Р Е Ц Е Н З И Я

на **дисертационния труд на Огнян Борисов Христов**

на тема

“Алгебрични, аналитични и геометрични изследвания върху някои крайно- и безкрайномерни Хамилтонови системи”

за **получаване на научната степен “Доктор на науките” в областта природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, научна специалност 0.1.01.05 Диференциални уравнения**

от: **проф. Владимир Стефанов Герджиков, пенсионер**

20 януари 2017 г.

1 Сведения за докторанта

Г-н Огнян Борисов Христов е роден през 1959 г. в Лом. Завършва ФММ на СУ като магистър през 1984 г. От 1984 до 1986 е програмист в ЦТКА, Русе; от 1986 до 1989 е асистент в Технически университет, Русе. От 1991 до 2001 г. е асистент във ФМИ на СУ. През 1994 г. защитава дисертация за придобиване на образователната и научна степен “доктор” по математика. От 2001 той е доцент, отначало в Стопански факултет на СУ, а от 2002 и досега – във ФМИ на СУ.

От 2002 г. и досега доцент Христов е натрупал богат преподавателски опит. Освен основните курсове по Диференциално и интегрално смятане и по частни диференциални уравнения, той е чел и спецкурсове по Хамилтонови системи, динамични системи, Вариационно смятане, микроикономика и др. Бил е ръководител на 6 магистърски тези и на една дисертация за придобиване на образователната и научна степен “доктор” по математика.

2 Актуалност

Темата на дисертацията е в една важна и традиционна област на математиката обхващаща качествените и аналитични характеристики на Хамилтоновите системи. Понастоящем широк кръг от методите, развити за крайномерните Хамилтонови системи бяха обобщени и за безкрайномерния случай. Авторът е получил важни резултати и за двата типа Хамилтонови системи, което изисква дълбоко познаване на няколко раздела от математиката: динамични системи, симплектични многообразия, аналитични функции и др.

3 Познава ли дисертантът състоянието на проблема?

От цялостното изложение в дисертацията, както и от списъка на цитираната литература от повече от 230 заглавия личи, че дисертантът е добре запознат с основните резултати и публикации по тази тематика.

4 Адекватност на избраната методика

Дисертантът има дълбоки познания както в областта на Хамилтоновите системи, динамичните системи, симплектичните многообразия и аналитичните функции. Това му е позволило да подходи напълно адекватно към решаване на поставените му задачи.

5 Приноси на дисертационният труд

Дисертацията се състои от увод и две части. В първата част (съдържаща 6 глави) се излагат основните резултати на дисертацията отнасящи се до неинтегрируемостта няколко крайномерни Хамилтонови системи. Във втората част (съдържаща 4 глави и общ за двете части списък на цитираната литература) са изложени основните резултати на дисертацията отнасящи се до безкрайномерните Хамилтонови системи.

Уводът накратко описва методите, с които се изследват двата типа Хамилтонови системи. За крайномерните Хамилтонови системи най-напред, използвайки конкретни решения и/или интеграли на движението се редуцира размерността на фазовото пространство. За така редуцираната система се изследват свойствата на на съответната диференциална група на Галоа G и по-точно на свързаната компонента G^0 на G съдържаща единицата. Ако G^0 е некомутативна, то съответната Хамилтонова система е неинтегрируема. Случаят, когато G^0 е комутативна изисква допълнителни изследвания.

За изучаването на безкрайномерните Хамилтонови системи се използва методът на Лакс, както и свързаният с него метод на обратната задача в теория на разсейването (МОЗР). Друг важен подход се базира на съществуването на втора Хамилтонова структура (бихамилтоновост).

Ще се спра накратко върху по-важните резултати и на двете части.

В първата част се разглеждат няколко типа Хамилтонови системи с краен брой степени на свобода.

В глава 1 се въвеждат основните понятия и методи за анализ на такива системи основан на диференциалната теория на Галоа предложен от Моралис, Руиз и Рамис. В глава 2 този метод е приложен към Хамилтонова система с три степени на свобода. Специално внимание тук се обръща на така наречените нормални форми на Хамилтоновите резонанси. Анализирани са поредица от резонанси, някои от които интегрируеми. Но основният резултат в тази глава е теорема 2.2.1 относно резонансите 1: 2: 3, 1: 2: 4 и 1: 1: 2 с Хамилтониани от ред 3. За тези случаи е доказано, че свързаната компонента G^0 на групата на Галоа е изоморфна на $SP(4,\mathbb{C})$, от което следва че тези случаи са неинтегрируеми по Лиувил.

Глава 3 е посветена на едно от висшите уравнения от типа на Пенлеве (3.1.1). Това уравнение след специални преобразования се свежда до Хамилтонова система с три степени на свобода. Прилагайки същия метод е доказано, че при няколко специални избора на параметрите системата е неинтегрируема чрез рационални първи интеграли.

В глава 4 се анализират стационарни решения на много-компонентна система от типа на Грос-Питаевски описваща взаимодействието на ансамбъл от Бозе- и Ферми- частици. Споменатите стационарни решения се изразяват чрез елиптични функции, а уравнението на Грос-Питаевски върху тях се свежда до системата от обикновени диференциални уравнения от втори ред (4.1.7) с Хамилтониан (4.1.8). Основният резултат тук е теорема 4.1.1 според която системата е неинтегрируема стига константата на Бозе-Ферми взаимодействието да не е 0. Тъй като съответният Хамилтониан е с повече от 3 степени на свобода се налага да се използва поредица от вложени нормални вариационни уравнения и да се анализират по-голям брой частни случаи. В допълнение свързаната компонента G^0 на групата на Галоа е комутативна, така че тук имаме интегрируемост в отделни частни случаи.

Глава 5 е посветена на модели от типа на Грос-Невю свързани с прости алгебри от нисък ранг: $sl(p)$, $p = 3, 4$, $so(q)$, $q = 4, 5, 6, 7$ и $sp(2r)$, $r = 2, 3$. Всяка от тези системи е Хамилтонова като степените ѝ на свобода са равни на ранга на алгебрата и има точка на равновесие. В околност на тази точка Хамилтонианите се апроксимират с полиномиални. Основният резултат тук е, че моделите свързани с $so(4)$, $so(5)$, $sp(4)$ и $sl(3)$ са интегрируеми, докато тези, свързани с $so(6) \simeq sl(4)$, $so(7)$ и $sp(6)$ не са интегрируеми.

В последната глава 6 на първата част се доказва, че системата на Карабут (6.1.11) е неинтегрируема в нехамилтонов смисъл. Отново се изчислява съответната група на Галоа и се показва, че G^0 е некомутативна.

Втората част на дисертацията започва с глава 7, в която са получени променливите действие-ъгъл за уравнението на Дулин-Готвалд-Холм (ДГХ). За целта първо са решени правата и обратната задача в теория на разсейването. Изучени са свойствата на коефициентите на преминаване на матрицата на разсейването, които са пораждащи функционали на интегралите на движение. Пресметнати са скобките на Поасон между матричните елементи на матрицата на разсейването. Най-накрая е показано, че определени комбинации от матричните елементи на матрицата на разсейването притежават всички свойства на променливите действие-ъгъл на уравнението на ДГХ.

Глава 8 е посветена на семейството нелинейни еволюционни уравнения Холм-Стали, което зависи от параметъра b. При $b = 2$ се получава уравнението на Камаса-Холм, а при $b = 3$ – уравнението на Дегасперис-Прочезе. И в двата случая става дума за уравнения, които са интегрируеми и които имат важни приложения в хидродинамиката. Основният резултат тук е теорема 8.1.1, която твърди че изображението от потенциала на Лаксовия оператор към данните на разсейване не е равномерно непрекъснато. С други думи прилагането на МОЗР в тези случаи ще се среща с трудности. Обърнато е специално внимание на тези трудности за случаите $b = \pm 1$, както и при $b = 3$, т.е. уравнението на Дегасперис-Прочезе е некоректна задача.

В глава 9 е изучена една модификация на уравнението на Камаса-Холм (КХ) известно като μКХ. Това уравнение описва разпространението на слабо-нелинейни вълни в течен кристал при наличието на външно магнитно поле. Някои важни свойства на уравнението на КХ като би-хамилтоновостта, се запазват при тази модификация. В частност, от би-хамилтоновостта следва че μКХ има безкрайно много интеграли на движение. Намерена е геометрична интерпретация на уравнението μКХ, а именно, то описва псевдо-сферични повърхнини. Построена е и алгебрата на нелокалните симетрии на уравнението μКХ.

Последната глава 10 продължава идеите на глава 9 за геометрична интегрируемост на някои обобщения на уравненията на КХ. Става дума за деформации от типа на Купершмидт. Намерен е клас от нехолономни деформации на уравнението на КХ, които запазват геометрическата интегрируемост на КХ и негови обобщения и деформации.

6 Преценка на публикациите по дисертационния труд

Дисертацията на г-н Христов се основава на 11 статии, публикувани във такива известни списания, като Physica D, J. Math. Annal. Appl., Z. Naturforsch., Int. J. Diff. Eqs., NL Annal. TMA, SIGMA, Chaos Solitons and Fractals и др., както и в един доклад в трудовете на международна конференция. От гореизброените публикации 8 са самостоятелни, три са със един съавтор и една с два съавтора.

Работите, включени в дисертацията са получили 37 независими цитирания. Това показва, че изискванията от правилника на факултета по математика и информатика за придобиването на научната степен "Доктор на науките" са удовлетворени със запас.

Според мен в дисертацията с нови средства са изследвани съществено нови страни в областта на Хамилтоновите системи, и някои специални класове нелинейни обикновени и частни диференциални уравнения, с което са получени важни нови резултати за съвременната математика.

7 Личният принос на дисертанта

Д-р Христов има съществен личен принос за резултатите включени в дисертацията. Осем от публикациите са самостоятелни, три са със един съавтор и една с два съавтора.

Д-р Христов има дългогодишна преподавателска практика.

Личните ми впечатления от д-р Христов както от предзащитата му, така и от докладите му на семинари са много положителни.

8 Критични бележки и препоръки

Забелязах някои грешки от технически характер както в дисертацията, така и в автореферата. Те не могат да променят високата ми оценка за качеството на научните му резултати.

9 Заключение

Давам висока оценка на резултатите получени от дисертанта.

Както броят, така и качествата на публикациите удовлетворяват изискванията за научната степен "Доктор на науките".

Въз основа на всичко казано по-горе съм убеден, че представеният дисертационен труд съдържа ценен научен принос, който удовлетворява изискванията на ФМИ и препоръчвам на членовете на журито по защитата, да гласуват за присъждане на научната степен "Доктор ва вауките"на д-р Огнян Борисов Христов.

София,
20 януари 2017

/професор, д.ф.н. В. Герджиков/