАРИАЦИОНЕН АНАЛИЗ: МЕТОДИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

доц. д-р Надя Пейчева Златева

С О Ф И Я
2 0 1 7

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на 18 септември 2017 г. на разширено заседание на катедра Вероятности, операционни изследвания и статистика на Факултета по математика и информатика (ФМИ) на Софийския университет „Св. Климент Охридски“ с разширение в състав: проф. д-р Надежда Рибарска, проф. д-р Людмила Николова, проф. д-р Георги Александров, проф. д-р Никола Янев, доц. д-р Борислав Драганов, доц. д-р Милен Иванов, доц. д-р Йордан Митев. Разширението на катедра Вероятности, операционни изследвания и статистика на ФМИ е направено със заповед РД 38-579/13.09.2017 г. на Ректора на Софийския Университет „Св. Климент Охридски“.

Дисертационният труд е на английски език и съдържа 220 страници, от които 12 страници библиография, включваща 172 заглавия.

Дисертантът работи като доцент във Факултета по математика и информатика на Софийския университет „Св. Климент Охридски“. Изследванията са извършени във Факултета по математика и информатика на СУ „Св. Климент Охридски“, Université Montpellier II и Université de Bretagne Occidentale, а малка част от тях – и в Институт по математика и информатика на БАН.

Съдържание

Увод

Вариационният анализ покрива широка област от математическата теория, развита във връзка с изучаването на задачи от оптимизацията, равновесието, контрола и стабилността на линейни и нелинейни системи, както се казва в едноименната книга на Rockafellar and Wets [152].

Дълго време „вариационните“ задачи са били определяни като „вариационно смятане“, свързано с минимизирането на интегрални функционали и където основен подход е да се изследват вариации, за да се характеризират решенията и да се опишат в термините на „вариационни принципи“.

В тази връзка понятия като пертурбация, апроксимация, обобщена диференцируемост и др. са били интензивно изследвани.

От десетилетия се правят опити да се освободи понятието „вариационен“ от ограниченията на неговото минало и то да се използва за много по-широка област от съвременната математика. Съвременният подход е „вариационното смятане“ да се разглежда не само в класическия смисъл: като движения от дадена точка по лъчи или криви и геометрията на тангенциални и нормални конуси, свързани с тях, но също така като форми на пертурбация и апроксимация, които могат да се опишат със сходимост на множества, многозначни изображения и т.н. Субградиентите и субдиференциалите на функции, изпъкнали и неизпъкнали, са от съществено значение при анализирането на такива „вариации“.

В днешни дни вариационният анализ се разглежда като клон на анализа, който осигурява не само мощни средства за решаване на задачите, които са мотивирали неговото възникване, но и като математическа дисциплина с нови приложения.

Ако използваме аналогия, можем да сравним първоначалната област на приложение на вариационния анализ с оптимизацията в университетския курс по анализ. Тогава вариационният анализ играе ролята на диференциалното смятане. Ясно е, че диференциалното смятане е самостоятелна област, както и, че има приложения, различни от оптимизацията. Същото важи и за вариационния анализ.

В дисертацията представяме няколко оригинални резултата в областта на вариационния анализ, получени през последните 15 години и публикувани в 11 работи – статиите с номера [18, 19, 63, 94, 95, 96, 140, 162, 163, 164, 172] в библиографията. От тях 9 са публикувани в списания с импакт фактор – [18, 63] в Journal of Convex Analysis, [19] в Transactions of the AMS, [140] в SIAM J. Optim., [162] в Nonlinear Anal., Theory Meth. Appl., [163] в Proceedings of the AMS, [164] в Math. Oper. Res., [96, 172] в Compt. rend. Acad bulg. Sci. (Доклади на БАН), а статиите [94, 95] са публикувани в Доклади на БАН преди списанието да получи импакт фактор.

Актуален списък с цитиранията на автора, може да бъде намерен на http://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/lecturers/vois/zlateva

От него се вижда, че статиите, върху които е основана дисертацията към момента на започване на процедура по предзащита, имат 157 цитирания (без автоцитирания и без автоцитирания на съавтори) в статии и монографии, от които 96 в статии, които са публикувани в списания с импакт фактор и 12 в монографии. Освен това те имат и 9 цитирания в дисертационни и хабилитационни трудове.

Статиите и цитиранията на автора в SCOPUS се намират на адрес https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6505770062

Пълен текст на статиите, върху които е основана дисертацията се намира на http://www.fmi.uni-sofia.bg/lecturers/vois/zlateva/publicationslist.2006-02-20.4308336922

Съдържанието на дисертацията е организирано в три глави. Всяка глава е разделена на параграфи, а всеки параграф на подпараграфи. Всеки параграф носи заглавието на едноименната статия и за удобство на читателя започва с необходими означения и предварителни сведения.

В Глава 1 изучаваме функциите с квадратична оценка отдолу (primal lower-nice functions) и проксимално регулярните множества (prox-regular sets). Функциите с квадратична оценка отдолу имат добро поведение, подобно на изпъкналите функции що се отнася до тяхната регуляризация, интегруемост и др. и поради тази причина са обект на интензивно изучаване през последните години. Доказваме в банахово пространство характеризация на функции с квадратична оценка отдолу чрез хипомонотонност на определени отсичания на техния субдиференциал в параграф 1.1, а в параграф 1.2 показваме че за такива функции в гладко банахово пространство проксималният субдиференциал и субдиференциалът на Clarke съвпадат. Функциите с квадратична оценка отдолу принадлежат на по-широкия клас на проксимално регулярните функции. Множества, чиито индикаторни функции принадлежат на този клас са проксимално регулярни. В параграфи 1.3 и 1.4

изучаваме техните свойства и намираме различни характеризации на такива множества в равномерно изпъкнали банахови пространства. Резултатите от параграфите в тази глава са публикувани съответно в статиите [94, 95, 18, 19].

Глава 2 съдържа резултати, касаещи интегруемостта на субдиференциали на функции. Целта на изучаването на интегруемостта е да се отговори на въпроса дали условието, че субдиференциалът на една функция съдържа субдиференциала на друга функция води до това, че двете функции се различават с константа. Даваме положителен отговор на този въпрос за различни класове от функции, дефинирани в банахово пространство – ново доказателство за интегруемост на полунепрекъсната отдолу изпъкнала функция (известен резултат на Rockafellar), което използва регуляризации в духа на исторически първото доказателство в хилбертово пространство на Moreau в параграф 2.1; полунепрекъсната отдолу регулярна функция, непрекъсната върху домейна си и строго липшицова по посока в точка от домейна си е интегруема в околност на тази точка в параграф 2.2; функция на две променливи, която е полунепрекъсната отдолу (респ. по всяка от променливите), непрекъсната върху домейна си и отгоре-отгоре регулярна (респ. отделно) и строго липшицова по посока (респ. отделно) в точка от домейна си е интегруема в околност на тази точка в параграф 2.3; собствена затворена частично слабо инф-компактна върху кълба седловидна функция в параграф 2.4. Резултатите от параграфите в тази глава са публикувани съответно в статиите [172, 163, 162, 164].

В глава 3 изследваме многозначни изображения както и тяхната зависимост от параметър. Такива изображения се разглеждат в оптимизацията и напоследък интензивно се изучават. Даваме достатъчно условие за това изображението, което на стойност на параметъра присвоява множеството от решения (което може да бъде многозначно и неограничено) на параметризирана минимаксна задача в произведение на банахови пространства да притежава свойството на Aubin в параграф 3.1. В параграф 3.2 доказваме критерий за метрическа регулярност на многозначно изображение посредством графични производни, базиран на работи на J.-P. Aubin и негови съавтори. Получаваме и свързана с него теорема за неявното изображение, както и ново доказателство на теоремата за радиуса на метрическа регулярност, базирано на критерия на Aubin. В параграф 3.3 доказваме принцип за дълга орбита или празна стойност на многозначно изображение и го прилагаме, за да получим единен подход към няколко теореми – за фиксирана точка на многозначно изображение и за сюрективност на еднозначни изображения. Резултатите от параграфите в тази глава са публикувани съответно в статиите [140, 63, 96].

Държа да изразя искрената си признателност към всички мои съавтори, с които работих през годините и които имаха ключова роля за формирането ми като математик – моят съпруг доц. Милен Иванов (Софийски университет), моят научен ръководител проф. Пандо Георгиев (Софийски универститет и University of Florida понастоящем), Prof. Lionel Thibault и Dr. Frédéric Bernard (Université Montpellier II), Prof. Marc Quincampoix (Université de Bretagne Occidentale), Prof. Asen Dontchev (University of Michigan) и доц. Боян Златанов (Пловдивски университет).

Благодарна съм и на своите колеги от катедра Вероятности, операционни изследвания и статистика във Факултета по математика и информатика на Софийския университет, в която работя вече 17-та година и на колегите от секция Изследване на операциите на Института по математика и информатика, където преди 10 години работих 10 години, за колегиалната им подкрепа и най-вече на Венелин Черногоров, който бе моя опора през всичките тези години.

Глава 1

Функции с квадратична оценка отдолу и проксимално регулярни множества

В тази глава са представени някои резултати, касаещи свойствата на един важен клас от реалнозначни полунепрекъснати отдолу функции, които могат да приемат и стойност безкрайност, наречени функции с квадратична оценка отдолу (primal lower-nice functions) и въведени през 1991 г. от Poliquin в [136] и на проксимално регулярни множества (prox-regular sets), които са такива множества, чиито индикаторни функции са проксимално регулярни функции (prox-regular functions) – клас от функции, въведен през 1996 г. от Poliquin и Rockafellar в [137].

Класът на функциите с квадратична оценка отдолу значително разширява класа на функциите, които притежават толкова добро поведение, колкото изпъкналите функции по отношение на тяхната регуляризация, тяхната интегруемост, техните свойства от втори ред и т.н., както може да се види в Poliquin [136], Thibault and Zagrodny [160], Levi, Poliquin и Thibault [111], Bernard, Thibault и Zagrodny [16], Marcellin и Thibault [115] и цитираната там литература.

В [137] (респ. [136]) един от основните резултати е важна субдиференциална характеризация в посока на добре известния резултат, че полунепрекъсната отдолу функция е изпъкнала тогава и само тогава, когато нейният субдиференциал е монотонен. Този резултат, характеризиращ изпъкналите функции първо е получен от Poliquin в $\mathbb{R}^n$ и по-късно е доказан в произволно банахово пространство от Corea, Jofre и Thibault в [52]. За функции с квадратична оценка отдолу характеризация чрез хипомонотонност на определени отсичания на субдиференциала им е дадена от Poliquin в [136] в $\mathbb{R}^n$ и продължена в контекста на хилбертово пространство от Levy, Poliquin и Thibault в [111]. В параграф 1.1 доказваме характеризация на функции с квадратична оценка отдолу в банахово пространство чрез свойството хипомонотонност на определени отсичания на техните субдиференциали (Теорема 1.1.6). Резултатът е публикуван в [94].

В [136] Poliquin показва, че за функция с квадратична оценка отдолу в $\mathbb{R}^n$ проксималният субдиференциал и субдиференциалът на Clarke съвпадат. Същият резултат е доказан в хилбертово пространство от Levy, Poliquin и Thibault в [111]. В параграф 1.2 установяваме това свойство за функция с квадратична оценка отдолу в гладко банахово пространство (Теорема 1.2.2). Резултатът е публикуван в [95].

Проксимално регулярните функции в $\mathbb{R}^n$ са въведени от Poliquin и Rockafellar, като те въвеждат и концепцията за проксимална регулярност на множества. Тази концепция е развита в хилбертово пространство от Poliquin, Rockafellar и Thibault в [138].

Класът на проксимално регулярните множества е по-широк от класа на изпъкналите множества като в същото време тези множества притежават голяма част от хубавите свойства на изпъкналите множества що се отнася до приложения в оптимизацията, оптималния контрол и др., както може да се забележи освен в цитираните по-горе работи и в работите на Clarke, Ledyaev, Stern и Wolenski [45], Thibault [158], Marcellin и Thibault [115], Edmond и Thibault [68], Maury и Venel [116] и др. Тези множества също така участват и в диференциални включвания от механиката (виж напр. Colombo и Goncharov [48], Edmond и Thibault [68], Thibault [158]), при разпределянето на ресурси в икономиката (виж напр. Thibault [158]), при задачи от управление на тълпите (Maury и Venel [116]), в теоретични изследвания на т.нар. жизнеспособност на решенията на диференциални включвания при някакви ограничения (вж. напр. Thibault [158]), и т.н.

В параграф 1.3 и параграф 1.4 доказваме редица свойства на проксимално регулярните множества в равномерно изпъкнали банахови пространства. Резултатите са публикувани в [18] и [19] съответно.

1.1 Относно свойството квадратична оценка отдолу

Poliquin в [136] показва, че функциите с квадратична оценка отдолу (primal lower-nice functions) в крайномерни пространства напълно се характеризират чрез техния субдиференциал на Clarke-Rockafellar. Това е първият голям клас от неизпъкнали полунепрекъснати отдолу функции с това свойство. Свойствата на тези функции в безкрайномерни хилбертови пространства са изследвани подробно от Levi, Poliquin и Thibault в [111], Thibault и Zagrodny в [160], Combary, Elhilali, Levi, Poliquin и Thibault в [47].

Има две естествени дефиниции на свойството квадратична оценка отдолу: едната е посредством оценка отдолу с развитието по Тейлор (Дефиниция 1.1.4), а другата включва само субдиференциали (Дефиниция 1.1.5). Втората в действителност е свойството хипомонотонност на определени отсичания на субдиференциала. Еквивалентността на тези две дефиниции може да се разглежда също така като субдиференциална характеризация на свойството квадратична оценка отдолу (primal lower-nice property) и е доказана от Poliquin в [136] в крайномерно пространство и от Levy, Poliquin и Thibault в [111] в хилбертово пространство.

Ние доказваме, че двете дефиниции са еквивалентни в по-общи пространства и за по-общи субдиференциали. По този начин показваме, че те определят един и същ клас от функции и отговаряме по този начин на въпроса, поставен от Combary, Elhilali, Levi, Poliquin и Thibault в [47].

Ако не е уточнено друго, $(X, \|\cdot\|)$ е реално банахово пространство, т.е. пълно нормирано пространство. X^* е неговото спрегнато пространство, т.е. пространството от непрекъснати линейни функционали над X. Ако $x^* \in X^*$, пишем $\langle x, x^* \rangle$ за стойността на x^* в $x \in X$. Да напомним, че *слабата топология* $w(X, X^*)$ е най-малката топология в X по отношение на която всички функции $\langle \cdot, x^* \rangle$ $(x^* \in X^*)$ са непрекъснати и че *слабата* топология* $w(X^*, X)$ е най-малката топология в X^* по отношение на която всички функции $\langle x, \cdot \rangle$ $(x \in X)$ са непрекъснати. Означаваме с $B[x, r]$ (респ. с $B(x, r)$) затвореното (респ. отвореното) кълбо с център $x \in X$ и радиус r. Затвореното (респ. отвореното) единично кълбо в X означаваме с B (респ. с B°).

Борнология β в X е фамилия от ограничени подмножества на X, която има свойствата: $\{x\} \in \beta$ за всяко $x \in X$; $A \in \beta,\ D \subset A \Rightarrow D \in \beta$. Банаховото пространство X се нарича *β-гладко* по отношение на борнология β ако съществува липшицова *камбановидна* (т.е. с непразен ограничен носител) функция $b \in C^1_\beta(X)$, където

$$C^1_\beta(X) = \{\ f : X \to \mathbb{R}\ :\ f \text{ е диференцируема по Gâteaux и производната ѝ е непрекъснато изображение от } X \text{ в } X^*, \text{ снабдено с топологията на равномерната сходимост върху членовете на борнологията } \beta\,\}.$$

Всяко пространство, което има еквивалента норма, която е β диференцируема върху единичната сфера, е β-гладко. Обратното не е вярно, както е показано от Haydon в [83].

Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ се нарича *полунепрекъсната отдолу в* x_0 ако $f(x_0) \le \liminf_{x \to x_0} f(x)$ и *полунепрекъсната отдолу* ако е полунепрекъсната отдолу във всяко $x_0 \in X$. Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е *собствена* ако не приема стойност $+\infty$ навсякъде, т.е. домейнът ѝ $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$, където $\operatorname{dom} f = \{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\}$.

Разглеждаме β-гладък субдиференциал – идея, която води до Crandal и Lions [55].

Ако β е борнология в X и $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена и полунепрекъсната отдолу функция, то *β-гладкият субдиференциал* на f в x е множеството

$$D_\beta f(x) = \{u'(x) :\ u \in C^1_\beta(X) \text{ и } f - u \text{ има локален минимум в } x\},$$

ако $x \in \operatorname{dom} f$ и $D_\beta f(x) = \emptyset$, ако $f(x) = +\infty$.

Следвайки Thibault и Zagrodny [160], Correa, Jofre и Thibault [52], Ioffe [89], Borwein и Ioffe [26] работим с абстрактен субдиференциален оператор:

Дефиниция 1.1.1. *Абстрактен субдиференциален оператор* ∂ е оператор, който асоциира с всяка функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и всяка точка $x \in X$ подмножество $\partial f(x)$ на X^*, което се нарича *абстрактен субдиференциал на f в x* и за което са в сила следните свойства:

Свойство 1. $\partial f(x) = \emptyset$, ако $x \notin \operatorname{dom} f$;

Свойство 2. $\partial f(x) = \partial g(x)$ когато f и g съвпадат в околност на x;

Свойство 3. $\partial f(x)$ съвпада с изпъкналия субдиференциал, ако f е изпъкнала;

Свойство 4. Ако g е изпъкнала и непрекъсната, f е полунепрекъсната отдолу и $f + g$ има локален минимум в x_0, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $x,\ y \in X$ и $p \in \partial f(x)$, $q \in \partial g(y)$ такива, че

$$\|x - x_0\| < \varepsilon,\ \|y - x_0\| < \varepsilon,\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ и } \|p + q\| < \varepsilon.$$

Като използваме дефиницията за абстрактен субдиференциал и вариационния принцип на Ekeland доказваме

Твърдение 1.1.2. Нека X е банахово пространство, ∂ е абстрактен субдиференциал, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу, а $g : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала непрекъсната функция. Нека μ, ε и δ са дадени положителни числа. Ако x_0 е такова, че

$$(f+g)(x_0) < \inf(f+g)(x) + \varepsilon$$

то съществуват $\overline{x}, \overline{y} \in X$ и $p \in \partial f(\overline{x})$, $q \in \partial g(\overline{y})$ такива, че

$$\|x_0 - \overline{x}\| < \frac{\varepsilon}{\mu} + \delta, \quad \|x_0 - \overline{y}\| < \frac{\varepsilon}{\mu} + \delta, \quad \|p + q\| < \mu + \delta,$$
$$|f(x_0) - f(\overline{x})| < \varepsilon + \delta(2+\mu) + |g(\overline{x}) - g(x_0)|.$$

От този резултат следва, че домейнът на абстрактен субдиференциал е гъст в домейна на полунепрекъсната отдолу функция.

Доказваме, че β-гладките субдиференциали са абстрактни субдиференциали в β-гладки банахови пространства. Твърдението и доказателството са дадени за гладкост по Gâteaux, тъй като се правят по подобен начин за всички видове гладкост, от които тази по Gâteaux е най-слабата. В действителност доказваме по-общ резултат, а именно

Теорема 1.1.3. Нека X е гладко по Gâteaux банахово пространство, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу и $g : X \to \mathbb{R}$ е локално равномерно непрекъсната функция. Ако $f + g$ има локален минимум в x_0, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $x, y \in X$ и $p \in D_G f(x)$, $q \in D_G g(y)$ такива, че

$$\|x - x_0\| < \varepsilon, \quad \|y - x_0\| < \varepsilon, \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|p + q\| < \varepsilon.$$

По-долу даваме двете известни дефиниции на свойството квадратична оценка отдолу (primal lower-nice property). В тях X е банахово пространство, а ∂ е абстрактен субдиференциал.

Дефиниция 1.1.4. Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция. Функцията f е с *∂ квадратична оценка отдолу* (*∂-pln* накратко) в $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ ако съществуват $\lambda > 0$, $c > 0$, $T > 0$ такива, че

$$f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x\rangle - \frac{t}{2}\|y - x\|^2$$

когато $t \geq T$, $x \in \overline{x} + \lambda B^\circ$, $y \in x + \lambda B^\circ$, $p \in \partial f(x)$, и $\|p\| \leq ct$.

Дефиниция 1.1.5. Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция. Функцията f е с *∂ квадратична оценка отдолу* (*∂-pln* накратко) в $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ ако съществуват $\lambda > 0$, $c > 0$, $T > 0$ такива, че

$$\langle p - q, x - y\rangle \geq -t\|x - y\|^2$$

когато $t \geq T$, $x, y \in \overline{x} + \lambda B^\circ$, $p \in \partial f(x)$, $q \in \partial f(y)$ и $\max\{\|p\|, \|q\|\} \leq ct$.

Теорема 1.1.6. Всяка функция f, която е ∂-pln в $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ съгласно Дефиниция 1.1.4 е ∂-pln в $\overline{x}$ съгласно Дефиниция 1.1.5 и обратното.

1.2 Субдиференциална характеризация на функции с квадратична оценка отдолу в гладки банахови пространства

Poliquin доказва в [136], че субдиференциалът на Clarke-Rockafellar и проксималният субдиференциал на функция с квадратична оценка отдолу в крайномерно пространство съвпадат. Това означава в частност, че ако дефиницията на квадратична оценка отдолу (виж Дефиниция 1.1.4 и Дефиниция 1.1.5) се вземе спрямо субдиференциала на Clarke-Rockafellar, ще се получи същият клас от функции. Освен това, тези функции напълно се характеризират чрез техния субдиференциал на Clarke-Rockafellar, виж [136]. Това е първият голям клас от неизпъкнали полунепрекъснати отдолу функции с това свойство.

Съвпадането на проксималния субдиференциал със субдиференциала на Clarke-Rockafellar на функция с квадратична оценка отдолу, дефинирана в хилбертово пространство е установено от Levy, Poliquin и Thibault [111]. Тяхното доказателство използва представяне на субдиференциала на Clarke-Rockafellar в хилбертово пространство като секвенциална граница на проксимални субдиференциали, направено от Loewen [114]. Тъй като подобно представяне е налице и в гладко банахово пространство (виж Borwein и Ioffe [26] и Ivanov [91]) резултатът на Levy, Poliquin и Thibault е възможно да бъде продължен за такива пространства.

Показваме, че субдиференциалът на Clarke-Rockafellar и проксималният субдиференциал на функция с квадратична оценка отдолу, дефинирана в β-гладко банахово пространство съвпадат (Теорема 1.2.2). Полученият резултат показва, че класът на функциите с квадратична оценка отдолу не зависи от това какъв приемлив субдиференциал е използван при дефиницията на класа. Това може би означава, че е възможно свойството квадратична оценка отдолу да бъде характеризирано в термини, които не включват субдиференциали.

Да напомним, че *субдиференциалът на Clarke-Rockafellar* (или *субдиференциалът на Clarke*) на собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в точка $x \in \operatorname{dom} f$ е множеството

$$\partial_C f(x) = \{p \in X^* : f^{\uparrow}(x; v) \geq \langle p, v \rangle, \ \forall v \in X\},$$

където

$$f^{\uparrow}(x; v) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{\substack{y \to_f x \\ t \downarrow 0}} \inf_{w \in v + \varepsilon B} \frac{f(y + tw) - f(y)}{t}$$

е обобщената производна на Clarke и $y \to_f x$ означава, че $(y, f(y))$ клони към $(x, f(x))$ в $X \times \mathbb{R}$. Ако $f(x) = +\infty$, то $\partial_C f(x) = \emptyset$.

Да напомним и че $p \in X^*$ се нарича *проксимален субградиент* на полунепрекъснатата отдолу функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в $x \in \operatorname{dom} f$ и се записва $p \in \partial_P f(x)$, ако за някое $t > 0$ неравенството

$$f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle - \frac{t}{2} \|y - x\|^2$$

е в сила за всички y в околност на x. Множеството от всички такива p се нарича *проксимален субдиференциал* на f в x.

По-нататък в параграфа работим в β-гладко банахово пространство X и с β-гладък субдиференциал D_β. В този контекст е естествено да разглеждаме D_β-pln функции.

Полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, дефинирана в β-гладко банахово пространство X е с D_β *квадратична оценка отдолу* (D_β-*pln* накратко) в $x_0 \in \operatorname{dom} f$ ако съществуват $\lambda > 0$, $c > 0$, $T > 0$ такива, че

$$f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x\rangle - \frac{t}{2}\|y - x\|^2$$

когато $t \geq T$, $x \in B(x_0, \lambda)$, $y \in B(x, \lambda)$, $p \in D_\beta f(x)$, и $\|p\| \leq ct$ (т.е. Дефиниция 1.1.4 за субдиференциала $\partial = D_\beta$).

Очевидно, в банахово пространство X,

$$\partial_P f(x) \subseteq \partial_C f(x),$$

а в β-гладко банахово пространство X,

$$\partial_P f(x) \subseteq D_\beta f(x) \subseteq \partial_C f(x).$$

От Дефиниция 1.1.4 е ясно, че ако f е ∂-pln в x_0, то

$$\partial f(x) \cap ctB^* \subset \partial_P f(x) \text{ за всяко } x \in B(x_0, \lambda).$$

Когато функция f е ∂-pln във всички точки от $\operatorname{dom} f$, f се нарича ∂-pln.

Основният резултат в параграфа е

Теорема 1.2.2. Нека X е β-гладко банахово пространство и $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е D_β-pln функция. Тогава $\partial_P f \equiv D_\beta f \equiv \partial_C f$.

Забележка 1.2.3. Не всяка функция f, за която $\partial_P f \equiv \partial_C f$ е с квадратична оценка отдолу. Да разгледаме например $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирана като

$$f(x) := \int_0^x t^2 \sin \frac{1}{t^2}\, dt.$$

Лесно се проверява, че f е двукратно диференцируема навсякъде. Следователно, $\partial_P = \partial_C f = \{f'\}$, но f не е с квадратична оценка отдолу в 0. В противен случай тя би трябвало локално да удовлетворява $f'' \geq -C(|f'| + 1)$ за някоя константа $C > 0$. Последното би довело до това, че f'' е ограничена отдолу в околност на 0, но $\liminf_{x\to 0} f''(x) = -\infty$.

1.3 Характеризации на проксимално регулярни множества в равномерно изпъкнали банахови пространства

В този параграф продължаваме до равномерно изпъкнали банахови пространства резултати за проксимално регулярни множества (prox-regular sets) получени в хилбертови пространства. Проксималната регулярност на множество C в точка $x \in C$ е вариационно условие, свързано с нормалните вектори, което е присъщо на много множества.

В контекста на равномерно изпъкнало банахово пространство показваме, че свойството проксимална регулярност на затворено множество C в точка x е еквивалентно на непрекъсната диференцируемост на функцията разстояние извън C в някаква околност на x. Допълнителни характеризации даваме в термините на метрическата проекция. Също така изследваме как на глобално ниво свойството проксимална регулярност съответства на непрекъсната диференцируемост на функцията разстояние d_C върху отворена тръба с равномерна дебелина около множеството C.

На глобално ниво, в хилбертово пространство Clarke, Stern и Wolenski [46] въвеждат и изучават *проксимално гладките множества*. Тези множества са затворени множества C, за които функцията разстояние d_C е непрекъснато диференцируема в отворена тръба около C от вида

$$U_C(r) := \{u \in X : 0 < d_C(u) < r\}$$

за някое $r > 0$. В крайномерни пространства тези множества са *положително достижими* по Federer [73] и обратното. Clarke, Stern и Wolenski характеризират в хилбертово пространство проксимално гладките множества по няколко интересни начина, в частност в термините на проксималните нормали и на изображението P_C.

На локално ниво, наскоро напредък в изучаването на множества C, за които d_C е *локално* диференцируема и на следствията от това за изображението метрическа проекция P_C осъществяват Poliquin, Rockafellar и Thibault [138], които в хилбертово пространство възприемат друга гледна точка като правят връзка с локално свойство на C, наречено *проксимална регулярност*. Това свойство е въведено като нов тип регулярност във вариационния анализ от Poliquin и Rockafellar [137]. Богати геометрични следствия и характеристики на тази концепция са получени от Poliquin, Rockafellar и Thibault. В тяхната работа [138], те разглеждат в хилбертово пространство свойството проксимална регулярност на затворено множество C в $\overline{x} \in C$ и го характеризират в термините на d_C и P_C, като например d_C да бъде непрекъснато диференцируема извън C в околност на $\overline{x}$ или P_C да бъде еднозначно и непрекъснато (от нормираната в слабата топология) в същата околност. Също така те дават субдиференциална характеризация на такива множества посредством нормалния конус на C. На глобално ниво те показват, че проксимално гладките множества са точно *равномерно проксимално регулярните* множества и демонстрират нов поглед върху тези множества.

Ние продължаваме техните резултати в по-общия контекст на равномерно изпъкнало банахово пространство и намираме техни аналози в контекста на тези пространства. Работим с въведено от нас свойство, аналогично на проксималната регулярност.

В подпараграф 1.3.1 даваме дефиницията и разглеждаме първите свойства на проксимално регулярни множества в равномерно изпъкнало банахово пространство X. Също така въвеждаме и релевантни дефиниции за функции и многозначни изображения. В подпараграф 1.3.2 изучаваме свойствата на локалните обвивки на Moreau на функции в X. В подпараграф 1.3.3 даваме няколко характеризации на проксимално регулярни множества в X (Теорема 1.3.25) продължавайки по този начин резултатите на Poliquin, Rockafellar и Thibault [138]. В последния подпараграф 1.3.4 използваме някои от техниките, развити в предишните подпараграфи, за да получим в Теорема 1.3.27 различни резултати подобни на тези в характеризационната Теорема 1.3.25 за проксимално гладки множества, но вече на глобално ниво. Така с Теорема 1.3.25 и Теорема 1.3.27 продължаваме резултати на Federer [73], Canino [37], Clarke, Stern и Wolenski [46], Poliquin, Rockafellar и Thibault [138], и Colombo и Goncharov [48].

Резултатите от този параграф са публикувани в [18].

В параграфа работим в равномерно изпъкнало банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$, чиято норма $\|.\|$ е с модули на равномерна изпъкналост и гладкост от степен q и s, съответно. Добре известно е, че всяко равномерно изпъкнало банахово пространство притежава еквивалентна норма с посочените свойства, както и това, че хилбертово пространство H, както и банаховите пространства l^p, L^p и W^p_m $(1 < p < \infty)$ (разглеждани с техните обичайни норми) са равномерно изпъкнали и равномерно гладки с модули на изпъкналост и гладкост от степенен тип. Свойствата на равномерно изпъкналите банахови пространства са детайлно описани в книгите на Diestel [58], Brezis [34], Beauzamy [12], Deville, Godefroy и Zizler [57], Lindenstrauss и Tzafriri [112, 113]).

При направените предположения спрегнатото X^* на X също е равномерно изпъкнало и дуалната норма има модул на изпъкналост от степен $q^* = s(s-1)^{-1}$ и модул на гладкост от степен $s^* = q(q-1)^{-1}$.

Изображението $J : X \to X^*$ дефинирано като

$$J(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|.\|x\|, \quad \|x^*\| = \|x\|\}$$

е *нормализираното дуално изображение* в X, което в контекста на разглежданото пространство е еднозначно, биективно и равномерно непрекъснато върху ограничените множества от нормираната в нормираната топология, $J(\lambda x) = \lambda J(x)$ за всяко $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|J(x)\| = \|x\|$ и $J(x) = \nabla\frac{1}{2}\|.\|^2(x)$ за всяко $x \in X$ (виж Cioranescu [43]).

Нормализираното дуално изображение в X^* е $J^* : X^* \to X$ като $J^* = J^{-1}$.

Пространството $X \times \mathbb{R}$ разглеждаме с нормата $|||\cdot|||$, дефинирана като $|||(x,r)||| = \sqrt{\|x\|^2 + r^2}$. Така за нормализираното дуално изображение $J_{X\times\mathbb{R}} : X \times \mathbb{R} \to X^* \times \mathbb{R}$, асоциирано с нормата $|||\cdot|||$, имаме равенството

$$J_{X\times\mathbb{R}}(x, r) = (J(x), r).$$

Да напомним, че $d_C(u)$ означава разстоянието от u до множеството C, т.е. $d_C(u) := \inf\limits_{x\in C} \|u - x\|$, а $P_C(u) = \{x \in C : \ d_C(u) = \|u - x\|\}$ е множеството от всички най-близки до u точки в C.

За множество $C \subset X$ означаваме с $\mathrm{cl}\, C$ неговото затваряне по отношение на нормираната топология в X.

Вектор $p \in X$ се нарича *проксимален нормален вектор* за C в $x \in \mathrm{cl}\, C$ (виж Borwein и Strójwas [31]) ако съществуват $u \notin \mathrm{cl}\, C$ и $r > 0$ такива, че $p = r^{-1}(u - x)$ и $\|u - x\| = d_C(u)$. Известно е, от теоремата на Lau [108], че в рефлексивно банахово пространство с норма на Kadec множеството от тези точки, които имат най-близка точка до произволно фиксирано затворено подмножество е гъсто множество. В подходящо нормираното пространство X, в което ние работим, това свойство е в сила и следователно съществуват проксимално нормални вектори във всяка точка от някое гъсто подмножество на границата на C. Да забележим, че проксималната нормалност на ненулев $p \in X$ за C в $x \in \mathrm{cl}\, C$

съответства на съществуването на някое $r > 0$, такова че $x \in P_{\mathrm{cl}\,C}(x+rp)$. Конусът от всички такива вектори p, заедно с началото, означаваме с $PN_C(x)$ и наричаме *проксимален нормален конус* за C в x.

Тази концепция е *локална* в смисъл, че за всяко $u \notin \mathrm{cl}\,C$ и всяко затворено кълбо $V := B[x,\beta]$ с център в $x \in \mathrm{cl}\,C$, такова че $\|u - x\| = d_{C\cap V}(u)$ е изпълнено $u - x \in PN_C(x)$.

Непрекъснат линеен функционал $p^* \in X^*$ се нарича *проксимален нормален функционал* за C в $x \in \mathrm{cl}\,C$ (виж Borwein и Strójwas [31]) ако съществуват $u \notin \mathrm{cl}\,C$, $r > 0$ такива, че $p^* = r^{-1}J(u - x)$ и $\|u - x\| = d_C(u)$. Или, еквивалентно, ненулев $p^* \in X^*$ е проксимален нормален функционал за C в $x \in \mathrm{cl}\,C$ ако съществува $r > 0$, такова че $x \in P_{\mathrm{cl}\,C}(x+rJ^*(p^*))$. Конусът от всички такива функционали p^*, заедно с началото означаваме с $N^P_C(x)$. Лесно се проверява, че ако $p \in PN_C(x)$, то $J(p) \in N^P_C(x)$ и че ако $p^* \in N^P_C(x)$, то $J^*(p^*) \in PN_C(x)$. Следователно $PN_C(x)$ и $N^P_C(x)$ напълно се определят един друг.

Функционал $x^* \in X^*$ се нарича *Fréchet нормален функционал* (виж Borwein и Strójwas [31]) за C в x ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува околност U_ε на x такава че неравенството $\langle x^*, x' - x\rangle - \varepsilon\|x' - x\| \le 0$ е в сила за всички $x' \in C \cap U_\varepsilon$.

Тъй като нормата на пространството X, в което работим е диференцируема по Fréchet извън началото, не е трудно да се провери, че за всяко затворено подмножество $C \subset X$ и всяко $x \in C$, всеки проксимален нормален функционал за C в x също така е Fréchet нормален функционал за C в x (виж Borwein и Strójwas [31, Corollary 3.1]).

Нека $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ е функция. *Надграфиката* на f е множеството $\mathrm{epi}\,f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \le r\}$. Ясно е, че $\mathrm{epi}\,f$ е непразно точно когато f е собствена и е затворено точно когато f е полунепрекъсната отдолу.

Нека $x \in \mathrm{dom}\,f$. Казваме, че $p^* \in X^*$ е *проксимален субградиент* на f в x ако $(p^*, -1)$ е проксимален нормален функционал за $\mathrm{epi}\,f$ в $(x, f(x))$. *Проксималният субдиференциал* на f в x, означен чрез $\partial_P f(x)$ се състои от всички такива функционали. Следователно, имаме че $p^* \in \partial_P f(x)$ тогава и само тогава когато $(p^*, -1) \in N^P_{\mathrm{epi}\,f}(x, f(x))$.

Функционал $x^* \in X^*$ се нарича *Fréchet субградиент* на f в x ако $(x^*, -1)$ е Fréchet нормален функционал на надграфиката на f в $(x, f(x))$. *Субдиференциалът на Fréchet* на f в x, се означава с $\partial_F f(x)$ и се състои от всички такива функционали. Когато $\partial_F f(x) \ne \emptyset$ казваме, че f е Fréchet субдиференцируема в точката x.

Известно е, че за полунепрекъсната отдолу функция f в рефлексивно банахово пространство с Fréchet диференцируема норма на Kadec (в частност в X), множеството $\mathrm{dom}\,\partial_P f$ е гъсто в $\mathrm{dom}\,f$ (виж Borwein и Strójwas [32, Theorem 7.1]). Нещо повече, от казаното по-горе $\partial_P f(x) \subset \partial_F f(x)$ за всяко $x \in X$.

Означаваме с ψ_C *индикаторната функция* на затворено множество $C \subset X$, т.е. $\psi_C(y)=0$ ако $y \in C$ и $\psi_C(y) = +\infty$ в противен случай. Лесно се проверява, че $\partial_P\psi_C(x) = N^P_C(x)$ за всяко $x \in C$.

Подобно на случая на проксимален нормален конус в хилбертово пространство (виж Clarke, Stern и Wolenski [46] и Bounkhel и Thibault [33]) в равномерно изпъкнало пространство X можем да изразим конуса на проксималните нормални функционали за C в термините на проксималния субдиференциал на d_C:

Твърдение 1.3.2. За всяко затворено множество C на X и всяко $x \in C$,

$$\partial_p d_C(x) = N_C^P(x) \cap B^*,$$

където B^* е затвореното единично кълбо в X^*.

1.3.1 Проксимално регулярни множества

Концепцията за проксимална регулярност е въведена за функции от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ от Poliquin и Rockafellar в [137], с което те разширяват класа на функциите с квадратична оценка отдолу, преди това разглеждани от Poliquin в [136]. Подмножество в $\mathbb{R}^n$ се дефинира като проксимално регулярно в [137] когато неговата индикаторна функция е проксимално регулярна. По-късно концепцията за проксимална регулярност на множества е изучавана и развита в хилбертово пространство в [138] от Poliquin, Rockafellar и Thibault, които показват нейните богати геометрични импликации.

Свойството проксимална регулярност на затворено множество C е, както и в случая на функции, *локално* и *по посока*, касаещо точка $\overline{x} \in C$ и посока $\overline{p} \in PN_C(\overline{x})$. Ако свойството е в сила за всички възможни проксимално нормални вектори за C в $\overline{x}$, множеството се нарича проксимално регулярно в $\overline{x}$. Разглеждайки проксималната регулярност в точка Poliquin, Rockafellar и Thibault [138] показват, че то е локализация на концепцията на Federer за положителна достижимост (виж Federer [73]) и на свойството проксимална гладкост на Clarke, Stern и Wolenski [46]. Локализацията става ясна от това, че авторите в [138] показват еквивалентност на проксималната регулярност на множество C, на локалната еднозначност и непрекъснатост на изображението метрическа проекция P_C и на локалната C^1 регулярност на квадрата на разстоянието d_C^2 до C, както и други характеризации. Техният подход им позволява да получат и важните на глобално ниво резултати на Clarke, Stern и Wolenski [46].

Нашето продължение на дефиницията на проксимално регулярно множество в равномерно изпъкнало банахово пространство използва дуалното изображение с цел да бъдат намерени характеризации на проксималната регулярност, подобни на тези в хилбертово пространство.

Дефиниция 1.3.3. Затворено множество $C \subset X$ се нарича *проксимално регулярно* в $\overline{x} \in C$ за $\overline{p}^* \in N_C^P(\overline{x})$ ако съществуват $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ такива, че за всички $x \in C$ и всички $p^* \in N_C^P(x)$ такива, че $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon$ и $\|p^* - \overline{p}^*\| < \varepsilon$, точката x е най-близката точка до $\{x' \in C : \|x' - \overline{x}\| < \varepsilon\}$ на $x + rJ^*(p^*)$. Множеството C е проксимално регулярно в $\overline{x}$ ако това свойство е в сила за всички $\overline{p}^* \in N_C^P(\overline{x})$.

Следващото твърдение показва, че концепцията за проксимална регулярност на множество в X в действителност не зависи от посоката.

Твърдение 1.3.4. Затворено множество $C \subset X$ е проксимално регулярно в $\overline{x}$ тогава и само тогава, когато е проксимално регулярно в $\overline{x}$ за $\overline{p}^* = 0$. Ако затвореното множество C е проксимално регулярно в $\overline{x}$ за $\overline{p}^* = 0$ с ε и r, то за всяко $x \in C$ такова, че $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon$ и за всяко $p^* \in N_C^P(x)$ такова, че $\|p^*\| \le \varepsilon$,

$$0 \ge \langle J[J^*(p^*) - r^{-1}(x' - x)], x' - x\rangle, \quad \forall x' \in C \text{ такива, че } \|x' - \overline{x}\| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

По-нататък, когато казваме, че C е проксимално регулярно в $\overline{x}$ с ε и r имаме предвид, че константите ε и r са взети от проксималната регулярност на C в $\overline{x}$ за $\overline{p}^* = 0$.

Неравенство, съответстващо на неравенството (1.1) в случая на функции въвеждаме в Дефиниция 1.3.5 по-долу. Да отбележим, че в Bernard и Thibault [14] е разглеждана друга дефиниция, в която вместо (1.2) се използва квадратична оценка отдолу, какъвто е и случаят в Poliquin и Rockafellar [137]. В хилбертовия случай, функциите удовлетворяващи дефиницията по-долу са с квадратична оценка отдолу (виж Poliquin и Rockafellar [137] и Bernard и Thibault [14]).

В следващия подпараграф установяваме, че обвивките на Moreau на J-plr функциите, въведени в Дефиниция 1.3.5 имат различни важни и интересни свойства. Тези свойства, приложени за индикаторни функции на множества са сред ключовите средства в нашите разглеждания.

Дефиниция 1.3.5. Полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е *J-регулярна отдолу* (*J-plr* накратко) в $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ ако съществуват положителни константи ε и r такива, че

$$f(y) \geq f(x) + \langle J[J^*(p^*) - t(y - x)], y - x\rangle \tag{1.2}$$

за всички $x, y \in B(\overline{x}, \varepsilon)$, всички $p^* \in \partial_P f(x)$ и всички t такива, че $\|p^*\| \leq \varepsilon r t$.

Ако полунепрекъснатата отдолу функция f е J-plr в $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ за положителни константи ε и r, то

$$\langle J[J^*(p^*) - t(y - x)] - J[J^*(q^*) - t(x - y)], y - x\rangle \leq 0 \tag{1.3}$$

за всички $x, y \in B(\overline{x}, \varepsilon)$, за всички $p^* \in \partial_P f(x)$, $q^* \in \partial_P f(y)$ и за всички t такива, че $\max\{\|p^*\|, \|q^*\|\} \leq \varepsilon r t$. Това е аналог на хипомонотонността на определени отсичания на $\partial_P f$, присъща на функциите с квадратична оценка отдолу в хилбертово пространство (виж Poliquin [136], Levi, Poliquin и Thibault [111], Bernard, Thibault и Zagrodny [16] и цитираната в тях литература). Хипомонотонността обаче не е подходяща в нашия контекст на равномерно изпъкнало банахово пространство, поради което въвеждаме следната тясно свързана с нея концепция, която наричаме J-хипомонотонност.

Дефиниция 1.3.6. Многозначно изображение $T : X \rightrightarrows X^*$ се нарича *J-хипомонотонно* от степен $t \geq 0$ ако за всички $(x_i, x_i^*) \in \operatorname{gph} T := \{(x, x^*) \in X \times X^* : x^* \in T(x)\}$, $i = 1, 2$, е изпълнено

$$\langle J[J^*(x_1^*) - t(x_2 - x_1)] - J[J^*(x_2^*) - t(x_1 - x_2)], x_2 - x_1\rangle \leq 0.$$

Използваме и понятието за отсичане от Bernard, Thibault и Zagrodny [16]: ако $T : X \rightrightarrows X^*$ е многозначно изображение и са дадени $\varepsilon > 0$ и $t \geq 0$, то *ε, t-отсичане* на T в точката $\overline{x} \in X$ е многозначното изображение $T_{\overline{x},\varepsilon,t}$, дефинирано като

$$\operatorname{gph} T_{\overline{x},\varepsilon,t} := \{(x, x^*) \in \operatorname{gph} T : \|x - \overline{x}\| < \varepsilon, \|x^*\| \leq t\}.$$

При фиксирани $\overline{x}$ и ε, $T_{\overline{x},\varepsilon,t}$ означаваме просто с T_t.

От (1.3) виждаме, че ако функция f е J-plr в $\overline{x}$ за ε и r, то $(\partial_p f)_{\overline{x},\varepsilon,\varepsilon rt}$ е J-хипомонотонно от степен t за всяко $t \geq 0$. В следващото твърдение показваме, че проксималната регулярност на множество C влече свойството J-plr на неговата индикаторна функция ψ_C. Еквивалентността е получена по-късно в Теорема 1.3.25.

За $\sigma \geq 0$ означаваме с $N_C^{P\sigma}$ многозначното изображение N_C^P, чиито образи са отсечени от σB^*, т.е.

$$N_C^{P\sigma}(x) := N_C^P(x) \cap \sigma B^* \quad \text{за всяко } x \in X. \tag{1.4}$$

Твърдение 1.3.7. Ако затвореното множество $C \subset X$ е проксимално регулярно в $\overline{x} \in C$ за ε и r, то индикаторната функция ψ_C на C е J-plr в $\overline{x}$ и следователно (1.3) влече за всяко $t \geq 0$ J-хипомонотонност от степен t в $B(\bar{x}, \varepsilon)$ на многозначното изображение $N_C^{P\sigma}$, където $\sigma := \varepsilon rt$.

Лема 1.3.8. Нека $T : X \rightrightarrows X^*$ е ограничено многозначно изображение (т.е. неговият образ $T(X) := \cup_{x\in X} T(x)$ е ограничено множество в X^*), което е J-хипомонотонно от степен $\overline{r}$. Тогава за всяко $r > 2\overline{r}$ изображението $(I + r^{-1}J^* \circ T)^{-1}$ е еднозначно в своя домейн и $\frac{1}{q}$-Hölder непрекъснато в сечението му с произволно ограничено множество.

1.3.2 Локални обвивки на Moreau

В този подпараграф получаваме някои свойства на d_C^2 и P_C във връзка с резултати за така наречените локални обвивки на Moreau на функции.

Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция и $W \subset X$ е непразно затворено множество, където f е ограничена отдолу и приема крайна стойност в някоя точка. *Локалната обвивка на Moreau с индекс* $\lambda > 0$ на f (относно W), се дефинира като

$$e_{\lambda,W} f(x) := \inf_{y\in W} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2 \right\}. \tag{1.5}$$

Когато W с горното свойство е фиксирано пишем $e_\lambda f$ вместо $e_{\lambda,W} f$. Да отбележим, че инфимумът в (1.5) може да се разглежда като инфимум върху цялото X на функцията $\tilde{f}$, дефинирана като $\tilde{f}(x) = f(x)$, ако $x \in W$ и $\tilde{f}(x) = +\infty$ в противен случай. Лесно се вижда, че функциите $e_\lambda f$ са дефинирани навсякъде и липшицови върху ограничените множества. Разглеждаме множеството

$$P_\lambda f(x) := \left\{ y \in W : e_\lambda f(x) = f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2 \right\}.$$

Когато съществува някое $p_\lambda(x) \in P_\lambda f(x)$ от Correa, Jofre и Thibault [51] имаме, че

$$\partial_F e_\lambda f(x) \subset \{\lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x))\} \cap \partial_F \tilde{f}(p_\lambda(x)), \tag{1.6}$$

следователно $P_\lambda f(x)$ е или празно, или едноточково благодарение на взаимно еднозначното свойство на изображението J. Знаем от Theorem 11 в Borwein и Giles [25], че инфимумът се достига когато x е точка на Fréchet субдиференцируемост на $e_\lambda f$. Означавайки с G_λ множеството в X, където $e_\lambda f$ е Fréchet субдиференцируема, получаваме, че за всяко $x \in G_\lambda$ имаме $P_\lambda f(x) = \{p_\lambda(x)\}$ и $\partial_F e_\lambda f(x) = \{\lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x))\}$. Да отбележим, че G_λ е гъсто в X съгласно резултати в Mordukhovich и Shao [126] и Preiss [139], касаещи гъстотата на точките на субдиференцируемост.

Когато $P_\lambda f(x) = \{p_\lambda(x)\}$ (т.е. е едноточково), не правим разлика между $P_\lambda f(x)$ и $p_\lambda(x)$.

В двете следващи леми следваме идея на Borwein и Giles от [25].

Лема 1.3.9. Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция, която е ограничена отдолу върху W и $W \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:
(a) $\partial_F e_\lambda f(x) \neq \emptyset$;
(b) $e_\lambda f$ е Fréchet диференцируема в x.

Освен това, ако е в сила (a) или (b), то $\nabla^F e_\lambda f(x) = \lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x))$.

Диференцируемостта на обвивките на Moreau е свързана с тяхната регулярност. Тази връзка е дадена от еквивалентността на твърденията (a) и (b) в следващата лема. В нея установяваме и диференцируемостта на $e_\lambda f$ при условие на еднозначност и непрекъснатост на $P_\lambda f$.

Лема 1.3.10. При предположенията на Лема 1.3.9, за всяко отворено подмножество U на X, еквивалентностите (a)⇔(b) и (c)⇔(d) са в сила за следните свойства:
(a) $e_\lambda f$ е Fréchet регулярна в U (т.е. $\partial_F f(x) = \partial_C f(x)$ за $x \in U$);
(b) $e_\lambda f$ е Fréchet диференцируема в U и производната ѝ на Fréchet $\nabla^F e_\lambda f : U \to X^*$ е непрекъсната от нормираната в слабата* топология;
(c) $e_\lambda f$ е непрекъснато Fréchet диференцируема в U (и следователно (a) и (b) са в сила);
(d) $P_\lambda f$ е еднозначно и непрекъснато от нормираната в нормираната топология в U.

Във всеки от изброените случаи $e_\lambda f$ е Fréchet диференцируема в U като $\nabla^F e_\lambda f(x) = \lambda^{-1} J(x - P_\lambda f(x))$.

През остатъка от този подпараграф фиксираме точка $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ и $\rho > 0$ такова, че f е *ограничена отдолу* върху $B[\overline{x}, 4\rho]$ и също така фиксираме $W = B[\overline{x}, 4\rho]$. Да отбележим, че от полунепрекъснатостта отдолу на f винаги съществува някакво $\rho > 0$ с това свойство. Така че е естествено да пишем $e_{\lambda,\rho,\overline{x}} f(x)$ вместо $e_{\lambda,W} f(x)$, а когато $\overline{x}$ и ρ с посочените по-горе свойства са фиксирани, е удобно да запазим като индекс само λ, тъй като това не води до объркване.

Съгласно полезна локализационна лема (виж Thibault и Zagrodny [160, Lemma 4.2]), съществува някакво $\lambda_0 > 0$ такова, че за всички $\lambda \in]0, \lambda_0]$

$$P_\lambda f(x) \subset B(\overline{x}, 3\rho) \quad \text{за всяко} \quad x \in U := B(\overline{x}, \rho).$$

Следователно за всяко $x \in U \cap G_\lambda$ единственият елемент $p_\lambda(x)$ на $P_\lambda f(x)$ принадлежи на $B(\overline{x}, 3\rho)$ и тогава от (1.6) имаме

$$\nabla^F e_\lambda f(x) = \lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x)) \in \partial_F f(p_\lambda(x)) \quad \forall x \in U \cap G_\lambda. \tag{1.7}$$

Нещо повече, $\|x - p_\lambda(x)\| \le \|x - \overline{x}\| + \|\overline{x} - p_\lambda(x)\| < \rho + 3\rho = 4\rho$.

Можем да направим (1.7) по-точно като докажем в следващата лема, че по-силното включване $\nabla^F e_\lambda f(x) \in \partial_p f(p_\lambda(x))$ е в сила за $x \in U \cap G_\lambda$.

Лема 1.3.11. За всички $\lambda \in]0, \lambda_0]$, $x \in U \cap \mathrm{Dom}\, P_\lambda$ и $p_\lambda(x) \in P_\lambda f(x)$ имаме, че $\lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x)) \in \partial_p f(p_\lambda(x))$. С други думи, за всяко $x \in U$ и всяко $\lambda \in]0, \lambda_0]$,

$$P_\lambda f(x) \subset (I + \lambda J^* \circ \partial_p f)^{-1}(x).$$

Теорема 1.3.13. Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция, която е J-plr в $\overline{x} \in \mathrm{dom}\, f$ за положителни реални ε и r, такива че $\varepsilon < 1 < \frac{1}{r}$. Нека $\rho \in \left]0, \frac{r\varepsilon}{16}\right]$ е фиксирано така, че f е ограничена отдолу в $B[\overline{x}, 4\rho]$. Тогава съществува $\lambda_0 > 0$ такова, че за всяко $\lambda \in]0, \lambda_0]$ изображението $x \mapsto P_\lambda f(x)$ е еднозначно в $U := B(\overline{x}, \rho)$ и такова, че за някое $\gamma \geq 0$,

$$\|p_\lambda(x) - p_\lambda(x')\| \leq \gamma \|x - x'\|^{\frac{1}{q}}, \quad \forall x, x' \in U,$$

където p_λ е дефинирано като $P_\lambda f(y) = \{p_\lambda(y)\}$ за всяко $y \in U$. Нещо повече, за всяко $\lambda \in]0, \lambda_0]$ функцията $e_\lambda f$ е от клас $C^{1,\alpha}(U)$ за $\alpha := q^{-1}(s-1)$ и $\nabla^F e_\lambda f(x) = \lambda^{-1} J(x - p_\lambda(x))$ за всяко $x \in U$.

Да напомним, че функция g е от клас $C^{1,\alpha}$ в отворено множество $U \subset X$, ако е диференцируема в U и производната ѝ ∇g е локално α-Hölder непрекъсната в U.

Връзката между проксималното изображение и някои отсичания на субдиференциала на J-plr функция е следната.

Твърдение 1.3.14. При предположенията на Теорема 1.3.13 за всяко $\lambda \in]0, \lambda_0]$ и всяко $x \in U$,

$$P_\lambda f(x) = (I + \lambda^{-1} J^* \circ T_{t_\lambda})^{-1}(x),$$

където $t_\lambda := \varepsilon r/(4\lambda)$ и $T_{t_\lambda} := (\partial_p f)_{\overline{x}, \varepsilon, t_\lambda}$.

Когато $P_C(x) = \{p(x)\}$ (т.е. е еднозначно), не правим разлика между $P_C(x)$ и $p(x)$.

Следствие 1.3.15. Нека $C \subset X$ е непразно затворено множество, такова че индикаторната му функция ψ_C е J-plr в $\overline{x} \in C$ за положителни реални ε и r, удовлетворяващи $\varepsilon < 1 < \frac{1}{r}$. Тогава за $\rho = \frac{\varepsilon r}{16}$ изображението $x \mapsto P_C(x)$ е еднозначно в $U = B(\overline{x}, \rho)$ и за някоя константа $\gamma \geq 0$

$$\|P_C(x) - P_C(x')\| \leq \gamma \|x - x'\|^{\frac{1}{q}}, \quad \forall x, x' \in U.$$

Освен това, функцията d_C^2 е от клас $C^{1,\alpha}(U)$ за $\alpha = q^{-1}(s-1)$ и $\nabla^F d_C^2(x) = 2J(x - P_C(x))$ за всяко $x \in U$.

Следствие 1.3.16. При предположенията на Следствие 1.3.15 имаме, че

$$P_C(x) = (I + J^* \circ N_C^{P\sigma})^{-1}(x) \quad \forall x \in U,$$

където $\sigma := \varepsilon r/4$, а многозначното изображение $N_C^{P\sigma}$ е дефинирано в (1.4).

1.3.3 Характеризации на проксимално регулярни множества

В този подпараграф, в Теорема 1.3.25, даваме няколко различни характеризации на свойството проксимална регулярност на множество.

Преди това доказваме няколко полезни резултата, които използваме в нейното доказателство и в доказателствата на други резултати от параграфа.

Теорема 1.3.25. Нека $C \subset X$ е затворено множество. Следните са еквивалентни:
(a) C е проксимално регулярно в $\overline{x}$;
(b) P_C е еднозначно и $\frac{1}{q}$-Hölder непрекъснато от нормираната в нормираната топология в някоя околност U на точката $\overline{x}$;
(c) P_C е еднозначно и непрекъснато от нормираната в слабата топология в някоя околност U на $\overline{x}$;
(d) съществува $\varepsilon > 0$ такова, че ако $p \in PN_C(x)$ за $x \in B(\overline{x}, \varepsilon)$ и $p \neq 0$, то $P_C\left(x + \varepsilon\frac{p}{\|p\|}\right) = x$;
(e) съществува ε>0 такова, че ако $\left.\begin{array}{l} x{=}P_C(u), x \neq u \\ 0 < \|u{-}\overline{x}\| < \varepsilon \end{array}\right\}$, то $x{=}P_C(u')$ за $u'{=}x{+}\varepsilon\frac{u-x}{\|u-x\|}$;
(f) d_C^2 е от клас $C^{1,\alpha}$ в някоя околност U на $\overline{x}$ за $\alpha = q^{-1}(s-1)$;
(g) d_C е Fréchet диференцируема в $U \setminus C$ за някоя околност U на $\overline{x}$;
(h) за някоя околност U на $\overline{x}$ функцията d_C е Gâteaux диференцируема в $U \backslash C$ с $\|\nabla^G d_C(x)\|{=}1$ за всяко $x \in U \setminus C$;
(i) d_C е Fréchet субдиференцируема в U за някоя околност U на $\overline{x}$;
(j) d_C е Fréchet регулярна в $U \setminus C$ за някоя околност U на $\overline{x}$;
(k) P_C е с непразни образи в U и d_C е Dini субдиференцируема в U за някоя околност U на $\overline{x}$;
(l) индикаторната функция ψ_C е J-plr в $\overline{x}$;
(m) съществуват $\varepsilon, \rho > 0$ такива, че изображението с образи отсечените конуси на нормалните функционали $N_C^{P\varepsilon}$ е J-хипомонотонно от степен ρ в $B(\overline{x}, \varepsilon)$.

Ако C е слабо затворено, имаме още едно еквивалентно условие
(n) P_C е еднозначно в някоя околност U на $\overline{x}$.

Да напомним че за $v \in X$ функция $f : X \to \mathbb{R}$ има *Gâteaux производна* в точка *x по посоката v* ако границата $\lim_{t\to 0} t^{-1}[f(x+tv) - f(x)]$ съществува и е крайна и че локално липшицова функция $f : X \to \mathbb{R}$ е Dini субдиференцируема в точка x, ако *субдиференциалът ѝ на Dini*

$$\partial^- f(x) := \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, h\rangle \leq \liminf_{t\downarrow 0} t^{-1}[f(x+th) - f(x)],\ \forall h \in X\right\}$$

е непразно множество.

1.3.4 Характеризации на равномерно проксимално регулярни множества

В този подпараграф изучаваме на глобално ниво множества с положителна достижимост или проксимално гладки множества C, които кореспондират (виж Clarke, Stern и Wolenski [46]) на непрекъсната Fréchet диференцируемост на функцията разстояние d_C в отворена тръба с равномерна дебелина около множеството C. Получаваме повечето от характеризациите на тези множества, дадени от Federer [73] в крайномерно пространство и от Clarke, Stern и Wolenski [46] и Poliquin, Rockafellar и Thibault [138] в хилбертово пространство. Освен това добавяме характеризациите (c), (e) и (g) в Теорема 1.3.27.

Следвайки Дефиниция 1.3.3 на проксимално регулярно множество и модифицирайки леко Definition 2.4 в Poliquin, Rockafellar и Thibault [138] въвеждаме

Дефиниция 1.3.26. Затворено множество C е *равномерно r-проксимално регулярно* ако за произволни $x \in C$ и $p^* \in N_C^P(x)$ с $\|p^*\| < 1$, x е единствената най-близка точка в C до $x + rJ^*(p^*)$.

За подмножество C на X *r-разширение* на C е множеството $C(r) := \{x \in X : d_C(x) \leq r\}$, а отворена *$r$-тръба* около C е множеството $U_C(r) := \{x \in X : 0 < d_C(x) < r\}$.

Теорема 1.3.27. Нека $C \subset X$ е затворено множество и нека $r > 0$. Следните са еквивалентни:
(a) C е равномерно r-проксимално регулярно;
(b) d_C е непрекъснато диференцируема в $U_C(r) \setminus C$;
(c) d_C е Fréchet регулярна в $U_C(r) \setminus C$;
(d) d_C е Fréchet диференцируема в $U_C(r) \setminus C$;
(e) d_C е Gâteaux диференцируема в $U_C(r) \setminus C$ с $\|\nabla^G d_C(x)\| = 1$ за всяко $x \in U_C(r) \setminus C$;
(f) $\partial_F d_C$ е с непразни образи във всички точки на $U_C(r)$;
(g) P_C и $\partial^- d_C$ са с непразни образи във всички точки на $U_C(r)$;
(h) d_C^2 е C^1 в $U_C(r)$ с локално Hölder непрекъсната производна;
(i) P_C е еднозначно и локално Hölder непрекъснато в $U_C(r)$;
(j) P_C е еднозначно и непрекъснато от нормираната в слабата топология в $U_C(r)$;
(k) за всяко ненулево $p \in PN_C(x)$ за $x \in C$ имаме $x \in P_C\left(x + r\frac{p}{\|p\|}\right)$;
(l) ако $u \in U_C(r)$ и $x = P_C(u)$, то $x \in P_C(u')$ за $u' = x + r\frac{u-x}{\|u-x\|}$.

Ако C е слабо изпъкнало, имаме и допълнително еквивалентно условие
(m) P_C е еднозначно в $U_C(r)$.

Изразяваме метрическата проекция чрез нормалния конус в

Твърдение 1.3.30. При предположенията на Теорема 1.3.27 за всяко $x \in U_C(r)$ е изпълнено

$$\nabla^F d_C(x) = J(x - P_C(x))/d_C(x) \quad \text{и} \quad P_C(x) = (I + J^* \circ N_C^{P\,r})^{-1}(x).$$

Равномерната проксимална регулярност също така влече J-хипомонотонност на изображението с образи отсечените конуси от функционални нормали.

Твърдение 1.3.31. При предположенията на Теорема 1.3.27 имаме, че
(n) изображението с образи отсечените конуси от функционални нормали $N_C^{P\,r}$ е J-хипомонотонно от степен t за всяко $t \geq 1$.
Обратно, (n) влече твърденията в Теорема 1.3.27 с параметър $r/2$ вместо r.

В Следствие 1.3.32 даваме някои характеризации на изпъкнали множества. Да отбележим, че в него изискването нормата на пространството да бъде с модули от степенен тип е необходимо в голяма част от разглежданията, например за да бъдат получени характеризациите (b), (i), (j), (m), (n).

Следствие 1.3.32. Нека $C \subset X$ е затворено множество. Следните са еквивалентни:
(a) C е изпъкнало;
(b) C е равномерно ∞-проксимално регулярно, т.е. равномерно r-проксимално регулярно за всяко реално $r > 0$;
(c) d_C е непрекъснато диференцируема в $X \setminus C$;
(d) d_C е Fréchet регулярна в $X \setminus C$;
(e) d_C е Fréchet диференцируема в $X \setminus C$;
(f) d_C е Gâteaux диференцируема в $X \setminus C$ с $\|\nabla^G d_C(x)\| = 1$ за всяко $x \in X \setminus C$;
(g) $\partial_F d_C(x) \neq \emptyset$ за всяко $x \in X$;
(h) $P_C(x) \neq \emptyset$ и $\partial^- d_C(x) \neq \emptyset$ за всички $x \in X$;
(i) d_C^2 е C^1 в X с локална Hölder непрекъснатост на производната в X;
(j) P_C е еднозначно и локално Hölder непрекъснато в X;
(k) P_C е еднозначно и непрекъснато от нормираната в нормираната топология в X;
(l) P_C е еднозначно и непрекъснато от нормираната в слабата топология в X;
(m) за всяко $p \in PN_C(x)$, където $x \in C$ имаме $x \in P_C(x + p)$;
(n) ако $u \in X \setminus C$ и $x = P_C(u)$, то $x \in P_C(u')$ за $u' = x + r(u - x)$ и произволно $r > 0$.

За r-проксимално регулярно множество C доказваме някои допълнителни свойства, сред които е и

Теорема 1.3.35. Затворено множество C е равномерно r-проксимално регулярно за някое $r > 0$ тогава и само тогава, когато

$$d_C(y) + d_{E_C(r)}(y) = r \quad \text{за всяко } y \in U_C(r),$$

където $E_C(r) := \{u \in X \, : \, d_C(u) \geq r\}$ е множеството от r-външните точки на C.

1.4 Проксимално регулярни множества и надграфики в равномерно изпъкнали банахови пространства: различни регулярности и други свойства

В този параграф продължаваме изучаването на проксимално регулярните множества.

В равномерно изпъкнало банахово пространство доказваме свойствата нормална и тангенциална регулярност за такива множества и в частност съвпадането за тях на конуса на Mordukhovich и на проксималния нормален конус. Също така сравняваме проксималният нормален конус с различни Hölder нормални конуси, зависещи от степените s и q на модулите на гладкост и на изпъкналост на нормата. В случая на множества, които са надграфики на функции, показваме че J-plr функциите имат проксимално регулярни надграфики и сравняваме тези функции с функциите с квадратична оценка отдолу (primal lower nice functions на Poliquin). Запазването на свойството проксимална регулярност при пресичане на краен брой множества и при обратно изображение е получено при определени условия за уравновесеност. Даваме и формула за коничната производна на изображението метрическа проекция върху проксимално регулярно множество. Доказваме и че сходимостта по Attouch-Wets също запазва равномерната r-проксимална регулярност и че изображението метрическа проекция е непрекъснато по отношение на тази сходимост за такива множества.

Резултатите от този параграф са публикувани в [19].

В този параграф базираме нашите разглеждания на предишния параграф 1.3. Тук продължаваме изследването на проксимално регулярни множества в равномерно изпъкнало банахово пространство като разглеждаме главно нормални конуси и субдиференциали. В контекста на хилбертово пространство съвпадането за проксимално регулярно множество C в $\bar{x}$ на нормалния конус на Mordukhovich и на проксималния нормален конус следва директно от факта (дължащ се хилбертовата структура), че в този случай съществуват неотрицателно число γ и околност U на $\bar{x}$, такива че за всеки проксимален нормален функционал x^* на C в точка $x \in U \cap C$, такъв че $\|x^*\| \leq 1$ е изпълнено

$$\langle x^*, y - x\rangle \leq \gamma \|y - x\|^2 \quad \text{за всяко } y \in U \cap C.$$

В случая на равномерно изпъкнало банахово пространство това не е толкова очевидно. Нашата цел е от една страна да покажем, че това важно свойство все още е в сила за проксимално регулярни множества в равномерно изпъкнали банахови пространства, а от друга страна да се възползваме от това свойство, за да получим в същия контекст няколко нови резултата, касаещи в частност коничната производна на изображението метрическа проекция върху C и запазването на свойството проксимална регулярност при Attouch-Wets сходимост.

В подпараграф 1.4.1 показваме нормална и тангенциална регулярност на проксимално регулярни множества в равномерно изпъкнало банахово пространство X и извеждаме проксимално нормална формула за такива множества.

В подпараграф 1.4.2 доказваме, че надграфиките на J-plr функциите са проксимално регулярни множества и сравняваме тези функции с функциите с квадратична оценка отдолу на Poliquin (primal lower nice functions).

В подпараграф 1.4.3 правим сравнение между концепцията за проксимална регулярност, развита в параграф 1.3, която е взета от Poliquin, Rockafellar и Thibault [138] и друга концепция, взета от Poliquin и Rockafellar [137] и адаптирана от Bernard и Thibault в [14] за банахово пространство. Също така сравняваме понятията за проксимална регулярност, когато нормата се мени в дадена фамилия.

В подпараграф 1.4.4 разглеждаме някои връзки между различни нормални конуси (за затворени множества) свързани със степените на модулите на нормата в X.

В подпараграф 1.4.5 разглеждаме въпроса със запазването на свойството проксимална регулярност при сечение и при обратен образ. При наличието на определено условие за уравновесеност показваме, че сечението на краен брой проксимално регулярни множества и обратният образ на проксимално регулярно множество при $C^{1,1}$ изображение наследяват свойството проксимална регулярност.

В подпараграф 1.4.6 използваме резултата за тангенциална регулярност от подпараграф 1.4.1, за да получим формула за коничната производна на изображението метрическа проекция върху проксимално регулярно множество.

В последния подпараграф 1.4.7 изучаваме поведението на изображението метрическа проекция върху фамилия $(C_t)_t$ от равномерно r-проксимално регулярни затворени множества в X, които клонят в смисъл на Attouch-Wets към затворено множество C. Доказваме, че C наследява равномерната r-проксимална регулярност и че за всяко x_0, такова че $d(x_0, C) < r$ е изпълнено $P_{C_t}(x_0) \underset{t}{\longrightarrow} P_C(x_0)$ за изображението метрическа проекция P_C върху затвореното множество C.

В параграф 1.4 използваме голяма част от означенията и предварителните сведения от предходния параграф 1.3. Въпреки това, при нужда припомняме или прецизираме някои от тях.

В този параграф работим в равномерно изпъкнало банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$, чиято норма $\|\cdot\|$ е равномерно изпъкнала и равномерно гладка. В някои твърдения допълнително предполагаме, че модулите на равномерна изпъкналост и равномерна гладкост на нормата $\|\cdot\|$ са от степен q и s, съответно като това е експлицитно посочено, когато е необходимо. Известно е, че такова пренормиране на равномерно изпъкнало банахово пространство винаги съществува.

За всяко реално число $\sigma > 1$ разглеждаме изображението $J_\sigma : X \to X^*$, дефинирано като

$$J_\sigma(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|.\|x\|, \quad \|x^*\| = \|x\|^{\sigma-1}\}.$$

За $\sigma = 2$, J_2 се означава само с J и се нарича *нормализирано дуално изображение*, асоциирано с нормата $\|\cdot\|$. Тъй като X е рефлексивно, J е сюрективно. Изображението J_σ е субдиференциалът на изпъкналата функция $\frac{1}{\sigma}\|\cdot\|^\sigma$, т.е. $J_\sigma = \partial\left(\frac{1}{\sigma}\|\cdot\|^\sigma\right)$.

От равномерната изпъкналост на X и от избора на норма, който направихме, за всяко $\sigma > 1$, J_σ е еднозначно, биективно и непрекъснато от нормираната в нормираната топология. Обратното изображение J^{-1} (на J) означаваме с J^*, като това е нормализираното дуално изображение, асоциирано с дуалната норма на X^*. Да отбележим също така, че за $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[$ имаме

$$J_\sigma(x) \in \mathbb{R}_+ J(x) \quad \text{и} \quad J_\sigma(tx) = t^{\sigma-1} J_\sigma(x) \quad \text{за всяко } x \in X \text{ и } t \geq 0.$$

Да напомним (виж Deville, Godefroy и Zizler [57]), че изображението J е равномерно непрекъснато върху всяко ограничено множество в X (в действителност това свойство характеризира равномерната гладкост на нормата).

Както и в предходния параграф, пространството $X \times \mathbb{R}$ разглеждаме с нормата $|||\cdot|||$, дефинирана като $|||(x, r)||| = \sqrt{\|x\|^2 + r^2}$. Следователно за нормализираното дуално изображение $J_{X\times\mathbb{R}} : X\times\mathbb{R} \to X^*\times\mathbb{R}$, асоциирано с нормата $|||\cdot|||$ имаме равенството $J_{X\times\mathbb{R}}(x, r) = (J(x), r)$ и когато няма риск от объркване, $J_{X\times\mathbb{R}}$ означаваме само с J.

За затворено множество $C \subset X$ и $x \in C$ освен разглежданите в параграф 1.3 проксимален нормален конус $PN_C(x)$, конусът от проксимални нормални функционали $N_C^P(x)$ и Fréchet нормалния конус $N_C^F(x)$ за разглежданията ни е необходим и β-Hölder нормалния конус $N_C^\beta(\cdot)$ за C в x дефиниран като: $x^* \in N_C^\beta(x)$ когато съществуват $\varepsilon, \gamma > 0$ такива, че за всяко $x' \in B(x, \varepsilon) \cap C$, $\langle x^*, x' - x\rangle \leq \gamma\|x' - x\|^\beta$.

В контекст, където нормата $\|\cdot\|$ е асоциирана със скаларно произведение $(\cdot|\cdot)$, т.е. $(X, \|\cdot\|)$ е хилбертово пространство, лесно се проверява, че $x \in P_C(x + rp)$ тогава и само тогава, когато

$$(p|y - x) \leq (2r)^{-1}\|y - x\|^2 \quad \text{за всяко } y \in C.$$

За ненулев вектор p съществува положително r с горното свойство тогава и само тогава, когато съществуват положителни ε и γ такива, че

$$\langle Jp, y - x\rangle = (p|y - x) \leq \gamma\|y - x\|^2 \quad \text{за всяко } y \in B(x, \varepsilon) \cap C,$$

т.е. за $\beta = 2$ имаме $Jp \in N_C^\beta(x)$ и следователно $N_C^P(x) = N_C^\beta(x)$. Тъй като $N_C^\beta(x)$ не зависи от това коя еквивалентна норма на $\|\cdot\|$ се разглежда, така и конусът $N_C^P(x)$ не зависи от еквивалентна норма в хилбертово пространство.

Горните понятия могат да бъдат разгледани и в контекста на функции.

Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция и нека $x \in \operatorname{dom} f$.

Казваме, че $p^* \in X^*$ е *проксимален субградиент* на f в x ако $(p^*, -1)$ е проксимален нормален функционал за $\operatorname{epi} f$ в $(x, f(x))$. *Проксималният субдиференциал* на f в x, който се означава с $\partial_p f(x)$, се състои от всички такива функционали. Така имаме, че $p^* \in \partial_p f(x)$ тогава и само тогава, когато $(p^*, -1) \in N_{\operatorname{epi} f}^P(x, f(x))$.

Функционал $x^* \in X^*$ се нарича *Fréchet субградиент* на f в x ако $(x^*, -1)$ е Fréchet нормален функционал за $\operatorname{epi} f$ в $(x, f(x))$. *Fréchet субдиференциалът* на f в x, който означаваме с $\partial_F f(x)$, се състои от всички такива функционали.

Ако $x \notin \operatorname{dom} f$ тогава всички субдиференциали на f в x са празни по условие.

Знае се, че за полунепрекъсната отдолу функция f в рефлексивно банахово пространство с норма на Kadec, която е Fréchet диференцируема извън началото (в частност в пространството X, в което ние работим), множеството $\operatorname{dom} \partial_p f$ е гъсто в $\operatorname{dom} f$. Нещо повече, $\partial_p f(x) \subset \partial_F f(x)$ за всяко $x \in X$. Когато $\partial_F f(x) \neq \emptyset$, казваме, че f е Fréchet субдиференцируема в x.

По подобен начин, *β-Hölder субградиент* на f в x е всеки функционал $x^* \in X^*$, такъв че $(x^*, -1) \in N_C^\beta(x, f(x))$. Означаваме с $\partial_\beta f(x)$ множеството от всички такива субградиенти като имаме, че $x^* \in \partial_\beta f(x)$ ако съществуват $\gamma, \varepsilon > 0$ such that for all $y \in B(x, \varepsilon)$, $f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle - \gamma\|y - x\|^\beta$.

Лесно се проверява, че $\partial_p \psi_C(x) = N_C^P(x)$ за всяко $x \in C$. Fréchet нормалният конус и β-Hölder нормален конус на C са свързани с индикаторната функция ψ_C по подобен начин.

Първо прецизираме свойството проксимална регулярност на множество. Като се вземат предвид Дефиниция 1.3.3 и Твърдение 1.3.4, лесно се доказва

Твърдение 1.4.1. За затворено множество $C \subset X$ следните са еквивалентни:
(a) C е проксимално регулярно в $\overline{x} \in C$;
(b) съществуват $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ такива, че за всяко $x \in C$ такова, че $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon$ и за всяко $p^* \in N_C^P(x)$ такова, че $\|p^*\| \leq \varepsilon$,

$$0 \geq \langle J[J^*(p^*) - r^{-1}(x' - x)], x' - x\rangle, \quad \forall x' \in C \text{ такива, че } \|x' - \overline{x}\| < \varepsilon.$$

(c) за всяко $\Theta > 0$ съществуват $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ такива, че за всяко $x \in C$ такова, че $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon$ и за всяко $p^* \in N_C^P(x)$ такова, че $\|p^*\| \le \Theta$,

$$0 \ge \langle J[J^*(p^*) - r^{-1}(x' - x)], x' - x\rangle, \quad \forall x' \in C \text{ такива, че } \|x' - \overline{x}\| < \varepsilon.$$

По-нататък в параграфа под свойството проксимална регулярност на множество C разбираме Твърдение 1.4.1 (c) за $\Theta = 1$, а именно свойството

$$\left\{\begin{array}{l} \text{съществуват } \varepsilon > 0, r > 0 \text{ такива, че за всяко } x \in C \text{ такова, че} \\ \|x - \overline{x}\| < \varepsilon \text{ и за всяко } p^* \in N_C^P(x) \text{ такова, че } \|p^*\| \le 1, \\ 0 \ge \langle J[J^*(p^*) - r^{-1}(x' - x)], x' - x\rangle, \quad \forall x' \in C \text{ такива, че } \|x' - \overline{x}\| < \varepsilon. \end{array}\right. \tag{1.8}$$

Предвид казаното, прецизираме дефиницията за проксимална регулярност в

Дефиниция 1.4.2. Затворено множество $C \subset X$ се нарича (*метрически*) *проксимално регулярно* (по отношение на равномерно изпъкнала норма $\|\cdot\|$), или $\|\cdot\|$- *проксимално регулярно* в $\overline{x} \in C$ ако съществуват $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ такива, че за всяко $x \in C$ и всяко $p^* \in N_C^P(x)$, такива че $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon$ и $\|p^*\| < 1$ точката x е най-близката точка в $\{x' \in C : \|x' - \overline{x}\| < \varepsilon\}$ до точката $x + rJ^*(p^*)$.

Метрическият аспект се дължи на факта, че проксималният нормален конус $N_C^P(\cdot)$ е свързан с нормата $\|\cdot\|$ и зависи от нея в случая, когато тя не е хилбертова норма. Когато не съществува неопределеност по отношение на това коя норма $\|\cdot\|$ на пространството и съответно кой проксимален нормален конус $N_C^P(\cdot)$, асоцииран с нея се има предвид, казваме че C е проксимално регулярно в $\overline{x}$.

Основният факт, който трябва да бъде подчертан тук е, че реалното число r в дефиницията (за което затвореното кълбо $B[x + rJ^*(p^*), r\|p^*\|]$ докосва множеството $C \cap B(\overline{x}, \varepsilon)$ в точката x, когато x е гранична точка на C, такава че $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon$) не зависи нито от близката точка x, нито от проксималните нормални функционали $p^* \in N_C^P(x)$, такива че $\|p^*\| < 1$.

Вече знаем, че проксимално регулярното свойство (1.8) за множество C е еквивалентно на това индикаторната функция ψ_C на C да бъде J-plr в $\overline{x}$ (Теорема 1.3.25(a)$\Leftrightarrow$(l)). Друга характеризация може да бъде дадена в термините на изображението J_σ:

Твърдение 1.4.3. Нека $\sigma > 1$ е реално число. Условието за проксимална регулярност (1.8) е еквивалентно на всяко от следните:

(i_σ) съществуват $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ такива, че за всяко $x \in C$ и всяко $p^* \in N_C^P(x)$ такива, че $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon$ и $\|p^*\| \le 1$

$$0 \ge \langle J_\sigma[J_\sigma^{-1}(p^*) - r^{-1}(x' - x)], x' - x\rangle \quad \forall x' \in C \text{ такива, че } \|x' - \overline{x}\| < \varepsilon;$$

(i'_σ) съществуват $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ такива, че за всяко $x \in C$, $t \ge 0$ и $p^* \in N_C^P(x)$, такива че $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon$ и $\|p^*\| \le r^{\sigma-1}t^{\sigma-1}$

$$0 \ge \langle J_\sigma[J_\sigma^{-1}(p^*) - t(x' - x)], x' - x\rangle \quad \forall x' \in C \text{ такива, че } \|x' - \overline{x}\| < \varepsilon.$$

В духа на казаното по-горе за проксималната регулярност, концепцията за проксимална регулярност от *глобална* гледна точка се прецизира по следния начин (виж Дефиниция 1.4.2 и Дефиниция 1.3.26): затворено множество C на X е (*метрически*) *равномерно r-проксимално регулярно* или r-равномерно проксимално регулярно когато за $x \in C$ и $p^* \in N_C^P(x)$, такова че $\|p^*\| < 1$, точката x е единствената най-близка точка от C до $x + rJ^*(p^*)$.

В Дефиниция 1.3.5 въведохме понятието J-plr функция. Тук леко разширяваме тази дефиниция като запазваме същото наименование. Сега вече в хилбертовия случай тя се свежда до концепцията за функции с квадратична оценка отдолу (виж Poliquin [136] и Levi, Poliquin и Thibault [111]).

Дефиниция 1.4.4. Полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е *J-plr* в $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ ако съществуват положителни константи ε, r и Θ такива, че

$$f(y) \geq f(x) + \langle J[J^*(p^*) - t(y - x)], y - x\rangle \tag{1.9}$$

за всички $x, y \in B(\overline{x}, \varepsilon)$, всички $p^* \in \partial_P f(x)$ и всички $t \geq \Theta$ такива, че $\|p^*\| \leq rt$.

Всяка J-plr функция съгласно Дефиниция 1.3.5 е J-plr функция съгласно Дефиниция 1.4.4 (с произволно $\Theta > 0$). Освен това Дефиниция 1.3.5 и Дефиниция 1.4.4 са еквивалентни за индикаторни функции на затворени множества (виж доказателството на Твърдение 1.4.1).

По-нататък когато разглеждаме функции, които са J-plr имаме предвид J-plr функции съгласно Дефиниция 1.4.4. Ако полунепрекъсната отдолу функция f е J-plr в $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ с положителни константи ε, r и Θ, то очевидно

$$\langle J[J^*(p^*) - t(y - x)] - J[J^*(q^*) - t(x - y)], y - x\rangle \leq 0$$

за всички $x, y \in B(\overline{x}, \varepsilon)$, всички $p^* \in \partial_P f(x)$, $q^* \in \partial_P f(y)$ и всички $t \geq \Theta$ такива, че $\max\{\|p^*\|, \|q^*\|\} \leq rt$. Това е аналог на хипомонотонността на определени отсичания на $\partial_P f$, която характеризира функциите с квадратична оценка отдолу в хилбертови пространства (виж Poliquin [136], Poliquin, Rockafellar и Thibault [111], Bernard, Thibault и Zagrodny [16] и цитираната в тях литература).

1.4.1 Нормална и тангенциална регулярност на проксимално регулярни множества

Концепцията за тангенциална регулярност (виж Clarke [44]), разглеждана по-долу е свързана с тангенциалните конуси на Bouligand и Clarke. Вектор v в X е в *тангенциалния конус на Bouligand* (или *контингентния конус*) $K_C(x)$ на C в $x \in C$ ако съществува редица от положителни числа $(t_n)_n$ клоняща към 0 и редица $(v_n)_n$ в X клоняща към v такива, че $x + t_n v_n \in C$ за всяко n. *Тангенциалният конус на Clarke* $T_C(x)$ може също да бъде дефиниран по секвенциален начин. Вектор $v \in T_C(x)$ ако за всяка редица $(x_n)_n$ в C клоняща към x и за всяка редица от положителни числа $(t_n)_n$ сходяща към 0 съществува редица $(v_n)_n$ в X клоняща към v и такава, че $x_n + t_n v_n \in C$ за всяко n. Винаги е изпълнено включването

$T_C(x) \subset K_C(x)$. Когато $T_C(x) \equiv K_C(x)$ казваме, че множеството C е *Clarke регулярно* или *тангенциално регулярно* в x.

Посредством тангенциалния конус на Clarke *нормалният конус на Clarke* $N_C^{Cl}(x)$ на C в $x \in C$ се дефинира като неговата отрицателна поляра, т.е.

$$N_C^{Cl}(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \leq 0, \quad \forall v \in T_C(x)\}.$$

Когато граничният нормален конус на Mordukhovich $N_C^L(x)$ на затворено множество C в x (виж Mordukhovich [124]), който се дефинира като слабата* секвенциална външна граница

$$N_C^L(x) = {}^{w^*-\mathrm{seq}}\operatorname*{Lim\,sup}_{y\to x} N_C^P(y) := \{w^* - \lim x_n^* : x_n^* \in N_C^P(x_n), x_n \in C \to x\} \tag{1.10}$$

съвпада с нормалния конус на Fréchet (респ. с проксималния нормален конус) в x, казваме, че C е *нормално регулярно* в x по отношение на нормалния конус на Fréchet (респ. проксималния нормален конус). Очевидно нормална регулярност по отношение на проксималния нормален конус влече нормална регулярност по отношение на Fréchet нормалния конус (поради включването $N_C^P(x) \subset N_C^F(x)$).

Да напомним (виж Bounkhel и Thibault [33]), че всяка от двете нормални регулярности влече Clarke тангенциална регулярност.

Следващата теорема е един от централните резултати в този параграф.

Теорема 1.4.6. Да предположим, че затвореното множество C е проксимално регулярно в $\overline{x} \in C$. Тогава съществува околност U на $\overline{x}$ такава, че за всяко $x \in U \cap C$ е в сила следната нормална регулярност

$$N_C^P(x) = N_C^F(x) = N_C^L(x) = N_C^{Cl}(x)$$

и следователно

$$\partial_p d_C(x) = \partial_F d_C(x) = \partial_L d_C(x) = \partial_C d_C(x),$$

т.е. функцията разстояние е субдиференциално регулярна във всички точки от $U \cap C$. В частност множеството C е тангенциално регулярно в $x \in U \cap C$. Освен това $N_C^\beta(x) \subset N_C^P(x)$ за $\beta = 2$.

От Теорема 1.4.6 можем да изведем проксимална нормална формула, която е по-прецизна от по-общата такава, доказана в Borwein и Giles [25, Theorem 4] за произволно затворено множество C в рефлексивно банахово пространство с по-слаби предположения за нормата:

Твърдение 1.4.7. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и равномерна гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип. Ако C е проксимално регулярно в $\overline{x} \in X$, то съществува околност U на $\overline{x}$ такава, че за всяко $x \in U \cap C$

$$N_C^P(x) = N_C^{Cl}(x) = \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{y \notin C \\ y \to x}} \mathbb{R}_+ \nabla^F d_C(y)$$

или еквивалентно
$$\partial_p d_C(x) = \partial_C d_C(x) = [0,1] \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{y \notin C \\ y \to x}} \nabla^F d_C(y),$$

където ∇^F е производната на Fréchet, а Lim sup е силна външна граница (т.е. за многозначно изображение $T : X \rightrightarrows X^*$, $\operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{y \in D \\ y \to x}} T(y) := \{\lim y_n^* : y_n^* \in T(y_n), y_n \in D \to x\}$).

1.4.2 Надграфики на J-plr функции

Използваме идеи на Bernard и Thibault от [17, Proposition 4.8], за да докажем

Твърдение 1.4.9. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и равномерна гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип. Ако полунепрекъснатата отдолу функция f е J-plr в $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, то нейната надграфика $\operatorname{epi} f$ е проксимално регулярно множество в $(\overline{x}, f(\overline{x}))$.

Като знаем, че субдиференциалът на Clarke ∂_C и граничният субдиференциал на Mordukhovich ∂_L за произволна полунепрекъсната отдолу функция f удовлетворяват (виж Clarke [44], Mordukhovich [124])
$$\partial_C f(x) = \{x^* : (x^*, -1) \in N^{Cl}_{\operatorname{epi} f}(x, f(x))\} \text{ и } \partial_L f(x) = \{x^* : (x^*, -1) \in N^{L}_{\operatorname{epi} f}(x, f(x))\},$$
от Теорема 1.4.6 получаваме

Следствие 1.4.11. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип. Ако f е J-plr в $\overline{x}$, то съществува околност U на $\overline{x}$ такава, че за $\beta = 2$ е изпълнено
$$\partial_\beta f(x) \subset \partial_p f(x) = \partial_F f(x) = \partial_L f(x) = \partial_C f(x) \quad \text{за всяко } x \in U.$$

Като разгледаме *равномерно J-plr* функция в X по подобен начин получаваме равномерна проксимална регулярност на $\operatorname{epi} f$. Функцията f е *равномерно J-plr* в X, ако съществуват положителни константи Θ, r такива, че за всяко $t \geq \Theta$, всяко $x \in X$ и $x^* \in \partial_p f(x)$ такова, че $\|x^*\| \leq rt$,
$$f(y) \geq f(x) + \langle J[J^*(x^*) - t(y - x)], y - x\rangle \quad \text{за всяко } y \in X.$$

Твърдение 1.4.12. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип. Ако f е равномерно J-plr в X с параметри r, Θ, то $\operatorname{epi} f$ е равномерно r'-проксимално регулярно множество за някое $r' \geq \frac{1}{2}\min\{1/\Theta, r\}$.

От това твърдение следва, че противоположната на квадрата на нормата функция е равномерно J-plr:

Твърдение 1.4.13. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип. Тогава функцията $-\|\cdot\|^2$ е равномерно J-plr в X и в частност $\operatorname{epi}(-\|\cdot\|^2)$ е равномерно r-проксимално регулярно множество за някое $r \geq \frac{1}{4}$.

За да сравним J-plr функциите с ∂-pln функциите в Твърдение 1.4.14 и Следствие 1.4.15 по-долу предполагаме, че модулът на равномерна изпъкналост на нормата е от степен $q = 2$.

Разглеждаме пресубдиференциален оператор ∂, който асоциира с всяка функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ многозначно изображение $\partial f : X \rightrightarrows X^*$ и удовлетворява различни свойства, които са в сила за всички обичайни субдиференциали в подходящи пространства (виж Дефиниция 2.1.1 и дискусията след нея). Тук предполагаме само, че за всяка функция f от X в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ за ∂ е изпълнено включването

$$\partial_p f(x) \subset \partial f(x), \quad \text{за всяко } x \in X.$$

Субдиференциали, които съдържат проксималния субдиференциал ∂_p са самият ∂_p, ∂_F и следователно всички субдиференциали, които съдържат ∂_F.

Да припомним, че полунепрекъсната отдолу функция f е ∂-pln в $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ (виж Дефиниция 1.1.4) ако съществуват $\varepsilon, c, \Theta > 0$ такива, че за всички $t \geq \Theta$, $x^* \in \partial f(x)$ такива, че $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon$ и $\|x^*\| \leq ct$ е изпълнено

$$f(x') \geq f(x) + \langle x^*, x' - x\rangle - \frac{t}{2}\|x' - x\|^2 \text{ за всяко } x' \in B(\overline{x}, \varepsilon).$$

Очевидно за $\beta = 2$ за такава функция f е изпълнено $\partial f(\cdot) \cap ctB^* \subset \partial_\beta f(\cdot)$ в $B(\overline{x}, \varepsilon)$.

Твърдение 1.4.14. Да предположим, че модулът на равномерна изпъкналост на нормата $\|\cdot\|$ на X е от степен $q = 2$.

Ако f е ∂-pln в $\overline{x}$ за $\partial(\cdot) \supset \partial_p(\cdot)$, то f е J-plr в $\overline{x}$.

Следствие 1.4.15. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип. Ако са изпълнени включването $\partial f(\cdot) \subset \partial_C f(\cdot)$ и предположенията на Твърдение 1.4.14, полунепрекъснатата отдолу функция f е ∂-pln в $\overline{x}$ тогава и само тогава, когато f е ∂_p-pln в $\overline{x}$ и тогава за $\beta = 2$ е изпълнено

$$\partial_\beta f(x) = \partial_p f(x) = \partial f(x) = \partial_F f(x) = \partial_L f(x) = \partial_C f(x)$$

за всяко x в околност на $\overline{x}$.

Имаме симетричен резултат когато модулът на равномерна гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X е от степен $s = 2$:

Твърдение 1.4.16. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип и степента на гладкост е $s = 2$. Ако f е J-plr в $\overline{x}$, то f е ∂-pln в $\overline{x}$ за всеки субдиференциал ∂, който удовлетворява включванията $\partial_p f(\cdot) \subset \partial f(\cdot) \subset \partial_C f(\cdot)$.

Следствие 1.4.17. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип и степента на гладкост е s=2. При предположенията на Твърдение 1.4.16, ако полунепрекъснатата отдолу функция f е J-plr в $\overline{x}$, то за $\beta = 2$

$$\partial_\beta f(x) = \partial_p f(x) = \partial f(x) = \partial_F f(x) = \partial_L f(x) = \partial_C f(x)$$

за всички x в околност на $\overline{x}$.

1.4.3 Проксимална регулярност и N-хипорегулярност

Нека $N(\cdot)$ е даден нормален конус (например $N^F(\cdot)$, $N^P(\cdot)$, и т.н.), асоцииран със субдиференциален оператор ∂, т.е. за произволно затворено множество C с индикаторна функция ψ_C, е в сила, че $N_C = \partial\psi_C$ и $\partial f(x) = \{x^* \in X^* : (x^*, -1) \in N_{\mathrm{epi}\, f}(x, f(x))\}$.

Предполагаме и че нормалният конус $N(\cdot)$ удовлетворява за произволно затворено множество C включването $N_C^P(\cdot) \subset N_C(\cdot)$.

Следвайки Poliquin и Rockafellar [137] и адаптациите в Bernard и Thibault [14], казваме, че множеството $C \subset X$ е *N-хипорегулярно* в $\overline{x} \in C$ ако съществуват $\varepsilon, r > 0$ такива, че за всяко $x^* \in N_C(x)$ такова, че $\|x - \overline{x}\| < \varepsilon$ и $\|x^*\| \leq 1$,

$$0 \geq \langle x^*, x' - x\rangle - \frac{1}{2r}\|x' - x\|^2 \text{ за всяко } x' \in B(\overline{x}, \varepsilon) \cap C. \tag{1.11}$$

Разбира се (1.11) е в сила тогава и само тогава, когато отсеченият нормален конус $N_C(\cdot) \cap B^*$ е *хипомонотонен* близо до $\overline{x}$ в обичайния смисъл, т.е. съществуват $\varepsilon, r > 0$ такива, че за всички $x_i \in C \cap B(\overline{x}, \varepsilon)$ и $x_i^* \in N_C(x_i) \cap B^*$, $i = 1, 2$ е изпълнено

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2\rangle \geq -\frac{1}{r}\|x_1 - x_2\|^2. \tag{1.12}$$

В Bernard и Thibault [14] множество C удовлетворяващо (1.11) за $N(\cdot)$ е наречено проксимално регулярно по отношение на нормалния конус $N(\cdot)$. Тук предпочитаме да използваме наименованието *N-хипорегулярно множество* заради характеризацията (1.12) чрез хипомонотонност на $N_C(\cdot) \cap B^*$ (която няма нищо общо с изображението метрическа проекция) и да запазим дефиницията на проксимално регулярно множество (Дефиниция 1.4.2), за да наблегнем на регулярното свойство на изображението метрическа проекция в нея (виж също Теорема 1.3.25(c)).

От (1.11) забелязваме, че C е N-хипорегулярно в $\overline{x}$ тогава и само тогава когато индикаторната му функция ψ_C е ∂-pln в $\overline{x}$. Да напомним, (виж Теорема 1.3.25 (l)), че C е проксимално регулярно в $\overline{x}$ тогава и само тогава когато ψ_C е J-plr в $\overline{x}$. По подобен начин равномерната N-хипорегулярност означава, че неравенството (1.11) е изпълнено за всички $x, x' \in C$ и $x^* \in N_C(x) \cap B^*$ и това съответства на равномерното ∂-pln свойство на индикаторната функция ψ_C. По същия начин равномерната проксимална регулярност на C е еквивалентна на равномерното J-plr свойство на функцията ψ_C. Да напомним, че q и s са степените на модулите на изпъкналост и гладкост на нормата съответно и че те удовлетворяват $1 < s \leq 2 \leq q$. Случаят $q = 2$ съответства например на пространствата L^p с $p \in]1, 2]$ а $s = 2$ на L^p пространствата с $p \in [2, +\infty[$.

В случая когато $q = 2$, от резултати от предходния подпараграф получаваме

Следствие 1.4.18. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип. Когато модулът на изпъкналост е от степен $q = 2$, затворено множество $C \subset X$ е N-хипорегулярно в $\overline{x} \in C$ (респ. равномерно N-хипорегулярно) за нормален конус N, който удовлетворява $N^P(\cdot) \subset N(\cdot) \subset N^{Cl}(\cdot)$ тогава и само тогава, когато е N^P-хипорегулярно в $\overline{x}$ (респ. равномерно N^P-хипорегулярно) и тогава то е също така проксимално регулярно в $\overline{x}$ (респ. равномерно проксимално регулярно) и за $\beta = 2$ е изпълнено $N_C^\beta(x) = N_C^P(x) = N_C(x) = N_C^{Cl}(x)$ за всяко x в някоя околност на $\overline{x}$ (респ. за всяко $x \in C$).

В случая когато модулът на гладкост е от степен $s = 2$ имаме обратната импликация. Ако модулите на равномерна изпъкналост и гладкост са от степенен тип и степента гладкост е s=2, доказателството следва директно от Твърдение 1.4.16 и Следствие 1.4.17. Доказателството на твърдението по-долу показва, че резултатът е в сила и без да се изисква модулът на равномерна изпъкналост на нормата да бъде от степенен тип.

Твърдение 1.4.19. Да допуснем, че модулът на гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X е от степенен тип $s = 2$. Ако затворено множество $C \subset X$ е проксимално регулярно в $\overline{x} \in C$ (респ. равномерно проксимално регулярно), то е N-хипорегулярно в $\overline{x}$ (респ. равномерно N-хипорегулярно) за всеки нормален конус N, който удовлетворява $N^P(\cdot) \subset N(\cdot) \subset N^{Cl}(\cdot)$, като освен това за $\beta = 2$ имаме

$$N_C^\beta(x) = N_C^P(x) = N_C(x) = N_C^{Cl}(x)$$

за всяко x в някоя околност на $\overline{x}$ (респ. за всяко $x \in C$).

За фамилия от норми $(\|\cdot\|_i)_{i\in I}$ означаваме с $N_i^?$ нормалният конус $N^?$ (например N^F, N^{Cl}, N^P, и т.н.), получен при използване на нормата $\|\cdot\|_i$ в неговата дефиниция и в съответните пресмятания. Конусите $N_i^P(\cdot)$ на затворено множество C ще означаваме с $N_i^P(C;.)$. Когато нормите $\|\cdot\|_i$ и $\|\cdot\|_j$ са еквивалентни, някои концепции за нормален конус $N^?$ дават $N_i^? = N_j^?$, както е например в случаите $N^? = N^F, N^\beta, N^{Cl}, N^L, N^{L,s}$, където

$$N_C^{L,s}(x) := \operatorname*{Lim\,sup}_{y\to x} N_C^P(y) := \{\lim x_n^* : x_n^* \in N_C^P(x_n), x_n \in C \to x\}.$$

Говорим за $(\|\cdot\|_i, N)$-хипорегулярност на множество C когато свойството (1.11) се удовлетворява за нормата $\|\cdot\| = \|\cdot\|_i$ и за конуса $N = N_i^?$. Когато C е $(\|\cdot\|_i, N^?)$-хипорегулярно за всяко $i \in I$, ще казваме, че C е $N^?$-хипорегулярно относно фамилията $(\|\cdot\|_i)_{i\in I}$. По подобен начин концепцията за проксимална регулярност в Дефиниция 1.4.2 е априори зависима от нормата, така че за дадена норма $\|\cdot\|$ беше казано в тази дефиниция, че множеството C е $\|\cdot\|$-проксимално регулярно.

Усилията ни до края на този подпараграф са насочени към сравняване на $(\|\cdot\|_i, N^?)$-хипорегулярността и $\|\cdot\|_i$-проксималната регулярност на множество C за норми в дадена фамилия $(\|\cdot\|_i)_{i\in I}$ и съответно сравняване на нормалните конуси $N_i^P(C;.)$ на такова множество C.

Да забележим, че след граничен преход в (1.11) лесно се вижда, че за норма $\|\cdot\|$, която е равномерно изпъкнала и равномерно гладка когато C е $(\|\cdot\|, N^?)$-хипорегулярно в точка $\overline{x}$ с $N^? = N^P$ или $N^? = N^F$, то е $(\|\cdot\|, N^{L,s})$-хипорегулярно в $\overline{x}$ със същите параметри. Освен това, за някоя околност U на $\overline{x}$ и за $\beta = 2$ включването $N_C^L(x) \subset N_C^\beta(x)$ е в сила за всяко $x \in U$ и следователно $N_C^\beta(x) = N_C^F(x) = N_C^L(x) = N_C^{Cl}(x)$ и C е $(\|\cdot\|, N^?)$-хипорегулярно в $\overline{x}$ за всички $N^?$ такива, че $N^?(\cdot) \subset N^{Cl}(\cdot)$.

Да предположим, че $(\|\cdot\|_i)_{i\in I}$ е фамилия от еквивалентни норми, които са Fréchet диференцируеми извън началото и такива, че за някое $i_0 \in I$, нормата $\|\cdot\|_{i_0}$ е равномерно гладка и равномерно изпъкнала. От казаното по-горе знаем, че ако C е $(\|\cdot\|_{i_0}, N^P)$-хипорегулярно в $\overline{x} \in C$, то съществува някакво $\gamma > 0$ и някаква отворена околност U на $\overline{x}$ такива, че за всички $x, x' \in U \cap C$ и $x^* \in N^{L,s}_{i_0}(C; x)$ с $\|x^*\|_{i_0} \leq 1$ (като означим дуалната норма на $\|\cdot\|_{i_0}$ по същия начин)

$$0 \geq \langle x^*, x' - x\rangle - \gamma\|x' - x_0\|^2_{i_0}.$$

Тогава за същата отворена околност U на $\overline{x}$, за всяко $i \in I$ съществува някакво $\gamma_i > 0$ такова, че за всички $x, x' \in U \cap C$ и $x^* \in N^F(C; x)$ с $\|x^*\|_i \leq 1$ имаме

$$0 \geq \langle x^*, x' - x\rangle - \gamma_i\|x' - x\|^2_i.$$

Следователно за всяко $i \in I$ множеството C е $(\|\cdot\|_i, N^P)$-хипорегулярно във всяка точка $x \in U \cap C$ и за $\beta = 2$ имаме

$$N^P_i(C; x) \subset N^F_C(x) = N^\beta_C(x) = N^{Cl}_C(x) \quad \text{за всяко } x \in U \cap C.$$

Ограничавайки разглежданията си до фамилии от норми с определени свойства получаваме останалите резултати в подпараграфа. Ето и първия от тях.

Твърдение 1.4.20. Да предположим, че $(\|\cdot\|_i)_{i\in I}$ е фамилия от еквивалентни норми, които са равномерно гладки и равномерно изпъкнали с модули на изпъкналост $\delta_{\|\cdot\|_i}$ от степенен тип $q = 2$ за всички $i \in I$.

Ако затвореното множество C е $(\|\cdot\|_{i_0}, N^P)$-хипорегулярно в $\overline{x} \in C$ за някое $i_0 \in I$, то
(a) множеството C е $(\|\cdot\|_i, N)$-хипорегулярно в $\overline{x}$ за всяко $i \in I$ и за всеки нормален конус N такъв, че $N(\cdot) \subset N^{Cl}(\cdot)$;
(b) множеството C е $\|\cdot\|_i$-проксимално регулярно в $\overline{x}$ за всяко $i \in I$;
(c) съществува някаква околност U на $\overline{x}$ такава, че за всяко $x \in U \cap C$ и всяко $i \in I$ и за $\beta = 2$ равенствата $N^\beta_C(x) = N^P_i(C; x) = N^{Cl}_C(x)$ са в сила и C е $(\|\cdot\|_i, N)$-хипорегулярно в x за всеки нормален конус $N_C(\cdot)$ такъв, че $N^\beta_C(\cdot) \subset N_C(\cdot) \subset N^{Cl}_C(\cdot)$.

По-нататък се ограничаваме до случая на $\mathbb{R}^n$, снабдено с фамилия $(\|\cdot\|_p)_{p>1}$ от класически l_p-норми, т.е. $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^p |x_k|^p)^{1/p}$.

Твърдение 1.4.21. Да предположим, че $X = \mathbb{R}^n$ и $(\|\cdot\|_p)_{p>1}$ е фамилията от l_p-норми с $p > 1$.
1) Ако за някое $p_0 > 1$ множеството C е $(\|\cdot\|_{p_0}, N^P)$-хипорегулярно в $\overline{x} \in C$, то
(a) множеството C е $(\|\cdot\|_p, N)$-хипорегулярно в $\overline{x}$ за всяко $p > 1$ и за всеки нормален конус N такъв, че $N(\cdot) \subset N^{Cl}(\cdot)$;
(b) множеството C е $\|\cdot\|_p$-проксимално регулярно в $\overline{x}$ за всяко $p \in]1, 2]$;
(c) съществува някаква околност U на $\overline{x}$ такава, че за всяко $p \in]1, 2]$ и $p' > 2$ и за $\beta = 2$ имаме

$$N^P_{p'}(C; x) \subset N^P_p(C; x) = N^\beta_C(x) = N^{Cl}_C(x) \quad \text{за всяко } x \in U.$$

2) Ако за някое $p_0 \geq 2$ множеството C е $\|\cdot\|_{p_0}$-проксимално регулярно в $\overline{x} \in C$, то
(a') множеството C е $(\|\cdot\|_p, N)$-хипорегулярно в $\overline{x}$ за всяко $p > 1$ и за всеки нормален

конус N такъв, че $N(\cdot) \subset N^{Cl}(\cdot)$;
(b') множеството C е $\|\cdot\|_p$-проксимално регулярно в $\bar{x}$ за всяко $p \in]1,2]$;
(c') съществува някаква околност U на $\bar{x}$ такава, че за всяко $p \in]1,2]$ и $p' > 2$ и за $\beta = 2$ имаме

$$N^P_{p'}(C;x) \subset N^P_p(C;x) = N^P_{p_0}(C;x) = N^\beta_C(x) = N^{Cl}_C(x) \quad \text{за всяко } x \in U.$$

1.4.4 Сравняване на нормални конуси

За затворено подмножество C на X сравняваме конуса $N^P_C(\cdot)$ от проксимални нормални функционали с нормалния конус $N^\beta_C(\cdot)$, когато β е степента на модула на равномерна изпъкналост или на модула на равномерна гладкост на нормата на X.

Твърдение 1.4.22. Нека C е затворено подмножество на X и нека $x \in C$.
(a) Ако модулът на изпъкналост на нормата $\|\cdot\|$ на X е от степен q, то

$$N^q_C(x) \subset N^P_C(x).$$

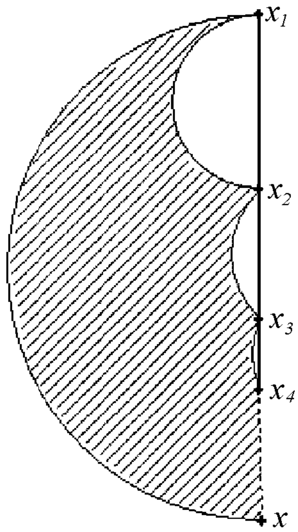
(b) Ако модулът на гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X е от степен s, то

$$N^P_C(x) \subset N^s_C(x).$$

1.4.5 Запазване на хипорегулярност и проксимална регулярност

Тук изследваме дали проксималната регулярност се запазва при пресичане на краен брой множества и при обратно изображение. Характеризациите в Теорема 1.3.25 на проксимална регулярност чрез хипомонотонност на проксималния нормален конус, както и чрез локална еднозначност и непрекъснатост на изображението метрическа проекция са от решаващо значение при изучаването от Edmond и Thibault [68] на диференциални включвания при процеси от тип измитане, които се управляват от неизпъкнали проксимално регулярни множества. При регуляризацията на такива диференциални включвания в хилбертово пространство Thibault [159] използва свойството (f) от Теорема 1.3.25. По-долу ще се възползваме от предимствата на свойството (1.8), за да изследваме стабилността на метрическата проксимална регулярност при горните операции над множества. В действителност започваме със стабилност на N^P-хипорегулярността като използваме свойството (1.11), което е в същата посока, както и свойството (1.8).

Сечението на краен брой проксимално регулярни множества може и да не бъде проксимално регулярно. Да вземем в $\mathbb{R}^2$ (разглеждано с евклидовата норма) примера, който е илюстриран на Фиг. 1. Там множеството C_1 е отсечката (x_1x_2), $\{x_i\}_i$ е редица от точки в C_1 сходяща към някакво $x \in C_1$, а множеството C_2 е защрихованата област, ограничена от едната страна от затворената дъга $\widehat{x_1x}$ на полукръга с радиус $R = \|x_1 - x\|/2$, а от другата страна от дъгите на кръговете (*всички с еднакъв радиус* $r < R$) $\widehat{x_ix_{i+1}}$, $i \in \mathbb{N}$, така че x принадлежи също на C_2. Лесно се вижда, че докато и двете множества C_1 и C_2 са проксимално регулярни в x (те дори са равномерно проксимално регулярни), тяхното сечение $C_1 \cap C_2$ не е проксимално регулярно в точката x.



Фиг. 1. Сечение на проксимално регулярни множества

За да получим достатъчно общи достатъчни условия, при които се запазва проксималната регулярност на сечението или на обратното изображение, използваме понятието за уравновесеност (calmness) на многозначно изображение от Rockafellar и Wets [152]. Казваме че сечението на крайна фамилия от множества $\{C_k\}_{k=1}^m$ е *метрически уравновесено* (*metrically calm*) в точка $\overline{x} \in \bigcap_{k=1}^m C_k$ ако съществуват константа $\gamma > 0$ и околност U на $\overline{x}$ такива, че

$$d\left(x, \bigcap_{k=1}^m C_k\right) \leq \gamma\,(d(x, C_1) + \cdots + d(x, C_m)) \quad \text{за всяко } x \in U, \tag{1.13}$$

където $d(x, A)$ е разстоянието от x до множеството A.

Нека $F : X \to Y$ е изображение от X в друго равномерно изпъкнало банахово пространство Y, нека D е подмножество на Y и $\overline{x} \in F^{-1}(D)$. Казваме че изображението F е *метрически уравновесено* (*metrically calm*) в $\overline{x}$ относно множеството D когато съществуват константа $\gamma > 0$ и околност U на $\overline{x}$ такива, че

$$d(x, F^{-1}(D)) \leq \gamma d(F(x), D) \quad \text{за всяко } x \in U. \tag{1.14}$$

Твърдение 1.4.23. Нека $\{C_k\}_{k=1}^m$ е крайна фамилия от затворени множества в X и нека D е затворено множество в Y.
(a) Ако всички множества C_k са N^P-хипорегулярни в точка $\overline{x}$ от $\bigcap_{k=1}^m C_k$ и ако то е метрически уравновесено в $\overline{x}$, то $\bigcap_{k=1}^m C_k$ е N^P-хипорегулярно в $\overline{x}$.
(b) Ако изображението $F : X \to Y$ е от клас $C^{1,1}$ около точка $\overline{x} \in F^{-1}(D)$ и е метрически уравновесено в $\overline{x}$ относно D и ако D е N^P-хипорегулярно в $F(\overline{x})$, то множеството $F^{-1}(D)$ е N^P-хипорегулярно в $\overline{x}$.

Следващото е директно следствие от Следствие 1.4.18.

Следствие 1.4.24. Да предположим, че модулите на изпъкналост и гладкост на нормата на X са от степенен тип и степента на изпъкналост е $q = 2$. Тогава при предположенията на Твърдение 1.4.23 множествата $\bigcap_{k=1}^{m} C_k$ и $F^{-1}(D)$ са проксимално регулярни в $\bar{x}$.

Когато пространствата $(X, \|\cdot\|)$ и $(Y, \|\cdot\|)$ са хилбертови, Твърдение 1.4.23 обяснява, във връзка със Следствие 1.4.18 и Твърдение 1.4.19, запазването на проксималната регулярност.

Следствие 1.4.25. Да предположим, че X и Y са хилбертови пространства. Нека $(C_k)_{k=1}^{m}$ е крайна фамилия от затворени множества в X и нека D е затворено множество в Y.
(a) Ако всички множества C_k са проксимално регулярни в точка $\bar{x}$ от сечението на множествата $\bigcap_{k=1}^{m} C_k$ и ако то е метрически уравновесено в $\bar{x}$, то сечението $\bigcap_{k=1}^{m} C_k$ е проксимално регулярно в точката $\bar{x}$.
(b) Ако изображението $F : X \to Y$ е от клас $C^{1,1}$ около точката $\bar{x} \in F^{-1}(D)$ и е метрически уравновесено в $\bar{x}$ относно D и ако D е проксимално регулярно в $F(\bar{x})$, то множеството $F^{-1}(D)$ е проксимално регулярно в $\bar{x}$.

При анализиране на доказателството на Твърдение 1.4.23 се установява, че равномерният случай също следва. Тук го формулираме само за случая на сечение, случаят на обратен образ се прави аналогично.

Твърдение 1.4.26. Да предположим, че затворените множества C_k, $k = 1, \ldots, m$, са r-равномерно N^P-хипорегулярни (респ. r-равномерно проксимално регулярни и $(X, \|\cdot\|)$ е хилбертово пространство) и че тяхното сечение $\bigcap_{k=1}^{m} C_k$ е уравновесено във всяка своя точка с един и същ модул γ на метрическа уравновесеност от (1.13). Тогава множеството $\bigcap_{k=1}^{m} C_k$ е r'-равномерно N^P-хипорегулярно (респ. r'-равномерно метрически проксимално регулярно) с $r' := r/(m\gamma)$.

В литературата се срещат условия върху нормални конуси на множеството, които осигуряват неравенствата за метрическа уравновесеност (1.13) и (1.14).

Пример на условие за (1.13) е известното (виж например Ioffe [90, стр. 548-549]) под името условие за общо положение на сечението на краен брой множества. В контекста на нашето равномерно изпъкнало банахово пространство то гласи, че затворените множества $C_1, \ldots, C_m$ (*относно нормалния конус на Fréchet*) са в *секвенциално общо положение* в $\bar{x} \in \bigcap_{k=1}^{m} C_k$ когато за всяка редица $(x_{1,n}, \cdots, x_{m,n}, x_{1,n}^*, \cdots, x_{m,n}^*)_n$ за която $x_{k,n} \in C_k$, $x_{k,n} \to \bar{x}$, $x_{k,n}^* \in N_{C_k}^F(x_{k,n}) \cap B^*$ и са такива че $\left\| \sum_{k=1}^{m} x_{k,n}^* \right\| \to 0$, е изпълнено $\|x_{k,n}^*\| \to 0$ за всяко $k = 1, \ldots, m$.

Друго условие, с което е много по-лесно да се работи, касае както и по-горе нормалните конуси, но във фиксирана точка $\bar{x}$. То вероятно за първи път се появява като едно от предположенията в Theorem 4.10 на статията на Federer [73] за множества в $\mathbb{R}^n$, които не са подмногообразия. Множествата C_k, $k = 1, \ldots, m$, (*относно граничния нормален конус*) са в *точково общо положение* в $\bar{x}$ ако равенството $x_1^* + \cdots + x_m^* = 0$ за $x_k^* \in N_{C_k}^L(x_k)$ влече $x_1^* = \cdots = x_m^* = 0$.

Да напомним, че затворено множество C в X е *компактно epi-липшицово* в $\overline{x} \in C$ (виж Borwein и Strójwas [30]) ако съществуват компактно множество Q, околност V на началото, околност U на $\overline{x}$ в X и положително реално число ε такива, че $C \cap U + tV \subset C + tQ$ за всяко $t \in]0, \varepsilon]$. Разбира се, всяко затворено подмножество на X е компактно epi-липшицово във всяка своя точка когато пространството X е крайномерно.

Следствие 1.4.27. Нека $\{C_k\}_{k=1}^m$ е крайна фамилия от затворени множества в X и $\overline{x} \in \bigcap_{k=1}^{m} C_k$. Тогава следните са в сила:
(a) Ако множествата C_k са в секвенциално общо положение в $\overline{x}$ и ако всяко множество C_k е N^P-хипорегулярно в $\overline{x}$ (респ. проксимално регулярно в $\overline{x}$ и $(X, \|\cdot\|)$ е хилбертово пространство), то сечението $\bigcap_{k=1}^{m} C_k$ е N^p-хипорегулярно (респ. проксимално регулярно) в $\overline{x}$.
(b) Ако всички множества C_k с изключение най-много на едно са компактно epi-липшицови в $\overline{x}$, то секвенциалното общо положение в (a) може да се замени с точково общо положение в $\overline{x}$.
(c) Ако пространството X е крайномерно, отново секвенциалното общо положение в (a) може да се замени с точково общо положение в $\overline{x}$.

Резултатът (c) е доказан в (5) на Theorem 4.10 във Federer [73].

1.4.6 Конична производна на изображението P_C

Следващото твърдение е резултат, който е добре известен за изпъкнали множества в хилбертово пространство (виж Zarantonello [171, стр. 300]). Терминът конична производна е посочен на стр. 301 в Zarantonello [171]. Резултатът независимо е продължен от Canino [37] за затворени p-изпъкнали множества в хилбертово пространство и от Shapiro [153] за затворени множества с тангенциално условие от втори ред също в хилбертово пространство. Известно е, че в контекста на хилбертово пространство (виж Poliquin, Rockafellar и Thibault [138]) концепцията за p-изпъкнало множество е еквивалентна на равномерната проксимална регулярност и че тангенциалното условие от втори ред е еквивалентно на локалната проксимална регулярност. Тогава съответният резултат в Shapiro [153] може да бъде получен за проксимално регулярни множества. Да отбележим също така, че доказателството в Canino [37] е вярно и за множества, които са проксимално регулярни в разглежданата точка на хилбертовото пространство. Твърдението по-долу е в контекста на равномерно изпъкнало пространство.

Твърдение 1.4.28. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип. Да предположим също така, че затвореното множество C в X е проксимално регулярно в $\overline{x} \in C$. Тогава съществува отворена околност U на $\overline{x}$ такава, че P_C е еднозначно и непрекъснато в U и такова че за всяко $x \in U \cap C$ и $y \in X$, за които изображението $t \mapsto \frac{1}{t}[P_C(x + ty) - x]$ е ограничено в някакъв интервал $]0, t_0]$, имаме

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}[P_C(x + ty) - x] = P_{K_C(x)}(y)$$

и производната по посока $d'_C(x;y) := \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}[d_C(x+ty) - d_C(x)]$ на функцията разстояние d_C в x по посоката y съществува и $d'_C(x;y) = d(y, K_C(x))$, което в терминологията на Zarantonello [171] означава, че $d'_C(x;\cdot)$ е конична производна.

В случая на хилбертово пространство X изображението P_C е липшицово около $\overline{x}$ (виж Poliquin, Rockafellar и Thibault [138]) и следователно предположението за ограниченост в горното твърдение е изпълнено и чрез Следствие 1.4.29 по-долу можем да получим резултатите от Proposition 2.12 в Canino [37] и Theorem 3.1 в Shapiro [153]. Резултатът е доказан в Shapiro [153] чрез използване на някои свойства на решенията на пертурбирани оптимизационни задачи, удовлетворяващи някои подходящи условия. Доказателството в Canino [37] е базирано на дуалността в хилбертово пространство между тангенциалния конус $K_C(x)$ и нормалния конус $PN_C(x)$ за проксимално регулярни множества C. Такова дуално свойство няма извън хилбертовия случай поради нелинейността на дуалното изображение J. Вместо това, доказателството на Твърдение 1.4.28 по-горе е свързано с тангенциалната регулярност на C, установена в Теорема 1.4.6 и със секвенциалната характеризация на тангенциалния конус на Clarke (която припомнихме в началото на подпараграф 1.4.1).

Следствие 1.4.29 (Canino [37, Proposition 2.12] и Shapiro [153, Theorem 3.1]). Да предположим, че X е хилбертово пространство и че множеството C е проксимално регулярно в $\overline{x} \in C$. Тогава за някоя околност U на $\overline{x}$ имаме, че за всяко $x \in U \cap C$ и $y \in X$ производните по посока на P_C и на d_C в x по посока y съществуват като $\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}[P_C(x+ty) - x] = P_{K_C(x)}(y)$ и $d'_C(x;y) = d(y, K_C(x))$.

1.4.7 Сходимост

В този подпараграф се интересуваме от поведението на изображението метрическа проекция върху проксимално регулярни множества.

Разглеждаме равномерно r-проксимално регулярно затворено множество C. От доказателството на Теорема 1.3.27 имаме, че функцията d_C^2 е Fréchet диференцируема в r-отворената околност $O_C(r) := \{x \in X : d_C(x) < r\}$ на C и че P_C е еднозначно и непрекъснато от нормираната в нормираната топология изображение от $O_C(r)$ в C. Нещо повече, от доказателството на Твърдение 1.3.30 имаме, че за всяко $x \in O_C(r)$

$$\nabla^F \left(\frac{1}{2} d_C^2\right)(x) = J(x - P_C(x)).$$

Що се отнася до непрекъснатостта на P_C, доказателството на Теорема 1.3.27 казва повече, а именно че P_C е локално Hölder непрекъснато в $O_C(r)$. Следващите две твърдения ни дават някои допълнителни средства, от които ще се нуждаем в доказателството на Теорема 1.4.33 по-долу.

Твърдение 1.4.30. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип q и s съответно. Нека r, r' са положителни числа, такива че $r' < \frac{r}{2}$ и нека $\rho > 0$. Тогава съществува константа $\gamma \geq 0$ зависеща само от r, r' и ρ, такава че за всяко равномерно r-проксимално регулярно затворено множество C в X имаме $\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \gamma\|x_1 - x_2\|^{\frac{1}{q}}$ и $\|\nabla^F d_C^2(x_1) - \nabla^F d_C^2(x_2)\| \leq \gamma\|x_1 - x_2\|^{\frac{s-1}{q}}$ за всички $x_1, x_2 \in O_C(r') \cap \rho B$.

В твърдението по-горе при ограничението $r' < r/2$, степента на Hölder непрекъснатостта на P_C в $O_C(r') \cap \rho B$ е $1/q$ (където q е степента на равномерна изпъкналост на нормата), т.е. само модулът γ на Hölder непрекъснатостта зависи от r' и ρ. Ако отслабим ограничението $r' < r/2$ до $r' < r$ и допуснем, че степента на Hölder непрекъснатостта зависи също от r' и ρ, можем да докажем следния резултат за Hölder непрекъснатост на P_C в $O_C(r') \cap \rho B$, но този път за произволно $r' < r$.

Твърдение 1.4.31. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип q и s съответно. Нека ρ, r, r' са положителни реални числа и $r' < r$. Тогава съществуват положителни константи γ и $\theta \leq 1$ зависещи само от r', r и ρ, такива че за всяко равномерно r-проксимално регулярно затворено множество C в X имаме $\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \gamma\|x_1 - x_2\|^{\theta}$ и $\|\nabla^F d_C^2(x_1) - \nabla^F d_C^2(x_2)\| \leq \gamma\|x_1 - x_2\|^{\theta(s-1)}$ за всички $x_1, x_2 \in O_C(r') \cap \rho B$.

По-точно, ако дефинираме $(\alpha_n)_n$ като $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ и $\alpha_{n+1} = \frac{1+\alpha_n}{2}$, то за всеки $n \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$, $\alpha' \in]0, \alpha_n[$, съществува положително реално число k (зависещо само от ρ, α' и n) такова, че за всяко равномерно r-проксимално регулярно затворено множество C в X изображението метрическа проекция P_C е Hölder непрекъснато в $O_C(\alpha' r) \cap \rho B$ със степен $\theta := \frac{1}{q^n}$ и модул k.

Нека $T \cup \{t_0\}$ е топологично пространство, такова че t_0 е точка на сгъстяване на T. Да напомним, че фамилия $(C_t)_{t\in T}$ от непразни затворени подмножества на X клони в смисъл на Attouch-Wets (виж Attouch и Wets [2], Beer [13], Rockafellar и Wets [152]) към затворено множество C в X когато t клони към t_0 ако за всяко положително реално число ρ е изпълнено $\sup_{x\in\rho B} |d_{C_t}(x) - d_C(x)| \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0$.

Теорема 1.4.33. Да предположим, че модулите на равномерна изпъкналост и гладкост на нормата $\|\cdot\|$ на X са от степенен тип. Нека $(C_t)_{t\in T}$ е фамилия от затворени равномерно r-проксимално регулярни множества в X, които клонят в смисъл на Attouch-Wets към затворено множество C в X. Тогава C е равномерно r-проксимално регулярно и за всяко $x_0 \in X$, такова че $d(x_0, C) < r$ изображението $t \mapsto P_{C_t}(x_0)$ и функцията $t \mapsto \nabla^F d_{C_t}^2(x_0)$ са дефинирани в околност на t_0, $P_{C_t}(x_0) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} P_C(x_0)$ и $\nabla^F d_{C_t}^2(x_0) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \nabla^F d_C^2(x_0)$.

Глава 2

Интегруемост на субдиференциали на функции

Целта да се изучава интегруемостта на субдиференциали е да се отговори на въпроса дали условието, че субдиференциалът на g съдържа субдиференциала на f влече, че f и g се различават с константа. Често вместо за интегруемост на субдиференциали на функции се говори за интегруемост на функции, като и в двата случая смисълът е същият.

Известният резултат на Moreau-Rockafellar [147] дава положителен отговор на този въпрос когато f и g са полунепрекъснати отдолу изпъкнали функции, дефинирани в банахово пространство. Отговорът е положителен и за някои класове локално липшицови функции (виж Borwein и Moors [27], Borwein, Moors и Wang [28], Correa и Jofre [50], Correa и Thibault [54]). Първото значително разширение извън изпъкналия и локално липшицовия случай се дължи на Poliquin [135], който показва, че резултатът за интегриране е в сила в крайномерно пространство за функции f и g с квадратична оценка отдолу (primal lower nice functions). По-късно Thibault и Zagrodny [160] разширяват резултата на Poliquin до класа на изпъкнало субдиференциално подобните функции (convexly subdifferentially similar functions), дефинирани в банахово пространство. Този клас включва функциите с квадратична оценка отдолу, дефинирани в хилбертово пространство, както и разликите на изпъкнали функции. Ivanov и Zlateva [93] доказват резултата за интегруемост за класа на полуизпъкналите функции (semi-convex functions). Нов поглед върху тази тема може да се намери в работата на Thibault и Zagrodny [161], където се изследва по-общо включване на субдиференциалите.

В параграф 2.1 доказваме известния резултат на Moreau-Rockafellar като използваме апроксимиращи и регуляризиращи, каквато е била и първоначалната идея на Moreau. Резултатът е публикуван в [172].

Като използваме количествена версия на субдиференциалната характеризация на клас от липшицови по посока функции в параграф 2.2 установяваме интегруемостта на субдиференциалите на такива функции. Резултатът е публикуван в [163].

В параграф 2.3 изучаваме свойството интегруемост на функции на две променливи, дефинирани върху произведение на банахови пространства. Изследвания в тази посока са правени от Correa и Thibault [54] и Wu и Ye [168]. Задачата в такъв контекст е интересна от гледна точка на това, че структурата на произведение на пространството позволява да се въведат различни концепции за непрекъснатост и регулярност на функция и да се изследва как те са свързани с интегруемостта. Специално внимание е отделено на липшицовите по посока функции на две променливи, за да бъдат продължени резултатите за липшицови по посока функции на една променлива от параграф 2.2. Резултатите са публикувани в [162].

В параграф 2.4 изучаваме върху произведение на банахови пространства свойствата на клас от седловидни функции, наречени частично слабо инф-компактни върху кълба (partially ball weakly inf-compact saddle function). За такава функция доказваме, че домейнът на субдиференциала ѝ е непразен, че оператор, свързан по естествен начин със субдиференциала ѝ е максимално монотонен и че субдиференциалът на функцията е интегруем. За функция в широк подклас на този клас доказваме гъстота на домейна на субдиференциала в домейна на функцията. Резултатите са публикувани в [164].

2.1 Интегруемост на субдиференциала на изпъкнала функция чрез инфимална регуляризация

Както обикновено, X е банахово пространство, а X^* е неговото спрегнато. Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е *изпъкнала*, ако

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall x, y \in X, \text{ и } \forall \lambda \in [0,1],$$

или, което е еквивалентно, $\operatorname{epi} f$ е изпъкнало множество $X \times \mathbb{R}$.

Субградиент на изпъкнала функция f в точка x е елемент $x^* \in X^*$ такъв, че

$$f(x') \ge f(x) + \langle x' - x, x^* \rangle, \quad \forall x' \in X.$$

Множеството от всички такива субградиенти на f в x (което е възможно да бъде празно) се означава с

$$\partial f(x) = \{p \in X^*;\ \langle p, y - x \rangle \le f(y) - f(x),\ \forall y \in X\},$$

а многозначното изображение $\partial f : X \to 2^{X^*}$ се нарича *изпъкнал субдиференциал* (или *субдиференциал на Fenchel*) на f, чийто домейн $\operatorname{Dom} \partial f \subset \operatorname{dom} f$, ако f е собствена.

Известният резултат за интегруемост на Moreau [128] и Rockafellar [144, 147] гласи, че всяка собствена, изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция в X е определена с точност до адитивна константа от своя субдиференциал.

Този резултат първо е формулиран и доказан от Moreau в [128] в случая на хилбертово пространство H. Доказателството използва инфимални регуляризации и работи също така в рефлексивно банахово пространство, както е отбелязано от Moreau в [129, стр. 87].

Идеята на Moreau е била вместо с f и g да се работи с по-регулярните техни Moreau-Yosida регуляризации. Доказателството на Rockafellar в банахово пространство (see [147]) е съвсем различно и използва дуални аргументи. Нашата цел е да докажем резултата на

Moreau-Rockafellar в банахово пространство като използваме регуляризиращи и апроксимиращи техники, каквато е била първоначалната идея на Moreau.

Разглеждаме собствени, изпъкнали и полунепрекъснати отдолу функции $f,\ g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ такива, че

$$\partial f(x) \subset \partial g(x), \quad \forall x \in X. \tag{2.1}$$

На това място си заслужава да се отбележи, че формално по-слабото допускане: дадена е собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и собствена, изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ такива, че (2.1) е в сила за ∂f, където $\partial : X \rightrightarrows X^*$ е произволен пресубдиференциален оператор всъщност влече изпъкналост на f. Съгласно Thibault и Zagrodny [160, 161], Correa, Jofre и Thibault [53]

Дефиниция 2.1.1. *Пресубдиференциален оператор* е оператор ∂, който асоциира с всяка функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и всяка точка $x \in X$ множество (възможно и празно) $\partial f(x)$ в X^*, което ще наричаме *субдиференциал* на f в x и такова, че

Свойство 1. $\partial f(x) = \emptyset$ ако $x \notin \operatorname{dom} g$;

Свойство 2. $\partial f(x) = \partial g(x)$ когато f и g съвпадат в околност на x;

Свойство 3. $\partial f(x)$ съвпада със субдиференциала в смисъл на изпъкналия анализ когато f е изпъкнала;

Свойство 4. За полунепрекъсната отдолу около x функция g и изпъкнала и непрекъсната в околност на x функция f ако $x \in \operatorname{dom}(f+g)$ е локален минимум на $f+g$, то

$$0 \in \partial f(x) + \limsup_{y \to_g x} \partial g(y),$$

където $\limsup$ означава секвенциална слаба* граница и $y \to_g x$ означава, че $y \to x$ и $g(y) \to g(x)$.

Лесно се вижда, че всеки абстрактен субдиференциален оператор съгласно Дефиниция 1.1.1 е пресубдиференциален оператор съгласно Дефиниция 2.1.1. На практика всички известни и широко използвани субдиференциали в подходящи банахови пространства са субдиференциали в смисъл на Дефиниция 2.1.1 (виж Thibault и Zagrodny [160]) – субдиференциалът на Clarke-Rockafellar [44], субдиференциалът на Michel-Penôt [120], субдиференциалът на Mordukhovich [121], субдиференциалът на Kruger-Mordukhovich [106, 107], A-субдиференциалът на Ioffe [87, 88]), граничният Fréchet субдиференциал, граничният проксимален субдиференциал (виж напр. Ioffe [89], Kruger [106]), както и Fréchet субдиференциалът, проксималният субдиференциал и т.н.

Добре известно е, че ако $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена, изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция, то изпъкналият субдиференциал ∂g е монотонен оператор. Включването (2.1) за полунепрекъсната отдолу функция f и ∂f, където ∂ е произволен субдиференциал влече, че ∂f също е монотонен оператор. Да припомним, че оператор $T : X \rightrightarrows X^*$ е *монотонен* ако за произволни $x^* \in T(x)$ и $y^* \in T(y)$ следва, че $\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0$. Но монотонността на субдиференциал ∂f влече изпъкналост на функцията f (виж Correa, Jofre и Thibault [53, Theorem 2.4], която обобщава Correa, Jofre и Thibault [52, Theorem 3]).

Така, че всяка полунепрекъсната отдолу функция f удовлетворяваща (2.1) за произволен субдиференциал ∂ трябва да бъде изпъкнала и благодарение на Свойство 3 в Дефиниция 2.1.1 включването (2.1) е в сила за нейния изпъкнал субдиференциал ∂f.

Пертурбираме изпъкналата функция $f(u)$ с функции от вида $n\|u-z\|$ вместо с квадрата на нормата. С други думи, използваме Hausdorff регуляризация вместо Moreau-Yosida регуляризация. Разглеждаме функции

$$u \to f(u) + n\|u - z\|$$

и изучаваме връзките между сечението на ε-субдиференциалите на изпъкналите функции $f(\cdot)$ и $n\|\cdot - z\|$ в точките на ε-минимум на функцията $u \to f(u) + n\|u - z\|$ и ε-субдиференциала на апроксимиращата функция.

Да припомним, че за $\varepsilon \geq 0$, *ε–субдиференциалът* на собствена, изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в $x \in \operatorname{dom} f$ е множеството

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{p \in X^* \ : \ -\varepsilon + \langle p, y - x\rangle \leq f(y) - f(x), \quad \forall y \in X\}.$$

Разбира се, за $\varepsilon = 0$, $\partial_0 f(x) \equiv \partial f(x)$. Но докато $\partial f(x)$ може да бъде празното множество, то за всяко $x \in \operatorname{dom} f$ и $\varepsilon > 0$, множеството $\partial_\varepsilon f(x)$ е непразно. Нещо повече, за всеки две реални числа ε_1 и ε_2 такива, че $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ имаме $\partial_{\varepsilon_1} f(x) \subset \partial_{\varepsilon_2} f(x)$ и $\partial f(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \partial_\varepsilon f(x)$.

Доказателство на резултата за интегруемост на изпъкнала функция

Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена, изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция. За $n \in \mathbb{N}$ дефинираме инф-конволюциите $\{f_n\}$ като

$$f_n(x) := \inf_{y\in X}\{f(y) + n\|x - y\|\}.$$

Апроксимиращата редица $\{f_n\}$ първоначално е въведена от Hausdorff [82] за произволна полунепрекъсната отдолу функция f с реален аргумент. Ясно е, че за достатъчно големи n функциите f_n са с крайни стойности и ние винаги разглеждаме този случай дори и това да не декларирано експлицитно. Някои добре известни свойства на тези инф-конволюции на f (виж например Laurent [109], Hiriart-Urruty [84], Fitzpatrick и Phelps [76]) са изброени в следващата

Лема 2.1.2. За собствена, изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и достатъчно голямо n,

(i) f_n е изпъкнала и n-липшицова;
(ii) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ за всяко $x \in X$ и всяко $n \in \mathbb{N}$;
(iii) $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ за всяко $x \in X$.

Множеството от всички ε-минимуми на функцията $f(\cdot) + n\|x - \cdot\|$ означаваме с

$$M^n_\varepsilon(f; x) := \{y \in X : f(y) + n\|x - y\| \leq f_n(x) + \varepsilon\}.$$

Ясно е, че за $\varepsilon > 0$ множествата $M^n_\varepsilon(f; x)$ са непразни.

Тъй като f_n са изпъкнали непрекъснати функции, то $\partial f_n(x)$ е непразно множество за всяко $x \in X$. Показваме, че ако p е субградиент на f_n в x и y е произволна точка на ε-минимум за $f(\cdot)+n\|x-\cdot\|$, то в действителност p е ε-субградиент на f в y като при това е и ε-субградиент на функцията $n\|\cdot\|$ в $x-y$:

Лема 2.1.3. За всяко $\varepsilon \geq 0$ и всяко $y \in M^n_\varepsilon(f;x)$ е изпълнено, че

$$\partial f_n(x) \subset \partial_\varepsilon f(y) \cap \partial_\varepsilon n\|\cdot\|(x-y).$$

Да напомним, че собствените, изпъкнали и полунепрекъснати отдолу функции $f,\ g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ са такива, че

$$\partial f(x) \subset \partial g(x), \quad \forall x \in X.$$

Тъй като $\operatorname{dom}\partial f$ е гъст в $\operatorname{dom} f$, който е непразно множество поради това, че f е собствена, то съществуват $\overline{x} \in \operatorname{dom}\partial f$ и $\overline{p} \in \partial f(\overline{x})$.

Дефинираме функцията $\overline{f}(x) := f(x+\overline{x}) - \langle \overline{p}, x\rangle - f(\overline{x})$.

Функцията $\overline{f} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена, изпъкнала и полунепрекъсната отдолу, $\overline{f}(0) = 0$ и $\partial\overline{f}(x) = \partial f(x+\overline{x}) - \overline{p}$. Следователно $0 \in \partial\overline{f}(0)$.

По аналогичен начин дефинираме $\overline{g}(x) := g(x+\overline{x}) - \langle\overline{p}, x\rangle - g(\overline{x})$ и забелязваме, че $\overline{g} : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена, изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция, $\overline{g}(0) = 0$ а $\partial\overline{g}(x) = \partial g(x+\overline{x}) - \overline{p}$. Нещо повече, $0 \in \partial\overline{g}(0)$, тъй като $\overline{p} \in \partial f(\overline{x}) \subset \partial g(\overline{x})$.

Ясно е също така, че $\partial\overline{f}(x) \subset \partial\overline{g}(x)$ за всяко $x \in X$.

Лема 2.1.5. Нека $s > 0$. Тогава за $n \geq 1/s$, $\partial\overline{f}_n(x) \subset \partial\overline{g}_n(x)$ за всяко $x \in B(0,s)$.

За непрекъснати изпъкнали функции – а такива са $\overline{f}_n$ и $\overline{g}_n$ – включването на субдиференциалите лесно води до това, че те се различават с крайна константа (виж Rockafellar [147]). От този факт и Лема 2.1.5 непосредствено получаваме

Следствие 2.1.6. Нека $s > 0$. За $n \geq 1/s$ съществува крайна константа c_n такава, че

$$\overline{f}_n(x) = \overline{g}_n(x) + c_n, \quad \text{за всяко} \quad x \in B(0,s). \tag{2.2}$$

Сега вече е лесно да довършим обосновката.

За $0 \in B(0,s)$ от Лема 2.1.2 (iii) имаме, че $\overline{f}_n(0) \to \overline{f}(0) = 0$ и $\overline{g}_n(0) \to \overline{g}(0) = 0$ при $n \to \infty$. Граничен преход в (2.2) дава $\overline{f}(0) = \overline{g}(0) + \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ и тогава $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

От Лема 2.1.2 (iii) за всяко $x \in B(0,s)$, $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f}_n(x)$ и $\overline{g}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{g}_n(x)$, следователно граничен преход в (2.2) дава

$$\overline{f}(x) - \overline{g}(x) = \lim_{n\to\infty}(\overline{f}_n(x) - \overline{g}_n(x)) = \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \quad \text{и}$$

$$\overline{f}(x) = \overline{g}(x), \quad \forall x \in B(0,s).$$

Тъй като s беше произволно, това означава, че $\overline{f}(x) = \overline{g}(x)$ за всяко $x \in X$ или

$$f(x+\overline{x}) - \langle\overline{p}, x\rangle - f(\overline{x}) = g(x+\overline{x}) - \langle\overline{p}, x\rangle - g(\overline{x}),$$

$$f(x+\overline{x}) - g(x+\overline{x}) = f(\overline{x}) - g(\overline{x}),$$

откъдето $f(x) = g(x) + c$ за всяко $x \in X$ с $c = f(\overline{x}) - g(\overline{x})$.

С това доказателството приключва.

Да отбележим, че този подход за доказване на интегруемост на полунепрекъсната отдолу изпъкнала функция е даден като Exercise (Subdifferential determination: the approach of Zlateva) на стр. 393 в книгата на J.-P. Penôt *Analysis: from concepts to applications* от 2016 г.

Регуляризиращата техника, използвана в този параграф може да се използва за установяването на интегруемост на функции, които са композиция на полунепрекъсната отдолу изпъкнала функция и гладко изображение, дефинирани в банахови пространства, но това е обект на бъдещи изследвания.

2.2 Интегруемост на субдиференциали на липшицови по посока функции

В този параграф доказваме количествена версия на субдиференциална характеризация на свойството липшицовост по посока на дадена функция и показваме локална интегруемост на субдиференциали на строго липшицови по посока регулярни функции, непрекъснати върху своя домейн (Теорема 2.2.6).

Работим в реално банахово пространство X със спрегнато X^* и с общ *пресубдиференциален оператор* ∂ който асоциира с всяка функция $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и всяка точка $x \in X$ подмножество $\partial g(x)$ в X^*, което се нарича *субдиференциал на g в x* и за което са в сила свойствата, изброени в Дефиниция 2.1.1.

Да напомним, че полунепрекъсната отдолу функция $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ се нарича *липшицова по посока* в $x_0 \in \operatorname{dom} g$ по отношение на вектор $h_0 \in X$ (виж Rockafellar [150]), ако съществуват константи $K \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такива, че

$$\begin{aligned} &t^{-1}[g(x+th) - g(x)] \le K, \\ &\forall t \in]0,\varepsilon],\ \forall h \in h_0 + \delta B^\circ,\ \forall x \in x_0 + \delta B^\circ \text{ с } |g(x) - g(x_0)| \le \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ясно е, че g е липшицова около x_0 точно когато е липшицова по посока в x_0 по отношение на $h_0 = 0$. Също така лесно се вижда, че в случая когато полунепрекъснатата функция g разглеждана в дефиницията по-горе е изпъкнала или непрекъсната върху своя домейн (т.е. за всяко $x_0 \in \operatorname{dom} g$ и всяко $\gamma > 0$ съществува $\eta > 0$ такова, че $|g(x) - g(x_0)| \le \gamma$ за всяко $x \in \operatorname{dom} g \cap (x_0 + \eta B^\circ)$), то (2.3) е еквивалентно на съществуването на константи $K \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такива, че

$$\begin{aligned} &t^{-1}[g(x+th) - g(x)] \le K, \\ &\forall t \in]0,\varepsilon],\ \forall h \in h_0 + \delta B^\circ, \text{ и } \forall x \in (x_0 + \delta B^\circ) \cap \operatorname{dom} g. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Полунепрекъсната отдолу функция $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ се нарича (виж Jofre и Thibault [97]) *строго липшицова по посока* в $x_0 \in \operatorname{dom} g$ по отношение на $h_0 \in X$ ако е липшицова по посока в x_0 по отношение h_0 с някакви константи K, ε, δ удовлетворяващи (2.3) и освен това

$$\text{(2.5)}\qquad \begin{aligned} &g \text{ е локално липшицова във всяко множество } x+]0,\varepsilon](h_0+\delta B^\circ),\\ &\text{където } x\in x_0+\delta B^\circ \text{ и } |g(x)-g(x_0)|\le\varepsilon. \end{aligned}$$

Ако полунепрекъснатата отдолу функция g в последната дефиниция освен това е непрекъсната върху своя домейн или изпъкнала, то (2.5) може да се замени с:

$$\begin{aligned} &g \text{ е локално липшицова върху всяко множество } x+]0,\varepsilon](h_0+\delta B^\circ),\\ &\text{където } x\in(x_0+\delta B^\circ)\cap\operatorname{dom} g. \end{aligned}$$

Да напомним, че полунепрекъсната отдолу функция $g : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ се нарича *регулярна (по Clarke) в* $x_0\in\operatorname{dom} g$ ако $\liminf\limits_{\substack{h'\to h\\ t\downarrow 0}} t^{-1}[g(x_0+th')-g(x_0)] = g^{\uparrow}(x_0;h)$ за всяко $h\in X$, където $d^{\uparrow}\varphi(x_0;h)$ е обобщената производна на Clarke и се нарича *регулярна* ако е регулярна във всяка точка от своя домейн.

2.2.1 Субдиференциални свойства на липшицови по посока функции

В този подпараграф изучаваме как свойството липшицовост по посока на една функция е свързано със свойствата на нейния субдиференциал. Работа в тази посока отнасяща се до субдиференциала на Clarke е тази на Treiman [165], която е основана на техника на Bishop и Phelps и на резултата (виж Treiman [165]), че $\liminf\limits_{S\ni y\to x} K(S;y)\subset T(S;x)$ (тук $K(S;.)$ и $T(S;.)$ означават съответно контингентния конус на Bouligand и тангенциалния конус на Clarke на затворено множество $S\subset X$). Нашите резултати са в термините на произволен субдиференциал и техните доказателства са базирани на теоремата за средните стойности на Zagrodny [170, 161]. Те също така могат да се разглеждат като количествена версия на резултата на Treiman [165, Theorem 6]. Тази количествена версия е необходима за доказване на Лема 2.2.4, която е ключова за нашите разглеждания.

Работим с произволен пресубдиференциален оператор ∂, такъв че съответният субдиференциал се съдържа в субдиференциала на Clarke, т.е. $\partial g(x)\subset\partial_C g(x)$ за всяка функция $g : X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ и всяко $x\in X$.

Теорема 2.2.3 (субдиференциална характеризация на свойството липшицовост по посока). Нека $g : X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция, нека $x_0\in\operatorname{dom} g$ и $h_0\in X$. Тогава g е липшицова по посока в x_0 по отношение на h_0 с константи K, ε', δ' удовлетворяващи (2.3) тогава и само тогава, когато съществуват константи $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ такива, че

$$\text{(2.6)}\qquad \langle x^*,h_0\rangle+\delta\|x^*\|\le K,\ \forall x^*\in\partial g(x),\ \forall x\in x_0+\delta B^\circ \text{ с } |g(x)-g(x_0)|\le\varepsilon.$$

2.2.2 Локална интегруемост

В този подпараграф използваме резултатите от предишния, за да установим локалната интегруемост на произволен субдиференциал за един клас липшицови по посока функции.

Първо показваме как свойството (2.4) се прехвърля от една функция на друга при включване на субдиференциалите им.

Лема 2.2.4. Нека $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция, която удовлетворява свойството (2.4) в $x_0 \in \operatorname{dom} g$ по отношение на $h_0 \in X$ с константи K, ε, δ. Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция, такава че $\partial f(x) \subset \partial g(x)$ за всяко $x \in x_0 + \delta B^\circ$.

Тогава за всеки две константи $\delta_0 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такива, че $\delta_0 + \varepsilon_0(\|h_0\| + \delta_0) < \delta$ с $\operatorname{dom} f \cap (x_0 + \delta_0 B^\circ) \neq \emptyset$ имаме, че (2.4) е в сила за f с константи K, ε_0, δ_0, т.е.

$$t^{-1}[f(x+th) - f(x)] \leq K, \ \forall t \in]0, \varepsilon_0], \ \forall h \in h_0 + \delta_0 B^\circ, \ \text{и } \forall x \in (x_0 + \delta_0 B^\circ) \cap \operatorname{dom} f.$$

В частност $x + [0, \varepsilon_0](h_0 + \delta_0 B^\circ) \subset \operatorname{dom} f$ за всяко $x \in \operatorname{dom} f \cap (x_0 + \delta_0 B^\circ)$. Освен това f е липшицова по посока в x_0 по отношение на h_0 когато $x_0 \in \operatorname{dom} f$.

Следващата лема съдържа резултат от независим интерес и касае графичната гъстота на домейна на субдиференциала в домейна на функцията.

Лема 2.2.5. Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция с $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$. Тогава $\operatorname{dom} \partial f$ е f-графично гъст в $\operatorname{dom} f$, т.е. за всяко $a \in \operatorname{dom} f$ съществува редица $x_n \in \operatorname{dom} \partial f$ такава, че $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ и $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

Накрая доказваме следния резултат за интегруемост:

Теорема 2.2.6 (за интегруемост на регулярни липшицови по посока функции). Нека $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу регулярна функция, която е непрекъсната върху своя домейн и строго липшицова по посока в $x_0 \in \operatorname{dom} g$.

Тогава съществуват константи $\alpha > 0$ и $\beta \in]0, \alpha[$ такива, че за всяка полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ такава, че $\operatorname{dom} f \cap (x_0 + \beta B^\circ) \neq \emptyset$ включването $\partial f(x) \subset \partial g(x)$ за всяко $x \in x_0 + \alpha B^\circ$ влече

$$f = g + \text{const} \quad \text{върху} \ \ x_0 + \beta B^\circ.$$

Ако строгата липшицовост по посока за g в x_0 по отношение на h_0 е в сила за константи K, ε, δ удовлетворяващи (2.4), възможно е да се вземат $\alpha = \delta$ и $\beta = \min\left\{\frac{\delta^2}{4(\|h_0\|+2\delta)}, \frac{\varepsilon\delta}{2}\right\}$.

Да отбележим, че предположението за непрекъснатост на g в $V \cap \operatorname{dom} g$ (където V е някаква околност на x_0) е съществено. Достатъчно е да разгледаме функцията g от $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, дефинирана като $g(x) = 0$, ако $x \geq 0$ и $g(x) = 1$, ако $x < 0$ и функцията f от $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, дефинирана като $f(x) = 0$, ако $x \geq 0$ и $f(x) = 2$, ако $x < 0$. Имаме, че $\partial f(x) \subset \partial g(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, но функциите f и g не са равни в близост до 0 с точност до константа.

По подобен начин, лесно се вижда, че предположението за полунепрекъснатост отдолу на f също е съществено.

2.3 Интегруемост на субдиференциали на някои функции на две променливи

Тук се интересуваме от интегруемост на функции на две променливи, дефинирани върху банахово пространство, което е произведение на две банахови пространства. Задачата в този контекст е интересна от гледна точка на това, че структурата на пространството ни позволява да въведем различни концепции за непрекъснатост и регулярност на функция и да изследваме как те са свързани с интегруемостта.

В подпараграф 2.3.1 въвеждаме и обсъждаме две концепции за регулярност на функция на две променливи.

Интегруемостта на субдиференциали на локално липшицови функции на две променливи, за които е изпълнено някакво условие за регулярност е доказана в подпараграф 2.3.2.

В следващия подпараграф 2.3.3 въвеждаме и изучаваме две понятия за липшицовост по посока на функция на две променливи.

Използваме тези понятия в подпараграф 2.3.4, за да получим локална интегруемост на някои липшицови по посока функции на две променливи.

В този параграф $(X, \|\cdot\|)$ и $(Y, \|\cdot\|)$ са реални банахови пространства с *отворени единични кълба* B_X° и B_Y° и спрегнати пространства X^* и Y^* съответно. Пространството $Z = X \times Y$ разглеждаме с нормата $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ и то е банахово пространство. Неговото *отворено единично кълбо* означаваме с $B^\circ := B_X^\circ \times B_Y^\circ$. За функция $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ означаваме домейна ѝ с $\operatorname{dom}\varphi := \{x \in X : |\varphi(x)| < +\infty\}$.

Да припомним, че *субдиференциалът на Clarke* $\partial_C\varphi(x)$ на $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ в $x \in \operatorname{dom}\varphi$ (виж Rockafellar [150] и Clarke [44]), е множеството от всички $x^* \in X^*$, такива че за всяко $h \in X$

$$\langle x^*, h\rangle \le d^\uparrow\varphi(x; h),$$

където $d^\uparrow\varphi(x; h)$ означава *обобщената производна на Clarke по посока на φ в $x \in \operatorname{dom}\varphi$ по посоката $h \in X$* дефинирана като

$$d^\uparrow\varphi(x; h) := \sup_{\eta>0} \limsup_{\substack{(x',\alpha)\downarrow_\varphi(x,\varphi(x))\\ t\downarrow 0}} \left(\inf_{h' \in h+\eta B_X^\circ} t^{-1}[\varphi(x' + th') - \alpha] \right),$$

където $(x', \alpha) \downarrow_\varphi (x, \varphi(x))$ означава, че $(x', \alpha) \in \operatorname{epi}\varphi := \{(x', \alpha) \in X \times \mathbb{R} : \varphi(x') \le \alpha\}$ и $(x', \alpha) \to (x, \varphi(x))$. За $x \notin \operatorname{dom}\varphi$, $\partial_C\varphi(x) = \emptyset$.

Да напомним също така, че за функция $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ с $x \in \operatorname{dom}\varphi$, *Dini производната отдолу* по посоката $h \in X$ се дефинира като

$$d^-\varphi(x; h) := \liminf_{\substack{h' \to h\\ t\downarrow 0}} t^{-1}[\varphi(x + th') - \varphi(x)].$$

Аналогично се дефинират $d^+\varphi(x; h) := -d^-(-\varphi)(x; h)$ и $d^\downarrow\varphi(x; h) := -d^\uparrow(-\varphi)(x; h)$.

Да напомним, че функция $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ се нарича *регулярна отгоре* (респ. *отдолу*) в x по посоката h когато

$$d^-\varphi(x; h) = d^\uparrow\varphi(x; h) \quad (\text{респ. } d^+\varphi(x; h) = d^\downarrow\varphi(x; h)),$$

и се нарича *регулярна отгоре* (респ. *отдолу*) в x, когато е такава по всяка посока.

Когато φ е локално липшицова около x, регулярността отгоре по посока h съответства на съществуването на $d\varphi(x;h) := \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}[\varphi(x+th)-\varphi(x)]$ и на равенството $d\varphi(x;h) = d^{\uparrow}\varphi(x;h)$. Ако използваме означението

$$d^{\circ}\varphi(x;h) := \limsup_{\substack{(x',\alpha)\downarrow_{\varphi}(x,\varphi(x))\\ h'\to h,\ t\downarrow 0}} t^{-1}[\varphi(x'+th')-\alpha],$$

то когато φ е липшицова около x имаме

$$d^{\uparrow}\varphi(x;h) = d^{\circ}\varphi(x;h) := \limsup_{\substack{x'\to x\\ t\downarrow 0}} t^{-1}[\varphi(x'+th)-\varphi(x')].$$

По тривиален начин всички дефиниции по-горе се продължават и за функция на две променливи $g : X\times Y \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, когато я разглеждаме като функция на една променлива, дефинирана в банаховото пространство $Z = X\times Y$. За да опростим означенията, за $(x,y)\in \operatorname{dom} g$ полагаме

$$d^{-}g(x,y;h,k):=d^{-}g((x,y);(h,k)),$$

$$d_1^{-}g(x,y;h):=d^{-}g(\cdot,y)(x;h) \text{ и } d_2^{-}g(x,y;k):=d^{-}g(x,\cdot)(y;k),$$

където $g(\cdot,y)$ означава функцията $x'\to g(x',y)$, а $g(x,\cdot)$ означава функцията $y'\to g(x,y')$. По подобен начин се дефинират $d^{\uparrow}g(x,y;h,k)$, $d_1^{\uparrow}g(x,y;h)$, $d_2^{\uparrow}g(x,y;k)$ и т.н.

Работим с *пресубдиференциален оператор* ∂, който асоциира с всяка функция $g : Z\to\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ и всяка точка $z=(x,y)\in Z$ множество $\partial g(z)$ в Z^*, което се нарича *общ субдиференциал* на g в z и за което четирите свойства от Дефиниция 2.1.1 са изпълнени, т.е. общият субдиференциал е субдиференциал на g, разглеждана като функция на една „обща" променлива $z\in Z$. Предполагаме, че общият субдиференциал се включва в субдиференциала на Clarke, т.е. $\partial g(x,y)\subset\partial_C g(x,y)$ за всяка функция на две променливи $g : X\times Y\to\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ и всяко $(x,y)\in X\times Y$. Освен общия субдиференциал разглеждаме и *частните субдиференциали* на функция g, а именно $\partial_1 g(x,y) := \partial_1 g(\cdot,y)(x)$ и $\partial_2 g(x,y) := \partial_2 g(x,\cdot)(y)$, където $\partial_1\varphi$ (респ. $\partial_2\varphi$) е субдиференциал по смисъла на на Дефиниция 2.1.1 за функции φ дефинирани в X (респ. в Y). За субдиференциалите ∂_1 и ∂_2 също предполагаме, че се включват в субдиференциала на Clarke.

2.3.1 Концепции за регулярност

За функция на две променливи g, дефинирана в банахово пространство $Z = X\times Y$ разглеждаме две концепции за регулярност.

Дефиниция 2.3.1. (Correa и Thibault [54]) Функцията $g : X\times Y\to\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ се нарича *отгоре-отгоре регулярна* (респ. *отгоре-отдолу регулярна*) в $(x,y)\in\operatorname{dom} g$ по посоката $(h,k)\in X\times Y$ ако
(i) $d^{-}g(x,y;h,0) = d^{\uparrow}g(x,y;h,0)$ и
(ii) $d^{-}g(x,y;0,k) = d^{\uparrow}g(x,y;0,k)$ (респ. $d^{+}g(x,y;0,k) = d^{\downarrow}g(x,y;0,k)$).
Функцията g се нарича *отгоре-отгоре регулярна* (респ. *отгоре-отдолу регулярна*) в $(x,y)\in\operatorname{dom} g$, ако е такава по всяка посока $(h,k)\in X\times Y$.

Директно следствие от дефиницията е, че класът на отгоре-отгоре регулярните функции на две променливи съдържа всички регулярни отгоре функции (разглеждани като функции на една обща променлива (x, y)).

Дефиниция 2.3.2. Функцията $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ се нарича *отделно отгоре-отгоре регулярна* (респ. *отделно отгоре-отдолу регулярна*) в $(x, y) \in \operatorname{dom} g$ по посоките $h \in X$ и $k \in Y$ ако
(i) $g(\cdot, y)$ е регулярна отгоре в x по посоката $h \in X$ (т.е. $d_1^- g(x, y; h) = d_1^{\uparrow} g(x, y; h)$) и
(ii) $g(x, \cdot)$ е регулярна отгоре в y по посоката $k \in Y$ (т.е. $d_2^- g(x, y; k) = d_2^{\uparrow} g(x, y; k)$) (респ. $g(x, \cdot)$ е регулярна отдолу в y по посоката $k \in Y$ (т.е. $d_2^+ g(x, y; k) = d_2^{\downarrow} g(x, y; k)$)).
Функцията g се нарича се нарича *отделно отгоре-отгоре регулярна* (респ. *отделно отгоре-отдолу регулярна*) в $(x, y) \in \operatorname{dom} g$ ако е такава по всички посоки $h \in X$ и $k \in Y$.

За да опростим изложението, по-нататък разглеждаме само случая на отгоре-отгоре регулярност с уговорката, че разглежданията в случая на отгоре-отдолу регулярност се правят по аналогичен начин.

Не е трудно да се забележи, че когато функцията g е локално липшицова и отгоре-отгоре регулярна, то тя е и отделно отгоре-отгоре регулярна.

Всяка непрекъсната и изпъкнала по всяка от променливите функция $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ е отгоре-отгоре регулярна (виж Correa и Thibault [54, Proposition 2.2]) и от горното наблюдение следва, че непрекъснатите и изпъкнали по всяка от променливите функции също така са отделно отгоре-отгоре регулярни.

Локално липшицова функция може да бъде отделно отгоре-отгоре регулярна в някоя точка без да бъде отгоре-отгоре регулярна, както показва следващият

Пример 2.3.3. Локално липшицовата функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана като

$$g(x, y) := \min\{|x|, |y|\}$$

е отделно отгоре-отгоре регулярна в $(0, 0)$ по всички посоки h и k, но не е отгоре-отгоре регулярна в $(0, 0)$, тъй като не е отгоре-отгоре регулярна в $(0, 0)$ по посоката $(h, k) = (1, 1)$.

Извън локално липшицовия случай, отгоре-отгоре регулярността може да не влече отделна отгоре-отгоре регулярност както показва

Пример 2.3.4. Функцията $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана като

$$g(x, y) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ако } y = 0,\ x > 0; \\ -x^2, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

е непрекъсната и отгоре-отгоре регулярна в $(0, 0)$, но не е отделно отгоре-отгоре регулярна в $(0, 0)$, тъй като не е отделно отгоре-отгоре регулярна в $(0, 0)$ по посоките $h = 1$ и $k = 1$.

2.3.2 Интегруемост на субдиференциали на някои локално липшицови функции на две променливи

Тук установяваме интегруемостта на субдиференциали на локално липшицови функции на две променливи $g : X \times Y \to \mathbb{R}$, които удовлетворяват някоя от дефинициите за регулярност, дадени в преходния подпараграф.

Първо доказваме интегруемост на частните субдиференциали на отделно отгоре-отгоре регулярна локално липшицова функция на две променливи.

Теорема 2.3.5. Нека $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ е локално липшицова функция, която е отделно отгоре-отгоре регулярна и нека $C \subset X \times Y$ е отворено изпъкнало множество.

Тогава за всяка функция $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, която е полунепрекъсната отдолу по всяка от променливите и такава, че $\operatorname{dom} f \cap C \neq \emptyset$ условията за частните субдиференциали

$$\text{(PS)} \qquad \partial_1 f(x,y) \subset \partial_1 g(x,y) \text{ и } \partial_2 f(x,y) \subset \partial_2 g(x,y), \quad \forall (x,y) \in C$$

влекат

$$f(x,y) = g(x,y) + \text{const}, \quad \forall (x,y) \in C.$$

Теорема 2.3.5 разширява до произведение на произволни банахови пространства резултат на Wu и Ye (виж [168, Corollary 3.16], където са наложени някои ограничения върху банаховите пространства).

Изследвайки интегруемостта на общия субдиференциал на локално липщицова отгоре-отгоре регулярна функция на две променливи, можем да докажем както в Correa и Thibault [54] следния резултат:

Теорема 2.3.6 (Correa и Thibault [54, Proposition 3.7]). Нека $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ е локално липшицова функция, която е отгоре-отгоре регулярна и нека $C \subset X \times Y$ е отворено изпъкнало множество.

Тогава за всяка полунепрекъсната отдолу функция $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ такава, че $\operatorname{dom} f \cap C \neq \emptyset$ условието върху общите субдиференциали

$$\text{(JS)} \qquad \partial f(x,y) \subset \partial g(x,y), \quad \forall (x,y) \in C$$

влече

$$f(x,y) = g(x,y) + \text{const}, \quad \forall (x,y) \in C.$$

Лесно се вижда, че ако в Теорема 2.3.6 условието (JS) върху общите субдиференциали заменим с условията (PS) за частните субдиференциали, заключението остава в сила. Това е така, защото отгоре-отгоре регулярна локално липшицова функция g също така е отделно отгоре-отгоре регулярна и можем да използваме Теорема 2.3.5. Следователно за локално липшицова отгоре-отгоре регулярна функция на две променливи резултатът за интегруемост е в сила както когато са наложени условия за включване върху частните субдиференциали, така и когато е наложено условие за включване върху общите субдиференциали.

Да отбележим, че Теорема 2.3.5 и Теорема 2.3.6 са в сила за изпъкнали по всяка от променливите и непрекъснати функции.

2.3.3 Концепции за липшицовост по посока

В този подпараграф разглеждаме две понятия за липшицовост по посока на функция на две променливи.

Първо даваме класическата дефиниция като третираме функцията като функция на една обща променлива, а именно:

Дефиниция 2.3.7 (Rockafellar [150]). Полунепрекъсната отдолу функция $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ се нарича *липшицова по посока* в $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} g$ по отношение на вектор $(h_0, k_0) \in X \times Y$ ако съществуват константи $K \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такива, че

$$
\begin{aligned}
&t^{-1}[g(x+th, y+tk) - g(x,y)] \le K,\\
&\text{for all } t \in]0,\varepsilon],\ (h,k) \in (h_0,k_0) + \delta B^\circ,\\
&\text{и } (x,y) \in (x_0,y_0) + \delta B^\circ \text{ с } |g(x,y) - g(x_0,y_0)| \le \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Не е трудно да се види, че g е липшицова около (x_0, y_0) точно когато е липшицова по посока в (x_0, y_0) по отношение на $(h_0, k_0) = (0, 0)$. Също така лесно се вижда, че в случая, когато полунепрекъснатата функция g, разглеждана в горната дефиниция е изпъкнала или непрекъсната върху своя домейн (т.е. за всяко $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} g$ и всяко $\eta > 0$ съществува $\gamma > 0$ такова, че $|(g(x,y) - g(x_0,y_0)| < \eta$ за всички $(x,y) \in ((x_0,y_0) + \gamma B^\circ) \cap \operatorname{dom} g$), то (2.7) е еквивалентно на съществуването на константи $K \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такива, че

$$
\begin{aligned}
&t^{-1}[g(x+th, y+tk) - g(x,y)] \le K,\\
&\text{за всички } t \in]0,\varepsilon],\ (h,k) \in (h_0,k_0) + \delta B^\circ,\\
&\text{и } (x,y) \in ((x_0,y_0) + \delta B^\circ) \cap \operatorname{dom} g.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Полунепрекъсната отдолу функция $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ се нарича *строго липшицова по посока* в $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} g$ по отношение на $(h_0, k_0) \in X \times Y$ ако е липшицова по посока в (x_0, y_0) по отношение на (h_0, k_0) с константи K, ε, δ удовлетворяващи (2.7) и освен това (виж Jofre и Thibault [97])

$$
\begin{aligned}
&g \text{ е локално липшицова върху всяка капка } (x,y) +]0,\varepsilon]((h_0,k_0) + \delta B^\circ),\\
&\text{където } (x,y) \in (x_0,y_0) + \delta B \text{ с } |g(x,y) - g(x_0,y_0)| \le \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Ако полунепрекъснатата отдолу функция g в последната дефиниция също така е непрекъсната върху своя домейн или изпъкнала, то (2.9) може да се замени с

$$
\begin{aligned}
&g \text{ е локално липшицова върху всяка капка } (x,y) +]0,\varepsilon]((h_0,k_0) + \delta B^\circ),\\
&\text{където } (x,y) \in ((x_0,y_0) + \delta B^\circ) \cap \operatorname{dom} g.
\end{aligned}
$$

Въвеждаме и друга концепция за липшицовост по посока на функция на две променливи, която използва структурата на пространството като произведение.

Дефиниция 2.3.8. Полунепрекъсната по всяка от променливите функция $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ще наричаме *отделно липшицова по посока* в $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} g$ по отношение на вектори $h_0 \in X$ и $k_0 \in Y$, ако съществуват константи $K \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такива, че

$$
\begin{aligned}
&t^{-1}[g(x+th, y) - g(x,y)] \le K, \text{ и } t^{-1}[g(x, y+tk) - g(x,y)] \le K,\\
&\text{за всички } t \in]0,\varepsilon],\ (h,k) \in (h_0,k_0) + \delta B^\circ, \text{ и}\\
&(x,y) \in (x_0,y_0) + \delta B^\circ \text{ с } |g(x,y) - g(x_0,y_0)| \le \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Да отбележим, че Дефиниция 2.3.8 може лесно да бъде адаптирана за функция, която е полунепрекъсната отгоре по някоя от променливите като предположим, че съответното неравенство в (2.10) е изпълнено за $-g$ вместо за g.

Ако полунепрекъснатата по всяка от променливите функция g, разглеждана в горната дефиниция е също така непрекъсната върху домейна си, то отделната липшицовост по посока (2.10) е еквивалентна на съществуването на константи $K \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такива, че

$$
\begin{aligned}
&t^{-1}[g(x+th,y)-g(x,y)] \le K, \text{ и } t^{-1}[g(x,y+tk)-g(x,y)] \le K,\\
&\text{за всички } t \in]0,\varepsilon],\ (h,k) \in (h_0,k_0)+\delta B^\circ, \text{ и}\\
&(x,y) \in ((x_0,y_0)+\delta B^\circ) \cap \operatorname{dom} g.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

За да сравним двете дефиниции, да забележим, че за полунепрекъсната отдолу функция $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ свойството липшицовост по посока в (x_0, y_0) по отношение на (h_0, k_0), т.е. свойството (2.7), е еквивалентно на

$$
\begin{aligned}
&d^\circ g(x,y;h,k) \le K,\\
&\forall (h,k) \in (h_0,k_0)+\delta B^\circ,\ \forall (x,y) \in (x_0,y_0)+\delta B^\circ \text{ с } |g(x,y)-g(x_0,y_0)| \le \varepsilon,
\end{aligned}
$$

докато свойството отделна липшицовост по посока в (x_0, y_0) по отношение h_0 и k_0, т.е. свойството (2.10), е еквивалентно на

$$
\begin{aligned}
&d_1^\circ g(x,y;h) \le K, \text{ и } d_2^\circ g(x,y;k) \le K,\\
&\forall (h,k) \in (h_0,k_0)+\delta B^\circ,\ \forall (x,y) \in (x_0,y_0)+\delta B^\circ \text{ с } |g(x,y)-g(x_0,y_0)| \le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Следващият пример (от Rockafellar [148], но разглеждан там в друг контекст) е за полунепрекъсната отдолу функция в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, която е липшицова по посока в началото по отношение на (h_0, k_0), но не е отделно липшицова по посока по отношение на h_0 и k_0.

Пример 2.3.9. Полунепрекъснатата отдолу функция

$$
f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2}{y} - y, & \text{ако } y > 0,\\ 0, & \text{ако } x = y = 0,\\ +\infty, & \text{в противен случай} \end{cases}
$$

е липшицова по посока в $(0,0)$ по отношение на $(h_0, k_0) = (1,1)$, но не е отделно липшицова по посока по отношение на $h_0 = 1$ и $k_0 = 1$, тъй като е безкрайна върху положителния x-лъч.

Свойството отделна липшицовост по посока е по-силно от свойството липшицовост по посока, тъй като го влече за полунепрекъсната отдолу функция. Резултатът е доказан за полунепрекъсната отдолу функция, която е непрекъсната върху домейна си, защото това е случаят, който ни е необходим по-късно.

Лема 2.3.10. Нека $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция, която е непрекъсната върху домейна си. Да предположим, че g е отделно липшицова по посока в $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} g$ по отношение на $h_0 \in X$ и $k_0 \in Y$ с константи K, ε, δ удовлетворяващи (2.11) и да фиксираме $m \ge \max\{\|h_0\|, \|k_0\|\}$.

Тогава g е липшицова по посока в (x_0, y_0) по отношение на (h_0, k_0) с константи $2K, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}$ удовлетворяващи (2.8) за произволни положителни $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\delta}$ такива, че $\tilde{\delta} + \tilde{\varepsilon}(m + \tilde{\delta}) < \delta$ и $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon$.

Показваме и че включването на частните субдиференциали прехвърля отделната липшицовост по посока. Доказателството на този резултат следва основните стъпки на доказателството на Лема 2.2.4.

Лема 2.3.11. Нека $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу по всяка от променливите функция, която е непрекъсната върху домейна си. Да предположим, че g е отделно липшицова по посока в $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} g$ по отношение на $h_0 \in X$ и $k_0 \in Y$ с константи K, ε, δ удовлетворяващи (2.11) и да фиксираме $m \geq \max\{\|h_0\|, \|k_0\|\}$.

Нека $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната по всяка от променливите функция, такава че

$$\text{(PS)} \qquad \partial_1 f(x, y) \subset \partial_1 g(x, y) \text{ и } \partial_2 f(x, y) \subset \partial_2 g(x, y), \quad \forall (x, y) \in (x_0, y_0) + \delta B^\circ.$$

Тогава за положителни константи $\overline{\delta}$ и $\overline{\varepsilon}$ такива, че $\overline{\delta} + \overline{\varepsilon}(m + \overline{\delta}) < \delta$ и $\overline{\varepsilon} \leq \varepsilon$ с $\operatorname{dom} f \cap ((x_0, y_0) + \overline{\delta} B^\circ) \neq \emptyset$ имаме

$$\begin{aligned} &t^{-1}[f(x + th, y) - f(x, y)] \leq K, \quad \text{и} \quad t^{-1}[f(x, y + tk) - f(x, y)] \leq K, \\ &\text{за всички } t \in]0, \overline{\varepsilon}], \ (h, k) \in (h_0, k_0) + \overline{\delta} B^\circ, \text{ и } (x, y) \in ((x_0, y_0) + \overline{\delta} B^\circ) \cap \operatorname{dom} f, \end{aligned}$$

т.е. f е отделно липшицова по посока в (x_0, y_0) по отношение на посоките $h_0 \in X$ и $k_0 \in Y$.

Комбинирайки Лема 2.3.10 и Лема 2.3.11 получаваме

Твърдение 2.3.12. Нека $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу по всяка от променливите функция, която е непрекъсната върху домейна си. Да допуснем, че g е отделно липшицова по посока в $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} g$ по отношение на $h_0 \in X$ и $k_0 \in Y$ с константи K, ε, δ удовлетворяващи (2.11) и да фиксираме $m \geq \max\{\|h_0\|, \|k_0\|\}$. Нека $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната по всяка от променливите функция, такава че

$$\text{(PS)} \qquad \partial_1 f(x, y) \subset \partial_1 g(x, y) \text{ и } \partial_2 f(x, y) \subset \partial_2 g(x, y), \quad \forall (x, y) \in (x_0, y_0) + \delta B^\circ.$$

Тогава за положителни константи δ_0 и ε_0 такива, че $\delta_0 + \varepsilon_0(m + \delta_0) < \delta/2$ и $\varepsilon_0 \leq \min\left\{\varepsilon, \frac{\delta}{2(m+\delta)}\right\}$ с $\operatorname{dom} f \cap ((x_0, y_0) + \delta_0 B^\circ) \neq \emptyset$ имаме

$$\begin{aligned} &t^{-1}[f(x + th, y + tk) - f(x, y)] \leq 2K, \\ &\text{за всички } t \in]0, \varepsilon_0], \ (h, k) \in (h_0, k_0) + \delta_0 B^\circ, \text{ и} \\ &(x, y) \in ((x_0, y_0) + \delta_0 B^\circ) \cap \operatorname{dom} f, \end{aligned}$$

т.е. f е липшицова по посока в (x_0, y_0) по отношение на посоката (h_0, k_0).

В частност $(x, y) + [0, \varepsilon_0]((h_0, k_0) + \delta_0 B^\circ) \subset \operatorname{dom} f$, когато $(x, y) \in \operatorname{dom} f \cap ((x_0, y_0) + \delta_0 B^\circ)$.

2.3.4 Локална интегруемост на субдиференциали на някои липшицови по посока функции на две променливи

Първо доказваме резултат за локална интегруемост на общия субдиференциал на функция на две променливи, за която са в сила обща регулярност и обща липшицовост по посока.

Теорема 2.3.13. Нека $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу функция, която е непрекъсната върху домейна си. Да допуснем, че g е отгоре-отгоре регулярна и строго липшицова по посока в $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} g$ по отношение на $(h_0, k_0) \in X \times Y$.

Тогава съществуват константи $\alpha > 0$ и $\beta \in]0, \alpha[$ такива, че за всяка полунепрекъсната отдолу функция $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ с $\operatorname{dom} f \cap ((x_0, y_0) + \beta B^\circ) \neq \emptyset$ условието

$$\text{(JS)} \qquad \partial f(x, y) \subset \partial g(x, y), \quad \forall (x, y) \in (x_0, y_0) + \alpha B^\circ$$

влече

$$f(x, y) = g(x, y) + \text{const}, \quad \forall (x, y) \in (x_0, y_0) + \beta B^\circ.$$

Вторият резултат (Теорема 2.3.15) е за локална интегруемост на частните субдиференциали на функция на две променливи, за която са в сила отделна регулярност и отделна липшицовост по посока.

За целта се налага да въведем по-силна версия на свойството отделна липшицовост по посока, както вече направихме за свойството липшицовост по посока.

Дефиниция 2.3.14. Нека $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу по всяка от променливите функция, която е непрекъсната върху домейна си. Казваме, че g е *строго отделно липшицова по посока* в $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} g$ по отношение на $h_0 \in X$ и $k_0 \in Y$ ако тя е отделно липшицова по посока в (x_0, y_0) по отношение h_0 на k_0 с някои константи K, ε, δ удовлетворяващи (2.11) и освен това за всяко $(x, y) \in ((x_0, y_0) + \delta B^\circ) \cap \operatorname{dom} g$ функцията $g(\cdot, y)$ е локално липшицова върху капката $x +]0, \varepsilon](h_0 + \delta B_X^\circ)$, а функцията $g(x, \cdot)$ е локално липшицова върху капката $y +]0, \varepsilon](k_0 + \delta B_Y^\circ)$.

Теорема 2.3.15. Нека $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу по всяка от променливите функция, която е непрекъсната върху домейна си. Да предположим също така, че g е отделно отгоре-отгоре регулярна и строго отделно липшицова по посока в $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} g$ по отношение на $(h_0, k_0) \in X \times Y$.

Тогава съществуват константи $\alpha > 0$ и $\beta \in]0, \alpha[$ такива, че за всяка функция $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, която е полунепрекъсната отдолу по всяка от променливите и с $\operatorname{dom} f \cap ((x_0, y_0) + \beta B^\circ) \neq \emptyset$ условията

$$\text{(PS)} \qquad \partial_1 f(x, y) \subset \partial_1 g(x, y) \text{ и } \partial_2 f(x, y) \subset \partial_2 g(x, y), \quad \forall (x, y) \in (x_0, y_0) + \alpha B^\circ$$

влекат

$$f(x, y) = g(x, y) + \text{const}, \quad \forall (x, y) \in (x_0, y_0) + \beta B^\circ.$$

От Теорема 2.3.15 следва например локална интегруемост на изпъкнала по всяка от променливите функция g, която може да приема и стойност безкрайност, която е полунепрекъсната отдолу по всяка от променливите и непрекъсната върху домейна си в околност на точка (x_0, y_0) такава, че $\operatorname{int}[\operatorname{dom} g(\cdot, y_0) \times \operatorname{dom} g(x_0, \cdot)] \neq \emptyset$.

В случая на отделна регулярност и обща липшицовост по посока, доказваме

Теорема 2.3.16. Нека $g : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е полунепрекъсната отдолу по всяка от променливите функция, която е непрекъсната върху домейна си. Да предположим също, че g е отделно отгоре-отгоре регулярна и строго липшицова по посока в $(x_0, y_0) \in \operatorname{dom} g$ по отношение на $(h_0, 0) \in X \times Y$.

Тогава съществуват константи $\alpha > 0$ и $\beta \in]0, \alpha[$ такива че за всяка функция $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ която е полунепрекъсната отдолу по всяка от променливите и с $\operatorname{dom} f \cap ((x_0, y_0) + \beta B^\circ) \neq \emptyset$ условията

$$\text{(PS)} \qquad \partial_1 f(x,y) \subset \partial_1 g(x,y), \text{ и } \partial_2 f(x,y) \subset \partial_2 g(x,y), \quad \forall (x,y) \in (x_0, y_0) + \alpha B^\circ$$

влекат

$$f(x,y) = g(x,y) + \text{const}, \quad \forall (x,y) \in (x_0, y_0) + \beta B^\circ.$$

Теорема 2.3.16 в частност показва локална интегруемост на изпъкнала по всяка от променливите функция g, която може да приема и безкрайни стойности, която е полунепрекъсната отдолу по всяка от променливите и непрекъсната върху домейна си около точка (x_0, y_0) такава, че съществува някое $x \in X$, за което $(x, y_0) \in \operatorname{int} \operatorname{dom} g$.

За да завършим, да отбележим че всички резултати за интегруемост, получени в този подпараграф могат лесно да бъдат адаптирани за непрекъснати функции на две променливи, за които е в сила условие от тип горна-долна регулярност (например за непрекъснати изпъкнало-вдлъбнати функции).

2.4 Частично слабо инф-компактни върху кълба седловидни функции

В този параграф изследваме седловидни функции $K : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$, дефинирани в банахово пространство, което е произведение на банахови пространства X и Y. Такива функции са тясно свързани минимаксните задачи. Основен принос в изучаването на седловидните функции има Rockafellar. В случая когато X и Y са крайномерни пространства, свойствата на седловидните функции са изследвани подробно в работи на Rockafellar (виж например [142, 145, 148]), McLinden [117, 118, 119] и др. Много от тези свойства са обобщени в случая, когато X и Y са банахови пространства, едното от които е рефлексивно в по-късни статии на Rockafellar [146, 149], Gossez [79] и др. Ние продължаваме техните резултати за клас от седловидни функции, дефинирани в произведение на произволни банахови пространства X и Y.

Свойствата на седловидните функции в банахово пространство $X \times Y$ са изложени в подпараграф 2.4.1.

Подпараграф 2.4.2 е посветен на изучаването на субдиференциалните свойства на седловидна функция и по-точно на собствена затворена седловидна функция $K : X \times$

$Y \to [-\infty, +\infty]$, която наричаме *частично слабо инф-компактна върху кълба* (Дефиниция 2.4.8), а пишем накратко pbwc. Доказваме, че за такава функция домейнът на субдиференциала ∂K е непразен (Теорема 2.4.11). Нещо повече, в този контекст операторът T_K, асоцииран с ∂K е максимално монотонен (Теорема 2.4.14). За собствена затворена седловидна функция K в широк подклас на pbwc седловидните функции показваме, че домейнът на ∂K е гъст в домейна на K (Теорема 2.4.12).

В подпараграф 2.4.3 доказваме, че за собствена затворена pbwc седловидна функция K субдиференциалът ∂K е интегруем (Теорема 2.4.15 и Теорема 2.4.16).

В резюме можем да кажем, че съществуват ясни паралели между основните свойства на собствена затворена изпъкнала функция, дефинирана в банахово пространство X и тези на собствена затворена pbwc седловидна функция, дефинирана в банахово пространство $X \times Y$.

$(X, \|\cdot\|)$ е реално банахово пространство, а X^* е неговото спрегнато. Спрегнатото на банаховото пространство X^* се нарича *второто спрегнато* на X и се означава с X^{**}. Всеки елемент на X „дава“ елемент на X^{**} посредством *каноничното влагане* $\widehat{\ }: X \hookrightarrow X^{**}$ дефинирано като

$$\langle x^*, \widehat{x} \rangle = \langle x, x^* \rangle \quad \text{за } x \in X \text{ и } x^* \in X^*.$$

Да припомним, че две нормирани линейни пространства се наричат *конгруентни* (релация, която означаваме с $\cong$) ако съществува запазващ нормата изоморфизъм (наречен *конгруентност*) между тях. Добре известно е (виж Holmes [86]), че каноничното влагане е конгруентност между X и неговият образ $\widehat{X}$ в X^{**}, т.е. $X \cong \widehat{X}$. Образът $\widehat{X}$ на X е затворено в нормата подпространство на X^{**} и $\|\widehat{x}\| = \|x\|$. Когато $\widehat{X}$ съвпада с X^{**}, банаховото пространство X е *рефлексивно*. Аналогично, банаховото пространство X^* е конгруентно на $\widehat{X^*}$, т.е. $X^* \cong \widehat{X^*}$ посредством каноничното влагане $\widehat{\ }: X^* \hookrightarrow X^{***}$ дефинирано като

$$\langle x^{**}, \widehat{x^*} \rangle = \langle x^*, x^{**} \rangle \quad \text{за } x^* \in X^* \text{ и } x^{**} \in X^{**}.$$

Нещо повече, $\left(\widehat{X}\right)^* \cong X^*$ (виж Holmes [86, p. 123]).

Изпъкнала функция f в X е навсякъде дефинирана функция със стойности в разширената реална права $[-\infty, +\infty]$, чиято *надграфика* $\operatorname{epi} f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \le r\}$ е изпъкнало множество. *Домейнът* на f се дефинира като $\operatorname{dom} f := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$. Ако $f(x) > -\infty$ за всяко x и $f(x) < +\infty$ за поне едно x, то f се нарича *собствена*. В противен случай f се нарича *несобствена*. Изпъкналата функция f се нарича *затворена* ако е собствена и полунепрекъсната отдолу или пък е тъждествено равна на $+\infty$ или $-\infty$. В този параграф, освен когато експлицитно не е посочено друго, свойствата *затваряне* и *полунепрекъснатост отдолу* се разглеждат по отношение на *нормираната топология*. Ако е дадена произволна изпъкнала функция f в X, то съществува най-голяма затворена изпъкнала функция мажорирана от f. Тази функция се нарича *затваряне* на f и се означава с $\operatorname{cl} f$. Ясно е, че $\operatorname{cl} f \le f$ и f е затворена точно когато $f = \operatorname{cl} f$. Когато f не приема стойност $-\infty$, $\operatorname{cl} f(x) = \liminf_{x' \to x} f(x')$ за всяко $x \in X$.

За произволна изпъкнала функция f в X, функцията $f^* : X^* \to [-\infty, +\infty]$ дефинирана като

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}$$

се нарича *спрегната* на f. Спрегнатата функция на собствена полунепрекъсната отдолу изпъкнала функция f в X е собствена изпъкнала функция в X^*, която е полунепрекъсната отдолу както по отношение на слабата* топология $w(X^*, X)$, така и по отношение на нормираната топология в X^*. *Втората спрегната* на изпъкнала функция f в X се дефинира като спрегнатата на нейната спрегната функция, т.е. тя е функцията $f^{**} : X^{**} \to [-\infty, +\infty]$ във второто спрегнато X^{**}, дефинирана като

$$f^{**}(x^{**}) = \sup_{x^* \in X^*} \{\langle x^*, x^{**}\rangle - f^*(x^*)\}.$$

Теорията на спрегнатите изпъкнали функции е развита например в Brøndsted [35], Fenchel [74], Moreau [127, 129], Rockafellar [143, 148].

Когато f е собствена изпъкнала функция, а ∂f е изпъкналият субдифиренциал, $\operatorname{dom} \partial f \subset \operatorname{dom} f$. Добре известен е резултатът на Brøndsted и Rockafellar [36]: ако изпъкнала функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена и полунепрекъсната отдолу, то $\operatorname{dom} \partial f$ е гъсто в $\operatorname{dom} f$.

Образът на ∂f е множеството в X^* дефинирано като $\operatorname{Rge} \partial f := \bigcup_{x \in X} \partial f(x)$, а *графиката* на ∂f е множеството $\operatorname{gph} \partial f := \{(x, x^*) \in X \times X^* : x^* \in \partial f(x)\}$.

Добре известно е (виж например Aubin и Ekeland [8], Moreau [129] и Rockafellar [148]), че за собствена изпъкнала функция f следните са еквивалентни

$$x^* \in \partial f(x) \iff f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^*\rangle$$

и от тях следва, че $x \in \operatorname{dom} f$. Ако, освен това, f е полунепрекъсната отдолу в x,

$$x^* \in \partial f(x) \iff f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^*\rangle \iff \widehat{x} \in \partial f^*(x^*). \tag{2.12}$$

От Rockafellar [148, Corollary 23.5.2], знаем че ако собствена изпъкнала функция f е субдиференцируема в x, то $\operatorname{cl} f(x) = f(x)$ и $\partial(\operatorname{cl} f)(x) = \partial f(x)$.

Ако X е рефлексивно и f е собствена полунепрекъсната отдолу функция от (2.12) е ясно, че f^{**} може да се идентифицира с f и че ∂f^* просто е „обратното“ на ∂f. С други думи, $x \in \partial f^*(x^*)$ тогава и само тогава, когато $x^* \in \partial f(x)$. Ако X не е рефлексивно, връзката между ∂f^* и ∂f е по-сложна, но все пак ∂f^* и ∂f напълно се определят един друг, съгласно резултат на Rockafellar [147, Proposition 1].

За всяко $r \in \mathbb{R}$, *r-подниво* (или *r-множество на Lebesque*) на изпъкнала функция f е (възможно празното) множество $\{f \le r\} := \{x \in X : f(x) \le r\}$. Очевидно, то е изпъкнало множество и когато f е полунепрекъсната отдолу е затворено както в нормираната топология, така и в слабата топология в X.

Казваме, че функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е *слабо инф-компактна върху кълба* (*bwc* накратко) ако за всяко $r \in \mathbb{R}$ множествата $\operatorname{Lev}_{r,n}(f) := \{f \le r\} \cap nB_X$ са $w(X, X^*)$ компакти за всяко $n \in \mathbb{N}$ с уговорката, че празното множество е слабо компактно. Да напомним, че понятието инф-компактност е въведено от Moreau (виж [129]).

С помощта на Rockafellar [147, Proposition 1] получаваме следната характеризация на собствена затворена bwc изпъкнала функция.

Теорема 2.4.2. Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу изпъкнала функция. Тогава следните са еквивалентни:
(a) f е bwc;
(b) образът на ∂f^* е непразно множество в $\widehat{X}$;
(c) $\operatorname{dom} f^{**} \subset \widehat{X}$.

2.4.1 Седловидни функции. Свойства

Нека Z е произведение на две реални банахови пространства X и Y, т.е. $Z = X \times Y$. С произволна разумна норма, Z е банахово пространство. Нека вземем $\|(x, y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\})$ и да идентифицираме неговото спрегнато с $X^* \times Y^*$ като използваме $\langle (x, y), (x^*, y^*)\rangle = \langle x, x^*\rangle + \langle y, y^*\rangle$.

Седловидна функция в Z е навсякъде дефинирана функция K със стойности в $[-\infty, +\infty]$, такава че $K(\cdot, y)$ е изпъкнала в X за всяко $y \in Y$, а $K(x, \cdot)$ е вдлъбната (т.е. $-K(x, \cdot)$ е изпъкнала) в Y за всяко $x \in X$. Означаваме с $\operatorname{cl}_1 K$ седловидната функция получена чрез затварянето на $K(x, y)$ като изпъкнала функция на x за всяко фиксирано y, т.е. $\operatorname{cl}_1 K(x, y) := \operatorname{cl} K(\cdot, y)(x)$. По подобен начин означаваме с $\operatorname{cl}_2 K$ седловидната функция получена като затворим $(-K)(x, y)$ като изпъкнала функция на y за всяко фиксирано x и след това вземем нейната противоположна, т.е. $\operatorname{cl}_2 K(x, y) := -\operatorname{cl}(-K)(x, \cdot)(y)$. Ясно е, че $\operatorname{cl}_1 K \le K \le \operatorname{cl}_2 K$.

Две седловидни функции K и L в Z се наричат *еквивалентни* (означавано с $K \sim L$), ако $\operatorname{cl}_1 K = \operatorname{cl}_1 L$ и $\operatorname{cl}_2 K = \operatorname{cl}_2 L$ (виж Gossez [79] и Rockafellar [148, 149]). Когато $K \sim L$, казваме, че K и L принадлежат на един и същ *клас на еквивалентност* и че K и L са *представители* на този клас. Съществува и друга дефиниция на релацията $K \sim L$, която разбира се е еквивалентна на предишната. За нея е необходимо да въведем още две понятия.

Функцията в $X \times Y^*$ получена чрез спрягане на $(-K)(x, y)$ по втория аргумент при фиксиран първи аргумент, т.е. $F(x, \cdot) := [-K(x, \cdot)]^*$, или

$$F(x, y^*) := \sup_{y \in Y}\{K(x, y) + \langle y, y^*\rangle\},$$

се нарича *изпъкнал родител* на K (виж Rockafellar [145]). Тя е изпъкнала функция в $X \times Y^*$.
Аналогично, *вдлъбнатият родител* на K се дефинира като $G(\cdot, y) := -[K(\cdot, y)]^*$, или

$$G(x^*, y) := \inf_{x \in X}\{K(x, y) - \langle x, x^*\rangle\}.$$

Всички функции родители разглеждаме като функции на *една обща променлива* в банаховото пространство Z, като техните домейни и субдиференциали разглеждаме в същия този контекст.

Rockafellar в [148] показва, че две седловидни функции са еквивалентни точно когато имат едни и същи родители. За пълнота доказваме този резултат в

Лема 2.4.3. Нека $K, L : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ са две седловидни функции. $K \sim L$ тогава и само тогава, когато те имат едни и същи родители.

Ако $\mathrm{cl}_1 K$ и $\mathrm{cl}_2 K$ са еквивалентни на K (записано като $K \sim \mathrm{cl}_1 K \sim \mathrm{cl}_2 K$), то K се нарича *затворена* седловидна функция (виж Gossez [79] и Rockafellar [148, 149]). Необходимо и достатъчно условие K да бъде затворена е

$$\mathrm{cl}_1 \mathrm{cl}_2 K = \mathrm{cl}_1 K \quad \text{и} \quad \mathrm{cl}_2 \mathrm{cl}_1 K = \mathrm{cl}_2 K.$$

Лесно се проверява, че ако K е затворена седловидна функция и L е седловидна функция, еквивалентна на K, т.е. $L \sim K$, то L също е затворена.

Ефективният домейн на седловидна функция K (виж Rockafellar [145, 146, 148]) се дефинира като множеството $\mathrm{Dom}' K = C'_K \times D'_K$, където

$$C'_K = \{x \in X : K(x, y) < +\infty, \quad \forall y \in Y\},$$

$$D'_K = \{y \in Y : K(x, y) > -\infty, \quad \forall x \in X\}.$$

Основният недостатък на тази дефиниция идва от факта, че $\mathrm{Dom}' K$ зависи от представителя на класа на еквивалентност на K, както се вижда в един пример на Rockafellar (виж Gossez [79]). Поради тази причина се въвежда следното по-подходящо понятие за домейн на седловидна функция K, което зависи само от класа на еквивалентност, на който принадлежи K (но не и от представителите на този клас). *Домейнът* на седлова функция K (виж Gossez [79] и Rockafellar [149]) се дефинира като $\mathrm{Dom}\, K = C_K \times D_K$, където

$$C_K = \{x \in X : \mathrm{cl}_2 K(x, y) < +\infty, \quad \forall y \in Y\},$$

$$D_K = \{y \in Y : \mathrm{cl}_1 K(x, y) > -\infty, \quad \forall x \in X\}.$$

Ясно е, че $\mathrm{Dom}\, K \subset \mathrm{Dom}' K$. Ако K е затворена, $\mathrm{Dom}\, K$ е гъст в $\mathrm{Dom}' K$ и $\mathrm{Dom}\, K = \mathrm{Dom}' \mathrm{cl}_1 K \cap \mathrm{Dom}' \mathrm{cl}_2 K$ (виж Gossez [79, Proposition 1]). Седловидната функция K се нарича *собствена*, ако $\mathrm{Dom}' K$ е непразно множество. Следователно, ако K е затворена, тя е собствена точно когато $\mathrm{Dom}\, K$ е непразно множество.

Лема 2.4.4. Нека $K : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ е седлова функция. Тогава

$$\mathrm{Dom}\, K = \{(x, y) \in X \times Y : -\infty < \mathrm{cl}_1 K(x, y) \le K(x, y) \le \mathrm{cl}_2 K(x, y) < +\infty\}.$$

2.4.2 Субдиференциал на седловидна функция. Частично слабо инф-компактни върху кълба седловидни функции. Дефиниция и свойства

Понятието за субдиференциал на седловидна функция $K : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ е въведено от Rockafellar като многозначното изображение $\partial K : X \times Y \to 2^{X^* \times Y^*}$, дефинирано като

$$\partial K(x, y) := \{(x^*, y^*) \in Z^* : \begin{array}{l} x^* \text{ е субградиент на изпъкналата функция } K(\cdot, y) \text{ в } x \text{ и} \\ -y^* \text{ е субградиент на изпъкналата функция } -K(x, \cdot) \text{ в } y\}. \end{array}$$

Множеството $\partial K(x, y)$ (което е възможно да бъде празно) се нарича *субдиференциал* на K в (x, y) (виж Rockafellar [148, 142]). *Домейнът* на ∂K се дефинира като $\mathrm{Dom}\, \partial K := \{(x, y) \in X \times Y : \partial K(x, y) \neq \emptyset\}$. Ясно е, че когато K е собствена,

$$\mathrm{Dom}\, \partial K \subset \mathrm{Dom}\, K.$$

Оригиналният крайномерен вариант на следващата лема може да се намери в Rockafellar [145, Lemma 4]. Нашето доказателство следва същите стъпки.

Лема 2.4.7. За собствена затворена седловидна функция $K : X\times Y \to [-\infty,+\infty]$ следните са еквивалентни:
(a) $(x^*,\widehat{y}) \in \partial F(x,y^*)$;
(b) $(\widehat{x},y^*) \in \partial(-G)(x^*,y)$;
(c) $(x^*,-y^*) \in \partial K(x,y)$.
Всяко от тези условия влече, че стойностите $F(x,y^*)$, $G(x^*,y)$ и $K(x,y)$ са крайни.

Като комбинираме Лема 2.4.3 и Лема 2.4.7, лесно получаваме, че ако K е собствена затворена седловидна функция и L е седловидна функция, еквивалентна на K, т.е. $L \sim K$, то $\partial K = \partial L$. Следователно субдиференциалът на собствена затворена седловидна функция K зависи само от класа на еквивалентност, на който принадлежи K и не зависи от неговите представители.

Знае се, че домейнът на субдиференциала на собствена затворена седловидна функция $K : X\times Y \to [-\infty,+\infty]$ е непразен когато едно от пространствата X и Y е рефлексивно (виж Rockafellar [146]). В Теорема 2.4.11 показваме, че такова свойство има и клас от затворени седловидни функции, дефинирани в произведение на банахови пространства, който въвеждаме в следващата

Дефиниция 2.4.8. Нека X, Y са банахови пространства и нека $K : X\times Y \to [-\infty,+\infty]$ е седловидна функция.

Казваме, че K е X-*bwc*, ако за някое $y_0 \in D_K$ функцията $\mathrm{cl}_1 K(\cdot,y_0)$ е bwc и казваме, че K е Y-*bwc*, ако за някое $x_0 \in C_K$ функцията $-\mathrm{cl}_2 K(x_0,\cdot)$ е bwc.

Наричаме K *частично слабо инф-компактна върху кълба* (*pbwc* накратко), ако е X-bwc или Y-bwc.

Ако за някое $(x_0,y_0) \in \mathrm{Dom}\, K$, някоя от функциите $\mathrm{cl}_1 K(\cdot,y_0)$ или $-\mathrm{cl}_2 K(x_0,\cdot)$ е bwc, то K се нарича *напълно частично слабо инф-компактна върху кълба* (*tpbwc* накратко).

Да отбележим, че когато едно от пространствата X и Y, да кажем X, е рефлексивно, то всяка седловидна функция K в $X\times Y$ е tpbwc, защото $\mathrm{cl}_1 K(\cdot,y)$ е X-bwc за всяко $y \in Y$ което се дължи на слабата компактност на B_X.

От дефиницията е ясно, че всяка функция K, която е tpbwc е pbwc, но когато и двете пространства не са рефлексивни съществуват pbwc седловидни функции, които не са tpbwc, както се вижда от следващия

Пример 2.4.9 (предложен от M. Ivanov). Нека X е Y са две банахови пространства, които не са рефлексивни. Да фиксираме функция $g : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, която е изпъкнала, полунепрекъсната отдолу и bwc и такава, че $g(0) = 0$ и $g(x) > 0$ за всяко $x \in X\setminus\{0\}$ и такава че за $C := \mathrm{dom}\, g$ множеството $B_X \cap \mathrm{cl}\, C$ не е $w(X,X^*)$ компактно и не е празно.

Тогава функцията K от $X\times Y$ в $[-\infty,+\infty]$, дефинирана като

$$K(x,y) = \begin{cases} (1-\|y\|)g(x), & \text{ако } x\in C,\ y\in B_Y \\ -\infty, & \text{ако } x\in C,\ y\notin B_Y \\ +\infty, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

е собствена затворена седловидна функция с $\operatorname{Dom} K = C \times B_Y$. За $y_0 = 0 \in B_Y$ имаме, че $\operatorname{cl}_1 K(\cdot, y_0) = K(\cdot, y_0) = g(\cdot)$, която е bwc и следователно K е pbwc. От друга страна, проверява се че K не е tpbwc.

Като функция $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ със свойствата изброени по-горе в пространството $X := l_1(\mathbb{N})$ може да се вземе например функцията

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n |x_n| \quad \text{за всяко } x \in l_1(\mathbb{N}),\ x = (x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

По-нататък показваме, че pbwc седловидните функции притежават много от добре известните свойства на седловидните функции, дефинирани в произведение на банахови пространства, едното от които е рефлексивно.

Теорема 2.4.11. Нека $X,\ Y$ са банахови пространства и нека $K : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ е затворена собствена pbwc седловидна функция. Тогава $\operatorname{Dom} \partial K \neq \emptyset$.

От Теорема 2.4.11 получаваме гъстотата на домейна на субдиференциала в домейна на собствена затворена tpbwc седловидна функция. Този резултат е предположен за произволна собствена затворена седловидна функция от Rockafellar (виж Rockafellar [146, p. 249]). Резултатът е доказан от него когато X и Y са крайномерни пространства (виж Rockafellar [142, 148]) и продължен от Gossez (виж Gossez [79, Theorem 1]) за случая когато едно от пространствата X и Y е рефлексивно. Предположението за рефлексивност се използва съществено в доказателството, за да се осигури, че в този случай $\operatorname{Dom} \partial K$ е непразно множество. Ние следваме в общи линии доказателството на Gossez.

Теорема 2.4.12. Нека $X,\ Y$ са банахови пространства и нека $K : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ е собствена затворена tpbwc седловидна функция. Тогава $\operatorname{Dom} \partial K$ е гъсто в $\operatorname{Dom} K$.

С всяка седловидна функция $K : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ може да бъде асоцииран монотонен (виж по-долу) многозначен оператор $T_K : X \times Y \to 2^{X^* \times Y^*}$, дефиниран като

$$T_K(x, y) := \{(x^*, y^*) \in X^* \times Y^* : (x^*, -y^*) \in \partial K(x, y)\}.$$

Когато K е собствена и затворена, в Лема 2.4.7 установихме, че ∂K зависи само от класа на еквивалентност, на който принадлежи K. Следователно, същото е в сила и за оператора T_K. Този оператор е въведен във връзка с разглеждането на минимаксни задачи от Rockafellar [146], който доказва, че в случая когато поне едно от банаховите пространства е рефлексивно, T_K е максимално монотонен когато K е собствена и затворена (виж Rockafellar [146, Theorem 3]). Ще покажем, че това твърдение е вярно и когато K е собствена затворена частично слабо инф-компактна върху кълба функция, дефинирана в банахово произведение на произволни банахови пространства. Тясна връзка между собствените затворени седловидни функции в $X \times X$ и максимално монотонните оператори в X е установена от Krauss в [105].

Да припомним, че оператор $S :\rightrightarrows X^*$ от банахово пространство X в неговото спрегнато X^* се нарича *монотонен* ако за $x^* \in S(x)$, $y^* \in S(y)$ е изпълнено $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ и се нарича *максимално монотонен* ако е монотонен и няма нетривиално монотонно разширение, т.е. ако $(x,x^*) \in X\times X^*$ е такова, че монотонната релация $\langle x-y, x^*-y^*\rangle \geq 0$ е в сила за всяко $(y,y^*) \in \operatorname{gph} S$, то $(x,x^*) \in \operatorname{gph} S$ (виж например Phelps [133], Rockafellar [147] и Simons [156]).

Теорема 2.4.14. Нека X, Y са банахови пространства и нека $K : X\times Y \to [-\infty,+\infty]$ е затворена собствена pbwc седловидна функция. Тогава операторът T_K е максимално монотонен.

Да отбележим, че в статията на Pak [131] горният резултат е формулиран за произволна собствена затворена седловидна функция, дефинирана в банахово пространство произведение на произволни банахови пространства, но представеното в статията доказателство неявно предполага рефлексивност.

2.4.3 Интегруемост на субдиференциала на собствена затворена частично слабо инф-компактна върху кълба седловидна функция

Интересуваме се от интегруемостта на субдиференциала на седловидна функция в банахово пространство, което е произведение на банахови пространства. Резултатът е доказан за липшицова седловидна функция от Correa и Thibault в [54]. Някои обобщения за липшицови по посока седловидни функции вече бяха направени в параграф 2.3.

Разглеждаме две собствени затворени седловидни функции $K, L : X\times Y \to [-\infty,+\infty]$, дефинирани в банахово пространство произведение и се интересуваме от това дали условието pbwc за една от функциите K и L и включването $\partial L \subset \partial K$ влече, че K и L са еквивалентни с точност до крайна адитивна константа.

Първо разглеждаме случая, когато „вътрешната" по отношение на субдиференциалното включване функция L се предполага pbwc и доказваме

Теорема 2.4.15. Нека X, Y са банахови пространства и нека $L : X\times Y \to [-\infty,+\infty]$ е собствена затворена pbwc седловидна функция.

Тогава за всяка собствена затворена седловидна функция $K : X\times Y \to [-\infty,+\infty]$ условието

$$\partial L(x,y) \subset \partial K(x,y), \quad \forall (x,y) \in \operatorname{Dom} \partial L$$

влече, че K и L са еквивалентни с точност до крайна адитивна константа c, т.е. $K \sim (L+c)$.

След това разглеждаме случая, когато „външната" за субдиференциалното включване функция K се предполага pbwc и доказваме

Теорема 2.4.16. Нека X, Y са банахови пространства и нека $K : X\times Y \to [-\infty,+\infty]$ е собствена затворена pbwc седловидна функция.

Тогава за всяка собствена затворена седловидна функция $L : X\times Y \to [-\infty,+\infty]$ условията

$$\partial_1 \operatorname{cl}_1 L(\cdot,y) \subset \partial_1 K(\cdot,y), \text{ и } \partial_2(-\operatorname{cl}_2 L)(x,\cdot) \subset \partial_2(-K)(x,\cdot), \forall (x,y) \in X\times Y$$

влекат че K и L са еквивалентни с точност до крайна адитивна константа c, т.е. $K \sim (L+c)$.

Глава 3

Вариационен анализ на многозначни изображения

В тази глава изследваме многозначни изображения и многозначни изображения, зависещи от параметър. Такива изображения често се разглеждат в оптимизацията и се изучават интензивно през последните години.

В параграф 3.1 изследваме тип липшицова непрекъснатост (Aubin непрекъснатост) по отношение на параметър на множеството от решения на параметризирана минимаксна задача в банахово пространство произведение на банахови пространства. Даваме достатъчно условие за това изображението, което на стойност на параметъра съпоставя множеството от решения на задачата (което е възможно да бъде многозначно и неограничено) да има свойството на Aubin. Резултатите от този параграф са публикувани в [140].

В параграф 3.2 даваме критерий за метрическа регулярност на многозначно изображение, който е базиран на работи на J.-P. Aubin и негови съавтори. Доказваме и свързана с него теорема за неявната функция. Като приложения показваме, че критерият на Aubin води до известния факт, че изображение, свързано със система от равенства и неравенства е метрически регулярно тогава и само тогава, когато е в сила условието на Mangasarian-Fromovitz. Също така даваме ново необходимо и достатъчно условие за строга регулярност на вариационни неравенства върху многостенни множества. Представяме и ново доказателство, основано на критерия на Aubin, на теоремата за радиуса на метрическа регулярност. Резултатите от този параграф са публикувани в [63].

В параграф 3.3 е доказан принцип за дълга орбита или празна стойност за многозначно изображение. Принципът е използван за унифициран подход към някои резултати – теорема за фиксирана точка на многозначно изображение и теореми за сюрективност на еднозначни изображения. Резултатите от този параграф са публикувани в [96].

3.1 Параметризирана минимаксна задача: относно липшицов тип зависимост на решението от параметър

В този параграф доказваме достатъчни условия за Aubin непрекъснатост на изображението решение $\mathcal{S} : \lambda \rightrightarrows \mathcal{S}(\lambda)$ на параметризирана минимаксна задача

$$M(\lambda) \qquad \inf_{x \in K} \sup_{y \in L} f(x, y, \lambda),$$

където $\lambda \in \Lambda$ е параметър. Даваме примери, илюстриращи тези условия. Скицираме и няколко следствия, свързани със случая на изпъкнало-вдлъбнати гладки данни.

Нека в параметризираната минимаксна задача $M(\lambda)$ множествата K и L са непразни затворени подмножества на банахови пространства X и Y съответно; $\{f(\cdot, \cdot, \lambda) : X \times Y \to \mathbb{R}, \lambda \in \Lambda\}$ е фамилия от реалнозначни функции, параметризирана от $\lambda \in \Lambda$, където Λ е подмножество на банахово пространство Z.

Седлова точка на $f(\cdot, \cdot, \lambda)$ в $K \times L$ е всяка точка $(\overline{x}, \overline{y}) \in K \times L$, такава че

$$f(\overline{x}, y, \lambda) \leq f(\overline{x}, \overline{y}, \lambda) \leq f(x, \overline{y}, \lambda) \quad \forall x \in K, \quad \forall y \in L.$$

Всяка седлова точка $(\overline{x}, \overline{y})$ на $f(\cdot, \cdot, \lambda)$ в $K \times L$ може да бъде разглеждана и като решение на минимаксната задача $M(\lambda)$ поради това, че $(\overline{x}, \overline{y}) \in K \times L$ и $f(\overline{x}, \overline{y}) = \inf_{x \in K} \sup_{y \in L} f(x, y, \lambda)$. Да означим (възможно и празното) множество от всички седлови точки на функция $f(\cdot, \cdot, \lambda)$ в $K \times L$ с

$$\mathcal{S}(\lambda) := \{(\overline{x}, \overline{y}) \in K \times L : f(\overline{x}, y, \lambda) \leq f(\overline{x}, \overline{y}, \lambda) \leq f(x, \overline{y}, \lambda), \forall x \in K, \forall y \in L\}. \tag{3.1}$$

Това $\mathcal{S}(\lambda)$ да бъде непразно може да се осигури в редица случаи. Например, ако K и L са изпъкнали множества, $f(x, y, \lambda)$ е изпъкнала и полунепрекъсната отдолу по x, вдлъбната и полунепрекъсната отгоре по y и съществуват $x_0 \in K$ и $y_0 \in L$ такива, че $f(\cdot, y_0, \lambda)$ е инф-компактна и $f(x_0, \cdot, \lambda)$ е суп-компактна, то $\mathcal{S}(\lambda) \neq \emptyset$ съгласно минимаксен резултат на Hartung [81, Theorem 1] (виж още Aubin и Ekeland [8, Theorem 6.2.8]). Ако в допълнение $f(x, y, \lambda)$ е строго изпъкнала по x и строго вдлъбната по y, то $\mathcal{S}(\lambda)$ е едноточково.

Ние предполагаме, че седлови точки за $M(\lambda)$ съществуват и фокусираме нашето внимание към изучаването на липшицов тип зависимост на множеството от решения $\mathcal{S}(\lambda)$ от параметъра λ. Получаваме достатъчни условия за липшицов тип непрекъснатост на многозначното изображение

$$\mathcal{S} : \lambda \rightrightarrows \mathcal{S}(\lambda)$$

от Λ в непразните подмножества на $K \times L$.

Разбира се, когато изображението $\mathcal{S}$ е еднозначно, липшицовият тип непрекъснатост се разбира в класическия липшицов смисъл. Но изображението $\mathcal{S}$ може да бъде многозначно. Нещо повече, неговите стойности $\mathcal{S}(\lambda)$ могат да бъдат неограничени множества. Понятие за липшицов тип непрекъснатост, много подходящо за случая, е дадено от Aubin [4, 5]:

Многозначното изображение $S : \Lambda \rightrightarrows X$ има *свойството на Aubin*, или е *Aubin непрекъснато* около $(\bar{\lambda}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} S$, ако съществуват положителна константа κ и околности U на $\bar{x}$ и V на $\bar{\lambda}$, такива че

$$e(S(\lambda) \cap U, S(\mu)) \leq \kappa \|\lambda - \mu\|, \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda \cap V,$$

където $e(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B)$ е *ексцесът* от множество A до множество B като $e(\emptyset, B) = +\infty$. S се нарича *Aubin непрекъснато* ако S е Aubin непрекъснато около всяка точка $(\bar{\lambda}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} S$.

За различни приложения на Aubin непрекъснатостта в областта на нелинейния анализ може да се направи справка например в Aubin [4, 5], Aubin и Frankowska [10] и Rockafellar и Wets [152]. Известно е, че свойството на Aubin на изображение S около $(\bar{\lambda}, \bar{x})$ е еквивалентно на метрическата регулярност на S^{-1} около $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ и първоначално е въведено от Aubin в [5] под името *псевдо липшицова непрекъснатост*. Повече библиографски детайли има в книгата на Rockafellar и Wets [152].

Когато S е локално ограничено, Aubin непрекъснатостта съвпада с класическото понятие за липшицова непрекъснатост на многозначни изображения (виж Aubin и Frankowska [10] и Rockafellar и Wets [152])

$$e(S(\lambda), S(\mu)) \leq \kappa \|\lambda - \mu\|, \quad \forall \lambda, \mu,$$

но свойството на Aubin работи и без никакво условие за ограниченост на стойностите на S. Свойството на Aubin в действителност е липшицово свойство локализирано както в пространството образ така и в пространството домейн.

В подпараграф 3.1.1 даваме необходимите предварителни сведения и доказваме достатъчно условие за Aubin непрекъснатост на изображението решение $S : \Lambda \rightrightarrows X$ на параметризирана минимизационна задача

$$P(\lambda) \qquad \inf_{x \in K} f(x, \lambda).$$

Много автори изучават подобна на липшицовост зависимост от λ на решенията на асоциираното обобщено уравнение на Euler (включване)

$$0 \in \nabla_x f(x, \lambda) + N_K(x);$$

виж Bonnans и Shapiro [22], Dontchev и Rockafellar [65], Shapiro [155] и цитираната в тях литература за скорошни развития по темата. Тук ние не следваме този подход, защото изображението $St : \lambda \rightrightarrows St(\lambda)$, което на всяко λ присвоява множеството $St(\lambda)$ от решения на обобщеното уравнение на Euler не наследява свойството Aubin непрекъснатост от S (виж Пример 3.1.6 за параметризирана задача, такава че съответното S е Aubin непрекъснато, докато St не е).

В подпараграф 3.1.2 доказваме основния резултат (Теорема 3.1.10), който представлява достатъчно условие за Aubin непрекъснатост на изображението на седловите точки $\mathcal{S} : \Lambda \rightrightarrows X \times Y$ на параметризирана минимаксна задача $M(\lambda)$.

Ясно е, че резултатите от подпараграф 3.1.1 се съдържат в по-общата рамка на подпараграф 3.1.2. Въпреки това доказателството на по-простия случай помага за разбирането на по-техничното доказателство в общия случай.

Подпараграф 3.1.3 свързва получените резултати с някои въпроси от областта на диференциалните игри с двама играчи и нулева сума.

3.1.1 Параметризирана минимизационна задача

Както вече споменахме, работим в банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$.

За $C \subset X$ *функцията разстояние* до C е $d(x, C) := \inf_{c\in C} \|x - c\|$, ако $C \neq \emptyset$ и $d(x, C) := +\infty$, ако $C = \emptyset$.

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ се нарича *Gâteaux диференцируема* в $\overline{x} \in X$ ако съществува $\nabla f(\overline{x}) \in X^*$, наречен *Gâteaux производна* на f в $\overline{x}$, такъв че за всяко $h \in X$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{x} + th) - f(\overline{x})}{t} = \langle \nabla f(\overline{x}), h\rangle$$

и f се нарича *строго диференцируема* в $\overline{x}$ когато

$$\lim_{\substack{x\to\overline{x}\\ t\to 0}} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \langle \nabla f(\overline{x}), h\rangle.$$

За дадено отворено множество $U \subset X$ означаваме с $C^{1,\alpha}(U)$ класът от всички Gâteaux дифиренцируеми функции $f : U \to \mathbb{R}$, такива че $\nabla f : U \to X^*$ е *α-Hölder* непрекъснато в U, т.е. за някаква константа $L > 0$,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|^\alpha, \quad \forall x, y \in U.$$

Нека $(Z, \|\cdot\|)$ е банахово пространство, чиято норма ще означаваме също с $\|\cdot\|$. Нека S е *изображение* от $\Lambda \subset Z$ в X. Ако не е казано друго, под *изображение* разбираме *многозначно изображение*. За да подчертаем многозначността пишем $S : Z \rightrightarrows X$. *Обратното изображение* $S^{-1} : X \rightrightarrows Z$ на S се дефинира като $\lambda \in S^{-1}(x) \iff x \in S(\lambda)$. *Графиката*, *домейнът* и *образът* на S се дефинират съответно като

$$\operatorname{gph} S := \{(\lambda, x) \mid x \in S(\lambda)\}, \quad \operatorname{dom} S := \{\lambda \mid S(\lambda) \neq \emptyset\}, \quad \operatorname{rge} S := \operatorname{dom} S^{-1}.$$

Всяко произведение $X \times Z$ на банахови пространства X и Z разглеждаме със супремум нормата $\|(x, z)\| := \max\{\|x\|, \|z\|\}$.

Предположения

Нека $\{f(\cdot, \lambda) : X \to \mathbb{R}, \lambda \in \Lambda\}$ е фамилия от функции, параметризирана от $\lambda \in \Lambda \subset Z$. Търсим достатъчни условия за Aubin непрекъснатост на решенията на параметризираната система от минимизационни задачи с ограничения:

$$P(\lambda) \qquad\qquad \inf_{x\in K} f(x, \lambda),$$

където K е дадено непразно затворено множество в X.

За $\lambda \in \Lambda$, (възможно празното) множество от решения на минимизационната задача $P(\lambda)$ означаваме с

$$S(\lambda) := \left\{ \overline{x} \in K : f(\overline{x}, \lambda) = \inf_{x \in K} f(x, \lambda) \right\},$$

а нейната оптимална стойност с

$$m(\lambda) := \inf_{x \in K} f(x, \lambda).$$

Добре известно е, че дори за гладка параметризирана задача $P(\lambda)$ решението $S : \Lambda \rightrightarrows X$ може да не бъде липшицово. Например, за $f(x, \lambda) = \frac{1}{4}x^4 - \lambda x$, където $x, \lambda \in \mathbb{R}$ и $K = [-1, 1]$ виждаме, че за $\lambda \in (-1, 1)$ решението е $S(\lambda) = \{\sqrt[3]{\lambda}\}$ и че не е липшицово непрекъснато в $\lambda = 0$ (Bonnans и Shapiro [22, Example 4.31]).

Следователно, за да установим липшицово поведение на S се нуждаем от нещо повече от стандартните предположения. За целта анализираме $P(\lambda)$.

Дефиниция 3.1.1. Нека X и Z са банахови пространства. Нека $U \subset X$, $V \subset Z$ са непразни. Означаваме с $\mathfrak{L}^{\alpha,\beta}(U; V)$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ класа от всички функции $g : U \times U \times V \to \mathbb{R}$, такива че съществува константа $k_g > 0$, такава че за всички $x, x' \in U$ и всички $\lambda, \lambda' \in V$,

$$|g(x, x', \lambda) - g(x, x', \lambda')| \leq k_g \|x - x'\|^{\alpha} \|\lambda - \lambda'\|^{\beta}.$$

Това, че $g \in \mathfrak{L}^{1,1}(U; V)$ означава, че $g(x, x', \cdot)$ е липшицова в V и нейната най-добра липшицова константа $L(x, x')$ удовлетворява $L(x, x') \leq k\|x - x'\|$ за някоя положителна константа k и всички $x, x' \in U$.

С параметризираната фамилия от функции $\{f(\cdot, \lambda), \lambda \in \Lambda\}$ могат да бъдат асоциирани две функционални разлики: функцията $f_1 : X \times X \times \Lambda \to \mathbb{R}$, дефинирана като

$$f_1(x, x', \lambda) := f(x, \lambda) - f(x', \lambda)$$

и функцията $f_2 : \Lambda \times \Lambda \times X \to \mathbb{R}$, дефинирана като

$$f_2(\lambda, \lambda', x) := f(x, \lambda) - f(x, \lambda').$$

Двете функционални разлики са свързани посредством следното:

Твърдение 3.1.2. За всеки $U \subset X$, $V \subset Z$ функцията $f_1 \in \mathfrak{L}^{\alpha,\beta}(U; V)$ тогава и само тогава, когато $f_2 \in \mathfrak{L}^{\beta,\alpha}(V; U)$.

Вече можем да представим достатъчното условие за Aubin непрекъснатост на решението.

За дадена точка $(\overline{\lambda}, \overline{x}) \in \operatorname{gph} S$, разглеждаме локалното предположение (A) в $(\overline{\lambda}, \overline{x})$:

$$(A) \qquad \begin{cases} \text{съществуват околости } U \text{ на } \overline{x} \text{ и } V \text{ на } \overline{\lambda}, \text{ такива че} \\ 1.\ \ S(\lambda) \cap U \neq \varnothing \text{ за всички } \lambda \in \Lambda \cap V; \\ \text{и съществуват константи } c > 0 \text{ и } \alpha \in [0, 1] \text{ такива, че} \\ 2.\ \ f(x, \lambda') \geq m(\lambda') + c d^{1+\alpha}(x, S(\lambda')),\ \ \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda \cap V,\ \ \forall x \in S(\lambda) \cap U; \\ 3.\ \ f_1 \in \mathfrak{L}^{\alpha,1}(K; \Lambda \cap V). \end{cases}$$

От Твърдение 3.1.2 е ясно, че предположение $(A3)$ може да се замени с $f_2 \in \mathfrak{L}^{1,\alpha}(\Lambda \cap V; K)$.

Даваме няколко примера на параметризирани фамилии от функции $\{f(\cdot, \lambda), \lambda \in \Lambda\}$, за които (A) е в сила.

Липшицов тип непрекъснатост на изображението решение

Доказваме, че за дадено $(\bar{\lambda}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} S$, предположението (A) е достатъчно да осигури Aubin непрекъснатост на изображението решение S около $(\bar{\lambda}, \bar{x})$.

Твърдение 3.1.4. Да предположим, че X и Z са банахови пространства и да разгледаме фамилия от минимизационни задачи с ограничения $P(\lambda)$ параметризирана с $\lambda \in \Lambda \subset Z$.

Ако за някое $(\bar{\lambda}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} S$ предположението (A) е в сила, то

$$e(S(\lambda) \cap U, S(\mu)) \leq \frac{k_{f_1}}{c} \|\lambda - \mu\|, \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda \cap V$$

и следователно S е Aubin непрекъснато около $(\bar{\lambda}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} S$.

Примери и следствия

Първият пример е за негладка параметризирана минимизационна задача с липшицово изображение решение с неограничени стойности, което попада в обхвата на Твърдение 3.1.4.

Пример 3.1.5. Нека $K = \mathbb{R}^2$ и

$$f(x_1, x_2, \lambda) := |x_1 - x_2 - \lambda|,$$

$x_1, x_2, \lambda \in \mathbb{R}$. За параметризираната фамилия от минимизационни задачи без ограничения в равнината

$$P(\lambda) \qquad \inf_{x_1, x_2} f(x_1, x_2, \lambda).$$

изображението решение $S : \lambda \rightrightarrows S(\lambda)$ е с неограничени стойности и е липшицово непрекъснато.

Следващият пример показва, че изучаването на обобщеното уравнение на Euler може понякога да бъде неадекватно за получаването на Aubin непрекъснатост на изображението решение. Това се дължи на факта, че множеството от стационарни точки може да бъде по-голямо от множеството от минимуми.

Пример 3.1.6. Нека $K = \mathbb{R}^2$ и

$$f(x_1, x_2, \lambda) := (x_1 + \lambda x_2 - 1)^2 (x_2 + \lambda x_1 + 1)^2,$$

$x_1, x_2, \lambda \in \mathbb{R}$. За параметризираната фамилия от минимизационни задачи без ограничения в равнината

$$P(\lambda) \qquad \inf_{x_1,x_2} f(x_1, x_2, \lambda).$$

в точката $\overline{\lambda} = 1$ множеството от решения $S(\lambda)$ е по-малко от множеството от стационарните точки $St(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \in \nabla_x f(x, \lambda)\}$. Нещо повече, изображението S е Aubin непрекъснато около всяка точка от графиката си докато St не е Aubin непрекъснато около точката $(\overline{\lambda}, \overline{x}) \in \operatorname{gph} St$, където $\overline{\lambda} = 1$ и $\overline{x} = (0, 0)$.

Непосредствено от Твърдение 3.1.4 получаваме

Следствие 3.1.7. Нека за параметризираната система от минимизационни задачи $P(\lambda)$ е в сила следното предположение

$$(A') \qquad \begin{cases} \text{за всяко } \lambda \in \Lambda, \text{ всяко } x \in K, \text{ и някое } c > 0 \\ 1.\ S(\lambda) \neq \emptyset; \\ 2.\ f(x,\lambda) \geq m(\lambda) + cd^2(x, S(\lambda)); \\ 3.\ f \in C^{1,1}(X \times Z). \end{cases}$$

Тогава изображението решение $S : \Lambda \rightrightarrows X$ е липшицово непрекъснато в Λ.

Използваме Следствие 3.1.7, за да получим съществуване и липшицова непрекъснатост на решението на линейно пертурбирана оптимизационна задача, като предполагаме малко по-слаба версия (виж (3.2) по-долу) на равномерното условие за ръста от втори ред (Definition 5.19 в Bonnans и Shapiro [22]) и $C^{1,1}$ данни. По този начин разширяваме Bonnans и Shapiro [22, Theorem 5.17] (виж също Bonnans и Shapiro [22, Remark 5.19]), където се предполагат C^2 данни.

Да припомним, че банаховото пространство X има *свойството Radon–Nikodym* (*RNP*) ако за всяко ограничено множество C и всяко $\varepsilon > 0$, съществува $x \in C$, което не принадлежи на затворената изпъкнала обвивка на $C \setminus \{x + \varepsilon B^\circ\}$. Всички банахови пространства, които имат сепарабелно дуално и всички рефлексивни пространства имат RNP. В Diestel и Uhl [59, p. 157] има дълъг списък от еквивалентни дефиниции на RNP.

Следствие 3.1.8. Нека банаховото пространство X има свойството Radon–Nikodym. Разглеждаме параметризирана фамилия от минимизационни задачи $P(\lambda)$, където параметризиращото пространство е X^* и $f : X \times X^* \to \mathbb{R}$ е дефинирана като $f(x, \lambda) := f(x) + \langle \lambda, x \rangle$.

Предполагаме, че множеството K, задаващо ограниченията е затворено и изпъкнало, $f \in C^{1,1}(X)$ и $S(0)$ е непразно.

Да допуснем, че съществуват околност V на началото 0 на X^* и константа $c > 0$, такива че за всички $\lambda \in V$ и всички $x_\lambda \in S(\lambda)$ следва, че

$$f(x, \lambda) \geq f(x_\lambda, \lambda) + c\|x - x_\lambda\|^2, \quad \forall x \in K. \tag{3.2}$$

Тогава съществува околност W на началото 0 в X^*, такава че $S(\lambda)$ е еднозначно и липшицово непрекъснато в W.

3.1.2 Параметризирана минимаксна задача

В този подпараграф изучаваме поведението на изображението решение на параметризирана фамилия от минимаксни задачи.

Предварителни сведения и формулировка на задачата

Нека X и Y са банахови пространства и нека $\{f(\cdot,\cdot,\lambda) : X\times Y \to \mathbb{R}, \lambda \in \Lambda\}$ е фамилия от функции дефинирани в произведението $X\times Y$, параметризирана с $\lambda \in \Lambda \subset Z$. Разглеждаме параметризираната фамилия от минимаксни задачи

$$M(\lambda) \qquad \inf_{x\in K} \sup_{y\in L} f(x,y,\lambda),$$

където ограниченията са непразни затворени множества $K \subset X$ и $L \subset Y$. Означаваме оптималната стойност на $M(\lambda)$ с $\mathfrak{m}(\lambda)$ и (възможно празното) множество от седлови точки на $f(\cdot,\cdot,\lambda)$ в $K \times L$ с $\mathcal{S}$, дадено в (3.1).

За множество $C \subset X \times Y$ означаваме с $\pi_X C$ и $\pi_Y C$ *каноничните проекции* на C върху пространствата X и Y съответно. По-точно, $x \in \pi_X C$ когато съществува някое $y \in Y$, такова че $(x,y) \in C$ и $y \in \pi_Y C$ когато съществува някое $x \in X$, такова че $(x,y) \in C$.

Добре известно е, че множеството от седловидни точки е множество произведение, т.е.

$$\mathcal{S}(\lambda) = \pi_X\mathcal{S}(\lambda) \times \pi_Y\mathcal{S}(\lambda).$$

С параметризираната фамилия от функции $\{f(\cdot,\cdot,\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ по естествен начин се асоциират три функционални разлики:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}_1(x,x',\lambda,y) &:= f(x,y,\lambda) - f(x',y,\lambda),\\
\mathfrak{f}_2(y,y',\lambda,x) &:= f(x,y,\lambda) - f(x,y',\lambda),\\
\mathfrak{f}_3(\lambda,\lambda',x,y) &:= f(x,y,\lambda) - f(x,y,\lambda').
\end{aligned}$$

По аналогия с Дефиниция 3.1.1 пишем $\mathfrak{f}_1 \in \mathfrak{L}_W^{\alpha,\beta}(U;V)$ когато функциите $f_1^y(x,x',\lambda) := \mathfrak{f}_1(x,x',\lambda,y)$ са такива, че за всяко $y \in W$, $f_1^y \in \mathfrak{L}^{\alpha,\beta}(U;V)$ и $\sup_{y\in W} k_{f_1^y}$ е краен. Полагаме $k_{\mathfrak{f}_1} := \sup_{y\in W} k_{f_1^y}$.

Лесни пресмятания като тези направени в доказателството на Твърдение 3.1.2 показват, че $\mathfrak{f}_1 \in \mathfrak{L}_W^{\alpha,\beta}(U;V)$ точно когато $\mathfrak{f}_3 \in \mathfrak{L}_W^{\beta,\alpha}(V;U)$ и че $\mathfrak{f}_2 \in \mathfrak{L}_U^{\alpha,\beta}(W;V)$ точно когато $\mathfrak{f}_3 \in \mathfrak{L}_U^{\beta,\alpha}(V;W)$.

Нека $(\bar\lambda,\bar x,\bar y) \in \operatorname{gph}\mathcal{S}$. Задаваме следното локално предположение $(\mathcal{A})$ в $(\bar\lambda,\bar x,\bar y)$:

$$(\mathcal{A}) \qquad \begin{cases}
\text{съществуват околности } U \text{ на } \bar x,\ W \text{ на } \bar y, \text{ и } V \text{ на } \bar\lambda, \text{такива че}\\
1.\quad \mathcal{S}(\lambda)\cap[U\times W] \neq \varnothing \text{ за всяко } \lambda \in \Lambda\cap V;\\
\text{и съществуват константи } c>0 \text{ и } \alpha \in [0,1] \text{ такива, че}\\
2.\quad f(x,y',\lambda') \geq \mathfrak{m}(\lambda') + cd^{1+\alpha}(x,\pi_X\mathcal{S}(\lambda')),\\
\qquad f(x',y,\lambda') \leq \mathfrak{m}(\lambda') - cd^{1+\alpha}(y,\pi_Y\mathcal{S}(\lambda')),\\
\qquad \forall\lambda,\lambda' \in \Lambda\cap V, \forall(x,y)\in\mathcal{S}(\lambda)\cap[U\times W], \forall(x',y')\in\mathcal{S}(\lambda');\\
3.\ \mathfrak{f}_1 \in \mathfrak{L}^{\alpha,1}_{L\cap W}(K;\Lambda\cap V) \text{ и } \mathfrak{f}_2 \in \mathfrak{L}^{\alpha,1}_{K\cap U}(L;\Lambda\cap V).
\end{cases}$$

Ясно е, че условието ($\mathcal{A}3$) може да бъде заменено с

$$\mathfrak{f}_3 \in \mathfrak{L}^{1,\alpha}_{L\cap W}(\Lambda \cap V; K) \cap \mathfrak{L}^{1,\alpha}_{K\cap U}(\Lambda \cap V; L).$$

Показваме състоятелността на нашата основна хипотеза като даваме някои примери на параметризирани фамилии от функции $\{f(\cdot,\cdot,\lambda), \lambda \in \Lambda\}$, за които ($\mathcal{A}$) е в сила.

Липшицов тип непрекъснатост на изображението седлова точка

Тук доказваме, че предположението ($\mathcal{A}$) е достатъчно за Aubin непрекъснатост на изображението седлова точка $\mathcal{S}$. Да отбележим, че този резултат не може да бъде получен (или поне не по очевиден начин) от случая на минимизация. Наистина, ако $f(x, y, \lambda)$ удовлетворява предположението ($\mathcal{A}$), то функцията $f(x, \lambda) := \sup_{y\in L} f(x, y, \lambda)$ удовлетворява предположението ($A2$), но ($A3$) за $f(x, \lambda)$ не може да бъде получено от ($\mathcal{A}3$) тъй като разликите от супремуми не се поддават на преобразуване.

Теорема 3.1.10. Да предположим, че за параметризираната фамилия от минимаксни задачи $M(\lambda)$ предположението ($\mathcal{A}$) е в сила за някое $(\bar\lambda, \bar x, \bar y) \in \operatorname{gph}\mathcal{S}$. Тогава за всички $\lambda, \mu \in \Lambda \cap V$

$$e(\mathcal{S}(\lambda) \cap [U \times W], \mathcal{S}(\mu)) \le \frac{2k}{c}\|\lambda - \mu\|,$$

където $k := \max\{k_{\mathfrak{f}_1}, k_{\mathfrak{f}_2}\}$ и следователно изображението седлова точка $\mathcal{S} : \Lambda \rightrightarrows X \times Y$ е Aubin непрекъснато около $(\bar\lambda, \bar x, \bar y) \in \operatorname{gph}\mathcal{S}$.

Като непосредствено следствие получаваме

Следствие 3.1.11. Нека за параметризираната фамилия от минимаксни задачи $M(\lambda)$ следното предположение е в сила:

$$(\mathcal{A}') \qquad \begin{cases} 1. & \mathcal{S}(\lambda) \neq \emptyset \text{ за всяко } \lambda \in \Lambda; \\ 2. & \text{за някоя константа } c > 0 \text{ и всички } \lambda{\in}\Lambda, (x, y){\in}\mathcal{S}(\lambda), (x', y'){\in}K{\times}L : \\ & f(x', y, \lambda) \ge \mathfrak{m}(\lambda) + c d^2(x', \pi_X\mathcal{S}(\lambda)), \\ & f(x, y', \lambda) \le \mathfrak{m}(\lambda) - c d^2(y', \pi_Y\mathcal{S}(\lambda)); \\ 3. & f \in C^{1,1}(X \times Y \times Z). \end{cases}$$

Тогава изображението седлова точка $\mathcal{S} : \Lambda \to X \times Y$ е еднозначно и липшицово непрекъснато.

3.2 Критерий на Aubin за метрическа регулярност

В този параграф изследваме метрическа регулярност на многозначни изображения. Доказваме критерий, използващ производни за метрическа регулярност на многозначно изображение, който е базиран на работи на J.-P. Aubin и негови съавтори. Получаваме и свързана с него теорема за неявното изображение и няколко приложения.

Работим в банахови пространства $(X, \|\cdot\|)$ и $(Y, \|\cdot\|)$. Околност на точка x е отворено множество, което съдържа x. Разстоянието от точка x до множество A се означава с $d(x, A)$. Под изображение F от X в Y обикновено разбираме многозначно изображение и пишем $F : X \rightrightarrows Y$, като дефинираме неговото обратно изображение F^{-1} като $F^{-1}(y) = \{x \mid y \in F(x)\}$ и неговата графика като $\operatorname{gph} F = \{(x, y) \mid y \in F(x)\}$. Когато F е еднозначно изображение (функция) пишем $F : X \to Y$.

Изображение $F : X \rightrightarrows Y$ се нарича *метрически регулярно* в $\bar{x}$ за $\bar{y}$ ако $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ и съществуват константа $\kappa > 0$ и околности U на $\bar{x}$ и V на $\bar{y}$ такива, че

$$d(x, F^{-1}(y)) \le \kappa d(y, F(x)) \text{ за всички } (x, y) \in U \times V. \tag{3.3}$$

Метрическата регулярност може да се отъждестви с крайност на *модула на регулярност*, дефиниран като

$$\operatorname{reg} F(\bar{x}|\bar{y}) = \inf\{\, \kappa \mid \text{ съществуват околности } U \text{ и } V, \text{ такива че (3.3) е в сила}\}.$$

Липсата на метрическа регулярност се означава с $\operatorname{reg} F(\bar{x}|\bar{y}) = \infty$.

Концепцията за метрическа регулярност може да се проследи до някои класически резултати на Banach, Lyusternik и Graves. Напоследък бе призната централната ѝ роля във вариационния анализ както за теоретичните разработки, като например получаването на необходими условия за оптималност, така и за числено насочените изследвания, например за намирането на граници на грешките за приближени решения. Дискусии върху свойството метрическа регулярност, неговата връзка с други свойства и характеризации чрез различни приближения има в Rockafellar и Wets [152] и Ioffe [90].

За дадено изображение $F : X \rightrightarrows Y$, *графичната* (*контингентна*) *производна* на F в $(x, y) \in \operatorname{gph} F$ е изображението $DF(x|y) : X \rightrightarrows Y$, чиято графика е тангенциалният конус $T_{\operatorname{gph} F}(x, y)$ към $\operatorname{gph} F$ в (x, y):

$$v \in DF(x|y)(u) \iff (u, v) \in T_{\operatorname{gph} F}(x, y).$$

Да напомним, че тангенциалният конус се дефинира така: $(u, v) \in T_{\operatorname{gph} F}(x, y)$ когато съществуват редици $t_n \downarrow 0$, $u_n \to u$ и $v_n \to v$, такива че $y + t_n v_n \in F(x + t_n u_n)$ за всяко n.

Изображението $DF(x|y)$ е положително хомогенно (т.е. такова, чиято графика е конус). По-точно имаме $DF(x|y)(0) \ni 0$ и $DF(x|y)(\lambda u) = \lambda DF(x|y)(u)$ за всяко $u \in X$ и за всяко $\lambda > 0$. *Конвексифицираната графична производна* $D^{\star\star} F(x|y)$ на F в x за y се дефинира по подобен начин:

$$v \in D^{\star\star} F(x|y)(u) \iff (u, v) \in \operatorname{co} \; T_{\operatorname{gph} F}(x, y),$$

където co означава затворената изпъкнала обвивка.

За произволно положително хомогенно изображение $H : X \rightrightarrows Y$ *вътрешната* и *външната норма* (виж Rockafellar и Wets [152, Section 9D]) се дефинират като:

$$\|H\|^- = \sup_{x\in B} \inf_{y\in H(x)} \|y\| \quad \text{и} \quad \|H\|^+ = \sup_{x\in B} \sup_{y\in H(x)} \|y\|.$$

Трябва да се отбележи, че нито $\|H\|^-$, нито $\|H\|^+$ удовлетворяват условията в дефиницията на истинска функция норма. Външната и вътрешната норма са свързани посредством спрегнати изображения. За положително хомогенно изображение $F : X \rightrightarrows Y$ *горното спрегнато изображение* $F^{*+} : Y^* \rightrightarrows X^*$ се дефинира като

$$(y^*, x^*) \in \operatorname{gph} F^{*+} \iff \langle x^*, x\rangle \le \langle y^*, y\rangle \text{ за всяко } (x, y) \in \operatorname{gph} F,$$

а *долното спрегнато изображение* $F^{*-} : Y^* \rightrightarrows X^*$ като

$$(y^*, x^*) \in \operatorname{gph} F^{*-} \iff \langle x^*, x\rangle \ge \langle y^*, y\rangle \text{ за всяко } (x, y) \in \operatorname{gph} F,$$

където X^* и Y^* са спрегнатите пространства на X и Y. Borwein доказва в [23] следната релация на дуалност между външната и вътрешната норма на сублинейно изображение F (т.е. такова, чиято графика е изпъкнал конус) със затворена графика:

$$\|F\|^+ = \|F^{*+}\|^- = \|F^{*-}\|^- \quad \text{и} \quad \|F\|^- = \|F^{*+}\|^+ = \|F^{*-}\|^+.$$

Да напомним, че изображение $F : X \rightrightarrows Y$ има локално затворена графика в $(\bar{x}, \bar{y})$ когато $\operatorname{gph} F \cap (B[\bar{x}, r] \times B[\bar{y}, r])$ е затворено множество за някое $r > 0$.

Централният резултат в този параграф е следната

Теорема 3.2.1 (критерий на Aubin). Нека X и Y са банахови пространства, а изображението $F : X \rightrightarrows Y$ е с локално затворена графика в $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$. Тогава

$$\operatorname{reg} F(\bar{x}|\bar{y}) \le \limsup_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ (x,y)\in\operatorname{gph} F}} \|DF(x|y)^{-1}\|^- \tag{3.4}$$

и следователно F е метрически регулярно в $\bar{x}$ за $\bar{y}$ при условие, че

$$\limsup_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ (x,y)\in\operatorname{gph} F}} \|DF(x|y)^{-1}\|^- < \infty. \tag{3.5}$$

Ако X е крайномерно, то (3.4) става равенство, т.е.

$$\operatorname{reg} F(\bar{x}|\bar{y}) = \limsup_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ (x,y)\in\operatorname{gph} F}} \|DF(x|y)^{-1}\|^- \tag{3.6}$$

и следователно F е метрически регулярно в $\bar{x}$ за $\bar{y}$ тогава и само тогава, когато (3.5) е в сила. Нещо повече, когато и двете пространства X и Y са крайномерни имаме

$$\operatorname{reg} F(\bar{x}|\bar{y}) = \limsup_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\ (x,y)\in\operatorname{gph} F}} \|D^{\star\star} F(x|y)^{-1}\|^-. \tag{3.7}$$

Теорема 3.2.1 може да се разглежда като частично разширение на Theorem 5.4.3 в книгата на Aubin и Frankowska [10], където е дадено достатъчно условие за свойството на Aubin на обратното изображение F^{-1}. Предшестващи резултати има в Aubin [3] и Aubin и Frankowska [9]. Въпросното условие в общия случай е по-слабо от (3.5) но, както виждаме тук, в крайномерно X в действителност е еквивалентно на него. Да припомним, че изображение $S : Y \rightrightarrows X$ има *свойството на Aubin* в $\bar{y}$ за $\bar{x}$ когато $(\bar{y}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} S$ и съществуват околности V на $\bar{y}$ и U на $\bar{x}$, такива че

$$e(S(y) \cap U, S(y')) \leq \kappa \|y - y'\| \quad \text{за всички } \; y, y' \in V, \tag{3.8}$$

където $e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$ е *ексцесът* от A до B. Известно е, че свойството на Aubin за изображение S е еквивалентно на метрическата регулярност на неговото обратно S^{-1} и е било въведено от Aubin в [5] под името *псевдо липшицова непрекъснатост*. То е изучавано в Aubin и Frankowska [9] в крайномерния случай, повече библиографски детайли има в Rockafellar и Wets [152]. Нещо повече, инфимумът на константите κ в (3.8) е равен на $\operatorname{reg} S^{-1}(\bar{x}|\bar{y})$.

Равенството (3.7) е получено наскоро в Aubin, Bayen, Bonneuil и Saint-Pierre [7] с доказателство базирано на теорията на преживяемостта. Даденото тук доказателство на (3.7) е инспирирано от доказателството на Theorem 3.2.4 в Aubin [6], направено от Frankowska.

Характеризацията на метрическата регулярност в Теорема 3.2.1 допълва и в известен смисъл завършва резултати, първоначално изложени от J.-P. Aubin и негови съавтори. По тази причина ние я наричаме *критерий на Aubin за метрическа регулярност*.

В някакъв смисъл дуален на критерия на Aubin е известният критерий на Mordukhovich в крайна размерност (виж Mordukhovich [122] и Rockafellar и Wets [152]), който използва *копроизводната* $D^*F(x|y)$, дефинирана като

$$v \in D^*F(x|y)(u) \iff (v, -u) \in N_{\operatorname{gph} F}(x, y),$$

където $N_C(x)$ е неизпъкналият граничен нормален конус към множеството C в x. Критерият на Mordukhovich казва, че F е метрически регулярно в $\bar{x}$ за $\bar{y}$ тогава и само тогава, когато

$$\|D^*F^{-1}(\bar{y}|\bar{x})\|^+ < \infty.$$

Би могло да се очаква, че всеки от тези критерии би могъл да бъде получен директно от другия и наистина това е така когато множеството $\operatorname{gph} F$ е Clarke регулярно (виж Rockafellar и Wets [152, 8.40 и 11.29]). В безкрайна размерност характеризации на метрическата регулярност чрез копроизводни предполага нещо повече за пространствата, например да бъдат асплундови (виж Mordukhovich [123], Mordukhovich и Shao [125]). Когато пространството домейн X е крайномерно, а пространството образ Y е произволно банахово пространство, необходимо и достатъчно условие за метрическа регулярност в термините на приближена копроизводна на Ioffe е дадено в Jourani и Thibault [99]. Последният резултат е най-близък от литературата, известна на автора до Теорема 3.2.1.

Книгата на Klatte и Kummer [102] също е добър източник на информация за критериите за метрическа регулярност.

Ако $F : X \to Y$ е ограничено линейно изображение, което означаваме с $F \in L(X, Y)$, то критерият на Aubin (3.6) е в сила за банахови пространства X и Y и се свежда до $\operatorname{reg} F(\bar{x}|\bar{y}) = \|F^{-1}\|^{-}$. Еквивалентно, F е метрически регулярно (във всяка точка) тогава и само тогава, когато F е сюрективно. Това покрива класическият случай на принципа на отвореното изображение на Banach. Еквивалентност между метрическа регулярност в началото, крайност на вътрешната норма и сюрективност е в сила също за изображения действащи в банахови пространства, чиито графики са затворени и изпъкнали конуси.

В подпараграф 3.2.2 даваме доказателство на Теорема 3.2.1 като първо получаваме частта достатъчност на критерия на Aubin като следствие от по-обща теорема за неявното изображение (Теорема 3.2.3), доказана в подпараграф 3.2.1, която се отнася до изображението решение на обобщено уравнение (включване) от вида

$$0 \in G(p, x), \tag{3.9}$$

където p е параметър. Показваме, че ако частичната графична производна по отношение на x на изображението G е ограничена в смисъла на (3.5), то G има свойството *частична метрическа регулярност*.

В свързаната статия [110], Ledyaev и Zhu получават теорема за неявното изображение за общо включване от вида (3.9) в термините на копроизводни в банахови пространства като предполагат, че те имат Fréchet гладки липшицови камбановидни функции. Като оставим настрана това, че условието с производни в нашата Теорема 3.2.3 и условието с копроизводни в Ledyaev и Zhu [110, Theorem 3.7] са независими едно от друго и не могат да бъдат сравнени, ние налагаме по-слаби условия върху изображението G и работим в произволни банахови пространства X и Y.

В подпараграф 3.2.3 даваме приложения на критерия на Aubin за системи от неравенства и за вариационни неравенства като получаваме нова характеризация на строгата регулярност на вариационни неравенства върху многостенни множества. Също така представяме ново доказателство на теоремата (на Eckart-Young) за радиуса на метрическа регулярност, първоначално доказана в Dontchev, Lewis и Rockafellar [62] с помощта на критерия на Mordukhovich. За историята и скорошните развития по темата, виж Dontchev, Lewis и Rockafellar [62], Dontchev и Rockafellar [66] и Dontchev и Lewis [61].

3.2.1 Теорема за неявното изображение

В този подпараграф изучаваме включването (обобщеното уравнение)

$$0 \in G(p, x),$$

където $G : P \times X \rightrightarrows Y$, X и Y са банахови пространства, P е метрично пространство, $x \in X$ е променливата, по която решаваме и $p \in P$ е параметър. Означаваме с $S : P \rightrightarrows X$

изображението решение, което асоциира със стойност p множеството от решения

$$S(p) := \{x \in X \mid G(p,x) \ni 0\}.$$

Показваме, че локалната ограниченост на частичната графична производна на изображението G по x, от вида посочен в (3.5) влече метрическа регулярност на G. Частичната графична производна $D_xG(p,x|y)$ на G се дефинира като графичната производна на изображението $x \mapsto G(p,x)$ с фиксирано p.

Теорема 3.2.3 (**за неявното изображение**). Нека X и Y са банахови пространства и нека P е метрично пространство. Разглеждаме изображение $G : P \times X \rightrightarrows Y$ и точка $(\bar{p},\bar{x},0) \in \operatorname{gph} G$, такива че графиката на G е локално затворена близо до $(\bar{p},\bar{x},0)$ и функцията $p \to d(0,G(p,\bar{x}))$ е полунепрекъсната отгоре в $\bar{p}$. Тогава за всеки положителен скалар c, удовлетворяващ

$$\limsup_{\substack{(p,x,y)\to(\bar{p},\bar{x},0)\\ (p,x,y)\in\operatorname{gph} G}} \|D_xG(p,x|y)^{-1}\|^- < c$$

съществуват околност V на $\bar{p}$ и околност U на $\bar{x}$, такива че

$$d(x,S(p)) \le cd(0,G(p,x)) \quad \text{за } x \in U \text{ и } p \in V. \tag{3.10}$$

Релацията (3.10), получена в Теорема 3.2.3 може да се разглежда като *метрическа регулярност на G по отношение на x* в $(\bar{p},\bar{x})$ за 0. Заедно с частичната метрическа регулярност на G по x, можем да дефинираме частично свойство на Aubin за G по p по следния начин: казваме, че $G : P \times X \rightrightarrows Y$ има *свойството на Aubin по отношение на p равномерно по x* в $(\bar{p},\bar{x})$ за 0 ако $0 \in G(\bar{p},\bar{x})$ и съществуват константа $\kappa > 0$ и околности O на 0, Q на $\bar{p}$ и U на $\bar{x}$, такива че

$$e(G(p,x)\cap O, G(p',x)) \le \kappa\rho(p,p') \text{ за всички } \; p,p' \in Q \text{ и } x \in U.$$

Като комбинираме тази дефиниция с (3.10) получаваме (виж също Ledyaev и Zhu [110, Corollary 3.9])

Твърдение 3.2.5. Нека $G : P \times X \rightrightarrows Y$ е метрически регулярно по отношение x и има свойството на Aubin по отношение на p равномерно по x в $(\bar{p},\bar{x})$ за 0. Тогава изображението решение S има свойството на Aubin в $\bar{p}$ за $\bar{x}$.

3.2.2 Доказателство на критерия на Aubin

Този подпараграф съдържа доказателството на Теорема 3.2.1, в което съществено се използва Теорема 3.2.3.

3.2.3 Приложения на критерия на Aubin

Като първо специфично приложение на критерия на Aubin разглеждаме задача за съвместимост на система от ограничения:

$$\text{(3.11)} \qquad \text{да се намери } x \in \boldsymbol{R}^n \text{ такова, че } f_i(x) \begin{cases} = 0 & \text{за } i = 1, \dots, r, \\ \leq 0 & \text{за } i = r+1, \dots, m, \end{cases}$$

където $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Тази система може да бъде записана и като включването $0 \in F(x)$ за $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, дадено като

$$\text{(3.12)} \qquad F(x) = f(x) + K,$$

където $f = (f_1, \dots, f_m)$ и $K = \{0\}^r \times \boldsymbol{R}_+^{m-r}$.

Нека $\bar{x}$ е решение на (3.11) и нека f е строго диференцируема в $\bar{x}$ (т.е. $\operatorname{lip}(f - \nabla f(\bar{x}))(\bar{x}) = 0$, където $\nabla f(\bar{x}) \in L(X, Y)$ е строгата производна, а $\operatorname{lip} f(\bar{x}) = \limsup\limits_{\substack{x,x' \to \bar{x} \\ x \neq x'}} \dfrac{\|f(x) - f(x')\|}{\|x - x'\|}$ е *липшицовият модул* на f в $\bar{x}$).

Означаваме индексното множество на активните ограничения неравенства в $\bar{x}$ с

$$\bar{J} = \{i \in \{r+1, \dots, m\} \mid f_i(\bar{x}) = 0\}.$$

Показваме, че критерият на Aubin директно води до следния добре известен резултат:

Теорема 3.2.6. Изображението F от (3.12) е метрически регулярно в $\bar{x}$ за 0 тогава и само тогава, когато е в сила условието на Mangasarian-Fromovitz: векторите $\nabla f_i(\bar{x})$, $i = 1, \dots, r$ са линейно независими и съществува $w \in \mathbb{R}^n$, такова че

$$\begin{cases} \nabla f_i(\bar{x}) w = 0 & \text{за } i = 1, \dots, r, \\ \nabla f_i(\bar{x}) w < 0 & \text{за } i \in \bar{J}. \end{cases}$$

Второто приложение е за изображение, описващо вариационно неравенство

$$\text{(3.13)} \qquad \langle f(x), u - x \rangle \geq 0 \text{ за всяко } u \in C,$$

където $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и C е непразно изпъкнало затворено множество $\mathbb{R}^n$, което е *многостен*. В термините на нормалния конус

$$N_C(x) = \begin{cases} \{y \mid \langle y, u - x \rangle \leq 0 \text{ за всяко } u \in C\} & \text{за } x \in C, \\ \varnothing & \text{в противен случай,} \end{cases}$$

можем да запишем вариационното неравенство (3.13) като включването $0 \in F(x)$, където

$$\text{(3.14)} \qquad F(x) = f(x) + N_C(x).$$

Предполагаме, че $\bar{x}$ е решение на (3.13) и f е строго диференцируема в $\bar{x}$.

Тогава теоремата на Lyusternik-Graves (виж например Aubin [5], Aubin и Frankowska [9], Dontchev, Lewis и Rockafellar [62] и Ioffe [90]) позволява да ограничим нашето внимание до линеаризираното изображение

$$F_0(x) = f(\bar{x}) + A(x - \bar{x}) + N_C(x), \quad \text{където } A = \nabla f(\bar{x}).$$

Нека $[v]$ е подпространство с размерност едно (или нула за $v = 0$), породено от вектор $v \in \mathbb{R}^n$, т.е. $[v] = \{\tau v \mid \tau \in \mathbb{R}\}$ и нека $[v]^\perp$ е неговото ортогонално допълнение. Като се въведе *критичният конус* $K(x, v) := T_C(x) \cap [v]^\perp$ към множеството C в $x \in C$ за $v \in N_C(x)$, графичната производна на F_0 се изразява като

$$DF_0(x|y)(u) = Au + N_{K(x,v)}(u).$$

За всеки конус K, множество от вида

$$F = K \cap [v]^\perp \text{ за някое } v \in K^0,$$

където K^0 е полярата на K, се нарича *страна* на K. Най-голямата от страните е самото K, докато най-малката е множеството $K \cap (-K)$, което е и най-голямото подпространство, съдържащо се в K. Всеки многостенен конус има краен брой страни.

В Dontchev и Rockafellar [64, Theorem 1] е доказано, че метрическата регулярност на изображение F от вида (3.14) с многостенно множество C влече по-силно свойство, наречено строга регулярност. Изображение $F : X \rightrightarrows Y$ се нарича *строго регулярно* в $\bar{x}$ за $\bar{y}$ ако е метрически регулярно там и в допълнение графичната локализация на неговото обратно F^{-1} около $(\bar{y}, \bar{x})$ е еднозначна. С други думи, F е строго регулярно в $\bar{x}$ за $\bar{y}$ когато съществуват околности U на $\bar{x}$ и V на $\bar{y}$ такива, че изображението $V \ni y \mapsto F^{-1}(y) \cap U$ е липшицова функция.

Прилагаме критерия на Aubin, за да получим ново необходимо и достатъчно условие за строга регулярност на вариационни неравенства върху многостенни множества, което допълва критерия, даден в Dontchev и Rockafellar [64, Theorem 2]:

Теорема 3.2.7. Изображението (3.14) е строго регулярно в $\bar{x}$ за $\bar{y}$ тогава и само тогава, когато за всеки избор на страни F_1 и F_2 на критичния конус $\bar{K}$ към множеството C в $\bar{x}$ за $\bar{v} = \bar{y} - f(\bar{x})$, такива че $F_1 \supset F_2$, е изпълнено следното условие:

$$\forall\, v \in R^n \quad \exists\, u \in F_1 - F_2 \text{ такова, че } (v - Au) \in (F_1 - F_2)^0 \text{ и } v - Au \perp u.$$

Трето приложение на критерия на Aubin е ново доказателство на теоремата за радиуса на метрическа регулярност, първоначално доказана от Dontchev, Lewis и Rockafellar в [62] с критерия на Mordukhovich:

Теорема 3.2.8. Нека X и Y са крайномерни линейни нормирани пространства и нека $F : X \rightrightarrows Y$ има затворена графика локално около $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$. Тогава

$$\inf_{G \in L(X,Y)} \{\|G\| \mid F + G \text{ не е метрически регулярно в } \bar{x} \text{ за } \bar{y} + G(\bar{x})\} = \frac{1}{\operatorname{reg} F(\bar{x}|\bar{y})}.$$

Нещо повече, инфимумът не се променя ако се вземе по отношение на линейните изображения G с ранг 1 и остава непроменен също така когато пертурбациите G са локално липшицови непрекъснати функции като $\|G\|$ се замени с липшицовият модул $\operatorname{lip} G(\bar{x})$ на G в $\bar{x}$.

Да отбележим, че във второто издание на книгата на Dontchev и Rockafellar *Implicit functions and solution mappings* от 2014 г. като доказателство на този резултат (Theorem 6A.7 там) е приведено доказателството с критерия на Aubin от статията на Dontchev, Quincampoix и Zlateva [63], а не първоначалното му доказателство от статията на Dontchev, Lewis и Rockafellar [62].

3.3 Принцип за дълга орбита или празна стойност (LOEV principle), теореми за фиксирана точка и за сюрективност

Добре известно е, че съществуват близки отношения между итерационните схеми, свързани с дисипативни механични системи, вариационният принцип на Ekeland, теореми за фиксираната точка и теореми за обратната и неявната функция от всякакви видове, виж например Aubin и Ekeland [8].

В този параграф изследваме тези отношения в нова светлина. Обобщавайки работата на Ivanov [92] (виж също Fabian и Priess [72], Penôt [132, p.62]), получаваме гъвкав принцип за дълга орбита или празна стойност (LOEV principle), виж Теорема 3.3.2 и Следствие 3.3.3.

Читателят може да забележи определено сходство между условията, наложени на изображението S в LOEV принципа и тези в теоремата за фиксирана точка на Caristi-Kirk. Наистина тя лесно следва от него, виж Теорема 3.3.4.

Остатъкът от този параграф е посветен на резултати за сюрективност. Те се получават от оригиналната Теорема 3.3.8, която може да се разглежда като някакъв вид интерполация между класическата теорема на Graves и неотдавнашния резултат на Ekeland [69]. Освен това ние не предполагаме диференцируемост в обичайния смисъл, а вместо това използваме за целта обобщение на така наречената контингентна производна, виж например Aubin и Frankowska [10].

Теорема 3.3.8 може да се разглежда също така като обобщение на критерия на Aubin за метрическа регулярност за еднозначно изображение.

3.3.1 Принцип за дълга орбита или празна стойност

Навсякъде в този параграф с (M, ρ) означаваме пълно метрично пространство.

Дефиниция 3.3.1. Нека $S : M \rightrightarrows M$ е многозначно изображение. Казваме, че S удовлетворява условието $(*)$ ако $x \notin S(x)$, $\forall x \in M$, и когато $y \in S(x)$ и $\lim_n x_n = x$, съществуват безкрайно много x_n, такива че $y \in S(x_n)$.

Следващите резултати, които съставляват LOEV принципа, показват защо изображения, удовлетворяващи $(*)$ могат да бъдат полезни.

Теорема 3.3.2 (LOEV принцип). Нека $S : M \rightrightarrows M$ удовлетворява $(*)$ и нека $x_0 \in M$ е произволно. Тогава поне едно от твърденията (a) и (b) по-долу е вярно:

(a) Съществуват $x_i \in M$, $i = 1, 2, \ldots$, такива че $x_{i+1} \in S(x_i)$ за $i = 0, 1, \ldots$ и

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho(x_i, x_{i+1}) = \infty;$$

(b) Съществува $\bar{x} \in M$, такова че $S(\bar{x}) = \emptyset$.

Следствие 3.3.3. Нека $S : M \rightrightarrows M$ удовлетворява $(*)$ и нека $x_0 \in M$ и $K > 0$ са произволни. Тогава поне едно от двете твърдения по-долу е вярно:

(a) Съществуват $x_i \in M$, $i = 1, 2, \ldots, n{+}1$, такива че $x_{i+1} \in S(x_i)$ за $i{=}0, 1, \ldots, n$ и

$$\sum_{i=0}^{n} \rho(x_i, x_{i+1}) > K;$$

(b) Съществува $\bar{x} \in M$, такова че $\rho(x_0, \bar{x}) \le K$ и $S(\bar{x}) = \emptyset$.

3.3.2 Теорема за фиксираната точка на Caristi-Kirk

Като първо приложение на LOEV принципа доказваме следната

Теорема 3.3.4 (за фиксираната точка на Caristi [42] и Kirk [100]). Нека (M, ρ) е пълно метрично пространство. Нека $T : M \rightrightarrows M$ е такова, че $T(x) \neq \emptyset$ за всяко $x \in M$. Нека освен това функцията $f : M \to [0, \infty)$ е полунепрекъсната отдолу. Да допуснем, че за всяко $x \in M$ съществува $y \in T(x)$, такова че

$$\rho(x, y) \le f(x) - f(y).$$

Тогава T има фиксирана точка, т.е. съществува $\bar{x}$ такова, че $\bar{x} \in T(\bar{x})$.

Схема на доказателството. Допускаме, че $x \notin T(x)$ за всяко $x \in M$. Дефинираме за $x \in M$

$$S(x) := \{y \in M : \ f(y) < f(x) - 2^{-1}\rho(x, y)\}$$

и проверяваме, че $(*)$ е в сила за S. Прилагаме LOEV принципа, за да получим противоречие. □

3.3.3 Теореми за сюрективност

Използваме LOEV принципа за да докажем следващите две леми, които могат да се разглеждат като количествена версия на Теорема 3.3.4. По-късно прилагаме тези резултати, за да получим различни резултати за сюрективност на функции.

По-нататък в изложението $(X, \|\cdot\|)$ и $(Y, \|\cdot\|)$ са банахови пространства. U е околност на точка $x_0 \in X$ ако $x_0 + \varepsilon B_X \subset U$ за някое $\varepsilon > 0$, т.е. $x_0 \in \operatorname{int} U$.

Лема 3.3.5. Нека $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Нека $f : X \to Y$ е непрекъсната в βB_X функция, такава че $f(0) = 0$.

Да предположим, че за всяко $y \in Y$ такова, че $\|y\| < \alpha$ и всяко $x \in X$ такова, че $\|x\| < \beta$ и $f(x) \neq y$, съществува $z \in X$ с $\|z\| < \beta$ и

$$\|f(z) - y\| < \|f(x) - y\| - \gamma\|z - x\|.$$

Тогава за всяко $\bar{y} \in Y$ удовлетворяващо $\|\bar{y}\| < \min\{\alpha, \beta\gamma\}$ съществува $\bar{x} \in X$ такова, че $f(\bar{x}) = \bar{y}$ и

$$\|\bar{x}\| \leq \frac{\|\bar{y}\|}{\gamma}.$$

Да напомним, че функция $f : X \to Y$ е *метрически регулярна* в $\bar{x} \in X$ ако съществува $\kappa > 0$ заедно с околности $U \ni \bar{x}$ и $V \ni f(\bar{x})$, такива че

$$d(x, f^{-1}(y)) \leq \kappa d(y, f(x)), \quad \forall x \in U, \ \forall y \in V,$$

виж Dontchev и Rockafellar [67, стр. 253 (2)]. Инфимумът на κ по всички такива комбинации от κ, U и V се нарича *модул на регулярност* за f в $\bar{x}$ за $f(\bar{x})$ и се означава с $\mathrm{reg}(f; \bar{x})$. Липсата на метрическа регулярност се бележи с $\mathrm{reg}(f; \bar{x}) = \infty$.

Да припомним, че метрическата регулярност е еквивалентна на отвореност с линейна скорост, виж Dontchev и Rockafellar [67, стр. 254 (5)].

Лема 3.3.6. Нека са в сила предположенията на Лема 3.3.5. Тогава съществува околност $U \ni 0$ в X и околност $V \ni 0$ в Y, такива че за всяко $x' \in U$ и всяко $\bar{y} \in V$ съществува $\bar{x} \in X$, такова че $f(\bar{x}) = \bar{y}$ и

$$\|x' - \bar{x}\| \leq \frac{\|f(x') - \bar{y}\|}{\gamma}.$$

Това означава, че f е метрически регулярно в 0 с $\mathrm{reg}(f; 0) \leq \gamma^{-1}$.

Преди да продължим нататък нека припомним още някои понятия.

Многозначно изображение $H : X \rightrightarrows Y$ е *положително хомогенно* ако неговата графика $\mathrm{gph}\, H := \{(x, y) \in X \times Y : \ y \in H(x)\}$ е конус, т.е. $y \in H(x) \iff ty \in H(tx)$ за всяко $t \geq 0$. *Вътрешната норма* на такова H (виж Dontchev и Rockafellar [67, стр. 256]) е $\|H\|^- = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \inf\limits_{y \in H(x)} \|y\|$. *Обратното изображение* на H е положително хомогенното изображение $H^{-1} : Y \rightrightarrows X$ такова, че $H^{-1}(y)$ е множеството от решения на $y \in H(x)$.

Очевидно, ако $\|H\|^- < \infty$, то H е сюрективно и H^{-1} е дефинирано навсякъде. Нещо повече, ако $\|H^{-1}\|^- < \kappa$, то

$$\forall v \in Y \setminus \{0\} \ \exists u \in H^{-1}(v) : \ \|u\| < \kappa\|v\|.$$

По естествен начин обобщаваме понятието за *контингентен конус* за случая на еднозначно изображение (т.е. *функция*). Ако $f : X \to Y$ е функция, то *контингентната производна* (виж Aubin и Ekeland [8])

$$df(x) : X \rightrightarrows Y$$

на f в x е контингентният конус на $\operatorname{gph} f = \{(x, y) : \ y = f(x)\}$ в $(x, f(x))$, т.е. $v \in df(x)(u)$ тогава и само тогава, когато съществуват $u_n \to u$, $v_n \to v$ и $t_n > 0$ с $t_n \to 0$, такива че

$$f(x + t_n u_n) = f(x) + t_n v_n.$$

Графиката на $df(x)$ е затворен конус. Следователно $df(x)$ е положително хомогенно изображение.

Дефиниция 3.3.7. Нека X и Y са банахови пространства. Нека $\theta > 0$ и $\mu \geq 0$. Разглеждаме следната еквивалентна норма в $X \times Y$:

$$\|(x, y)\|_\theta := \theta\|x\| + \|y\|.$$

Приближената контингентна производна $d^\mu_\theta f(x)$ на f в x се дефинира като: $v \in d^\mu_\theta f(x)(u)$ ако съществуват $(u_n, v_n) \to (u, v)$ и $t_n > 0$ с $t_n \to 0$ такива, че

$$\operatorname{dist}_\theta((x + t_n u_n, f(x) + t_n v_n), \operatorname{gph} f) \leq \mu t_n\|u_n\|,$$

където $\operatorname{dist}_\theta$ означава функцията разстояние спрямо нормата $\|(\cdot, \cdot)\|_\theta$.

Ясно е, че $d^\mu_\theta f \supset df$. Очевидно, $d^0_\theta f = df$ за всяко $\theta > 0$.

Следващият резултат може да се разглежда като общ абстрактен резултат за сюрективност. Грубо казано, той твърди, че ако приближената контингентна производна е линейно отворена с *равномерна* скорост в околност, такава е и самата функция. От това лесно следват няколко известни резултата, които представяме в края на параграфа.

Теорема 3.3.8. Нека X и Y са банахови пространства. Нека $f : X \to Y$ е непрекъсната в $x_0 + \varepsilon B_X$ за някое $\varepsilon > 0$. Да предположим, че $\theta > 0$, и $\mu \geq 0$, $m > 0$ с $m\mu < 1$ са такива, че

$$\|d^\mu_\theta f(x)^{-1}\|^- \leq m, \quad \forall x \in x_0 + \varepsilon B^\circ_X.$$

Тогава за всяко $\kappa > m$ за $c := \kappa^{-1} - \mu$ следва, че за всяко $y \in Y$ такова, че $\|y - f(x_0)\| < \varepsilon \min\{c, \theta\}$ съществува $x \in X$ такова, че

$$\|x - x_0\| \leq \frac{\|y - f(x_0)\|}{\min\{c, \theta\}} < \varepsilon$$

и $f(x) = y$.

Нещо повече, f е метрически регулярна в x_0 с $\operatorname{reg}(f; x_0) \leq \max\left\{\dfrac{m}{1 - m\mu}, \theta^{-1}\right\}$.

Схема на доказателството. За простота предполагаме, че $x_0 = 0$ и $f(0) = 0$. Нека $x \in \varepsilon B^\circ_X$ и $y \neq f(x)$. Тогава предположението е

$$\|d^\mu_\theta f(x)^{-1}\|^- \leq m, \quad \forall x \in \varepsilon B^\circ_X.$$

От него следва, че съществува $z \in X$ такова, че $\|z\| < \varepsilon$ и

$$\|f(z) - y\| - \|f(x) - y\| < -\min\{c, \theta\}\|x - z\|.$$

Достатъчно е да приложим Лема 3.3.5 с $\alpha = \infty$, $\beta = \varepsilon$ и $\gamma = \min\{c, \theta\}$, за да получим първото заключение и Лема 3.3.6, за да получим второто. □

Нека X и Y са банахови пространства и A е ограничена линейна сюрекция от X върху Y. Да напомним (виж например Dontchev и Rockafellar [67, стр. 254]), че

$$\operatorname{reg} A = \sup_{\|y\|\le 1} d(0, A^{-1}(y)),$$

където $A^{-1}(y) = \{x \in X : \ Ax = y\}$. Да отбележим, че $\operatorname{reg} A < \infty$ съгласно принципа за отвореното изображение на Banach. По-нататък ще използваме, че ако $\kappa > \operatorname{reg} A$, то за всяко $y \in Y$, $y \neq 0$ съществува $x \in X$ с $\|x\| < \kappa\|y\|$ и $Ax = y$.

С помощта на Теорема 3.3.8 можем да докажем с единен подход кратко и елегантно редица редица резултати за сюрективност. Първият от тях е класическата

Теорема 3.3.9 (Graves, виж например [67, стр. 276-278]). Нека X и Y са банахови пространства. Разглеждаме функция $f : X \to Y$, която е непрекъсната в $\bar{x} + \varepsilon B_X$ за някое $\bar{x} \in X$ и $\varepsilon > 0$. Нека A е ограничен линеен и сюрективен оператор от X върху Y и нека $m = \operatorname{reg} A$. Да предположим, че съществува $\mu \ge 0$, такова че $m\mu < 1$ и

$$\|f(x) - f(x') - A(x - x')\| \le \mu\|x - x'\|, \quad \forall x, x' \in \bar{x} + \varepsilon B_X.$$

Полагаме $\bar{y} := f(\bar{x})$. За всяко $\kappa > m$ и $c := \kappa^{-1} - \mu$, ако y е такова, че $\|y - \bar{y}\| < c\varepsilon$, то уравнението $y = f(x)$ има решение x, такова че

$$\|x - \bar{x}\| \le \frac{\|y - \bar{y}\|}{c},$$

в частност $\|x - \bar{x}\| < \varepsilon$.

Нещо повече, f е метрически регулярна в $\bar{x}$ с $\operatorname{reg}(f; \bar{x}) \le \dfrac{m}{1 - m\mu}$.

Схема на доказателството. Фиксираме $\bar{y} \in Y$, такова че $\bar{y} \neq 0$ и $\|\bar{y}\| < \alpha$. За $x \in \beta B_X$ дефинираме

$$S(x) := \{z \in \beta B_X : \ \|f(z) - \bar{y}\| < \|f(x) - \bar{y}\| - \gamma\|z - x\|\}$$

и установяваме, че S удовлетворява $(*)$ в βB_X поради непрекъснатостта на f.

Остава да приложим количествената версия на LOEV принципа (Следствие 3.3.3) за пространството βB_X, изображението S, начална точки $x_0 = 0$ и константа $K = \gamma^{-1}\|\bar{y}\|$. □

С този подход лесно можем да получим и критерия на Aubin за метрическа регулярност, виж параграф 3.2, в частния случай на непрекъсната функция.

Теорема 3.3.10. Нека X и Y са банахови пространства. Нека $f : X \to Y$ е непрекъсната в $\bar{x} + RB_X$ за някое $R > 0$. Да предположим, че $m > 0$ е такова, че

$$\|df(x)^{-1}\|^{-} \le m, \quad \forall x \in \bar{x} + RB_X.$$

Тогава за всяко $\kappa > m$ и всяко $y \in Y$ такова, че $\|y - f(\bar{x})\| < R/\kappa$ съществува $x \in X$, такова че $\|x - \bar{x}\| \le \kappa\|y - f(\bar{x})\|$ и $f(x) = y$.

Нещо повече, f е метрически регулярна в $\bar{x}$ с $\operatorname{reg}(f; \bar{x}) \le m$.

Схема на доказателството. Фиксираме $\kappa > m$. Прилагаме Теорема 3.3.8 с κ, $\varepsilon = R$, $\mu = 0$ и $\theta = 1/m$. □

По сходен начин получаваме леко обобщение на резултат, доказан от Ekeland в [69]:

Теорема 3.3.11. Нека X и Y са банахови пространства. Нека $f : X \to Y$ е непрекъсната и Gâteaux диференцируема с $f(0) = 0$. Предполагаме, че производната $Df(x)$ има десен обратен $L(x)$, който е линеен и равномерно ограничен в околност на 0, т.е. съществуват $R, m > 0$ такива, че

$$\forall x \in RB_X,\ \forall v \in Y \Rightarrow Df(x)L(x)v = v \text{ и } \|L(x)\| \le m.$$

Тогава за всяко $\bar{y}$ такова, че $\|\bar{y}\| < R/m$ и всяко $\nu > m$ съществува $\bar{x}$ такова, че

$$\|\bar{x}\| < R,\ \|\bar{x}\| \le \nu\|\bar{y}\|,\ \text{ и } f(\bar{x}) = \bar{y}.$$

Нещо повече, f е метрически регулярна в 0 с $\operatorname{reg}(f; 0) \le m$.

Схема на доказателството. Нека $x \in RB_X$ и $v \in Y$. Означаваме $u = L(x)v$. Тогава $Df(x)u{=}v$. Но $Df(x) \in df(x)$, следователно $v \in df(x)u$ и контингентната производна е сюрективна. Тъй като

$$\|u\| \le \|L(x)\|\|v\| \le m\|v\|,$$

имаме, че $\|df(x)^{-1}\|^{-} \le m$. Остава само да приложим критерия на Aubin за метрическа регулярност (Теорема 3.3.10) с R, m и $\nu > m$, за да получим резултата. □

Нека да отбележим, че резултатите от този параграф, получени за еднозначни изображения, могат лесно да бъдат продължени за случая на многозначно изображение като се използва един подход на A. Ioffe.

Също така, LOEV принципът може да се използва, за да се получи резултат от тип Nash-Mozer-Ekeland в случая на пространства на Fréchet, но това е предмет на бъдещи изследвания.

Библиография

[1] E. Asplund, Čebyšev sets in Hilbert spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **144**, 1969, 235–240.

[2] H. Attouch and R. J.-B. Wets, Isometries for the Legendre-Fenchel transform, Trans. Amer. Math. Soc., **296**, 1986, 33–60.

[3] J.-P. Aubin, Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions, Adv. Math., Suppl. Stud., **7A**, 1981, 159–229.

[4] J.-P. Aubin, Comportement lipschitzien des solutions de problémes de minimisation convexes, Compt. rend. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **295**, 1982, 235–238.

[5] J.-P. Aubin, Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems, Math. Oper. Res., **9**, 1984, 87–111.

[6] J.-P. Aubin, ***Viability theory***, Birkhäuser, Berlin, 1991.

[7] J.-P. Aubin, A. Bayen, N. Bonneuil, and P. Saint-Pierre, ***Viability, control and game theories: Regulation of complex evolutionary systems under uncertainity***, Springer-Verlag, 2006.

[8] J.-P. Aubin and I. Ekeland, ***Applied nonlinear analysis***, John Wiley & Sons, New York, 1984 and Courier Corporation, 2006.

[9] J.-P. Aubin and H. Frankowska, On the inverse function theorem for set-valued maps, J. Math. Pures Appliquées, **66**, 1987, 71–89.

[10] J.-P. Aubin and H. Frankowska, ***Set-valued analysis***, Birkhäuser, New York, 1990 and Boston, MA: Birkhäuser, reprint of the 1990 original edition, 2009.

[11] D. Aussel, A. Daniilidis and L. Thibault, Subsmooth sets: Functional characterizations and related concepts, Trans. Amer. Math. Soc., **357**, 2004, 1275–1301.

[12] B. Beauzamy, ***Introduction to Banach spaces and their geometry***, 2nd edition, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[13] G. Beer, ***Topologies on closed and closed convex sets***, Kluwer Academic Publishers, North-Holland, Dordrecht, 1993.

[14] F. Bernard and L. Thibault, Prox-regular functions and sets in Banach spaces, Set-Valued Analysis, **12**, 2004, 25–47.

[15] F. Bernard and L. Thibault, Prox-regular functions in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl., **303**, 2005, 1–14.

[16] F. Bernard, L. Thibault and D. Zagrodny, Integration of primal lower nice functions in Hilbert spaces, J. Optimization Theory Appl., **124**, 2005, Issue 3, 561–579.

[17] F. Bernard and L. Thibault, Uniform prox-regularity of functions and epigraphs in Hilbert spaces, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **60**, 2005, 187–207.

[18] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, Characterizations of prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces, J. Convex Anal., **13**, 2006, 525–559.

[19] F. Bernard, L. Thibault and N. Zlateva, Prox-regular sets and epigraphs in uniformly convex Banach spaces: Various regularities and other properties, Trans. Amer. Math. Soc., **363**, 2010, No 4, 2211–2247.

[20] J. Bonnans and A. Ioffe, Quadratic growth and stability in convex programming problems with multiple solutions, J. Convex Anal., **2**, 1995, 41–57.

[21] J. Bonnans and A. Shapiro, Optimization problems with perturbations: A guided tour, SIAM Rev., **40**, 1998, 228–264.

[22] J. Bonnans and A. Shapiro, ***Perturbation analysis of optimization problems***, Springer Series in Operations Research, Springer, New York, 2000.

[23] J. M. Borwein, Adjoint process duality, Math. Oper. Res., **8**, 1983, 403–434.

[24] J. M. Borwein, S. P. Fitzpatrick and J. R. Giles, The differentiability of real functions on normed linear space using generalized subgradients, J. Math. Anal. Appl., **128**, 1987, 512–534.

[25] J. M. Borwein and J. R. Giles, The proximal normal formula in Banach space, Trans. Amer. Math. Soc., **302**, 1987, 371–381.

[26] J. Borwein and A. Ioffe, Proximal analysis in smooth spaces, Set-Valued Anal., **4**, 1996, No 1, 1–24.

[27] J. Borwein and W. Moors, Essentially smooth Lipschitz functions, J. Funct. Anal., **149**, 1997, No. 2, 305–351.

[28] J. Borwein, W. Moors and X. Wang, Generalized subdifferentials: a Baire categorical approach, Trans. Amer. Math. Soc., **353**, 2001, No. 10, 3875–3893.

[29] J. Borwein, B. Mordukhovich and Y. Shao, On the equivalence of some basic principles in variational analysis, J. Math. Anal. Appl., **229**, 1999, No 1, 228–257.

[30] J. M. Borwein and H. M. Strójwas, Tangential approximations, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **9**, 1985, 1347–1366.

[31] J. M. Borwein and H. M. Strójwas, Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space. I. Theory, Canad. J. Math., **38**, 1986, 431–452.

[32] J. M. Borwein and H. M. Strójwas, Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space. II. Applications, Canad. J. Math., **39**, 1987, No 2, 428–472.

[33] M. Bounkhel and L. Thibault, On various notions of regularity of sets in nonsmooth analysis, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **48**, 2002, 223–246.

[34] H. Brezis, ***Analyse fonctionnelle***, Masson, Paris, 1983.

[35] A. Brøndsted, Conjugate convex functions in topological vector spaces, Mat.-Fys. Medd., Danske Vid. Selsk., **34**, 1964, No. 2, p. 27.

[36] A. Brøndsted and R. T. Rockafellar, On the subdifferentiability of convex functions, Proc. Amer. Math. Soc., **16**, 1965, 605–611.

[37] A. Canino, On p-convex sets and geodesics, J. Differential Equations, **75**, 1988, 118–157.

[38] P. Cardaliaguet, A differential game with two players and one target, SIAM J. Control and Optim., **34**, 1996, 1441–1460.

[39] P. Cardaliaguet, M. Quincampoix and P. Saint-Pierre, Numerical methods for differential games, In: Stochastic and differential games: Theory and numerical methods, Annals of the International Society of Dynamic Games (M. Bardi, T. E. S. Raghavan, and T. Parthasarathy eds.), Birkhäuser, 1999, 177–247.

[40] P. Cardaliaguet, M. Quincampoix and P. Saint-Pierre, Pursuit differential games with state constraints, SIAM J. Control and Optim., **39**, 2001, 1615–1632.

[41] P. Cardaliaguet, M. Quincampoix and P. Saint-Pierre, Differential games through viability theory: Old and recent results, Annals of the International Society of Dynamic Games, Birkhäuser, **9**, 2007, 2–23.

[42] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc., **215**, 1976, 241–251.

[43] I. Cioranescu, ***Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems***, Mathematics and its Applications, **62**, Kluwer, Dordrecht, 1990.

[44] F. H. Clarke, ***Optimization and nonsmooth analysis***, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[45] F. H. Clarke, Y. Ledyaev, J. R. Stern and R. P. Wolenski, ***Nonsmooth analysis and control theory***, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, New York, **178**, 1998.

[46] F. H. Clarke, J. R. Stern and R. P. Wolenski, Proximal smoothness and the lower-C^2 property, J. Convex Anal., **2**, 1995, 117–144.

[47] C. Combary, A. Elhilali, A. Levi, R. Poliquin and L. Thibault, Convex composite functions in Banach spaces and the primal lower-nice property, Proc. Amer. Math. Soc., **126**, 1998, No 12, 3701–3708.

[48] G. Colombo and V. V. Goncharov, Variational inequalities and regularity properties of sets in Hilbert spaces, J. Convex Anal., **8**, 2001, 197–221.

[49] R. Correa, P. Gajardo and L. Thibault, Subdifferential representation formula and subdifferential criteria for the behavior of nonsmooth functions, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **65**, 2006, Issue 4, 864—891.

[50] R. Correa and A. Jofre, Tangentially continuous directional derivatives in nonsmooth analysis, J. Optim. Theory Appl., **61**, 1989, 1–21.

[51] R. Correa, A. Jofre and L. Thibault, Characterization of lower semicontinuous convex functions, Proc. Amer. Math. Soc., **116**, 1992, 61–72.

[52] R. Correa, A. Jofre and L. Thibault, Subdifferential monotonicity as characterization of convex functions, Numer. Funct. Anal. Optim., **15**, 1994, No 5-6, 531–536.

[53] R. Correa, A. Jofre and L. Thibault, Subdifferential characterization of convexity, In: Recent advances in nonsmooth optimization (Eds. Ding-Zhu Du et al.), Singapore, World Scientific, 1995, 18–23.

[54] R. Correa and L. Thibault, Subdifferential analysis of bivariate separate regular functions, J. Math. Anal. Appl., **148**, 1990, 157–174.

[55] M. G. Crandal and P.-L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc., **227**, 1983, 1–24.

[56] M. Degiovanni, A. Marino and M. Toques, General properties of (p,q)-convex functions and operators, Ricerche Mat., **32**, 1983, 285–319.

[57] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, ***Smoothness and renormings in Banach spaces***, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **64**, John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.

[58] J. Diestel, ***Geometry of Banach spaces – selected topics***, Lecture Notes in Mathematics, **485**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[59] J. Diestel and J. J. Uhl, ***Vector measures***, Mathematical Surveys, **15**, AMS, Providence, RI, 1977.

[60] J. Diestel and J. J. Uhl, The Radon-Nikodym theorem for Banach space valued measures, Rocky Mt. J. Math., **6**, 1976, 1–46.

[61] A. L. Dontchev and A. S. Lewis, Perturbations and metric regularity, Set-Valued Anal., **13**, 2005, Issue 4, 417–438.

[62] A. L. Dontchev, A. S. Lewis and R. T. Rockafellar, The radius of metric regularity, Trans. Amer. Math. Soc., **355**, 2002, 493–517.

[63] A. L. Dontchev, M. Quincampoix and N. Zlateva, Aubin criterion for metric regularity, Journal of Convex Anal., **13**, 2006, No 2, 281–297.

[64] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar, Characterization of strong regularity of variational inequalities over polyhedral convex sets, SIAM J. Optim., **6**, 1996, 1087–1105.

[65] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar, Ample parameterization of variational inclusions, SIAM J. Optim., **12**, 2001, 170–187.

[66] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar, Regularity and conditioning of solution mappings in variational analysis, Set-Valued Anal., **12**, 2004, 79–109.

[67] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar, ***Implicit functions and solution mappings***, Springer, 2009.

[68] J. F. Edmond and L. Thibault, BV solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation, J. Differential Equations, **226**, 2006, Issue 1, 135–179.

[69] I. Ekeland, An inverse function theorem in Fréchet spaces, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **28**, 2011, No 1, 91–105.

[70] I. Ekeland and G. Lebourg, Generic Fréchet differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **224**, 1976, 193–216.

[71] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant and V. Zizler, ***Functional analysis and infinite-dimensional geometry***, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001.

[72] M. Fabian and D. Priess, A generalization of the interior mapping theorem of Clarke and Pourciau, Comment. Math. Univ. Carolinae, **28**, 1987, 311–324.

[73] H. Federer, Curvature measures, Trans. Amer. Math. Soc., **93**, 1959, 418–491.

[74] W. Fenchel, On conjugate convex functions, Canad. J. Math., **1**, 1949, 73–77.

[75] S. Fitzpatrick, Differentiation of real-valued functions and continuity of metric projections, Proc. Amer. Math. Soc., **91**, 1984, 544–548.

[76] S. Fitzpatrick and R. R. Phelps, Bounded approximants to monotone operators on Banach spaces, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, **9**, 1992, No. 5, 573–595.

[77] H. Frankowska, Some inverse mapping theorems, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, **7**, 1990, 183–234.

[78] P. G. Georgiev and N. P. Zlateva, Second-order subdifferentials of $C^{1,1}$ functions and optimality conditions, Set-Valued Anal., **4**, 1996, 101–117.

[79] J.-P. Gossez, On the subdifferential of a saddle function, J. Funct. Anal., **11**, 1972, 220–230.

[80] E. El Haddad and R. Deville, The viscosity subdifferential of the sum of two functions in Banach space. I: First order case, J. Convex Anal., **3**, 1996, No 2, 295–308.

[81] J. Hartung, An extension of Sion's minimax theorem with an application to a method for constrained games, Pacific J. Math., **103**, 1982, 401–408.

[82] F. Hausdorff, Über halbstetige Funcktionen und deren Verallgemeinerung, Math. Zeit., **5**, 1919, 292–309.

[83] R. Haydon, ***Trees and renormings***, Publ. Math. Univ. Pierre Marie Curie 104, Semin. Initiation Anal., 30me Annee: 1990/91, No 8, 1991.

[84] J.-B. Hiriart-Urruty, Lipschitz r-continuity of the approximate subdifferential of a convex function, Math. Scand., **47**, 1980, 123–134.

[85] J.-B. Hiriart-Urruty, J.-J. Strodiot and V. H. Nguyen, Generalized Hessian matrix and second-order optimality conditions for problems with $C^{1,1}$ data, Appl. Math. Optim., **11**, 1984, 43–56.

[86] R. B. Holmes, ***Geometric functional analysis and its applications***, Graduate Texts in Mathematics, **24**, New York-Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag, 1975.

[87] A. Ioffe, Approximate subdifferentials and applications 2, Mathematica, **33**, 1986, 111–128.

[88] A. Ioffe, Approximate subdifferentials and applications 3, Mathematica, **36**, 1989, 1–36.

[89] A. Ioffe, Proximal analysis and approximate subdifferentials, J. Lond. Math. Soc., **II 41**, 1990, No 1, 175–192.

[90] A. D. Ioffe, Metric regularity and subdifferential calculus, Uspekhi Mat. Nauk, **55**, 2000, No 3(333), 103–162; English translation Math. Surveys, **55**, 2000, 501–558.

[91] M. Ivanov, Sequential representation formulae for G-subdifferential and Clarke subdifferential in smooth Banach spaces, Journal of Convex Anal., **11**, 2004, No 1, 179–196.

[92] M. Ivanov, New proof of Ekeland perturbed minimisation method. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **68**, 2015, No 11, 1353–1356.

[93] M. Ivanov and N. Zlateva, Abstract subdifferential calculus and semi-convex functions, Serdica Math. J., **23**, 1997, 35–58.

[94] M. Ivanov and N. Zlateva, On primal lower-nice property, Compt. rend. Acad. bulg. Sci, **54**, 2001, No 11, 5–10.

[95] M. Ivanov and N. Zlateva, Subdifferential characterization of primal lower-nice functions on smooth Banach spaces, Compt. rend. Acad. bulg. Sci, **57**, 2004, No 5, 13–18.

[96] M. Ivanov and N. Zlateva, Long orbit or empty value principle, fixed point and surjectivity theorems, Compt. rend. Acad. bulg. Sci, **69**, 2016, No 5, 553–562.

[97] A. Jofre and L. Thibault, D-representation of subdifferentials of directionally Lipschitz functions, Proc. Amer. Math. Soc., **110**, 1990, No. 1, 117–123.

[98] A. Jourani and L. Thibault, Metric regularity for strongly compactly Lipschitzian mappings, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **24**, 1995, 229–240.

[99] A. Jourani and L. Thibault, Coderivatives of multivalued mappings, locally compact cones and metric regularity, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **35**, 1999, 925–945.

[100] W. A. Kirk, A Fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly, **72**, 1965, No 9, 1004–1006.

[101] D. Klatte and R. Henrion, Regularity and stability in nonlinear semi-infinite optimization, In: Semi-infinite Programming (Reemtsen et al. eds.), Workshop, Cottbus, Germany, September 1996, Kluwer Academic Publishers, Boston; Nonconvex Optim. Appl., **25**, 1998, 69–102.

[102] D. Klatte and B. Kummer, ***Nonsmooth equations in optimization. Regularity, calculus, methods and applications***, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[103] V. Klee, Convexity of Chebyshev sets, Math. Annalen, **142**, 1961, 292–304.

[104] N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin, ***Game-theorical control problems***, Springer-Verlag, New York, 1988.

[105] E. Krauss, A representation of maximal monotone operators by saddle functions, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **30**, 1985, 823–837.

[106] A. Kruger, Properties of generalized differentials, Siberian Math. Journal, 1983, 822–832.

[107] A. Kruger and B. Mordukhovich, Extreme points and the Euler equation in nondifferentiable optimization problems, Dokl. Acad. Nauk BSSR, **24**, 1982, 684–687.

[108] K. S. Lau, Almost Chebyshev subsets in reflexive Banach spaces, Indiana Univ. Math. J., **27**, 1978, No 5, 791–795.

[109] P.-J. Laurent, Approximation et optimisation, Enseignement des sciences, **13**, Paris, Hermann, 1972.

[110] Y. S. Ledyaev and Q. J. Zhu, Implicit multifunction theorems, Set-Valued Anal., **7**, 1999, 209–238.

[111] A. Levi, R. Poliquin and L. Thibault, Partial extensions of Attouch's theorem with applications to proto-derivatives of subgradient mappings, Trans. Amer. Math. Soc., **347**, 1995, 1269–1294.

[112] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, ***Classical Banach spaces. I. Sequence spaces***, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[113] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, ***Classical Banach spaces. II. Function spaces***, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[114] P. D. Loewen, The proximal subgradient formula in Banach space, Canad. Math. Bull., **31**, 1988, 353–361.

[115] S. Marcellin and L. Thibault, Evolution problems associated with primal lower nice functions, J. Convex Anal., **13**, 2006, No 2, 385–421.

[116] B. Maury and J. Venel, Un modèle de mouvements de foule, ESAIM Proceedings, **18**, 2007, 143–152.

[117] L. McLinden, Dual operations on saddle functions, Trans. Amer. Math. Soc., **179**, 1973, 363–381.

[118] L. McLinden, An extension of Fenchel's duality theorem to saddle functions and dual minimax problems, Pacific J. Math., **50**, 1974, 135–158.

[119] L. McLinden, Conjugacy correspondences: a unified view, Trans. Amer. Math. Soc., **203**, 1975, 257–274.

[120] Ph. Michel and J.-P. Penôt, A generalized derivative for calm and stable functions, Differental Integral Equations, **5**, 1992, 433–454.

[121] B. Mordukhovich, Metric approximations and necessary optimality conditions for general classes of nonsmooth extremal problems, Soviet Math. Dokl., **22**, 1980, 526–530.

[122] B. Mordukhovich, Complete characterization of openness, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions, Trans. Amer. Math. Soc., **340**, 1993, 1–35.

[123] B. Mordukhovich, Coderivatives of set-valued mappings: calculus and applications, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **30**, 1997, 3059–3070.

[124] B. S. Mordukhovich, ***Variational analysis and generalized differentiation I and II***, Springer, New York, Comprehensive Studies in Mathematics, **330** and **331**, 2005.

[125] B. Mordukhovich and Y. Shao, Differential characterizations of covering, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions between Banach spaces, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **25**, 1995, 1401–1424.

[126] B. S. Mordukhovich and Y. Shao, Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **348**, 1996, 1235–1280.

[127] J.-J. Moreau, Sur la fonction polaire d'une fonction semicontinue supérieurement, Compt. rend. Acad. Sci. Paris, **258**, 1964, 1128–1130.

[128] J.-J. Moreau, Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull. Soc. Math. France, **93**, 1965, 273–299.

[129] J.-J. Moreau, ***Fonctionnelles convexes***, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France (1966–1967).

[130] T. S. Motzkin, Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes, Att. R. Acad. Lincei, Rend. **21**, 1935, 562–567.

[131] O. I. Pak, On properties of the subdifferential of a convex-concave function, Kibernetika, **3**, 1982, 127–129.

[132] J.-P. Penôt, ***Calculus without derivatives***, Springer, 2013.

[133] R. R. Phelps, ***Convex functions, monotone operators and differentiability***, 2nd ed., Lecture Notes in Mathematics, **1364**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[134] S. Plaskacz and M. Quincampoix, Value-functions for differential games and control systems with discontinuous terminal cost, SIAM J. Control and Optim., **39**, 2001, 1485–1498.

[135] R. Poliquin, Subgradient monotonicity and convex functions, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **17**, 1990, 305–317.

[136] R. Poliquin, Integration of subdifferentials of nonconvex functions, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **17**, 1991, 358–398.

[137] R. A. Poliquin and R. T. Rockafellar, Prox-regular functions in variational analysis, Trans. Amer. Math. Soc., **348**, 1996, 1805–1838.

[138] R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar and L. Thibault, Local differentiability of distance functions, Trans. Amer. Math. Soc., **352**, 2000, 5231–5249.

[139] D. Preiss, Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces, J. Funct. Anal., **91**, 1990, 312–345.

[140] M. Quincampoix and N. Zlateva, Parameterized minimax problem: on Lipschitz-like dependence of the solution with respect to the parameter, SIAM J. Optim., **19**, 2008, No 3, 1250–1269.

[141] S. M. Robinson, Normed convex processes, Trans. Amer. Math. Soc., **174**, 1972, 127–140.

[142] R. T. Rockafellar, Minimax theorems and conjugate saddle functions, Math. Scand., **14**, 1964, 151–173.

[143] R. T. Rockafellar, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J., **33**, 1966, 81–90.

[144] R. T. Rockafellar, Characterization of the subdifferentials of convex functions, Pacific J. Math., **17**, 1966, 497–510.

[145] R. T. Rockafellar, A general correspondence between dual minimax problems and convex programs, Pacific J. Math., **25**, 1968, No. 3, 597–611.

[146] R. T. Rockafellar, Monotone operators associated with saddle functions and minimax problems, In: Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., **18**, 1970, 241–250.

[147] R. T. Rockafellar, On the maximal monotonicity of subdifferential mappings, Pacific J. Math., **33**, 1970, No. 1, 209–216.

[148] R. T. Rockafellar, ***Convex analysis***, Prinston, New Jersey, Prinston University Press, 1970.

[149] R. T. Rockafellar, Saddle-points and convex analysis, In: Differential games related topics, Proc. Intern. Summer School, Varenna 1970, Amsterdam, North-Holland, 1971, 109–127.

[150] R. T. Rockafellar, Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions, Canad. J. Math., **32**, 1980, No. 2, 257–280.

[151] R. T. Rockafellar, Proximal subgradients, marginal values, and augmented Lagrangians in nonconvex optimization, Math. Oper. Res., **6**, 1981, No 3, 424–436.

[152] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, ***Variational analysis***, Springer-Verlag, Berlin, Comprehensive Studies in Mathematics, **317**, 1998.

[153] A. S. Shapiro, Existence and differentiability of metric projections in Hilbert spaces, SIAM J. Optimization, **4**, 1994, 130–141.

[154] A. Shapiro, On Lipschitzian stability of optimal solutions of parametrized semi-infinite programs, Math. Oper. Res., **19**, 1994, 743–752.

[155] A. Shapiro, Sensitivity analysis of parameterized variational inequalities, Math. Oper. Res., **30**, 2005, 109–126.

[156] S. Simons, ***Minimax monotonicity***, Lecture Notes in Mathematics, **1693**, Berlin, Springer, 1998.

[157] C. Stegall, Optimization of functions on certain subsets of Banach spaces, Math. Ann., **236**, 1978, 171–176.

[158] L. Thibault, Sweeping process with regular and non regular sets, J. Differential Equations, **193**, 2003, 1–26.

[159] L. Thibault, Regularization of nonconvex sweeping process in Hilbert space, Set-Valued Anal., **16**, 2008, Issue 2, 319–333.

[160] L. Thibault and D. Zagrodny, Integration of subdifferentials of lower semicontinuous functions on Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., **189**, 1995, 33–58.

[161] L. Thibault and D. Zagrodny, Enlarged inclusion of subdifferentials, Canad. Math. Bull., **48**, 2005, No 2, 283–301.

[162] L. Thibault and N. Zlateva, Integrability of subdifferentials of certain bivariate functions, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **54**, 2003, 1251–1269.

[163] L. Thibault and N. Zlateva, Integrability of subdifferentials of directionally Lipschitz functions, Proc. Amer. Math. Soc., **133**, 2005, No 10, 2939–2948.

[164] L. Thibault and N. Zlateva, Partially ball weakly inf-compact saddle functions, Math. Oper. Res., **30**, 2005, No 2, 404–419.

[165] J. Treiman, Generalized gradients, Lipschitz behaviour and directional derivatives, Canad. J. Math., **37**, 1985, No. 6, 1074–1084.

[166] L. P. Vlasov, On Chebyshev sets, Soviet Math. Dokl., **8**, 1967, 401–404.

[167] L. P. Vlasov, Almost convex and Chebyshev sets, Math. Notes Acad. Sci. USSR, **8**, 1970, 776–779.

[168] Z. Wu and J. Ye, Some results on integration of subdifferentials, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **39**, 2000, 955–976.

[169] Z. B. Xu and G. F. Roach, Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., **157**, 1991, 189–210.

[170] D. Zagrodny, Approximate mean value theorem for upper subderivatives, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., **12**, 1988, 1413–1428.

[171] E. H. Zarantonello, Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory I and II. In: Contributions to Nonlinear Functional Analysis (Ed. E. H. Zarantonello), Academic Press, New York, 1971, 237–424.

[172] N. Zlateva, Integrability through infimal regularization, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **68**, 2015, No 5, 551–560.