РЕЦЕНЗИЯ

от Николай Василев Живков,
професор в Институт по Математика и Информатика БАН

на дисертационен труд на Надя Пейчева Златева, озаглавен
„Вариационен анализ: Методи и приложения”
за придобиване на научната степен
доктор на науките в направление 4.5 Математика

Съдържание на рецензията:

1. Анализ на научните постижения и характеризиране на основните постижения.
2. Описание на публикациите.
3. Отражение на резултатите в други трудове. Цитати. Импакт-фактор.
4. Принос при колективни работи.
5. Критични бележки и препоръки.
6. Качество на автореферата.

1. Научните изследвания в представения дисертационен труд са разделени на три основни тематични направления, както следва

-- Функции с квадратична оценка отдолу и проксимално регулярни множества,
-- Интегруемост на субдиференциали на функции,
-- Вариационен анализ на многозначни изображения.

Изследването на функции и множества, които да обобщават изпъкналите като едновременно с това да запазват повечето от добрите им свойства е атрактивна цел за математиците с оглед на приложенията в теория на оптимизацията, оптималното управление, теория на апроксимациите, диференциалните включвания както и при решаване на чисто приложни задачи.

Свойствата на два класа реалнозначни полу-непрекъснати отдолу функции, каквито са функциите с квадратична оценка отдолу (КОО) и по-общия клас на проксимално регулярните функции (ПР) се разглеждат **в първата глава** на дисертацията. Поликен дефинира функциите КОО през 1991 г. чрез оценка отдулу на Тейлорова апроксимация от първи ред и показва, че в крайномерни пространства те се характеризират чрез субдиференцила на Кларк. В статия от дисертацията [94] е показано, че тази характеризация е в сила за по-общи пространства и субдиференциали с което се дава отговор на въпрос поставен в [47]. Според Поликен, в дефиницията на КОО субдиференциалът на Кларк може да бъде заменен с проксималния субиференциал. Това твърдение по-късно бива обобщено за хилбертови пространства от Леви, Поликен и Тибо, а в друга статия от дисертацията [95] е получено ново обобщение за гладки банахови пространства.

Понятието проксимална регулярност (ПР), дължимо на Поликен и Рокафелар, е дефинирано първоначално за функции в R^n, а чрез индикаторни функции на множества и за самите множества. Това свойство се дефинира локално и по посока, като Поликен, Рокафелар и Тибо [138] показват в ℓ_2, че то локализира положителната достижимост – понятие използвано от Федерер, както и проксималната гладкост – понятие на Кларк, Стерн и Воленски. В статията [18] на Бернар, Тибо и Златева, проксималната регулярност за множества се изследва в равномерно изпъкнали банахови пространства с норма на Кадец. За тази цел в [18] се използва дуалното изображение за приспособяване на дефинициите. Теорема 1.3.25 от дисертационния труд (Теорема 4.9 от [18]) съдържа различни характеризации на ПР свойството включително и чрез свойства на локална непрекъснатост, еднозначност, на метрическата проекция, както и чрез свойства на локална гладкост на функцията разстояние. В същата статия [18] се разглежда и равномерната проксимална гладкост, като в Теорема 1.3.27 (Теорема 5.2 от [18]) са установени подобни характеризации.

Тези изследвания на тримата съавтори са продължени в [19] (TAMS, **363**,4, 2211-2247), където се доказва, че нормалният конус на Мордухович в точка с проксимално регулярно свойство съвпада с проксималния нормален конус в нея, факт който съвсем не е очевиден за пространства по-общи от ℓ_2. Като следствие, всичките субдиференциали на функцията разстояние: проксималния субдиференциал, този на Фреше, на Мордухович както и този на Кларк съвпадат в такива точки. При предположението, че модулите на изпъкналост и гладкост са от степенен тип е изведена формула за субдиференциалите. Интерес предизвикват и въпросите: при какви предположения сечението на краен брой ПР множества е отново такова както и кога прообраз на изображение от клас $C^{1,1}$ запазва ПР. Получена е и формула за коничната производна на Зарантонело за функцията разстояние. Друг забележителен резултат в [19] показва съхраняване на проксималната регулярност при граничен преход по Атуш-Уетс.

Глава втора на дисертационния труд е посветена на въпроса за възстановяване на функции с точност до адитивна константа по техните субдиференциали. Публикациите на които е основана тази глава са [162], [163], [164] и [172] от библиографичния списък. Основополагаща за тази тематика е теоремата на Моро-Рокафелар според която в банахово пространство две изпъкнали и полу-непрекъснати отдолу функции за които судиференциалът на едната съдържа субдиференциала на другата трябва да се различават само с константа. На този вече класически резултат е дадено друго доказателство от Надя Златева в [172].

По тематиката са правени множество изследвания за различни класове от функции. Така например, Поликен доказва аналогичния резултат за КОО функциите с което излиза от рамката на близките до изпъкналите функции. Един такъв резултат е Теорема 2.2.6 от дисертацията, (Теорема 3.3, [163]), според който, по-неформално казано, ако ***g*** полунепрекъсната отдолу (*пно*) регулярна и строго липшицова по посока, то за всяка *пно* функция ***f***, локалното включване на субференциала на ***f*** в този на ***g*** влече, че се ***f*** различава с константа от ***g*** локално.

Интерес представляват разглежданията на функции дефинирани в произведение на две банахови пространства, което позволява изпробване на различни свойства на непрекъснатост и регулярност по посока и взаимовръзката им с интугруемостта. От такъв тип са получените резултати в [162].

Изучаването на седловидните функции е обвързано с минимаксните задачи. В [164] за произведението на две банахови пространства се изследват свойствата на един клас от седловидни функции, наречени частично слабо инф-компактни. За такава функция се доказва, че ефективното дефиниционно множество (домейн) на субдиференциала е непразно, че операторът обвързан със субдиференциала е максимално монотонен и че субдиференциалът е интегруем. За широк подклас на споменатия клас е показано, че домейна на субдиференциала е гъсто подмножество на домейна на функцията.

В трета глава се разглеждат многозначни изображения както и многозначни изображения, зависещи от параметър.

Липшицовата непрекъснатост, наричана още непрекъснатост по Обен, спрямо параметъра на решенията на параметризирана минимаксна задача, дефинирана в произведение на две банахови пространства, се изследва в статията на Куинкампоа и Златева [140]. В нея се дава достатъчно условие за това изображението, което на параметъра съпоставя множеството от решения на задачата, да има непрекъснатост по Обен (Теорема 3.1.10). Това достатъчно условие е илюстрирано с примери, а също така са изведени и следствия от него. В едно от следствията изходното пространство има свойството на Радон-Никодим, а спрегнатото е параметризиращото пространство. Функцията $\boldsymbol{f}$ в това приложение е „смутена” с линеен член. При направени още предположения за функцията $\boldsymbol{f}$ и множеството от решения се получава локално липшицова непрекъснатост и еднозначност на решенията.

В забележителната работа на Дончев, Куинкампоа и Златева [63] е получен критерий за метрическа регулярност на многозначно изображение $\boldsymbol{F}$, основан на изследвания на Обен и на негови съавтори. Този критерий (Теорема 3.2.1) е продължение на резултат от монография на Обен и Франковска, където е показано достатъчно условие за свойството на Обен за обратното изображение $\boldsymbol{F}^{-1}$. Интересен частен случай е когато $\boldsymbol{F}$ е линейно ограничено изображение от едно банахово пространство в друго и тогава метрическата регулярност навсякъде се оказва еквивалентна на сюрективността на $\boldsymbol{F}$. Това влече и класическата теорема на Банах за отвореното изображение. Еквивалентност между метрическата регулярност в началото, крайност на вътрешната норма и сюрективност е в сила и за изображения, чиито графики са затворени и изпъкнали конуси.

В [63] се доказва и теорема за неявната функция. Като нейно приложение е получен известния резултат, че критерият на Обен влече метрическа регулярност на изображение, свързано със система от равенства и неравенства, тогава и само тогава, когато е изпълнено условието на Мангасарян-Фромович (Теорема 3.2.6). Друго приложение се съдържа в

Теорема 3.2.7, която дава ново необходимо и достатъчно условие за строга регулярност на вариационни неравенства върху многостенни множества. Предложено е в [63] и ново доказателство, основано на критерия на Обен, на теоремата за радиуса на метрическата регулярност.

С помощта на едно полезно абстрактно свойство на многозначните изображения, наречено принцип на дългата орбита (в дисертационния труд LOEV-принцип) са получени редица резултати за сюрективност сред които оригиналната Теорема 3.3.8 от която като следствие се получават теорема на Грейвс, теоремата на Обен за метрическата регулярност както и сравнително неотдавнашна теорема на Екланд. Споменатото свойство има елемент на комбинаторност и може да се разглежда като своеобразно извлечение от доказателствена техника на известната теорема на Каристи за неподвижна точка.

Особено внимание заслужава отбелязаната теорема 3.3.8 заради която в [96] е въведено понятието приближена контингентна производна. В термините на вътрешната норма на тази производна за функция ***f*** се доказва метрическа регулярност в точка ***x*** и се оценява модулът на регулярност в ***x***.

2. Дисертационният труд е основан на изследвания, публикувани в 11 публикации от които 4 в Доклади на БАН и 7 в реномирани списания като J. Convex Anal., Trans. Amer. Math. Soc., SIAM J. Optim., Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., Proc. Amer. Math., Soc., Math. Oper. Res. Една от тези публикации е самостоятелна, а останалите са в съавторство с изявени математици, работещи в изследваната област.

3. Работите на които е основан дисертационния труд са получили към момента на представянето му 157 цитирания от които 96 в списания с импакт фактор и 12 в монографии. Освен това, те са цитирани и в 9 дисертационни и хабилитационни труда. Само статията [63], съвместна с Дончев и Куинкампуа, е получила 75 цитирания. Друга статия, [18], с Бернар и Тибо, има 43 цитирания. Всичките статии без последно отпечатаната са цитирани.

Резултатите на Надя Златева от първа глава и особено тези в работите [18] и [19] намират изключителен отзвук по света. Те са цитирани и използвани от водещи в своите области математици. Ще бъдат изброени само някои имена като тези на М. Балашов, Ф. Бернар, Ф. Бернико, Дж. Борвейн, Г. Иванов, М. Лопушански, Б. Мордухович, Х. Нгаи, Ж-П. Пено, Л. Тибо и много други.

Най-цитираната публикация от дисертацията е [63] и тя е от третата глава. Резултатите в нея са отразени и използвани в работи на И. Аргирос, Д. Азе, Б. Мордухович, А. Данилидис, М. Джофрой, А. Йофе, Ж.-П. Обен, Ж.-П. Пено, А. Петрушел, А. Пиетрос, Н. Йен, М. Тера, Дж.-К. Яо, Н. Хюи, К.Л. Уанг, М. Фабиан, и много други като този списък далеч не е изчерпателен.

Почти всички от представените от Надя Златева статии, 9 от 11 на брой, са с импакт фактор.

4. Рецензентът няма съмнения в равностойния принос на Надя Златева в съвместните публикации.

5. Не са отбелязани критични бележки по същността на дисертационния труд.

6. Представеният автореферат отразява точно и подробно съдържанието на дисертационния труд.

В заключение, дисертационният труд отговаря на съвкупността от критерии и показатели съгласно ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности на Софийски университет и на Факултета по математика и информатика на СУ. **Убедено подкрепям придобиването на научната степен доктор на науките в направление 4.5 Математика от Надя Пейчева Златева.**

21. 12. 2017 г. /проф. Николай Живков/