

Физически факултет  
Софийски университет "Св. Климент Охридски"

**Калин Вилиянов Стайков**

**Числено моделиране на структурата и свойствата на компактни  
обекти в астрофизиката**

# **А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

на дисертация за присъждане на образователната и научна степен  
„ДОКТОР“

**Професионално направление 4.1 Физически науки**  
**Научна специалност: 01.03.01 Теоретична и математическа физика**

**Научен ръководител:**  
проф. д-р Стойчо С. Язаджиев

**Научен консултант:**  
д-р Даниела Д. Донева,  
Университет Тюбинген; ИЯИЯЕ БАН

Докторантът е зачислен в редовна докторантура към катедра Теоретична физика при Физически факултет на СУ “Св. Климент Охридски”. Изследванията по дисертацията са проведени във Физическия факултет на Софийски Университет.

Дисертационната работа е съставена от 139 страници разделени в 8 глави. Съдържа 27 фигури, а библиографията обхваща 140 заглавия.

Дисертационният труд е обсъден на заседание на катедрен съвет в катедра Теоретична физика на Физически факултет, СУ “Св. Климент Охридски”, проведено на 19.10.2016 г., и насочен за обсъждане от Факултетен съвет за защита пред научно жури в състав

проф. дфн Светлана Пачева  
проф. дфн Емил Нисимов  
доц. дфн Пламен Божилов  
проф. дфн Стойчо Язаджиев  
проф. дфн Радослав Рашков

# Съдържание

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Обща теория на относителността</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Алтернативни теории на гравитацията</b>	<b>4</b>
3.1	Алтернативни теории на гравитацията . . . . .	4
3.2	$f(R)$ теории на гравитацията . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Структура и свойства на компактни обекти в астрофизиката</b>	<b>7</b>
4.1	Компактни обекти . . . . .	7
4.2	Уравнение на състоянието . . . . .	8
4.3	Структурни уравнения в ОТО . . . . .	9
4.4	Осцилации на неутронни звезди и епициклични честоти в ОТО . . . . .	11
4.4.1	Осцилации на неутронни звезди . . . . .	11
4.4.2	Приближение на Каулинг . . . . .	12
4.4.3	Орбитални и епициклични честоти на частица около компактен обект	13
4.5	Структурни уравнения в алтернативни теории на гравитацията . . . . .	14
4.6	Осцилации на неутронни звезди и епициклични честоти в алтернативни те- ории на гравитацията . . . . .	17
4.6.1	Уравнения за пертурбациите в приближение на Каулинг . . . . .	17
4.6.2	Орбитални и епициклични честоти в алтернативни теории на грави- тацията . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Числени методи</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>Непертурбативни и самосъгласувани модели на статични и стационарни неутронни и кваркови звезди в <math>R^2</math> гравитация</b>	<b>20</b>
6.1	Статични неутронни звезди . . . . .	22
6.1.1	Непертурбативни резултати . . . . .	22
6.1.2	Резултати при пертурбативните методи . . . . .	24
6.1.3	Сравнение между методите . . . . .	24
6.1.4	Коментари . . . . .	25
6.2	Бавно-въртящи се неутронни и кваркови звезди . . . . .	26
6.2.1	Резултати . . . . .	26
6.2.2	Коментари . . . . .	28
<b>7</b>	<b>Астеросейсмология на неутронни и кваркови звезди в <math>R^2</math> гравитация</b>	<b>29</b>
7.1	Резултати . . . . .	29
7.2	Коментари . . . . .	32
<b>8</b>	<b>Орбитални и епициклични честоти около неутронни и кваркови звезди в <math>R^2</math> гравитация</b>	<b>33</b>
8.1	Резултати . . . . .	33
8.2	Коментар . . . . .	38

# Актуалност на темата, цел и задачи на дисертационния труд

В рамките на дисертацията са разгледани  $f(R)$  теориите и конкретно теория с Лагранжиан  $f(R) = R + aR^2$  – т. нар.  $R^2$  гравитация. Този вид теории са много популярни тъй като не противоречат на експериментите нито в космологични нито в астрофизични случаи. Също така в рамките на тези теории не се появяват не физични ефекти (при коректно третиране на задачата), което ги прави подходящи кандидати за алтернативи на ОТО.

Първоначално са разгледани непертурбативни и самосъгласувани статични решения. Получените резултати са сравнени не само със съответните такива в ОТО, но и с вече известни в литературата пертурбативни и несамосъгласувани резултати и показват некоректността на пертурбативния метод. Разгледано е също така и приближението на бавно въртене, което ни позволява да получим информация за инерчния момент на звездите. В този случай са направени и първите непертурбативни разглеждания на кваркови звезди. Получените резултати отново са сравнени с тези в ОТО, като в този случай наблюдаваните отклонения са значителни.

Разгледани са също така и осцилации на неутронни и кваркови звезди (в приближение на Каулинг) в рамките на ОТО и на  $R^2$  гравитация. Техният спектър, получен чрез наблюдение на гравитационни вълни, може да ни даде информация, както за вътрешната структура на компактните обекти, така и за пространство-времето при силни гравитационни полета.

Разгледани са ефекти свързани с т.нар. квази-периодични осцилации. Разглежданията са в рамките на  $f(R)$  теориите и ОТО и съответно резултатите са сравнени. Тези изследвания са директно свързани с възможността за тестване на структурата и свойствата на пространство-времето около компактните обекти чрез наблюдения в електромагнитния спектър.

## Структура и обем на дисертацията

Глава 1 - Увод.

В Глава 2 накратко са представени основните идеи на Общата теория на относителността.

В Глава 3 се разглеждат алтернативни теории на гравитацията.

Глава 4 започва с кратко описание на различните видове компактни обекти. Разглеждат се различните видове уравнения на състоянието. Разгледани са и уравненията за структурата на статични и стационарни компактни звезди в ОТО. Представено е приближението на Каулинг и явния вид на уравненията за пертурбациите. Разгледано е движението на частица по затворени кръгови орбити в гравитационното поле на компактен обект. В рамките на алтернативните теории са представени полевите уравнения за статични и за бавно въртящи се звезди. Разгледана е  $f(R)$  гравитация с конкретен вид на Лагранжиана, а именно  $f(R) = R + aR^2$ , или т. нар.  $R^2$  гравитация.

В Глава 5 са представени на кратко основните числени методи, които са в основата на разгледаните в дисертацията задачи.

В Глави 6, 7 и 8 са представени оригиналните резултати.

В Глава 6 са представени непертурбативните резултати за статични и за бавно-въртящи се неутронни и кваркови звезди в  $R^2$  гравитация. Представени са новополучените оригинални резултати от самосъгласуваното числено решаване на непертурбативните уравнения. В следващата част на тази глава са представени оригиналните резултати за бавно-въртящо се неутронни и кваркови звезди в приближение на бавно въртене. И в двата

случая резултатите са сравнени с тези в ОТО. Коментирани са резултатите и отклоненията от ОТО.

В Глава 7 са разгледани осцилации на неутронни и кваркови звезди в  $R^2$  гравитация. Главата започва с мотивация на проблема. Представени са оригиналните резултати, които са сравнени с тези в ОТО. Разгледани са някои независими от уравнението на състоянието съотношения между честотите на осцилации и параметрите на разглежданите модели. Резултатите и разликите спрямо ОТО са коментирани.

Глава 8 е посветена на един от основните модели за описанието на квазипериодичните осцилации наблюдавани в лъчението на някои пулсари. Модела е базиран на орбиталните и епицикличните честоти на частица движеща се по стабилна кръгова орбита и осцилираща около нея. Представени са оригиналните резултати и са сравнени с аналогични модели в ОТО. Главата завършва с коментари на резултатите и отклоненията от ОТО.

## 1 Увод

Съвременната представа, която имаме за гравитацията е изцяло геометрична, а математическият подход към нея изисква решаването на система от нелинейни частни диференциални уравнения. Решаването на тези уравнения е нетривиален проблем, дори в случаите, в които след множество опростявания можем да ги сведем до обикновени диференциални уравнения. Точните аналитични решения са много малко и то в прости случаи при отсъствие на материя (вакуумни решения). Най-популярните такива решения са това на Шварцшилд, описващо гравитационното поле на сферично-симетричен обект, решението на Кер, за аксиално-симетричен въртящ се обект, решението на Райснер - Нортстрьом описващо зареден сферично-симетричен обект и Кер-Нюман описващо зареден въртящ се обект. Изброените решения покриват много малка част от задачите, появяващи се при описанието на структурата и свойствата на пространство-времето при силни гравитационни полета. Спектърът на разглежданите проблеми може многократно да се разшири, ако чисто аналитичните методи се комбинират с апарата на изчислителната физика.

От съществен интерес е въпросът за изследването на свойствата и поведението на материята при силни гравитационни полета. Това може да се направи при разглеждане на уравненията на Айнщайн (или тяхно обобщение в контекста на алтернативни теории на гравитацията) с ненулева дясна част. Проблемът е нетривиален от аналитична гледна точка, а много пъти и от изчислителна, но все пак решим във втория случай. Решенията на тези уравнения дават възможност за разглеждане на компактни релативистки звезди, като бели джуджета, неутронни звезди, както и някои по-екзотични обекти като кварковите звезди. Тези решения ни позволяват да изследваме не само структурата и свойствата на пространство-времето около компактни обекти, но и структурата и свойствата на самите компактни звезди, т.е поведението и свойствата на материята при силни гравитационни полета и при високи плътности (по-високи от ядрената) и да определим или поне ограничим възможните уравнения на състоянието за такава материя. По своему неутронните звезди са естествени лаборатории, позволяващи ни да изследваме материята при условия недостижими на Земята.

Основен въпрос затвърдил се след експерименталното откриване на ускореното разширение на Вселената е дали Общата теория на относителността (ОТО) е теорията, описваща гравитацията, най-вече в режим на силни полета и дали не са необходими модификации към нея. Това е въпрос, чийто отговор се очаква от синергията между теоретични модели, числени изследвания и наблюдателни данни. Изчислителните методи в този случай са още по-необходими и се появява възможността да се тества границата на тяхната приложимост поради значителното усложняване на уравненията. Първата стъпка при разглеждането на алтернативни теории е изучаването на масите, радиусите и инерчните моменти на ком-

пактните обекти и какви са отклоненията от резултатите за аналогични модели в Общата теория на относителността.

Изследването на компактните обекти само с оптични наблюдения на самия обект не са особено ефективни поради малките размери на тези обекти и поради това, че те самите не "светят". Тук се намесват наблюденията на гравитационни вълни, които ни дават възможност да тестваме не само структурата на пространство-времето при силни полета (малко преди колапса на бинарни системи от черни дупки ли неутронни звезди), но също така и структурата на самите обекти (при осцилации на неутронни звезди). Такива наблюдения ще ни помогнат да наложим ограничения не само върху теорията на гравитацията (ОТО или алтернативна гравитация), но също така и върху уравненията на състоянието на материята в компактните звезди.

Макар и вече да е факт първото директно наблюдение на гравитационни вълни, ние все още сме далеч от момента, в който ефективно ще можем да ги използваме като наблюдателен апарат. Наблюденията чрез електромагнитни лъчения остават на този етап основният метод за изучаване на силните гравитационни полета. Основно място тук имат т. нар. квази-периодични осцилации, наблюдаващи се в лъчението от някои рентгенови пулсари. Съществуват различни модели, обясняващи тези ефекти, като в една или друга степен те се основават на осцилации около стабилна орбита на частици във вътрешните части на акреционни дискове около компактни обекти (т.е. при силно гравитационно поле).

## 2 Обща теория на относителността

През 1915 г. Гросман, Хилберт и Айнщайн записват уравненията на Общата теория на относителността (ОТО), във вида, в който ги познаваме днес. Те дават изцяло геометрична интерпретация на гравитацията като кривина на пространство-времето, причинена от наличието на маса или енергия (ненулев тензор на енергията и импулса), за разлика от познатата преди това Нютонова теория, която разглежда гравитацията като сила.

За да получим полевите уравнения в ОТО трябва да започнем с написването на действието на ОТО. В случая то е т.нар. действие на Айнщайн - Хилберт и има следния вид при отсъствие на материя (вакуум):

$$S_{\text{GR}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (1)$$

и при наличие на материя:

$$S_{\text{GR}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_{\text{matter}}(g_{\mu\nu}, \Psi_{\text{matter}}), \quad (2)$$

където  $G$  е Нютоновата гравитационна константа,  $R$  е скаларът на Ричи,  $g$  е детерминантата на метричния тензор и  $S_{\text{matter}}$  е действието на материята.

При вариране на действието (1) или (2) ще получим съответно вакуумните или не-вакуумните полеве уравнения. При наличието на материя уравненията на Айнщайн имат вида [1]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3)$$

или записани чрез тензора на Айнщайн  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (4)$$

където  $R_{\mu\nu}$  е тензорът на Ричи, който получаваме чрез контракция на тензора на Риман (тензора на кривината):

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}, \quad (5)$$

$R$  е скаларът на Ричи, получен чрез контракция на тензора на Ричи:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu}, \quad (6)$$

а  $T_{\mu\nu}$  е тензорът на енергията и импулса.

Уравнението (3) може да се запише и чрез следата  $T$  на тензора на енергията и импулса:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (7)$$

Разглеждайки уравнение (3) се вижда, че задават връзка между кривината на пространство-времето и разпределението на енергията.

### 3 Алтернативни теории на гравитацията

Общата теория на относителността и нейните предсказания са добре тествани и потвърдени предимно в режим на слаби гравитационни полета. При силни полета теорията ще бъде тествана в рамките на бъдещи наблюдателни мисии. Тъй като нямаме причина да смятаме, че ОТО ще бъде потвърдена и при силни полета, то е основателно предварително да се изследват алтернативни теории на Айнщайновата гравитация. От квантовата теория на полето е известно, че при силни полета, в уравненията на Айнщайн се появяват квантови поправки, които водят до алтернативни теории на гравитацията от по-висок ред по  $R$ ,  $R_{\mu\nu}$  и  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  [2]. Известно е също така, че опитите да се направи обединена теория на взаимодействията по естествен начин водят до появата на скаларно-тензорните обобщения на ОТО, както и теории, в чиито Лагранжиан има различни корекции към кривината спрямо стандартния Лагранжиан на Айнщайн-Хилберт [3].

Наблюдателните резултати, дават допълнително основание за разглеждане на модифицирани теории на гравитацията. Такъв пример е скорошното откритие, на ускореното разширение на Вселената, за обяснението, на което са приети две основни хипотези. Първата се основава на хипотезата, че съществува екзотична материя, наречена тъмна енергия, която представлява 73% от материята във Вселената [4, 5]. Това е материя с екзотични свойства - проявява, грубо казано, отрицателно налягане и взаимодейства с нормалната (барионна) материя само гравитационно.

Втората хипотеза, с която се обяснява ускореното разширение се основава на недоброто познаване на гравитацията от наша страна и предположението, че е необходима модификация на уравненията на Айнщайн. Това предположение не изисква използването на екзотична материя, а директното му следствие са алтернативните теории на гравитацията.

#### 3.1 Алтернативни теории на гравитацията

Тъй като ОТО е слабо тествана при силни гравитационни полета, не е известно дали теорията ще работи и в този случай. Това дава основание да се изследват алтернативни теории на гравитацията, които при слаби полета дават същите резултати като Общата теория на относителността, но в режим на силна гравитация се различават. Един вид такива теории са скаларно-тензорните теории (СТТ) на гравитацията. В действието, скаларното поле участва по такъв начин, че може да се интерпретира като променлива гравитационна константа. Като сравним вида на действието от Общата теория на относителността (1) и това на скаларно-тензорните теории

$$S_{\text{STT}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \Phi R - \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - U(\Phi) \right] + S_{\text{matter}}(g^{\mu\nu}, \Psi_{\text{matter}}) \quad (8)$$

се вижда, че може да се разглежда ефективна гравитационна константа  $G_{\text{eff}} = \frac{G}{\Phi}$ . В действието (8) вторият и третият член са съответно кинетичен и потенциален член за скаларното поле. В случая, когато  $\omega(\Phi) = \text{const} \equiv \omega$  и  $U(\Phi) = 0$  се получава теорията на Бранс-Дике (Brans-Dicke), която е най-простият вариант на скаларно-тензорна теория.

След вариране на действието (8) по метриката и по скаларното поле, получаваме полевите уравнения, както и уравнението за  $\Phi$ . Те имат вида:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G_0}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} \left( \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi \right) + \frac{1}{\Phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \Phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{U(\Phi)}{\Phi}, \quad (9)$$

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \Phi + \frac{\Phi \frac{dU(\Phi)}{d\Phi} - 2U(\Phi)}{3 + 2\omega(\Phi)} = \frac{1}{3 + 2\omega(\Phi)} \left( 8\pi G_0 T - \frac{d\omega}{d\Phi} \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi \right). \quad (10)$$

Тъждеството на Бианки има вида  $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ .

Така записани уравненията (9) и (10), както и действието (8) са в така наречената отправна система на Йордан (Jordan frame). Тя се приема за физичната отправна система в случая, защото в нея в материалната част на действието не участва скаларното поле, т.е. няма куплиране на скаларно поле и материя, което би нарушило слабия принцип за еквивалентност. В този запис на действието експлицитно участва членът  $\Phi R$ , които е труден за вариране и усложнява получаването на полевите уравнения. За да се избегне това може да се премине в отправна система на Айнщайн (Einstein frame). Това става чрез конформна трансформация на метриката  $g_{\mu\nu}^* = \Phi g_{\mu\nu}$ . Действието в тази отправна система има вида:

$$S_{\text{STT}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g^*} [R^* - 2g^{*\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi)] + S_{\text{matter}}(\varphi^{-1}(\Phi) g_{\mu\nu}^*, \Psi_{\text{matter}}), \quad (11)$$

където за скаларното поле сме използвали трансформацията:

$$\varphi = \int d\Phi \frac{\sqrt{3 + 2\omega(\Phi)}}{2\Phi} = \varphi(\Phi). \quad (12)$$

Преди да запишем полевите уравнения в отправна система на Айнщайн, ще въведем някои означения:  $\Phi^{-1}(\varphi) = A^2(\varphi)$ ,  $V(\varphi) = A^4(\varphi) U(\Phi(\varphi))$ ,  $\alpha(\varphi) = \frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi}$ . Самите уравнения имат вида:

$$R_{\mu\nu}^* = 8\pi G_0 (T_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^*) + 2\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^* V(\varphi) \quad (13)$$

и уравнение за скаларното поле:

$$\nabla_\mu^* \nabla^{*\mu} \varphi - \frac{1}{4} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = -4\pi G_0 \alpha(\varphi) T^*. \quad (14)$$

Тъждеството на Бианки дава  $\nabla_\mu^* T_\nu^{*\mu} = \alpha(\varphi) T^* \partial_\nu \varphi$ .



В действието (11) се появява куплиране на скаларното поле с материята, но в този случай не се нарушава слабия принцип на еквивалентност, защото теорията и действието са фиксирани във физичната отправна система (в отправната система на Йордан) и чрез конформна трансформация на метриката са приведени в отправна система на Айнщайн. Полевите уравнения в двете отправни системи са еквивалентни.

### 3.2 $f(R)$ теории на гравитацията

Един от най-популярните класове от обобщения на ОТО, които обясняват космологичните наблюдения са така наречените  $f(R)$  теории [6],[7],[8].

$f(R)$  теориите са модификация на ОТО, при която Лагранжиана в действието на Айнщайн-Хилберт е заменен с функция на скаларната кривина  $R$ . Поради начина, по които са построени,  $f(R)$  теориите съдържат в себе си размерен параметър, които трябва да се определи или върху него да се наложат ограничения чрез наблюдения. Тези параметри могат да определят различни мащаби в теорията и от тях може да зависи проявлението на теорията в режим на силни полета и в режима на слаби полета. Също така изглежда, че  $f(R)$  теориите са единствените сред теориите от по-висок ред, в които не се появяват нестабилности на Остроградски [6].

За получаването на полевите уравнения на Айнщайн от действието на Айнщайн - Хилберт е възможно използването на два вариационни принципа [9] - стандартна вариация по метриката и вариация на Палатини. Вариацията на Палатини включва в себе си освен вариране по метриката и независимо вариране по свързаността. Изборът на единия или другия вариационен принцип в Общата теория на относителността е формалност, като и двата вариационни метода водят до еднакви (еквивалентни) уравнения. Във  $f(R)$  теориите това не е така - двата метода водят до различни (нееквивалентни) уравнения, което съответно значи и различни теории. По-надолу ще разгледана подробно теорията, която се получава при вариране само по метриката (метричен формализъм), а другите теории ще бъдат споменати на кратко за пълнота.

- Метричен формализъм [6]

Действието в най-общ вид е:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4 \sqrt{-g} f(R) + S_{\text{matter}}(g_{\mu\nu}, \Psi), \quad (15)$$

където с  $\Psi$  бележим общия принос на всички материални полета. След вариация спрямо метриката получаваме полевите уравнения:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (16)$$

където

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g^{\mu\nu}},$$

а примът означава диференциране спрямо аргумента и  $\square \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu$ .

Уравненията (16) са частни диференциални уравнения от четвърти ред спрямо метриката, тъй като в скалара на Ричи има производни от втори ред. Вторите два члена на (16) са тези от четвърти ред и може да се види, че ако те се нулират преминаваме в случая на Общата теория на относителността.

За лявата страна на (16) е изпълнено обобщеното тъждество на Бианки, и съответно  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

Може да се покаже, че метричната  $f(R)$  теория е еквивалентна на най-простия вид скаларно-тензорна теория, а именно теорията на Бранс-Дике (Brans-Dicke).

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [\Phi R - U(\Phi)] + S_{\text{matter}}(g_{\mu\nu}, \Psi). \quad (17)$$

Действието (17) е записано в отправна система на Йордан и съответства на действие на Бранс-Дике с параметър  $\omega_0 = 0$ . Съответните полски уравнения са

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{\Phi} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\Phi} g_{\mu\nu} V(\Phi) + \frac{1}{\Phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \Phi, \quad (18)$$

$$R = V'(\Phi).$$

Както бе споменато по-нагоре отправната система на Йордан е приета за физичната отправна система, но записът на уравненията и действието в отправната система на Айнщайн, може съществено да опрости както получаването на полските уравнения, така и техния краен вид. Сега ще направим това с действието (17).

Окончателно, общият вид на действието (15) записано като действие на Бранс-Дике в отправна система на Айнщайн е:

$$S^* = \int d^4x \sqrt{-g^*} \left[ \frac{R^*}{16\pi G} - \frac{1}{2} g^{*\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right] + S_{\text{matter}}(e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi} g_{\mu\nu}^*, \Psi). \quad (19)$$

Както споменахме по-горе във  $f(R)$  теориите двата вариационни метода, чрез които могат да се получат полските уравнения не водят до еквивалентни резултати за разлика от Общата теория на относителността. Сега накратко ще разгледаме т.нар. формализъм на Палатини. Действието има същия вид, но тензорът и скаларът на Ричи са конструирани с независимата свързаност. Ще въведем ново означение за получените по този начин тензор и скалар, а именно  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  и  $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$ . Действието записваме във вида [6]:

$$S_{\text{Palatini}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + S_{\text{matter}}(g_{\mu\nu}, \Psi). \quad (20)$$

Като варираме спрямо метриката и спрямо независимата свързаност и вземем предвид равенството:  $\delta \mathcal{R} = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$ , получаваме полските уравнения:

$$f'(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} f(\mathcal{R}) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (21)$$

$$-\nabla_\lambda (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu}) + \nabla_\sigma (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\sigma(\mu}) \delta_\lambda^{\nu)}) = 0.$$

И тук може да се покаже, че теорията получена във формализъм на Палатини е еквивалентна на теория на Бранс-Дике.

## 4 Структура и свойства на компактни обекти в астрофизиката

### 4.1 Компактни обекти

Звездната еволюция завършва с така наречените компактни обекти. Това са бели джуджета, неутронни звезди и черни дупки. Компактните обекти се различават от обикновените

звезди по два основни показателя. Те са напълно изчерпали ядреното си гориво и за една и съща маса имат много по-малки радиуси от обикновените звезди и съответно много по-силна повърхнинна гравитация [10, 11].

Тъй като в компактните обекти не протичат процеси на ядрен синтез, то съответно липсва и радиационно налягане, което да уравни гравитацията и да възпрепятства пълния гравитационен колапс на звездата. При белите джуджета и при неутронните звезди поради високата плътност, ключова роля в уравниването на колапса има налягането на изродения ферми газ. Ако звездата е достатъчно масивна, гравитацията на колапсиращото ядро може да преодолее налягането на изродения ферми газ и ядрото колапсира напълно - до черна дупка [10, 11].

Белите джуджета имат маси около  $1.4M_{\odot}$  и радиуси около 5000 km, което съответства на средни плътности около  $10^6 \text{ g cm}^{-3}$ . Те са краен стадий на еволюцията на звезди от главната последователност, които преминават през стадий на червен гигант (по време на хелиевото горене) и след това се свиват до бели джуджета.

Звезди с достатъчно голяма маса (по-големи от  $8 - 10M_{\odot}$ ) след като завършат цикъла на водородно горене се разширяват до свръх гиганти. Те продължават еволюцията си с експлозии от тип супернова, като при тях ядрото претърпява гравитационен колапс, а по-голямата част от масата на звездата бива изхвърлена в пространството. Максималните наблюдателно определени маси за неутронни звезди са около  $2M_{\odot}$  [12], а наблюдаваните радиуси са около  $10 - 12 \text{ km}$ . Типичните централни плътности са няколко пъти ядрената, т.е. от порядъка на  $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ .

Черните дупки са обекти, чиито радиус е по-малък от радиуса на Шварцшилд за тяло със съответната маса, т.е.  $R_{\text{ВН}} < 2GM/c^2$ , където  $M$  е масата на тялото. Те са напълно колапсирани звезди, т.е. звезди достигнали последния възможен стадий на звездната еволюция. Техните маси и размери могат да варират в големи граници - от части от слънчевата маса за микро-черни дупки до маси от порядъка на  $10^{10}M_{\odot}$  за свръх масивните черни дупки в центровете на галактиките [10, 11].

## 4.2 Уравнение на състоянието

Компактните обекти, като неутронни или по-екзотичните кваркови звезди се характеризират с изключително високи централни плътности - до няколко пъти ядрената. Свойствата на "студена" материя с плътности до ядрената,  $\rho_0 = 2.7 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ , могат да бъдат определени експериментално в лабораторни условия. В такива условия можем феноменологично да определим някакви съотношения между величините влизащи в тензора на енергията и импулса на материята. Такъв тип съотношения се наричат уравнения на състоянието (УнС) и са изключително важни за описването на вътрешната структура на компактните обекти.

Невъзможността да тестваме материя с плътност по-висока от ядрената в лабораторни условия налага създаването на изцяло теоретични модели за поведението на материята при такива екстремни условия. Комбинацията от теоретични модели и наблюдателни данни налага ограничения върху УнС. Уравнението трябва да позволява стабилни модели с максимални маси не по-малки от максималната наблюдавана до момента маса и скорости на въртене на звездата не по-ниски от скоростите на най-бързо въртящите се милисекундни пулсари. Поради малките размери измерването на радиуса е изключително неточно и не може да се използва за налагане на сериозни ограничения върху УнС. Тези фактори, в комбинация с малките размери на обектите правят измерванията много неточни, което съответно не позволява да бъдат използвани за налагането на съществени ограничения върху УнС. Наблюдаването на гравитационни вълни от неутронни или кваркови звезди ще наложи допълнителни ограничения върху УнС и се очаква да донесе директна информация за структурата на тези обекти. Уравнения на състоянието, отговарящи на горните

условия и отчитащи структурата на звездата условно се наричат реалистични уравнения на състоянието.

Налагането на ограничения върху УнС стеснява неопределеността в познанието ни за поведението и състоянието на материята при плътности по-високи от ядрената и също така увеличава знанието ни за структурата на компактните обекти.

Сега на кратко ще разгледаме основните и най-често използвани в астрофизиката типове УнС.

**Политропно УнС:** Най-простото и също така аналитично уравнение на състоянието е политропното. За пълната плътност на енергията то има вида:

$$\varepsilon(p) = \left(\frac{p}{K}\right)^{\frac{1}{\Gamma}} + \frac{p}{\Gamma - 1}, \quad (22)$$

където с  $p$  сме отбелязали налягането, а с  $\varepsilon$  пълната плътност на енергията. Тук  $K$  е политропен индекс, а  $\Gamma$  политропна експонента.

Политропното уравнение дава прекалено опростен модел, като често се използва с постоянни индекси в цялата звезда, като по този начин не се отчита структурата на звездата. Следващата стъпка е да се разгледат по-реалистични уравнения на състоянието.

**Адронни уравнения на състоянието:** Адронните уравнения представляват таблици, задаващи връзка между пълната плътност на енергията и налягането, като също така могат да включват барионната плътност и енталпията. При построяването на тези таблици се използват различни модели за различните слоеве от звездата, като те варират в зависимост от предполагаемата структура, състав на звездата и съответния теоретичен модел. Ограничения върху тези УнС и върху моделите, използвани за тяхното построяване могат да се наложат, и се налагат, чрез измерване на масата, радиуса и скоростта на въртене на неутронни звезди, както споменахме по-горе в текста.

**Политропни апроксимации:** При подходящ избор на параметри, отделните области на адронните уравнения могат по отделно с добра точност да бъдат описани с политропни УнС, а цялата звезда със съшиване на такива политропни уравнения за отделните слоеве [13]:

$$p(\rho) = \bigcup_{i=1}^n p_i(\rho) = \bigcup_{i=1}^n K_i \rho^{\Gamma_i}. \quad (23)$$

Всяко политропно уравнение трябва да е валидно в отделен интервал от плътности и да е изпълнено условието  $\rho_i \leq \rho \leq \rho_{i+1}$ . Ще искаме също така налягането и плътността да са непрекъснати в точките на преход между отделните политропни уравнения.

**Кварково уравнения на състоянието:** Компактни обекти изградени само от кваркова материя, без външни слоеве (кора изградена от друга материя) се описват с УнС във вида:

$$p = b(\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (24)$$

където  $\varepsilon_0$  е плътността на енергията повърхността на такава звезда.

Тъй като по-надолу в текста за нас  $\rho$  ще има смисъл на пълна плътност на енергията, дори когато го наричаме за простота само "плътност".

### 4.3 Структурни уравнения в ОТО

В тази глава ще разгледаме явния вид на уравненията, задаващи структурата на статични и на въртящи се неутронни звезди.

## Статичен случай

Ще разгледаме статично пространство-време с метрика

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2). \quad (25)$$

За да определим структурата на звездата ще се нуждаем от метричните функции  $\phi(r)$  и  $\Lambda(r)$ , както и от налягането  $p(r)$ , пълната плътност на енергията  $\rho(r)$  и барионната плътност  $n(r)$  като функции на радиалната координата [9]. Уравнението на състоянието ни е предварително зададено, а останалите функции трябва да определим използвайки полевите уравнения (3). Тензора на енергията и импулса  $T^{\mu\nu}$  ще изберем да бъде този на идеален флуид:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (26)$$

и от закона за запазване на енергията и импулса имаме  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

След съответните изчисления, получаваме полевите уравнения в явен вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r(1 - e^{-2\Lambda})) = 8\pi G\rho \quad (27)$$

$$\frac{2}{r} e^{-2\Lambda} \frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\Lambda}) = 8\pi Gp \quad (28)$$

$$-e^{-2\Lambda} \left( \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 - \left( \frac{d\Lambda}{dr} \right) \left( \frac{d\phi}{dr} \right) + \left( \frac{d^2\phi}{dr^2} \right) + \frac{\left( \frac{d\phi}{dr} \right) - \left( \frac{d\Lambda}{dr} \right)}{r} \right) = -8\pi Gp. \quad (29)$$

Можем да дефинираме масова функция  $m(r) = (1 - e^{-2\Lambda})/2$ . На повърхността на звездата (при  $r = R_s$ ) тази функция ни дава масата на звездата. Ако в уравнение (27) заместим горния израз, получаваме диференциално уравнение за масата

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi G\rho r^2, \quad (30)$$

или след интегриране

$$m(r) = \int_0^r 4\pi G\rho r^2 dr, \quad (31)$$

където константа получена при интегрирането е нула, за да е физично решението, т.е. геометрията в центъра да е гладка.

В горната система само уравнения (27) и (28) са независими. Разглеждайки (27), (28) и (29) се вижда, че все още имаме нужда от уравнение, което да ни задава връзка между налягането и радиалната координата. Това уравнение следва от закона за запазване на енергията и импулса  $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ . След съответните пресмятания получаваме т.нар. уравнение за хидростатично равновесие:

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{d\phi}{dr}. \quad (32)$$

След като получихме уравнения за всички функции, които са ни необходими, можем да премине към конструирането на модел на звезда. За тази цел ще запишем отново всички уравнения, от които имаме нужда:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi G \rho r^2 \quad (33)$$

$$\frac{2}{r} e^{-2\Lambda} \frac{d\phi}{dr} - \frac{m}{r^3} = 8\pi G p \quad (34)$$

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{d\phi}{dr} \quad (35)$$

$$\rho(r) = \rho(p(r)). \quad (36)$$

За да можем да решим тази система трябва да добавим и гранични условия за съответните променливи. За масата имаме  $m(0) = 0$ , което в термини на метричната функция  $\Lambda$  може да се запише като  $\Lambda(0) = 0$ . Последното условие за  $\Lambda$  изразява изискването геометрията да е регулярна в центъра на звездата. За метричната функция  $\phi$  имаме зададено гранично условие върху повърхността:  $\phi(r = R_S) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2M/R_S)$ . За налягането (плътността) в центъра имаме предварително зададена централна стойност  $p(r = 0) = p_c$  ( $\rho(r = 0) = \rho_c$ ). Във вътрешността на звездата трябва налягането и плътността на енергията да са положителни,  $p > 0$ ,  $\rho > 0$ . Координатният радиус, съответстващ на повърхността на звездата определяме от условието налягането да се нулира върху нея,  $r_S = r(p = 0)$  или за кваркови звезди  $r_S = r(\rho = \rho_0)$ .

Както видяхме, за да опишем структурата на една неутронна звезда се нуждаем от стойност за централната плътност. Съответно променяйки централната плътност за едно и също УнС, можем да получим еднопараметрична фамилия от решения  $M(\rho_c)$ , която представлява последователност от модели. При увеличаването на централната плътност се увеличава и масата на моделите. Това увеличаване става до определена максимална маса (зависи от съответното УнС), след което започва намаляване на масата на моделите. В статичния случай, точката, в която производната  $dM/d\rho_c$  си сменя знака, от положителна става отрицателна, определя точката на смяна на стабилността за съответното УнС. Моделите с централни плътности, по-високи от тази на модела с максимална маса са нестабилни. В стационарния случай определянето на стабилността е много по-сложно, но с добро приближение можем да определяме нестабилните модели също както в статичния случай.

## 4.4 Осцилации на неутронни звезди и епициклични честоти в ОТО

### 4.4.1 Осцилации на неутронни звезди

Осцилациите на звездите са изключително важен предмет на изследване в астрофизиката. На обстойното изследване на въпроса са посветени няколко глави в [14], където до голяма степен се обобщават известните до момента резултати в литературата. Звездите трептят в различните стадии на тяхната еволюция и това може да ни даде изключително полезна информация за тяхната структура. При компактните обекти осцилациите (стига да не са сферично-симетрични) водят до излъчване на гравитационни вълни, чиито спектър носи информация не само за структурата и вида на компактния обект, но и за пространство-времето като цяло – дава възможност за тестване на ОТО и на алтернативни теории на гравитацията.

При изследването на осцилации на звезда разглеждаме пертурбации на равновесно състояние. Уравненията задаващи пертурбациите на пространство-време с идеален флуид се дават от пертурбираната система на Айнщайн-Ойлер:

$$\delta (G^{\alpha\beta} - 8\pi T^{\alpha\beta}) = 0 \quad (37)$$

$$q_\alpha^\gamma \delta (\nabla_\beta T_\gamma^\beta) = \delta ((\rho + p) u^\beta \nabla_\beta u_\alpha + q_\alpha^\beta \nabla_\beta p), \quad (38)$$

като е включена само ортогоналната проекция на  $\delta\nabla_\beta T^{\beta\gamma} = 0$  спрямо  $u^\alpha$ , защото пертурбацията на плътността на енергията  $\Delta\varepsilon = -1/2(\varepsilon + p)q^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$  е първи интеграл на проекцията по  $u^\alpha$ . За  $\Delta\varepsilon$  записано по горния начин  $u^\alpha\delta\nabla_\beta T^{\beta\gamma} = 0$  е твърдение. Тук  $q_\alpha^\gamma$  е проекционен тензор, ортогонален на  $u^\alpha$ . Пертурбираните твърдения на Бианки имат вида  $\delta\nabla_\beta T^{\beta\gamma} = 0$ .

**Нерадиални пертурбации:** пертурбациите на сферични звезди могат да бъдат разложени по сферични функции  $Y_{lm}$ . Всяка мода принадлежи на  $(l, m)$  представяне на групата на въртене и тъй като пертурбараната метрика и звезда са сферично-симетрични, то няма зацепване между пертурбации с различни стойности на  $(l, m)$ .

За да разгледаме осцилации на звезда трябва да разгледаме пертурбации на флуида и пертурбации на метриката, като извън звездата остават само пертурбациите на метриката. Тук накратко ще се запознаем с различните видове флуидни моди [16], тъй като те имат основна роля при излъчването на гравитационни вълни. Основните класове моди, от които ще се интересуваме са фундаменталните ( $f$ -моди), моди на налягането ( $p$ -моди) и гравитационни моди ( $g$ -моди), но на кратко ще споменем и други. Задачата типично се свежда до задача за собствени функции и собствени стойности, където честотите са собствените стойности.

**$f$ -моди:** това са моди проявяващи се само при нерадиални осцилации на звездата. Честотата на осцилациите е пропорционална на средната плътност на звездата и не зависи съществено от структурата и.

**$p$ -моди:** при тях връщаща сила е налягането. Появяват се както при радиални, така и при нерадиални осцилации, но тъй като радиалната компонента на вектора на отместването е много по-голяма от тангенциалната, то и осцилациите са почти радиални.

**$g$ -моди:** резултат са от факта, че гравитацията изглажда материални нехомогенности върху еквипотенциални повърхнини на ниво.

**$r$ -моди (ротационни):** при невъртящи се звезди са изцяло тороидални (аксиални) с клоняща към нула честота. При въртящи се звезди, векторът на отместването придобива и сфероидална компонента.

Нека продължим с кратък коментар и върху модите на пространство-времето ( $w$ -моди).

**Моди на кривината:** това са типичните  $w$ -моди и имат основно значение за астрофизиката. По името им се разбира, че са свързани с кривината на пространство-времето.

**Уловени моди (trapped modes):** появяват се за звезди, чиято повърхност се намира от вътрешната страна на максимума на гравитационния потенциал, т.е. вътре във фотонната сфера (грубо казано за модели, за които  $R \leq 3M$ ).

#### 4.4.2 Приближение на Каулинг

Ако разглеждаме пертурбации на флуида с малка дължина на вълната, то те предизвикват малки промени в метриката. Това навежда на мисълта, че може да разгледаме само пертурбации на флуида, като в същото време фиксираме метриката ( $\delta g_{\alpha\beta} = 0$ ). Този подход се нарича приближение на Каулинг и е подходящ за получаване на приблизителна оценка на честотите на  $f$ ,  $p$  и  $r$  модите. Авторите на [17] разглеждат точността на приближението на Каулинг в случая на бавновъртящи се звезди за УнС с  $N = 1$  политропи и  $l = 2$ . За  $f$ -модите те получават отклонение от резултатите получени при решаване на пълната задача от около 30% за звезди с ниска компактност до около 15% за звезди с висока компактност. Тези числа обосновават използването на това приближение за бързовъртящи се модели, както и за разглеждания в рамките на алтернативни теории на гравитацията, където получаването на пълната система е сложна задача.

За да са регулярни функциите за пертурбациите  $W$  и  $V$  в центъра, функциите трябва да имат вида:

$$W = W_1 r^{l+1}, \quad V = V_1 r^l. \quad (39)$$

Тези функции параметризират вектора задаващ Лагранжевите отмествания на флуида. В термини на  $W_1$  и  $V_1$  уравненията имат вида:

$$W_1' = \frac{d\rho}{dp} \left( \omega^2 \exp \Lambda - 2\Phi r V_1 + \Phi' W \right) - \frac{l(l+1) \exp \Lambda V_1}{r} - \frac{l+1}{r} W_1 \quad (40)$$

$$V_1' = 2V\Phi' - \frac{\exp \Lambda}{r} W - l \frac{V_1}{r}. \quad (41)$$

Граничното условие на повърхността придобива вида:

$$\omega^2 \exp -2\Phi V_1 + \Phi \exp -\Lambda \frac{W_1}{r} = 0 \Big|_{r=r_S}, \quad (42)$$

а това в центъра:

$$W_1 = -lV_1|_{r=0} \quad (43)$$

#### 4.4.3 Орбитални и епициклични честоти на частица около компактен обект

В тази част на кратко е представен аналитичният апарат за получаването на уравненията за радиуса на последната стабилна кръгова орбита (ПСКО/ISCO), уравненията за радиалната и за вертикалната епициклични честоти, както и за орбиталната честота [18, 19, 20, 21].

Разглеждаме стационарно и аксиално симетрично пространство време с метрика

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + 2g_{t\varphi} dt d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2, \quad (44)$$

където всички метрични функции зависят само от координатите  $r$  и  $\theta$ . Масивни частици, в гравитационно поле се движат по времеподобни геодезични на метриката (44). Стационарната и аксиалната Килингови симетрии на метриката, породени от Килинговите вектори  $\frac{\partial}{\partial t}$  и  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  пораждат два интеграла на движението, а именно  $E = -u_t$  и  $L = u_\varphi$ . Първият съответства на енергията на единица маса, а вторият на момента на импулса спрямо оста на симетрия и  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  е четири скоростта на частицата.

За  $\theta = \frac{\pi}{2}$  задачата се свежда до ефективна едномерна задача

$$dr/d\tau^2 = V(r), \quad (45)$$

с ефективен потенциал

$$V(r) = g_{rr}^{-1} \left[ -1 - E^2 U(r, \theta = \frac{\pi}{2}) \right]. \quad (46)$$

Стабилна кръгова орбита с радиус  $\bar{r}$  определяме от условията потенциалът и неговата производна да се нулират,  $V(\bar{r}) = 0 = V'(\bar{r})$  и  $V''(\bar{r}) > 0$ , където с прим означаваме производните спрямо  $r$ . Условието  $V''(\bar{r}) = 0$  ни дава радиуса на последната стабилна кръгова орбита. Това е естествено следствие от факта, че кръговите орбити са стабилни (нестабилни), ако втората производна на потенциала е положителна (отрицателна).

За метрика на пространство-времето записана в горния вид ъгловата скорост  $\Omega_p$  на частица, движеща се по кръгова екваториална орбита е



$$\Omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{-\partial_r g_{t\varphi} \pm \sqrt{(\partial_r g_{t\varphi})^2 - \partial_r g_{tt} \partial_r g_{\varphi\varphi}}}{\partial_r g_{\varphi\varphi}}, \quad (47)$$

а радиалната и за вертикалната епициклични честоти са:

$$\nu_r^2 = \frac{(g_{tt} + \Omega_p g_{t\varphi})^2}{2(2\pi)^2 g_{rr}} \partial_r^2 U \left( \bar{r}, \frac{\pi}{2} \right), \quad (48)$$

$$\nu_\theta^2 = \frac{(g_{tt} + \Omega_p g_{t\varphi})^2}{2(2\pi)^2 g_{\theta\theta}} \partial_\theta^2 U \left( \bar{r}, \frac{\pi}{2} \right). \quad (49)$$

За статични неутронни звезди орбиталната честота и вертикалната епициклична честота съвпадат,  $\nu_\theta = \nu_r$ , за  $f = 0$ , където  $f$  е честотата на въртене на звездата ( $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ ). Върху ПСКО квадрата на радиалната епициклична честота е равен на нула, а за по-малки радиуси е отрицателен, което означава, че орбитите с радиус по-малък от ПСКО са радиално нестабилни.

## 4.5 Структурни уравнения в алтернативни теории на гравитацията

### Статичен случай и бавно въртене

#### Пертурбативни методи

Някои автори [22, 23] предлагат пертурбативен подход за изследване на алтернативните теории на гравитацията и по специално за  $f(R)$  теориите. По-надолу и в следващите глави ще разгледаме аналитичните и числените резултати получени в [23], като по този начин можем да направим качествени и количествени сравнения между резултати, получени, чрез този метод и непертурбативните самосъгласувани решения.

Математическата постановка, която предлагат в литературата, включително и авторите на [22, 23], е само за вътрешността на звездата и е следната: за функцията  $f(R)$  в действието избираме такъв вид, че да позволява пертурбативни разглеждания и в случая  $a = 0$  да получаваме ОТО, а именно

$$f(R) = R + ah(R) + \mathcal{O}(a^2), \quad (50)$$

където  $h(R)$  е произволна функция на скалара на Ричи, а последният член обозначава корекциите от ред по-висок от първи по  $a$ .

Тъй като търсим сферично-симетрични решения във вътрешността на звездата, то избираме сферично симетрична метрика от вида

$$ds^2 = -e^{2\phi_a} dt^2 + e^{2\lambda_a} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (51)$$

Варираме действието по метриката и използваме следния вид на функцията  $f(R) = R + a^2 R$ , т. нар.  $R^2$  гравитация, развиваме по параметъра  $a$  метричните функции и хидродинамичните величини. Запазвайки само членове линейки по  $a$  получаваме

$$8\pi r^2 \rho_a = 1 - e^{-2\lambda_a} (1 - 2r\lambda'_a) + ah_R r^2 \left[ 8\pi\rho + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{h_R} - R \right) - e^{-2\lambda} \left( r^{-1} (2 - r\lambda') \frac{h'_R}{h_R} + \frac{h''_R}{h_R} \right) \right], \quad (52)$$

$$8\pi r^2 P_a = -1 + e^{-2\lambda_a} (1 + 2r\phi'_a) + ah_R r^2 \left[ 8\pi P - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{h_R} - R \right) + e^{-2\lambda} r^{-1} (2 + r\phi') \frac{h'_R}{h_R} \right]. \quad (53)$$

За масата е валидно същото разложение, както за плътността:  $M_a = M + aM_1 + \dots$ . Също така предполагаме, че е изпълнено и следното равенство:

$$e^{-2\lambda_a} = 1 - \frac{M_a}{r}. \quad (54)$$

Вземайки производната на масата  $M_a$  по радиалната координата

$$\frac{dM_a}{dr} = 1 - e^{-2\lambda_a}(1 - 2r\lambda'_a). \quad (55)$$

и замествайки я в уравнение (52) получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{dM_a}{dr} = & 8\pi r^2 \rho_a - ah_R \left[ 8\pi r^2 \rho + \frac{r^2}{2} \left( \frac{h}{h_R} - R \right) + \right. \\ & \left. (4\pi \rho r^3 - 2r + \frac{3}{2}M) \frac{h'_R}{h_R} - r(r - M) \frac{h''_R}{h_R} \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Уравнението за хидростатично равновесие има вида

$$\frac{dP_\alpha}{dr} = -(\rho_\alpha + P_\alpha) \frac{d\phi_\alpha}{dr}. \quad (57)$$

Използвайки уравнение (53), получаваме:

$$\begin{aligned} 2(r - M_\alpha) \frac{d\phi_\alpha}{dr} = & 8\pi r^2 P_\alpha + \frac{M_\alpha}{r} - \alpha h_R \left[ 8\pi r^2 P + \frac{r^2}{2} \left( \frac{h}{h_R} - R \right) + \right. \\ & \left. (2r - \frac{3}{2}M + 4\pi P r^3) \frac{h'_R}{h_R} \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

## Непертурбативен метод

В тази част успоредно ще разгледаме статичния случай и приближението на бавно въртене. Последното е предложено от Хартъл (Hartle) в [24] и [25]. Основното предимство на приближението е, че можем да разглеждаме система от обикновени диференциални уравнения, а не частни диференциални уравнения. В основата си това приближение представлява разложение на метриката по степени на ъгловата скорост  $\Omega$  на звездата. Разглеждат се два варианта - разложение в ред до членове от порядъка на  $\Omega$  и разложение до членове от порядъка на  $\Omega^2$ . Тъй като диагоналните елементи на метриката съдържат само членове, пропорционални на четни степени на ъгловата скорост, то в първия случай те не се променят спрямо статичния. От друга страна недиагоналните елементи са пропорционални на нечетните степени на  $\Omega$  и съответно в рамките на приближението те ще се променят. В нашия случай недиагоналните елементи ще са  $\omega(r, \theta)$ , които както казахме задават увеличаването на координатната система. Във втория случай, както вече може да се съобрази, промяната ще бъде в диагоналните елементи, но не и в недиагоналните. По-надолу ние ще се интересуваме само от разложение до членове пропорционални на  $\Omega$ .

Използваме еквивалентността със СТТ и разглеждаме уравненията в отправна система на Айнщайн. В новата отправна система метриката отбелязваме с  $g_{\mu\nu}^*$  и тя е свързана със старата метрика чрез следната конформна трансформация  $g_{\mu\nu}^* = \Phi g_{\mu\nu}$ . Действието в отправна система на Айнщайн можем да запишем във вида:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g^*} [R^* - 2g^{*\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi)] + \\ & S_{\text{matter}}(e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi} g_{\mu\nu}^*, \chi), \end{aligned} \quad (59)$$

където  $R^*$  е скаларът на Ричи спрямо метриката  $g_{\mu\nu}^*$  и въвеждаме ново скаларно поле  $\varphi$ , дефинирано като  $\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \Phi$ . Потенциалът  $V(\varphi)$  в отправната система на Айнщайн е съответно  $V(\varphi) = A^4(\varphi)U(\Phi(\varphi))$ , където  $A(\varphi)$  е конформният фактор, които се дефинира при избора на теорията.

Ще разглеждаме страционарно и аксиално-симетрично пространство-време, както и стационарна и аксиално-симетрична конфигурация на флуида и скаларното поле. Ще се ограничим до членове от първи порядък по ъгловата скорост, която сме дефинирали като  $\Omega = u^\phi/u^t$ , а самата метрика можем да запишем във вида [24]

$$ds_*^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\vartheta^2) - 2\omega(r, \theta)r^2 \sin^2\theta d\vartheta dt. \quad (60)$$

Безразмерните поледи уравнения на Айнщайн, ограничени само до членове линейни по  $\Omega$ , са следните

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\Lambda})] = 8\pi G A^4(\varphi) \rho + e^{-2\Lambda} \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} V(\varphi), \quad (61)$$

$$\frac{2}{r} e^{-2\Lambda} \frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\Lambda}) = 8\pi G A^4(\varphi) p + e^{-2\Lambda} \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2} V(\varphi), \quad (62)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left( \frac{d\phi}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{2}{r} \right) \frac{d\varphi}{dr} = 4\pi G \alpha(\varphi) A^4(\varphi) (\rho - 3p) e^{2\Lambda} + \frac{1}{4} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} e^{2\Lambda}, \quad (63)$$

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \left( \frac{d\phi}{dr} + \alpha(\varphi) \frac{d\varphi}{dr} \right), \quad (64)$$

$$\frac{e^{\Phi-\Lambda}}{r^4} \partial_r [e^{-(\Phi+\Lambda)} r^4 \partial_r \bar{\omega}] + \frac{1}{r^2 \sin^3\theta} \partial_\theta [\sin^3\theta \partial_\theta \bar{\omega}] = 16\pi G A^4(\varphi) (\rho + p) \bar{\omega}, \quad (65)$$

където сме дефинирали

$$\alpha(\varphi) = \frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{and} \quad \bar{\omega} = \Omega - \omega. \quad (66)$$

Тук  $p$  и  $\rho$  са налягането и плътността на енергията в отправна система на Айнщайн и те са свързани с тези в отправна система на Йордан  $p_*$  и  $\rho_*$  като  $\rho_* = A^4(\varphi)\rho$  и  $p_* = A^4(\varphi)p$ .

За да опишем структурата на неутронна звезда и в този случай е необходимо да добавим и уравнение на състоянието, било то таблично или аналитично зададено. Също така системата трябва да се разглежда самосъгласувано.

Уравнението за  $\bar{\omega}$  се отцепва от останалите уравнения и така се образува независима подсистема. Гранични условия в центъра на звездата са  $\rho(0) = \rho_c$ ,  $\Lambda(0) = 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dr}(0) = 0$ , а на безкрайност  $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = 0$ , което е следствие от това, че изискваме асимптотически плоско решение<sup>1</sup> [26]. Последните две условия осигуряват асимптотически плоско пространство-време в отправна система на Айнщайн и в отправна система на Йордан. Координатният радиус на звездата  $r_S$  се определя от условието  $p(r_S) = 0$  а физическият радиус (този в отправна система на Йордан) като  $R_S = A[\varphi(r_S)]r_S$ .

Уравнението за  $\bar{\omega}$  е всъщност елиптично частно диференциално уравнение на сферично-симетричен фон. Този факт, както и асимптотичното поведение на  $\bar{\omega}$  на безкрайност ни

<sup>1</sup>Предположението за асимптотически плоско пространство-време е основано за астрофизични системи с размери от порядъка на 1 AU или дори по-малки, за разлика от космологичния случай, където това става при мащаби от  $10^{26}m$ .

позволяват значително да опростим уравнението. Може да се покаже, че при определени условия функцията зависи само от  $r$  и уравнението има вида:

$$\frac{e^{\Phi-\Lambda}}{r^4} \frac{d}{dr} \left[ e^{-(\Phi+\Lambda)} r^4 \frac{d\bar{\omega}(r)}{dr} \right] = 16\pi G A^4(\varphi) (\rho + p) \bar{\omega}(r). \quad (67)$$

Новите гранични условия за уравнението са

$$\frac{d\bar{\omega}}{dr}(0) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\omega} = \Omega. \quad (68)$$

Първото условие осигурява регулярност на  $\bar{\omega}$  в центъра на звездата.

Приближението на бавно въртене ни позволява да пресметнем инерчния момент  $I$  на звездата, дефиниран като

$$I = \frac{J}{\Omega}. \quad (69)$$

Използвайки уравнение (67) за  $\bar{\omega}$  и асимптотиката на  $\bar{\omega}$  можем да получим друг израз за инерчния момент, а именно

$$I = \frac{8\pi G}{3} \int_0^{rs} A^4(\varphi) (\rho + p) e^{\Lambda-\Phi} r^4 \left( \frac{\bar{\omega}}{\Omega} \right) dr. \quad (70)$$

## 4.6 Осцилации на неутронни звезди и епициклични честоти в алтернативни теории на гравитацията

### 4.6.1 Уравнения за пертурбациите в приближение на Каулинг

В тази част ще разгледаме уравненията за нерадиалните пертурбации на статични, сферично-симетрични компактни звезди в приближение на Каулинг в случая на  $R^2$  гравитация. Разглеждат се пертурбации на флуида спрямо фиксирана метрика в отправна система на Йордан, което е еквивалентно на фиксирана метрика и фиксирано скаларно поле (скаларна степен на свобода) в отправна система на Айнщайн. Въпреки опростяванията в приближението, резултатите са достатъчно точни за качествени изследвания. Така получените резултати се различават от тези, получени при решаване на пълната задача в диапазона 10 – 30 %, като разликите намаляват с увеличаването на компактността на моделите [28, 29].

Първият представен в литературата извод на уравненията за пертурбациите на флуида е направен от Сотани и Кокотас в приближение на Каулинг в [30].

Оригиналните резултати, които ще бъдат представени по-късно са получени и коментирани в [31]. В тази работа са използвани независимо изведени уравненията за пертурбациите, които имат вида

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dr} &= \frac{d\rho}{dp} (\omega^2 A(\varphi) e^{\Lambda-2\phi} V r^2 + \phi' W + \alpha(\varphi) \psi W) - \\ &\quad l(l+1) A(\varphi) e^{\Lambda} V, \\ \frac{dV}{dr} &= 2(\phi' + \alpha(\varphi) \psi) V - \frac{e^{\Lambda} W A^{-1}(\varphi)}{r^2}, \end{aligned} \quad (71)$$

където сме дефинирали  $\psi = d\varphi/dr$ .

Граничното условие на повърхността на звездата е Лагранжевата производна на налягането да се нулира. Това е еквивалентно на

$$\omega^2 e^{-2\phi} V + (\phi' + \alpha(\varphi)\psi) e^{-\Lambda} W \frac{A^{-1}(\varphi)}{r} = 0 \Big|_{r=R}. \quad (72)$$

От изчислителна гледна точка е удобно да въведем нови променливи  $W_1$  и  $V_1$  и да пренапишем граничните условия в центъра на звездата в термини на новите променливи

$$W = W_1 r^{l+1}, \quad V = V_1 r^l. \quad (73)$$

Системата уравнения (71) в термини на  $W_1$  и  $V_1$  е следната

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dr} &= \frac{d\rho}{d\rho} [\omega^2 A(\varphi) e^{\Lambda-2\phi} V_1 r + \phi' W_1 + \alpha(\varphi)\psi W_1] - \\ &\quad \frac{l(l+1)A(\varphi)e^{\Lambda}V_1}{r} - (l+1)\frac{W_1}{r}, \\ \frac{dV_1}{dr} &= \left[ 2(\phi' + \alpha(\varphi)\psi) - \frac{l}{r} \right] V_1 - \frac{e^{\Lambda}W_1 A^{-1}(\varphi)}{r}, \end{aligned} \quad (74)$$

с гранично условие на повърхността на звездата

$$\omega^2 e^{-2\phi} r V_1 + (\phi' + \alpha(\varphi)\psi) e^{-\Lambda} W_1 A^{-1}(\varphi) = 0 \Big|_{r=R} \quad (75)$$

и в центъра

$$W_1 = -lA(\varphi)V_1 \Big|_{r=0}. \quad (76)$$

Системата (74), заедно с граничните условия представлява задача за собствени стойности и собствени функции, като честотите  $\omega^2$  са съответните собствени стойности на системата. Уравненията, за ОТО се получават като положим  $A(\varphi) = 1$  (съответно  $\alpha(\varphi) = 0$ ) в уравненията (74)–(76).

#### 4.6.2 Орбитални и епициклични честоти в алтернативни теории на гравитацията

И тук, както до сега ще се интересуваме от общия вид на уравненията в скаларно-тензорните теории. За първи път орбиталните и епицикличните честоти са разгледани в рамките на скаларно-тензорни теории в [32]. Получените уравнения за честотите съвпадат с уравненията в ОТО. Поради тази причина няма да повтаряме вече представените уравнения и техния извод.

## 5 Числени методи

За получаването на представените по-долу резултати са използвани освен аналитични методи за извеждане на съответните уравнения, също така и числени методи за тяхното решаване. Алгоритми и готови кодове от [33] са използвани заедно с авторски кодове. Накратко сега ще разгледаме някои от основните използвани числени методи.

## Интерполации

За интерполациите е използван кубичен сплайн. Той ни осигурява интерполационна формула, която е гладка по първите си производни и непрекъсната по вторите, както в интервала, в който интерполираме, така и на неговите граници.

## Метод на Нютон-Рафсън

Нека уравнението е във вида:

$$f(x) = 0. \quad (77)$$

Ще търсим решенията (нулите) на това уравнение. Ако имаме само една независима променлива в задачата, то тя е едномерна. Първоначално ще разгледаме точно такъв метод – едномерен метод на Нютон-Рафсън.

Това е метод за намиране на нулите на уравнение. В метода се използват производни на функцията и следователно той изисква оценката (пресмятането) на самата функция  $f(x)$  и на нейната първа производна  $f'(x)$  в произволна точка  $x$ . Геометрично методът се състои в продължение на тангентата към точката  $x_n$ , до пресичането и с абсцисата и съответната точка, в която става това е следващото предположение  $x_{n+1}$ . Алгебрически методът се получава от развитието на функцията в ред на Тейлър.

Методът на Нютон-Рафсън има съществен недостатък - не е глобален. Наличието на локални екстремуми (минимуми или максимуми) в интервала, в който търсим корена е сериозен проблем за този метод, тъй като е възможно допирателната към функцията да се окаже успоредна на абсцисата. Въпреки тези си недостатъци, това е мощен метод, заради бързата си сходимост - методът е квадратично сходящ.

Методът има своето обобщение за многомерен случай на система нелинейни уравнения, което е известно като многомерен метод на Нютон-Рафсън. Многомерният метод също не е глобално сходящ.

## Метод на Рунге-Кута

За да интегрираме числено обикновени диференциални уравнения ще искаме те да имат конкретен вид, а именно

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x_i, y_1, \dots, y_N), \quad i = 1, \dots, N. \quad (78)$$

Методът на Рунге-Кута от четвърти ред изисква четири пресмятания на дясната страна на уравнението за всяка стъпка, а математическата постановка е следната

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad (79)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1), \quad (80)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2), \quad (81)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3), \quad (82)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + \mathcal{O}(h^5). \quad (83)$$

Този метод има предимство пред метода от втори ред, само ако за една и съща точност, този позволява поне два пъти по-голяма стъпка. В комбинация е метода на Рунге-Кута е използван и алгоритъм за адаптация на стъпката, тъй като в астрофизични задачи използването на фиксирана стъпка е нерационално.

## Метод на престрелката

Ще разгледаме само метода на престрелката за обикновени диференциални уравнения със зададени гранични условия.

Когато зависимите променливи в една система обикновени диференциални уравнения трябва да удовлетворяват зададени условия в повече от една стойност на независимата променлива, казваме, че имаме гранична задача. Типично точките са началото и края на интервала, в който искаме да интегрираме система, но това не е задължително - можем да имаме задени условия във вътрешна за интервала точка. Началните условия на така зададена система не водят до единствено решение, и в общия случай, произволно таква, получено с началните условия, няма да удовлетворява граничните условия в другата точка, в която са зададени.

При този метод избираме стойности, за всички зависими променливи, за които нямаме зададе условия в едната граница. Например, ако изберем стойности в точката  $x_1$ , в която вече имаме зададени  $n_1$  стойности, то ще имаме  $n_2$  свободни параметъра за да образуваме  $N$  мерен вектор от начални условия в точката  $x_1$ . След като сме фиксирали началните условия, можем да интегрираме системата до края на интервала, след което чрез корекция на началните данни да започнем да се доближаваме до истинското решение.

## Твърди уравнения

Няма общоприета дефиниция за твърди диференциални уравнения, но общата идея е следната. Едно обикновено диференциално уравнение е твърдо, ако търсеното решение се мени слабо с независимата променлива, но съществува близко решение, което се мени много бързо. В числения метод това се изразява в необходимостта да се използва много малка стъпка за да се получи желаното решение и да се поддържа стабилността му. Твърди уравнения обикновено се получават в задачи, в които има две или повече много различни скали за независимата променлива, върху които се променя зависимата променлива.

## 6 Непертурбативни и самосъгласувани модели на статични и стационарни неутронни и кваркови звезди в $R^2$ гравитация

Както вече коментирахме, неутронните и кварковите звезди са естествена лаборатория за изследване на гравитацията в режим на силни полета и за тестване на алтернативни гравитационни теории. Теоретичното изследване на компактни звезди във  $f(R)$  гравитация в комбинация с наблюдения ще позволи налагането на ограничения върху параметрите на теорията, в режим на силни полета. Сериозен проблем при изследването на алтернативни теории на гравитацията е неопределеността в уравнението на състоянието (УнС). Все пак наличните в момента наблюдателни данни за съотношенията маса-радиус за неутронни звезди ни позволяват в някаква степен да наложим ограничения върху параметрите на теориите.

Въпреки че  $f(R)$  теориите намират най-широко приложение в космологичните модели, ограничения върху тях трябва да се наложат и чрез изследването на различни астрофизични ефекти в рамките на теорията.

Сериозен проблем, в повечето известни в литературата работи по неутронни звезди във  $f(R)$  гравитационни теории е избраният начин за тяхното изследване, а именно - използват се пертурбативни методи.

Друг съществен проблем при голяма част от разглежданите в литературата модели на неутронни звезди във  $f(R)$  теориите е, че вътрешното и външното решения не се решават едновременно като самосъгласувана задача, а вместо това външното решение се налага да е това на Шварцшилд. Това е еквивалентно на замразяване на скаларната степен на свобода извън звездата, което противоречи на полевите уравнения. В някой статии свободните параметрите, които се появяват в теорията са използвани с грешен знак в изследванията, което значи, че условията за липса на тахионни нестабилности не се удовлетворяват, от което следват нови, но нестабилни клонове от решения описващи неутронни звезди.

В тази глава ще разгледаме непертурбативни и самосъгласувани решения за неутронни звезди в един от най-популярните примери за  $f(R)$  теории, а именно споменатата по-горе  $R^2$  гравитация.

Непертурбативното и самосъгласувано разглеждане на неутронни звезди във  $f(R)$  гравитация е важно поради няколко причини. Сравнението на резултатите, получени чрез пертурбативния и чрез непертурбативния метод може да е много информативно за бъдещи изследвания. Ограниченията, наложени върху параметрите на теорията чрез пертурбативния метод може да са подвеждащи при сравнение на получените теоретични резултати с наблюдателни данни. Непертурбативният метод може да покрие много по-голям диапазон от стойности за параметрите и ограниченията върху тях, получени чрез този метод са много по-надеждни. Пертурбативните методи предсказват съществуването на качествено нови стабилни клонове от решения за неутронни звезди спрямо ОТО, което само по себе си е драстично предсказание. Съответно това налага използването на непертурбативните методи за да се потвърдят или отхвърлят тези резултати.

Досега статични неутронни звезди във  $f(R)$  гравитация са изучавани в множество работи познати в литературата [22, 34, 23, 35, 36, 37, 38, 39]. Съществен проблем, е че повечето от тези работи се основават на пертурбативни несамосъгласувани методи.

Във втората част на тази глава ще разширим нашите изследвания и от статичния случай ще преминем на стационарния, като ще разгледаме въртящи се компактни звезди във  $f(R)$  гравитация и техните астрофизични проявления. Такива изследвания вече са правени в рамките на други алтернативни теории (например [27, 40, 41, 42]). Естествените първи стъпки в тази посока и естествено разширение на статичния случай е да се разгледа приближението на бавно въртене (линейно по ъгловата скорост на звездата  $\Omega$ ).

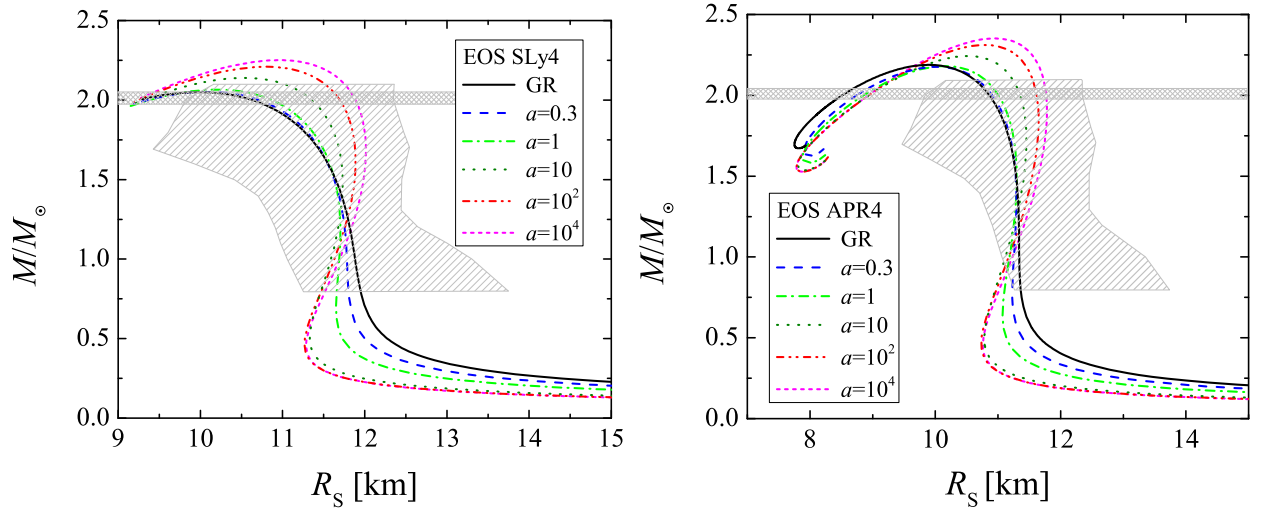
В стационарния случай, освен неутронните звезди разгледаме и нов вид по-екзотични компактни звезди, а именно кавркови звезди (или в термини на УнС - карково УнС). Представените в тази глава резултати са първите самосъгласувани изследвания на кваркови звезди в рамките на  $f(R)$  гравитация.

## Числена реализация

Резултатите в [26, 43] са получени чрез числено решаване на системата от уравнения (61, 62, 63, 64, 65) заедно със съответните реалистични уравнения на състоянието. Сериозен изчислителен проблем при интегрирането е наличието на потенциала  $V(\varphi) = \frac{1}{4a} \left(1 - e^{-\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}}\right)^2$ , който прави уравненията от тип "твърди". За свободния параметър  $a$  са използвани стойности в диапазона определен от наблюдателните данни, а именно  $0 < a \lesssim 5 \times 10^{11} \text{m}^2$  [44, 26]. В безразмерни единици  $0 < a \lesssim 10^5$ , като връзката с размерните се задава чрез една втора от гравитационния радиус на слънцето:  $a \rightarrow a/R_0$ ,  $R_0 = 1.476 \text{km}$ . В рамките на този интервал от стойности, с намаляването на стойността на параметъра  $a$ , уравненията стават "по-твърди".

Разглежданата задача е от граничен тип (зададени са централни и асимптотични гранични условия на безкрайност). Това налага използването на метода на престрелката в





Фигура 1: Съотношение маса - радиус за уравнение на състоянието SLy4 (лявата графика) и APR4 (дясната графика). Различните цветове и стилове на графиките съответстват на различни стойности на параметъра  $a$ . Ограниченията, наложените от наблюденията са в заштрихованите области [26]

комбинация с метод на Нютон-Рафсън за намирането на съответните централни стойности на величините. За интегрирането е използван метод на Рунге-Куте. За числената реализация на задачата са използвани както готови функции (кодове) от [33], а също така и авторски кодове.

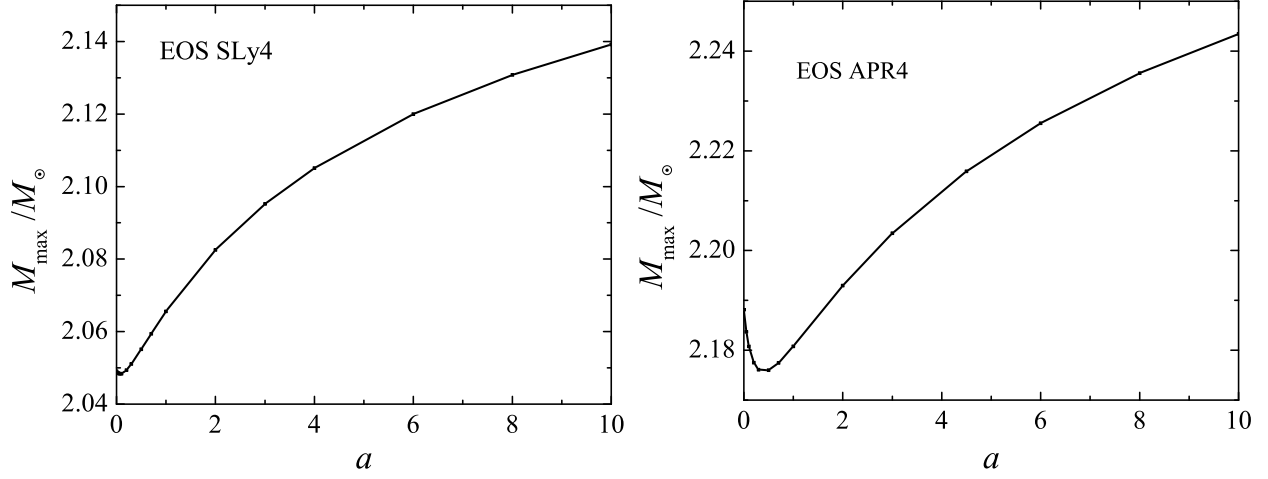
## 6.1 Статични неутронни звезди

### 6.1.1 Непертурбативни резултати

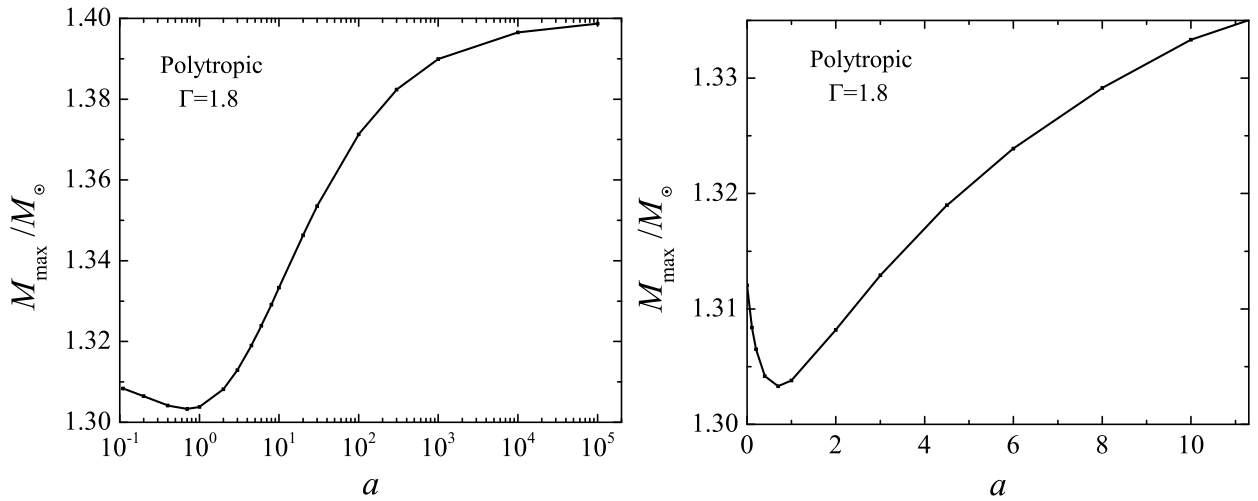
Резултатите, които ще разгледаме са получени за четири реалистични уравнения на състоянието - SLy4, APR4, FPS и L и са представени в [26]. Уравненията SLy4 и APR4 добре се съгласуват с наблюдателните ограничения върху масата и радиуса на неутронните звезди. Уравнението FPS не може да достигне ограничението от две слънчеви маси в ОТО (меко уравнение на състоянието), но в рамките на  $f(R)$  гравитацията максималната маса се увеличава, като по този начин уравнението попада в наложените от наблюденията ограничения. Уравнението на състоянието L води до много по-големи маси (твърдо уравнение на състоянието), но разглеждахме и този случай, като илюстративен такъв. По-надолу ще представим резултати само за УнС SLy4 и APR4.

Зависимостите на масата от радиуса на неутронната звезда са дадени на Фиг. 1, където с различни цветове и стилове на графиките са обозначени различните стойности за параметъра  $a$  в интервала от  $a = 0.3$  до  $a = 10^4$ , а областите отговарящи на съвременните наблюдателни ограничения върху съотношението маса-радиус [45, 46] са заштриховани.

Както може да се види при стойности на  $a < 0.3$  се получават модели все по-близки до ОТО, като в граничния случай на  $a \rightarrow 0$  съвпадат, което е по-добре изразено за маси по-големи от една слънчева маса. При увеличаване на стойностите на параметъра  $a$ , отклонението от Общата теория на относителността се увеличава, като случая на  $a = 10^4$  ни дава почти максималното отклонение. Това поведение може да се обясни по следния начин -увеличаването на  $a$  води до намаляване на масата на скаларното поле: когато  $a \rightarrow \infty$  масата на скаларното поле се нулира, а когато  $a \rightarrow 0$  тя клони към безкрайност. Нестрого казано ненулевата маса подтиска експоненциално скаларното поле и като цяло по-голямата маса съответства на по-слабо скаларно поле, което съответно е причината



Фигура 2: Максималната маса като функция на параметъра  $a$  за уравнение на състоянието SLy4 (лявата графика) и за APR4 (дясната графика). В граничния случай  $a \rightarrow \infty$ ,  $M_{max} = 2.25M_{\odot}$  за SLy4 и  $M_{max} = 2.36M_{\odot}$  за APR4.[26]

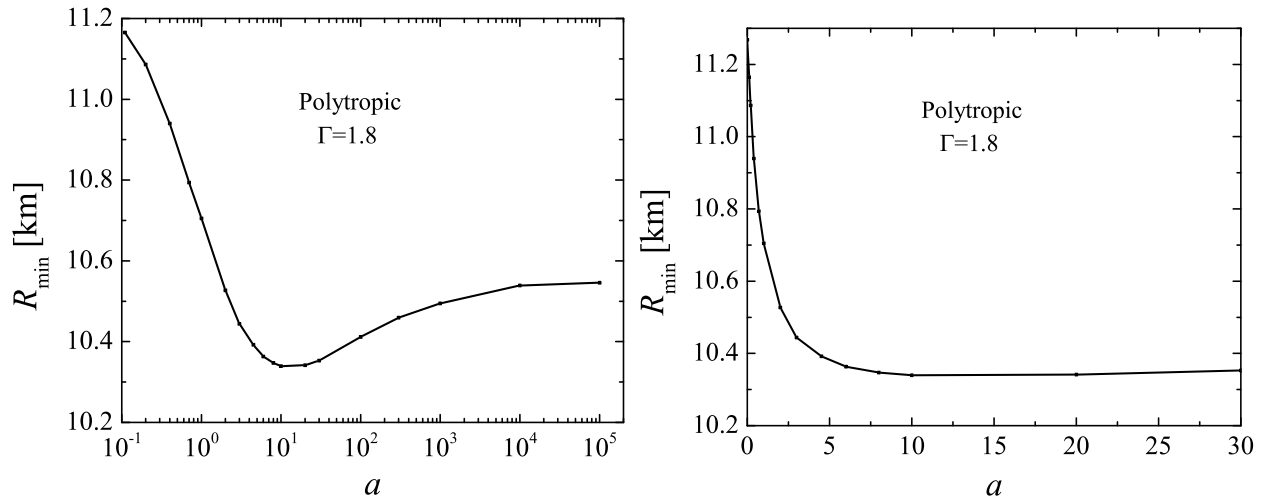


Фигура 3: Максималната маса като функция на параметъра  $a$  за политропно уравнение на състоянието с индекс  $\Gamma = 1.8$ . Дясната фигура е увеличение в не логаритмичен мащаб.

при намаляване на  $a$  моделите да се доближават до тези в ОТО, а при увеличаване на стойностите на параметъра да се увеличава разликата.

Във всички уравнения на състоянието максималните маси при наличието на скалярно поле при  $a \rightarrow \infty$  са с около 10 % по-големи отколкото в ОТО.

На Фиг. 2 е представен резултата от изследването на зависимостта на максималната маса  $M_{max}$  от стойностите на параметъра  $a$  за уравнения на състоянието APR4 и SLy4. Качественото поведение, което се вижда на тези графики е характерно за всички уравнения на състоянието. На фигурата, точката, която съответства на резултата получен в ОТО е отбелязана като  $a = 0$ . Вижда се, че при  $a \rightarrow 0$  максималната маса  $M_{max}$  клони към максимална маса в ОТО, за едно и също уравнение на състоянието. При увеличаване на стойностите на параметъра  $a$  масата първо намалява и след като достигне минимум, започва да нараства монотонно. Максималната маса  $M_{max}$  се достига при  $a \rightarrow \infty$  и е с около 10% по-голяма от тази в ОТО за същото уравнение на състоянието. Минимумът обикновено се наблюдава при  $a < 1$  и  $M_{max}$  се отклонява с по-малко от 1% от Общата теория на относителността.



Фигура 4: Минималният радиус като функция на параметъра  $a$  за политропно уравнение на състоянието с индекс  $\Gamma = 1.8$ . Дясната фигура е увеличение в не логаритмичен мащаб.

### 6.1.2 Резултати при пертурбативните методи

При пертурбативните разглеждания в [23], също както и при непертурбативните методи, резултатите за уравнения на състоянието, които за ОТО не могат да достигнат максимални маси около или над две слънчеви маси, за  $f(R)$  теориите, в зависимост от стойностите на параметъра  $a$  попадат в рамките на наблюдателните ограничения.

### 6.1.3 Сравнение между методите

Резултатите, получени в [23] чрез пертурбативните методи не удовлетворяват условията за липса на тахионни нестабилности и на духови полета.

Общо и за двата разгледани метода, е че за уравнения на състоянието, които в случая на ОТО не могат да достигнат максималните наблюдавани маси за неутронни звезди, във  $f(R)$  гравитация, при подходящ избор на параметъра  $a$ , максималните маси се увеличават достатъчно за да попадне уравнението в наблюдателно определените ограничения, и съответно да може да се разглежда като "реалистично".

Непертурбативните методи водят до качествено еднакви резултати за всички изследвани реалистични уравнения на състоянието, а именно - присъствието на нетривиално скаларно поле води до увеличаване спрямо ОТО на радиусите на неутронните звезди с максимална маса и намаляване на радиусите, спрямо ОТО, за неутронни звезди с малка маса, което се вижда на Фиг. 1. При пертурбативните методи резултатите са качествено различни – за големи маси радиусите намаляват, а за малки маси се увеличават спрямо ОТО.

Разгледани са за сравнение и резултати за политропно уравнение на състоянието. Резултатите от непертурбативните методи са показани на фигури 3 и 4. На фигурите се вижда промяната на максималната маса и съответстващите и радиуси с промяна на параметъра  $a$ , като моделите, отговарящи на ОТО са отбелязани като  $a = 0$ .

Резултатите от пертурбативните и непертурбативните методи, са качествено еднакви - с увеличаване на  $a$ , максималната маса първо намалява и след като достигне минимума си, започва да нараства, като за двата метода минимумите се достигат при близки стойности на  $a$ . Наблюдават се големи количествени разлики между резултатите от двата

метода. Минимумът на масите при пертурбативните методи е много по-дълбок, в сравнение с резултатите от непертурбативните методи. Също така минимумът на радиусите при непертурбативните резултати е при много по-големи стойности на параметъра  $a$  отколкото при пертурбативните, и достига много по-малки стойности на  $R_{min}$ .

Друг факт, показващ, че пертурбативните методи не са подходящ избор за изследване на случая на силна гравитация е свързан с корекцията  $aR$  на лагранжиана  $f(R) = R(1 + aR)$ . За всички уравнения на състоянието, за всички стойности на параметъра  $a$  в интервала от  $a = 0.2$  до  $a = 10^5$   $|aR|$  не надвишава  $10^{-1}$  никъде в звездата. Въпреки, че  $|aR| < 10^{-1}$  е област, в която се очаква пертурбативните методи да работят добре [26], разликите в резултатите спрямо непертурбативните и самосъгласувани решения е много голяма.

#### 6.1.4 Коментари

$f(R)$  теориите са естествено обобщение на ОТО и могат да обяснят космологични проблеми като ускореното разширение на вселената без необходимостта от въвеждането на екзотична материя (тъмна енергия) представляваща 73% от материята във вселената и имаща екзотични свойства. Също така видяхме, че  $f(R)$  теориите са математически еквивалентни на определени класове скаларно тензорни теории – разглежданите  $R^2$  теории са еквивалентни на масивната теория на Бранс-Дике.

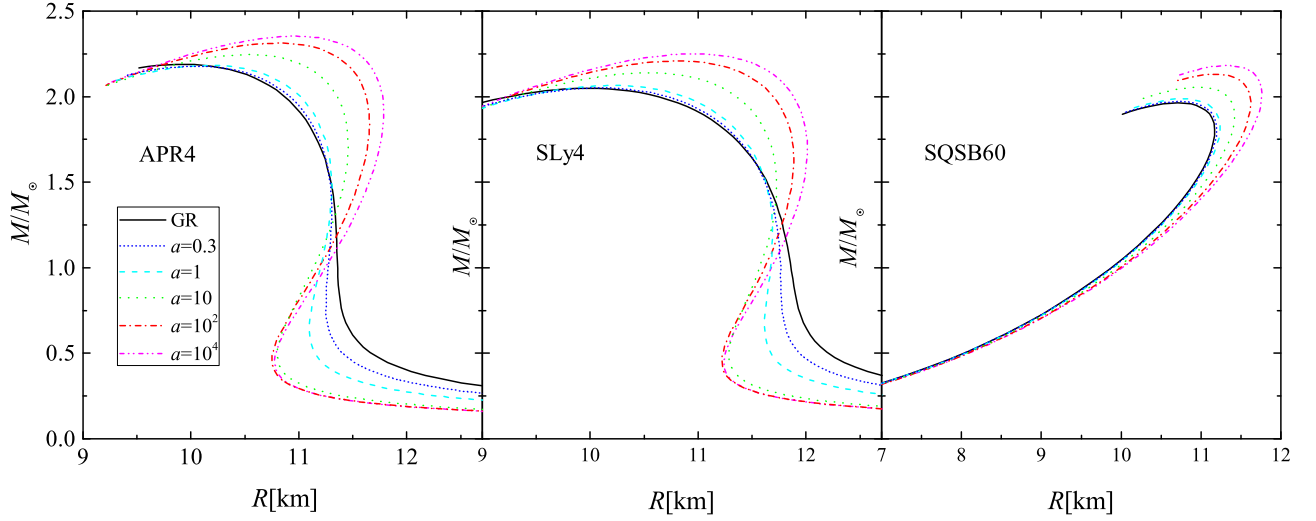
Систематичното теоретично изучаване на обобщени теории на гравитацията е важно за коректното и адекватно тълкуване на наблюдателните резултати, които ако не фиксират конкретна теория или клас от теории, то поне биха могли да наложат (и вече налагат) ограничения върху параметрите на теориите. Численото изучаване дава резултати, директно сравними с наблюдателните данни.

Видяхме също така, че пертурбативните и непертурбативните методи водят до качествено различни резултати за зависимостите маса от радиус. При непертурбативните резултати, за големи маси на неутронни звезди радиусите се увеличават, а при малки маси намаляват спрямо тези в Общата теория на относителността. Пертурбативните резултати са напълно противоположни - при големи маси се получават по-малки радиуси, а при малки маси по-големи радиуси спрямо ОТО. Общият резултат и за двата метода е факта, че уравненията на състоянието, които за ОТО не достигат максимално наблюдаваните маси на неутронни звезди до сега, а именно около две слънчеви маси, в  $R^2$  теориите в зависимост от стойността на параметъра  $a$ , могат да достигнат максималните маси и дори да ги надвишат. Резултатите получени при непертурбативните разглеждания, водят до увеличение на максималните маси спрямо ОТО с около 10% за максималните стойности на  $a$ .

И двата метода водят до намаляване на максималната маса спрямо ОТО за малки стойности на  $a$  ( $a < 1$ ), но количествено има съществена разлика - докато за непертурбативните методи, това намаляване на масата е около 1%, то за пертурбативните е много по-голямо.

Видяхме също така големите качествени и количествени разлики между резултатите получени по двата метода. Това поражда съмнение върху коректността на използването на пертурбативни методи, тъй като коректното им прилагане би трябвало да води до резултати близки на тези получени чрез непертурбативните методи, което както видяхме в [23] не е така.

Съществен проблем при налагането на ограничения върху свободните параметри в  $R^2$  гравитацията е и неяснотата в уравнението на състоянието за ядрената материя. Въпреки големите отклонения от Общата теория на относителността, които видяхме, че се появяват във  $f(R)$  гравитацията, те все пак са сравними с неопределеностите свързани с различните уравнения на състоянието.



Фигура 5: Зависимост маса от радиус за УнС APR4 (левият панел), SLy4 (средният панел) и кварковото УнС (десният панел). Различните стилове и цветове на кривите съответстват на различните стойности на параметъра  $a$ .

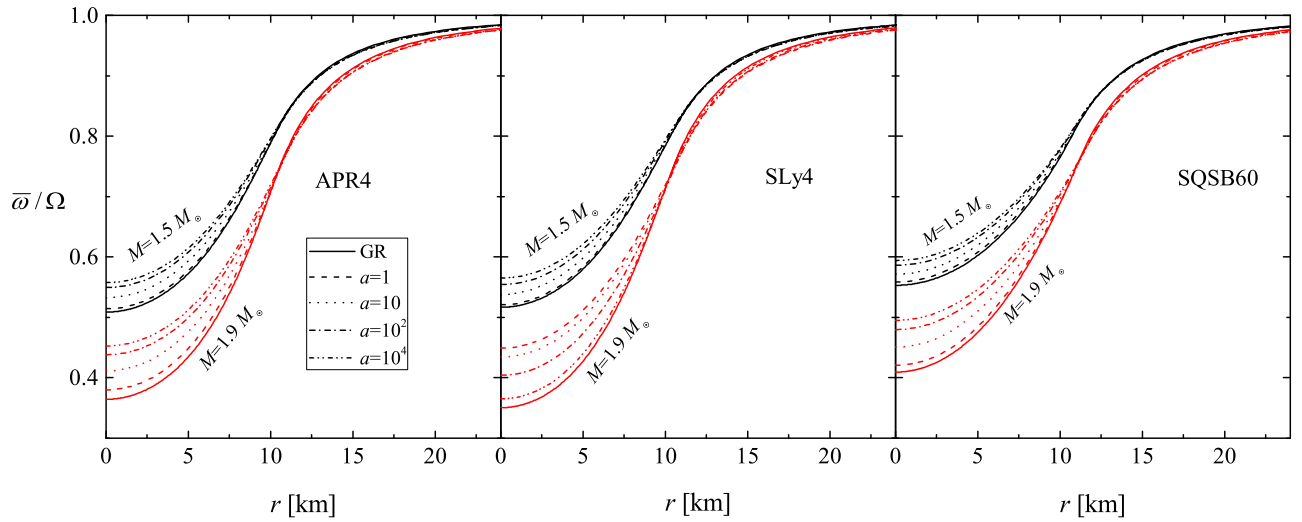
## 6.2 Бавно-въртящи се неутронни и кваркови звезди

### 6.2.1 Резултати

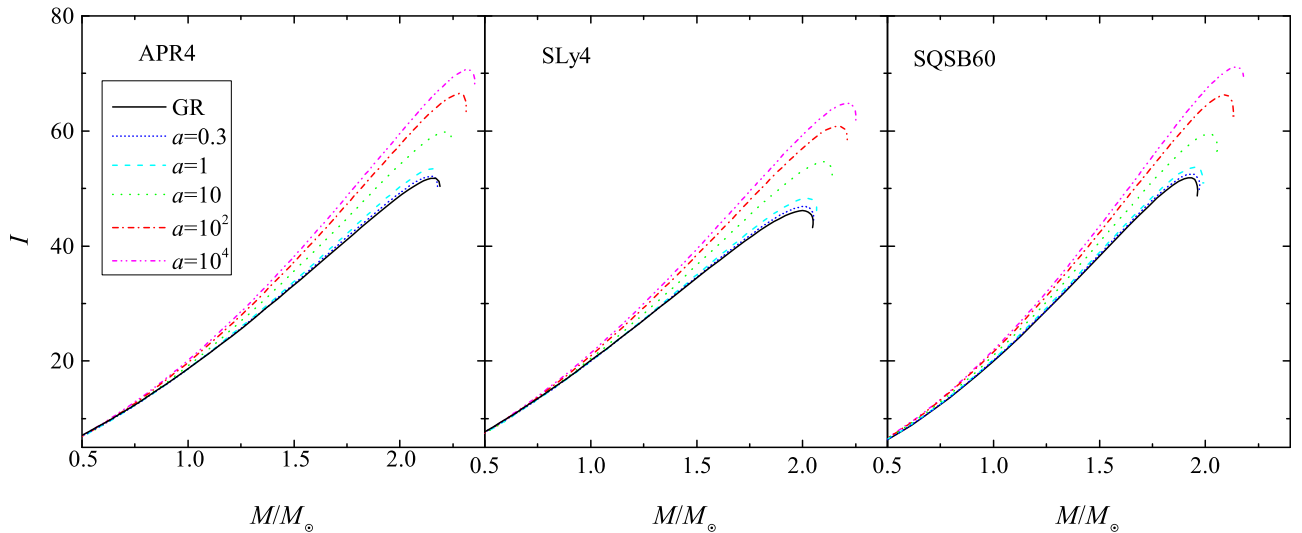
В тази глава ще използваме два вида уравнения – адронни, от които като типични представители ще използваме УнС SLy4 и APR4, и двете със средна твърдост.

Масата, като функция на радиуса на звездата е показана на Фиг. 5 за двете адронни и за кварково УнС. Както коментирахме по-нагоре, масата и радиуса в приближение на бавно въртене са същите като в статичния случай, тъй като промяната в  $M$  и  $R$  е от порядък  $\Omega^2$ , докато приближението е от порядък  $\Omega$ . Зависимостите между масата и радиуса на неутронни звезди в случая на  $R^2$  гравитация и сравнения с наблюденията направихме в първата част на тази глава за адронни УнС. Добавените в тази глава резултати за кваркови звезди показват по-различно поведение – за маси по-малки от около  $1M_\odot$  отклоненията от ОТО са незначителни, а големи отклонения се наблюдават при близки до максималните маси. Също така радиусите на кварковите звезди във  $f(R)$  гравитация са винаги по-големи от тези в ОТО, докато при неутронните звезди те са по-големи при модели с големи маси и по-малки при модели с ниски маси. Също както при неутронните звезди, в  $R^2$  гравитация, максималните маси се увеличават с около 10% спрямо масите в ОТО.

Ще продължим с основните резултати в тази глава свързани с ефекта на въртенето. На Фиг. 6 е представена нормализираната метрична функция  $\bar{\omega}/\Omega$  като функция на радиалната координата, за различни стойности на параметъра  $a$  за модели с две различни фиксирани маси –  $M = 1.5M_\odot$  и  $M = 1.9M_\odot$ . Отклоненията от ОТО са най-силни около центъра на звездата, където е и най-голям приносът на скаларното поле. Разликите намаляват като започнем да доближаваме асимптотичната безкрайност  $\bar{\omega}/\Omega \rightarrow 1$ . Също така обикновено по-големите маси водят до по-големи отклонения от ОТО. Както може да се очаква, намаляването на стойността на параметъра  $a$  води до по-ниски централни стойности за  $\bar{\omega}$  и в граничния случай  $a \rightarrow 0$  те съвпадат с резултатите в ОТО. Максималните възможни отклонения (при  $a \rightarrow \infty$ ) са много близки до случая  $a = 10^4$  представен на графиката. За много малки стойности на параметъра  $a$  (типично под  $a < 0.5$ ) централните стойности на функцията  $\bar{\omega}/\Omega$  може да станат малко по-ниски от тези в ОТО, но разликите са много малки и не се виждат на графиките. Максималните отклонения в централната стойност на  $\bar{\omega}/\Omega$  достигат до 30%.



Фигура 6: Нормираната метрична функция  $\bar{\omega}/\Omega$  като функция на радиалната координата за УнС APR4 (левият панел), УнС SLy4 (средният панел) и кварковото УнС (десният панел). С различни линии и цветове са представени модели с две различни стойности на масата ,  $M = 1.5M_{\odot}$  и  $M = 1.9M_{\odot}$ . Различните видове линии съответстват на различните стойности на параметъра  $a$ .



Фигура 7: Инерчният момент, като функция на масата за реалистични УнС – УнС APR4 в левият панел, УнС SLy4 в средния панел и УнС за кваркова звезда в десния панел. Различните стойности на параметъра  $a$  са представени с различни цветове и различни стилове на линията.

Приближението на бавно въртене ни позволява на пресметнем инерчния момент на звездата, който се дава от уравнение (70). На Фиг. 7 е представен инерчния момент на неутронни звезди като функция на масата на звездата за различни стойности на параметъра  $a$ . На тези графики се вижда вече добре познатото поведение – при намаляването на параметъра  $a$ , стойностите на инерчния момент се доближават то тези в ОТО, а при граничния случай  $a \rightarrow 0$  те съвпадат. Максималните стойности на инерчния момент на модели на неутронни звезди в  $R^2$  гравитация нарастват с до 40 % спрямо тези в ОТО за фиксирано УнС, както се вижда на Фиг. 7. Това е много по-голямо отклонение отколкото в зависимостите маса - радиус, където максималните отклонения в  $R^2$  гравитация спрямо ОТО не надвишават 10%. Забелязва се също така, че нарастването на инерчния момент е много по-голямо от отклоненията причинени поради неопределеността в УнС (за разгледаните УнС).

### 6.2.2 Коментари

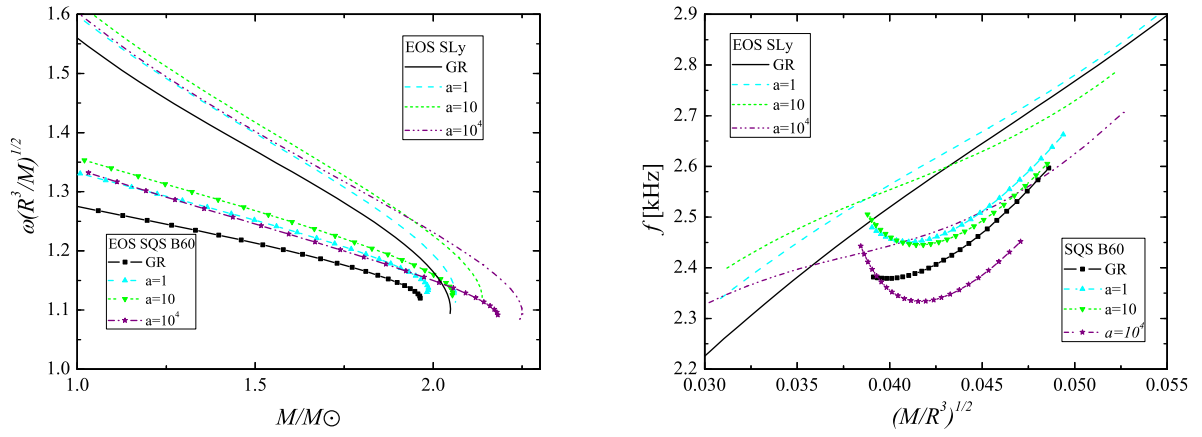
В тази глава разгледахме непертурбативно и самосъгласувано модели на неутронни и кваркови звезди в  $R^2$  гравитация в приближение на бавно въртене (в първи порядък по ъгловата скорост  $\Omega$ ).

Разгледахме три УнС – две адронни със средна твърдост, и двете в съответствие с наблюдателните ограничения, и едно кварково УнС. Масата и радиусът на неутронните звезди в приближение на бавно въртене остават непроменени спрямо статичният случай, но се наблюдава качествена разлика между резултатите за неутронни и кваркови звезди. Също така, това е първото непертурбативно разглеждане на кваркови звезди във  $f(R)$  гравитация. Най-съществената разлика е, че под около  $1M_{\odot}$  съотношението маса-радиус за кваркови звезди в  $R^2$  гравитацията се различава незначително от ОТО. И за двата вида УнС увеличаването на максималната маса във  $f(R)$  теорията може да достигне приблизително 10% в граничния случай  $a \rightarrow \infty$ .

Най-важната величина, която приближението на бавно въртене ни дава е инерчния момент. Максималната стойност на инерчния момент за стабилни модели на неутронни звезди, които могат да бъдат достигнати в  $R^2$  гравитация за големи стойности на  $a$ , по-конкретно за  $a \gtrsim 10^4$ , са приблизително 40% по-големи от тези в ОТО. Това е значително отклонение в сравнение с промяната на максималната маса и също така е по-голямо от неопределеността в УнС (дори, като имаме предвид кварковото УнС). Ако разгледаме модели с фиксирани маси, но различни стойности на  $a$ , разликите в инерчния момент за големи стойности на параметъра  $a$  ( $a \gtrsim 10^4$ ) спрямо  $a \rightarrow 0$  (ОТО) са до около 30 %. Общо казано, големите маси водят до големи отклонения. Ако предположим, че бъдещите наблюдения на двойни пулсари ще достигнат точност 10% [47, 48], отклонението, причинено от  $R^2$  гравитацията ще надвиши наблюдателната неопределеност за маси по-големи от около  $1.5M_{\odot}$ .

Радиалният профил на метричната функция  $\bar{\omega}$  също се променя значително. Отклоненията от ОТО са най-големи в централната област на звездата (където скаларното поле е най-силно) и за по-големи маси на звездите. Отклоненията за централните стойности на метричната функция достигат до около 30% за големи стойности на параметъра,  $a \gtrsim 10^4$ .

От разгледаните резултати може да се заключи, че  $R^2$  гравитацията води до значително различни стойности на инерчния момент на неутронните и кваркови звезди дори при бавно въртене.



Фигура 8: Резултати за едно адронно УнС, SLy, и за едно кварково УнС, SQS B60. И двете са с максимални маси около две слънчеви маси. В левия панел е представена нормираната честота, като функция на масата на звездата, а в десния панел – честотата на осцилациите в kHz като функция на средната плътност на звездата в  $\text{km}^{-1}$ .

## 7 Астеросейсмология на неутронни и кваркови звезди в $R^2$ гравитация

Несъмнен е фактът, че първите директни наблюдения на гравитационни вълни, на който станахме свидетели тази година [49, 50], ще доведат до рязък напредък в гравитационно-вълновата астрономия. Това мотивира изучаването на компактни звезди във  $f(R)$  гравитация в контекста на гравитационно-вълновата астеросейсмология.

Осцилациите на неутронни звезди са основен източник на гравитационни вълни от самостоятелни обекти. Информацията, която можем да получим от наблюдаваните сигнали ще разкрие нов спектър от възможности за астрофизиката. Пълното развитие на астеросейсмологията ще ни позволи оптимално да използваме събраната чрез наблюдение на гравитационни вълни информация.

За първи път (но с грешки) честотите на осцилация на неутронни звезди в алтернативни теории на гравитацията и по-конкретно в скаларно-тензорни теории са разгледани в [30, 51]. В тези работи може да се намери и подробен извод на уравненията за пертурбациите в скаларно-тензорните теории в така-нареченото приближение на Каулинг (фоновата метрика и скаларното поле са фиксирани).

В тази глава ще разгледаме нерадиални осцилации, като изследванията са съсредоточени върху фундаменталната мода ( $f$ -мода), която е и основният предмет на изследване в коментираните по-горе работи. Причината е, че модите, породени от налягането ( $p$ -моди) не са особено ефективни източници на гравитационни вълни и поради тази причина се очаква, че основният принос ще е от осцилациите свързани с  $f$ -модите. [30, 52, 53].

### 7.1 Резултати

Числено изследваме честотите на основната мода на трептене ( $f$ -мода) получена от системата уравнения (74), като използваме шест реалистични адронни УнС и две кваркови. Задачата за собствени стойности решаваме чрез метода на престрелката, където честотата на осцилациите е прицелният параметър. Оригиналните резултати, на които се основава тази глава са представени в [31]. Избраните УнС покриват широк диапазон от маси и радиуси

Ще разгледаме набор от съотношения между честотите на осцилации на  $f$  модите и

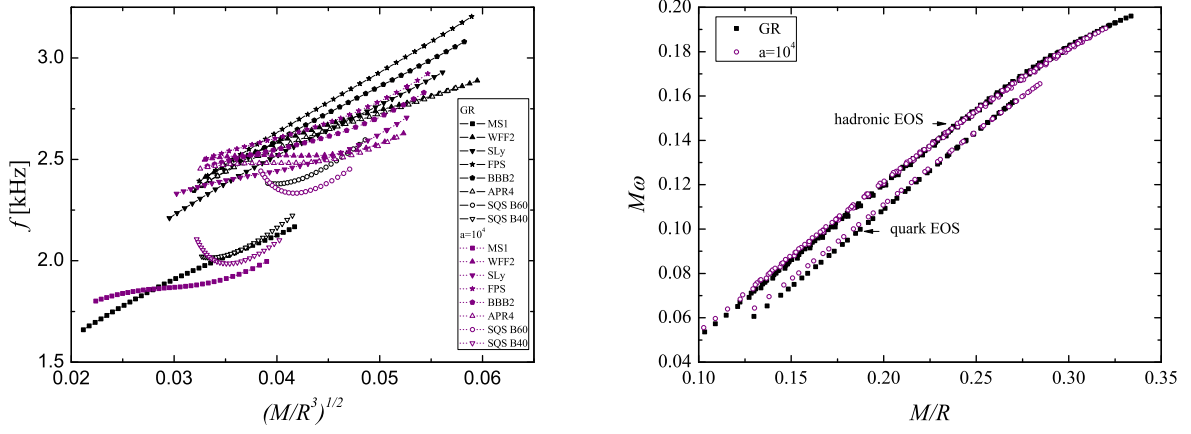


параметрите на звездата. Конкретният избор на съотношения е мотивиран от най-често срещаните такива в литературата. Първо ще разгледаме честотите на осцилации на неутронни и кваркови звезди и разликите между резултатите в ОТО и тези в  $R^2$  гравитацията. Подробно сме разгледали  $f$ -модите за всички споменати по-горе УнС, но тук ще представим само резултатите за едно адронно и едно кварково уравнение на състоянието, а по-точно УнС SLy и УнС SQS B60, тъй като те могат да се разглеждат като представителни примери. В съответствие с наблюденията, разглеждаме модели с маси от една слънчева маса до максималната за съответното УнС. На Фиг. 8 са представени и сравнени резултатите в ОТО и в  $R^2$  гравитация за неутронни и за кваркови звезди. В левия панел е показана нормираната честота  $\omega(R^3/M)^{1/2}$  като функция на масата на звездата, в слънчеви маси, за УнС SLy и SQS B60. Това съотношение е използвано и при изследването на други алтернативни модели на неутронни звезди [30, 54, 55, 56]. За допълнителна яснота, резултатите получени с УнС SQS B60 са маркирани с допълнителни символи. Резултатите в ОТО са представени чрез непрекъснатата черна линия, а резултатите за различните стойности на  $a$  са в различни цветове и различни видове прекъснатата линия. Може да се види, че и в ОТО и във  $f(R)$  гравитация резултатите за неутронни звезди са много по-стръмни от тези за кваркови звезди и нормираните честоти намаляват с увеличаване на масата. Максималното отклонение от ОТО е по-малко от 10 % и има качествено различно поведение в различни интервали от маси. За малки маси отклоненията нарастват с увеличаването на параметъра  $a$  за  $a \leq 10$ , но при по-големи стойности на параметъра, отклоненията започват да намаляват. За големи маси, отклоненията от ОТО нарастват монотонно с увеличаването на параметъра  $a$ .

В левия панел на Фиг. 8 е представена размерната честота  $f = \omega/(2\pi)$  в kHz, като функция на средната плътност на звездата  $(M/R^3)^{1/2}$  измерена в  $\text{km}^{-1}$ . Това е едно от най-стандартните съотношения използвани в литературата по астеросейсмология, водещо началото си от [57]. На тази графика може да се види качествена разлика между резултатите за неутронни звезди в ОТО и в  $R^2$  гравитацията. По-големи отклонения от линейната зависимост могат да се видят при  $f(R)$  гравитация за големи стойности на параметъра  $a$ . Резултатите за кваркови звезди имат подобна форма и в двете теории. За малки стойности на  $a$  честотите на  $f$ -модите са винаги по-високи в  $R^2$  гравитацията отколкото в ОТО, и значително намаляване спрямо ОТО се вижда за големи средни плътности и големи стойности на параметъра  $a$ .

В левия панел на Фиг. 9 е представена графика, подобна на тази в десния панел на Фиг. 8, но в този случай са включени всички споменати по-горе уравнения на състоянието за ОТО и за  $R^2$  гравитация с параметър  $a = 10^4$ . Различните УнС са обозначени с различни символи, резултатите за ОТО са в черно, а тези за  $a = 10^4$  са цветни. На фигурите могат да се разграничат две групи в резултатите – една за меките УнС и за тези с маси около  $2M_\odot$  и една за твърдите УнС (резултатите за УнС MS1 и SQS B40). Ще се концентрираме върху първата група. Резултатите в нея могат да се разделят в две ленти - едната образувана от резултатите в ОТО и другата – образувана от резултатите получени в  $R^2$  гравитация с  $a = 10^4$ . Тези две ленти напълно се припокриват за малки стойности на средната плътност и частично за високи средни плътности. Трябва да се отбележи, че резултатите за кварковите звезди не влизат много добре в лентата, образувана от резултатите за неутронните звезди на Фиг. 9 [58, 59].

Емпиричните съотношения, описващи тези зависимости са изследвани подробно в литературата и водят началото си от [57]. В тази работа авторите използват линеен фит за зависимостта между честота и средна плътност. В нашата работа, ще използваме аналогичен фит. От съотношението сме изключили много твърдото адронно уравнение на състоянието MS1, както и кварковите уравнения SQS B60 и SQS B40, тъй като те очевидно водят до различни зависимости, а и не корелират много добре с наблюдателните данни. По отделно са фитирани резултатите в ОТО и в  $R^2$  гравитация с параметър  $a = 10^4$



Фигура 9: В левия панел е представена честотата като функция на средната плътност за всички разгледани УнС за ОТО и за  $R^2$  гравитация с параметър  $a = 10^4$ , при който се появяват отклонения, близки до максималните. В десния панел е представено съотношението  $M\omega(M/R)$ . Представените резултати отново са за всички УнС в ОТО и във  $f(R)$  теория с  $a = 10^4$ .

с линеен фит от вида:

$$f = C_1 + C_2 \sqrt{\frac{M}{R^3}}. \quad (84)$$

Размерностите на константите  $C_1$  и  $C_2$  във фита са както следва:  $C_1$  в kHz и  $C_2$  в kHz km. За ОТО получаваме  $C_1 = 1.59$ ,  $C_2 = 24.23$ , а за  $R^2$  гравитация с  $a = 10^4$  –  $C_1 = 1.95$ ,  $C_2 = 14.25$ . От стойностите на коефициентите е очевидно, че резултатите в ОТО са много по-стръмни, отколкото в случая на  $f(R)$  гравитация.

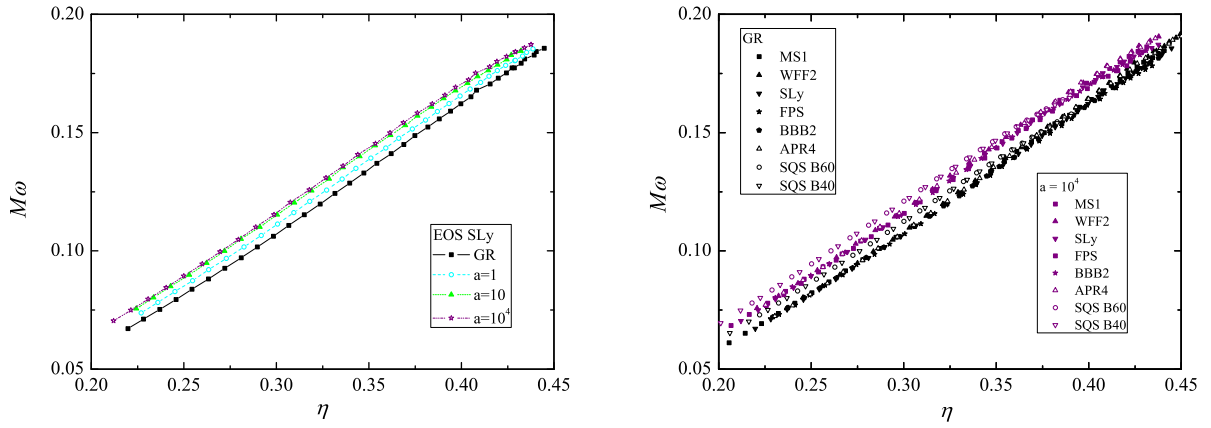
В десният панел на Фиг. 9 са представени мащабираните чрез масата честоти  $M\omega$  като функция на компактността на звездата  $M/R$ . Съотношението е предложено за първи път от авторите на [57]. На графиката са представени всички УнС, като резултатите в ОТО са отбелязани с черни квадратчета, а тези за  $a = 10^4$  с кръгчета. Както може да се види, нормирането на честотата сериозно намалява дисперсията на резултатите, породена от неопределеността в уравнението на състоянието, което от своя страна води до значителна независимост на резултатите от УнС [57, 58, 60]. Разликата между резултатите в ОТО и тези в  $R^2$  гравитация е около 5 %, което най-вероятно няма да е достатъчно за да бъде наблюдавано.

При малки стойности на  $M/R$ , съотношението е почти линейно, но при максимални компактности това не е така. Поради тази причина използваме кубичен полиномиален фит от вида,

$$M\omega = C_1 + C_2 \frac{M}{R} + C_3 \left(\frac{M}{R}\right)^2 + C_4 \left(\frac{M}{R}\right)^3. \quad (85)$$

Изключили сме кварковите уравнения, а фитираните данни разглеждаме в три случая. Само ОТО, за което получаваме  $C_1 = 4.950 \times 10^{-3}$ ,  $C_2 = 2.821 \times 10^{-1}$ ,  $C_3 = 2.372$ ,  $C_4 = -4.482$ , само  $R^2$  гравитация –  $C_1 = -5.230 \times 10^{-3}$ ,  $C_2 = 5.020 \times 10^{-1}$ ,  $C_3 = 1.175$ ,  $C_4 = -2.586$  и резултатите в двете теории фитирани заедно, при което получаваме  $C_1 = -7.687 \times 10^{-5}$ ,  $C_2 = 0.3868$ ,  $C_3 = 1.810$ ,  $C_4 = -3.602$ .

Резултатите за кваркови звезди са също до голяма степен независими от УнС, но са отместени спрямо тези за неутронни звезди. Авторите на [59] предполагат, че това е поради разликата между профила на плътността и предлагат нов параметър  $\eta \equiv \sqrt{M^3/I}$ ,



Фигура 10: На фигурата е представено съотношението  $M\omega(\eta)$ . В десния панел са представени отклоненията в това съотношение спрямо ОТО за УнС SLy и няколко различни стойности на параметъра  $a$ . В левия панел на фигурата са представени резултатите за всички изследвани УнС.

където  $I$  е инерчният момент на звездата, вместо компактността. В левия панел на Фиг. 10 са представени резултати за УнС SLy в ОТО и за няколко различни стойности на параметъра  $a$ . Най-голямото отклонение е около 10% и е приблизително еднакво за всички стойности на параметъра  $a \geq 10$ . В десния панел са представени резултатите за всички УнС в ОТО и за  $a = 10^4$ . Използвайки параметъра  $\eta$  се запазва независимостта от УнС, но резултатите в ОТО и в  $R^2$  гравитацията се раздалечават. Разликата между двете теории е все още малка, като достига до около 10%. Използването на безразмерния параметър  $\eta$  вместо компактността  $M/R$  значително намалява разликата между резултатите за неутронни и за кваркови звезди, но все пак те не съвпадат напълно, което не съответства на резултатите представени в [59]. Най-вероятно това се дължи на факта, че нашите резултати са получени в приближение на Каулинг, а тези в [59] са получени след решаване на пълните уравнения.

За да получим експлицитно съотношение за коментираната зависимост използваме квадратичен фит, подобно на [59],

$$M\omega = C_1 + C_2\eta + C_3\eta^2. \quad (86)$$

В случая на ОТО получаваме  $C_1 = -3.28 \times 10^{-2}$ ,  $C_2 = 0.426$ ,  $C_3 = 0.157$  и за  $R^2$  гравитация с  $a = 10^4$  получаваме  $C_1 = -4.29 \times 10^{-2}$ ,  $C_2 = 0.544$ ,  $C_3 = -2.57 \times 10^{-2}$ .

Тъй като  $y$  оста е линейна функция на честотата  $f$  (или  $\omega$ ) в съотношенията, които разгледахме, отклоненията в тези съотношения са от същия порядък [61, 60]. Трябва да отбележим, че до сега осцилации на звезди в алтернативни теории на гравитацията са правени само в приближение на Каулинг. Причината е, че пълната система от уравнения, включително пертурбациите на метриката, са много по-сложни отколкото в ОТО. От друга страна, в следствие на множество изследвания е добре известно, че дори приближението не Каулинг да води до големи отклонения, то не нарушава качествено спектъра на осцилациите, а само отменя честотите на осцилациите. Поради това, приближението дава добра качествена картина за отклоненията от ОТО.

## 7.2 Коментари

В тази глава разгледахме осцилации на неутронни и на кваркови звезди в  $R^2$  гравитация. Тъй като  $f$ -модите на осцилации се очаква да са много ефективен източник на гравита-

ционни вълни, съсредоточихме изследванията си върху тях. Използвахме голям набор от адронни и кваркови уравнения на състоянието с различна твърдост, като изчисленията са направени в приближение на Каулинг. Наблюдаваното максимално отклонение между честотите на  $f$ -модите в ОТО и в  $R^2$  гравитацията е до 10% и зависи от стойността на параметъра  $a$  в  $R^2$  теорията.

Изследвани са различни астеросизмологични съотношения познати в литературата и са получени съответстващите им аналитични фитове. В повечето случаи, зависимостите в ОТО и в  $R^2$  гравитацията са качествено еднакви – но са отместени едни спрямо други. Единственото изключение е съотношението между честотите на осцилации на  $f$ -модите и средните плътности на звездата, където се появяват някои качествени разлики между резултатите в двете теории. Както обсъдихме в текста по-горе, тези разлики не надвишават 10%. Отклонения от такава големина биха били достатъчни за да се разграничат двете теории, но от гледна точка на наблюдение на гравитационни вълни, тези разлики може би няма да са достатъчно големи, в сравнение с точността на детекторите.

## 8 Орбитални и епициклични честоти около неутронни и кваркови звезди в $R^2$ гравитация

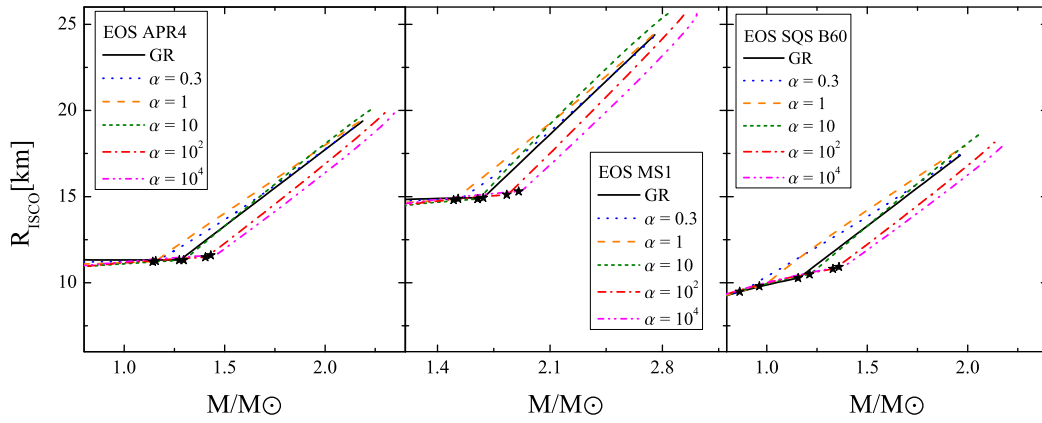
Освен чрез наблюдение на гравитационни вълни, силните гравитационни полета могат да се изследват и чрез наблюдения в електромагнитния спектър, най-вече чрез рентгенови и гама източници. Обещаващо средство за това са така наречените квази-периодични осцилации (КПО). Те могат да бъдат Hz до kHz-ви осцилации в рентгеновите потоци излъчвани от пулсари или кандидати за черни дупки. Вторият вид КПО се предполага, че се появяват само при силни гравитационни полета, т.е. от вътрешния ръб на акреционния диск. Тъй като произхода на тези осцилации не е напълно ясен, то съществуват и различни модели за тяхното обяснение. Моделите с релативистка прецесия се основават на предположението, че КПО са директно свързан с орбиталната (Кеплерова)  $\Omega_p$  и с епицикличните честоти. Във всички споменати по-горе модели изброените честоти или някои от тях са включени по един или друг начин. Радиалната  $\nu_r$  и вертикалната  $\nu_\theta$  епициклични честоти се появяват, ако пертурбираме частица на стабилна кръгова орбита.

За случая на бързо-въртящи се неутронни звезди, епицикличните честоти са разгледани скоро в [62]. Някой от споменатите по-горе модели през последните години са разгледани и в контекста на алтернативни теории на гравитацията [19, 32]. Получените в тези работи отклонения от ОТО са относително малки, с изключение на случая на бързо-въртящи се неутронни звезди в скаларно-тензорни теории на гравитацията [32].

### 8.1 Резултати

В тази глава разглеждаме промените в радиуса на ПСКО и в орбиталните и епицикличните честоти в  $R^2$  гравитация спрямо същите величини в ОТО. Резултатите са дискутирани в [63]. Също така разглеждаме отклоненията при бавно въртене спрямо статичния случай в контекстна на приближение на бавно въртене. Разглеждаме две адронни APR4 и MS1 едно кварково SQS B60 УнС.

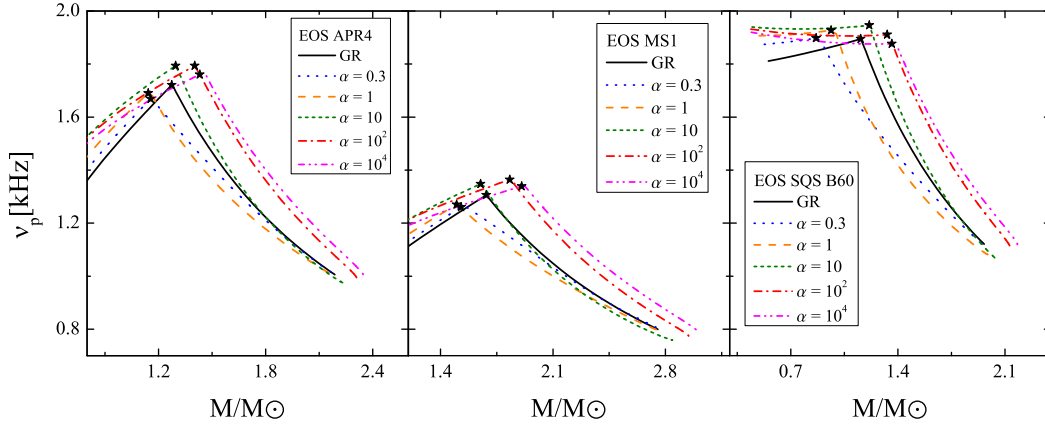
Тук ще изследваме статични, отбелязани с  $f = 0$  Hz, и бавно въртящи се модели с  $f = 80$  Hz и  $f = 160$  Hz, на неутронни и кваркови звезди. Първо ще разгледаме отклоненията на резултатите в  $R^2$  гравитация спрямо тези в ОТО, а след това ще разгледаме и разликата между резултатите при различни честоти на въртене. На фигурите са представени модели с маси до максималните стабилни маси за съответното УнС. Полученото в  $R^2$  гравитация максималното отклонение от ОТО е за максималната използвана стойност на параметъра,  $a = 10^4$ .



Фигура 11: Радиусът на ПСКО като функция на масата на звездата за различни стойности на параметъра  $a$ . В левия панел са представени резултатите за УнС APR4, а в средния са тези за MS1 и в десния тези за SQS B60. Резултатите са за статични звезди ( $f = 0$  Hz).

На Фиг. 11 е представен радиусът на ПСКО като функция на звездната маса за последователности от модели. Изследван е широк набор от стойности за параметъра  $a$ . В левия панел на фигурата са представени резултатите за УнС APR4, в средния са резултатите за УнС MS1, а в десния са тези за УнС SQS B60. Ако последната стабилна кръгова орбита е във вътрешността на звездата, при модели с малки маси, е начертан радиуса на звездата, а не радиуса на ПСКО. Точките в последователностите от модели, в които радиусът на ПСКО става равен на радиуса на звездата са отбелязани със звезда. Резултатите изглеждат качествено еднакви за всички изследвани уравнения на състоянието. За модели с максимални маси, най-големите отклонения са за максимални стойности на параметъра  $a$ . Те са от порядъка на 10 % и намаляват с намаляването на стойността на  $a$ . В граничния случай  $a \rightarrow 0$  резултатите клонят към тези в ОТО.

На това място трябва да направим някои коментари относно представените резултати. На Фиг. 11 може да се види следното поведение при моделите, при които радиусът на ПСКО става по-голям от радиуса на звездата. Нека първоначално се съсредоточим върху моделите отбелязани със звезда. За малки стойности на параметъра  $a$  техният радиус и тяхната маса са по-малки отколкото в ОТО. Параметрите на моделите с  $a = 10$  са близки до тези в ОТО, а за по-големи стойности на параметъра  $a$  радиусите и масите на моделите са по-високи отколкото в ОТО. Когато ПСКО е извън звездата, нейният радиус е по-голям от този в ОТО за модели с еднакви маси и малки стойности на параметъра  $a$ . За  $a = 10$  резултатите са сравними с тези в ОТО. За големи стойности на  $a$  радиусът на последната стабилна кръгова орбита е по-малък отколкото в ОТО. Обяснение на това поведение според нас може да се даде с немонотонното поведение на някой параметри на звездата като функция на  $a$ . Това например е показано на Фиг. 3 в [26] (а също така и в глава 6) за максималните маси. Вижда се, че при малки стойности на параметъра  $a$  масата намалява спрямо тази в ОТО. При някаква стойност на  $a$  има точка на обръщане и масата започва да нараства, достигайки максимални маси, по-високи от тази в ОТО. Нашите изследвания показват, че това поведение е характерно както за неутронни звезди, така и за кваркови. Подобно поведение се наблюдава и за други параметри на звездата, но минимумът може да е отместен при други стойности на  $a$ . Директно се вижда, че има подобна зависимост за моделите отбелязани със звезда, както и при тези, при които ПСКО е извън звездата. Това ни води до заключението, че това поведение е характерно за теорията и съответно подобно поведение може да се види и в графиките представени по-долу.



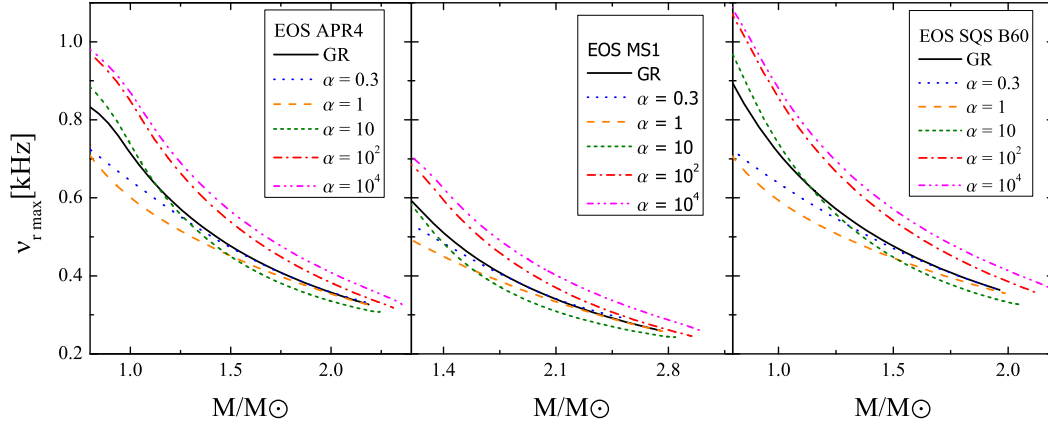
Фигура 12: Честота, в kHz, на частица движеща се по кръгова орбита, като функция на масата на звездата за различни стойности на параметъра  $a$ . В левия панел са представени резултатите за УнС APR4, а в средния са тези за MS1 и в десния тези за SQS B60. Резултатите са за статични звезди ( $f = 0$  Hz).

На Фиг. 12 е начертана орбиталната честота  $\nu_p = \Omega_p/2\pi$  в kHz, върху ПСКО, като функция на масата на звездата. Ако ПСКО е във вътрешността на звездата,  $\nu_p$  е пресметната на повърхността на звездата. Резултатите са качествено еднакви за всички уравнения на състоянието. Отклонението от ОТО за модели с  $a = 10^4$  е около 15 % и не се променя значително с масата на моделите. За модели с малки стойности на параметъра  $a$  отклонението от ОТО, когато радиусът на ПСКО става по-голям от радиуса на звездата, е близко до максималното, бързо намалява с увеличаването на масата и клони към ОТО за модели с максимални маси.

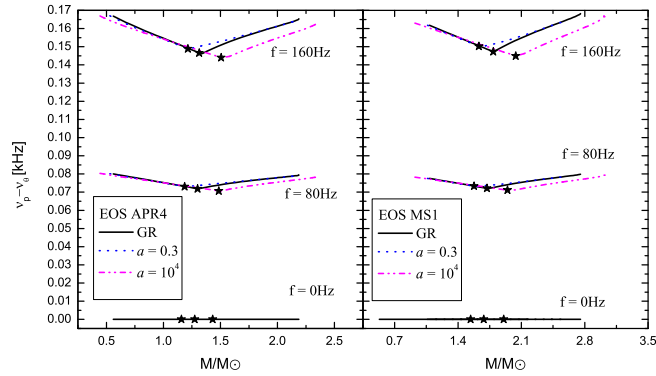
На Фиг. 13 са начертани максималните стойности на радиалната епициклична честота в kHz като функция на масата на звездата. Ако ПСКО е във вътрешността на звездата, максималната стойност определяме на повърхността или извън звездата. В разгледания интервал от маси честотите монотонно намаляват. За големи стойности на параметъра  $a$  максималната радиална епициклична честота е по-висока отколкото в ОТО. За малки стойности на  $a$  честотите са по-ниски спрямо ОТО. За малки маси, отклоненията са големи, но при максимални маси резултатите в  $R^2$  клонят към тези в ОТО.

Отклоненията, получени заради въртенето са качествено и количествено еднакви както за адронни уравнения на състоянието, така и за кваркови такива. Това, в комбинация с малките отклонения и факта, че на този етап наблюдателните данни са в полза на адронните УнС е причината в следващите фигури да представим само тях.

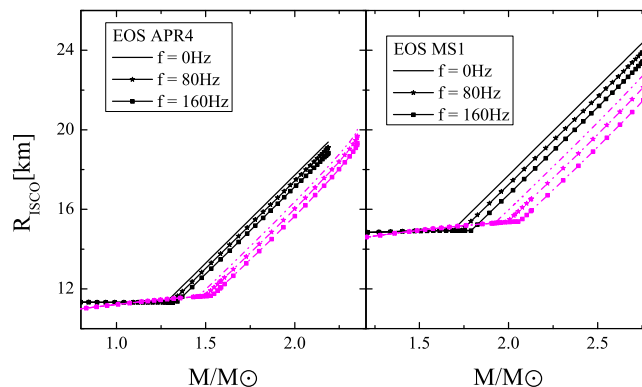
На Фиг. 14 са представени разликите между орбиталната честота  $\nu_p$  и вертикалната епициклична честота  $\nu_\theta$ , т.е. честотата на нодална прецесия  $\nu_n$ , като функция на масата. В левия панел са представени резултатите за УнС APR4, а в десния, тези за УнС MS1. Резултатите са за три различни честоти на въртене:  $f = 0$  Hz (статичен случай),  $f = 80$  Hz и  $f = 160$  Hz. С черна непрекъсната линия са представени резултатите в ОТО, а с цветни прекъснати линии – тези за  $a = 0.3$  и  $a = 10^4$ . Както казахме по-горе  $\nu_p$  и  $\nu_\theta$  съвпадат в статичният случай. С нарастването на честотата на въртене на звездата се увеличава и разликата между тези две честоти. Разликата е пресметната на повърхността на звездата ако последната стабилна кръгова орбита е във вътрешността на звездата, и върху радиуса на ПСКО в противоположния случай. Преходните модели са отбелязани със звезда в съответствие с предишните фигури. Честотата на нодалната прецесия намалява с увеличаване на масата за модели, при които ПСКО е във вътрешността на звездата и нараства с увеличаване на масата на звездата, за модели, за които ПСКО е извън звездата. В случая на  $R^2$



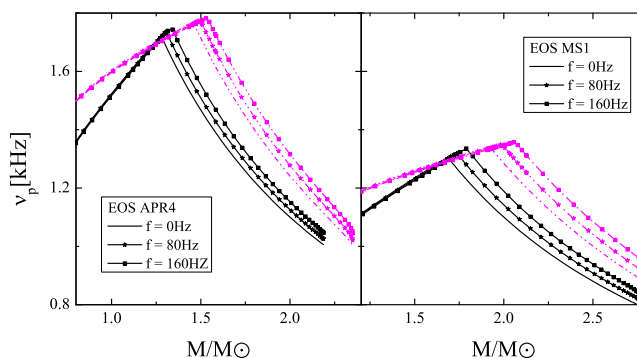
Фигура 13: Максималната стойност на радиалната епициклична честота, в kHz, като функция на масата на звездата за различни стойности на параметъра  $a$ . В левия панел са представени резултатите за УнС APR4, а в средния са тези за MS1 и в десния – за SQS B60. Резултатите са за статични звезди ( $f = 0$  Hz).



Фигура 14: Разликата между орбиталната и вертикалната епициклична честоти върху ISCO. Представените резултати са различни честоти на въртене за ОТО и за  $R^2$  гравитация с  $a = 0.3$  и  $a = 10^4$ . В левия панел са представени резултатите за УнС APR4, а в десния – тези за УнС MS1.



Фигура 15: Радиусът на ПСКО, в km, като функция на масата на звездата. Представените резултати са за ОТО и за  $R^2$  гравитация с  $a = 10^4$  за модели въртящи се с  $f = 0$  Hz,  $f = 80$  Hz и  $f = 160$  Hz. В левият панел са представени резултатите за УнС APR4, а в десния – тези за УнС MS1.

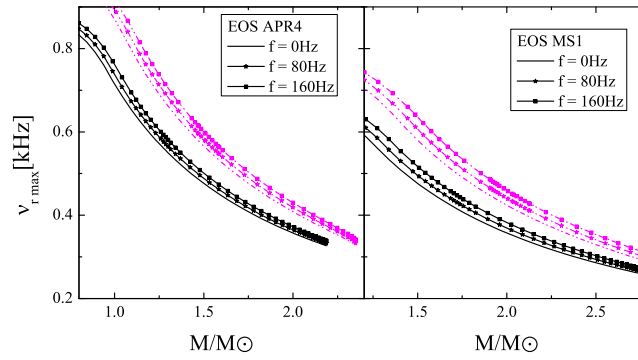


Фигура 16: Орбиталната честота върху ПСКО, в kHz, като функция на масата на звездата. Представените резултати са за ОТО и за  $R^2$  гравитация с  $a = 10^4$  за модели въртящи се с  $f = 0$  Hz,  $f = 80$  Hz и  $f = 160$  Hz. В левия панел са представени резултатите за УнС APR4, а в десния – тези за УнС MS1.

гравитация са представени резултати за  $a = 10^4$  и  $a = 0.3$ . Първата от горните стойности на параметъра  $a$  дава почти максималното отклонение от ОТО, а втората сме избрали тъй като при нея се проявява интересното поведение демонстрирано и коментира по-горе в текста. Ако последната стабилна орбита е във вътрешността на звездата, резултатите са еднакви за всички разгледани честоти на въртене (както и трябва да се очаква заради приближението на бавно въртене, в което работим). В случая, когато ПСКО е извън звездата поведението е следното. За  $a = 0.3$ ,  $\nu_n$  е малко по-висока отколкото в ОТО и бързо се сходя към ОТО при увеличаване на масата на моделите. За  $a = 10^4$ ,  $\nu_n$  има по-ниски стойности отколкото в ОТО, а отклонението е почти постоянно и е около 4 %.

На Фиг. 15, 16, 17 са представени радиусът на ПСКО, орбиталната честота и максималната епициклична честота в ОТО и за максимално отклонение в  $R^2$  гравитация ( $a = 10^4$ ) за изброените стойности на  $f$ . Въртенето има един и същ ефект върху всички величини както в ОТО, така и в  $R^2$  гравитация. Причината, поради която пропускаме интересния случай на  $a = 0.3$  е следната. Поради промените в радиуса на ПСКО и различните разглеждани честоти на въртене графиките за  $a = 0.3$  и  $a = 1$  се припокриват с резултатите за ОТО. Според нас, в този случай, фигурите стават не информативни и поради тази причина представяме само резултатите за максимално отклонение,  $a = 10^4$ . В следствие от въртенето, радиусът на ПСКО намалява с около 4 %, а честотите се увеличават с подобен





Фигура 17: Максималната радиална епициклична честота като функция на масата на звездата. Представените резултати са за ОТО и за  $R^2$  гравитация с  $a = 10^4$ , за модели въртящи се с  $f = 0$  Hz,  $f = 80$  Hz и  $f = 160$  Hz. В левия панел са представени резултатите за УнС APR4, а в десния – тези за УнС MS1.

процент. Отклоненията в проценти са едни и същи както в ОТО, така и в  $R^2$  гравитацията.

## 8.2 Коментар

В тази глава разгледахме орбиталната и епицикличните честоти на частици, движещи се по кръгови орбити около неутронна или кваркова звезда. Различни модели свързват тези честоти или някои от тях с квази-периодичните осцилации. Имайки предвид новото поколение лаборатории с големи събирателни площи, които се изграждат в момента за прецизни времеви наблюдения на рентгенови пулсари, КПО се очаква да имат основна роля в тестването на гравитацията в силен режим.

Разгледахме как модификацията на ОТО, а именно  $R^2$  гравитацията и промяната на различни параметри в нея влияят върху радиуса на последната стабилна кръгова орбита, върху орбиталната и върху епицикличните честоти на частица намираща върху тази орбита. Тъй като повечето наблюдавани неутронни звезди са бавно въртящи се, то и ние концентрирахме усилията си върху случая на статични или бавно въртящи се неутронни и кваркови звезди. Също така разгледахме разликите между резултатите за статични и за бавно въртящи се модели.

Разгледани са две адронни и едно кварково уравнение на състоянието, като и в двата случая се наблюдава качествено еднакво поведение на резултатите за различни стойности на параметъра на теорията. Най-големите разлики от ОТО се получават за най-големите използвани стойности на параметъра  $a$ . Радиуса на последната стабилна орбита намалява с около 10 %, а максималната радиална епициклична честота нараства с 15 - 20%. От друга страна, разликите индуцирани от бавното въртене са очаквано малки. При най-високите разглеждани честоти на въртене ( $f = 160$  Hz) отклоненията от статичния случай са около 4% за всички изследвани величини.

Отклоненията при бавно-въртящи се звезди, с честоти на въртене до 160 Hz, са много по-малки от тези породени от промяната на теорията. Поради това статични теоретични и числени модели могат да се използват за сравнение с наблюдателни данни, дори за бавно-въртящи се звезди.

Изследваните в тази глава честоти ни дават възможност да тестваме ОТО и алтернативните теории в режим на силни гравитационни полета. Резултатите от такива числени модели могат да се сравняват с данните, които се очаква, че ще получаваме от новото поколение детектори за прецизни времеви наблюдения на рентгенови пулсари. Дори резултатите от такива наблюдения да не фиксират директно теорията, то те ще наложат

още по-сериозни ограничения върху свободните параметри в теорията.

## Приноси на дисертационния труд:

- За първи път непертурбативно и самосъгласувано са изследвани статични и бавно въртящи се модели на неутронни и кваркови звезди във  $f(R)$  гравитация с Лагранжиан  $f(R) = R + aR^2$ . Изследвани са множество уравнения на състоянието, описващи адронна материя (неутронни звезди) и кваркова материя (кваркови звезди). Получените резултати са сравнени с известни преди това в литературата пертурбационни резултати, и е показана неприложимостта на пертурбативния метод в този случай. Разгледаните модели са изследвани за голям набор от стойности на свободния параметър, покриващи целия интервал от стойности, позволени от наблюденията. Получените резултати са качествено еднакви с тези в ОТО и за различни стойности на параметъра  $a$ , а също така и за уравнения с различни твърдоти. Наблюдавано е увеличение на максималните маси с около 10%, а на инерчния момент с около 30% за модели с еднакви маси и около 40% абсолютно увеличение.

Създадени са кодове за решаване на полевите уравнения, което е нетривиална задача, тъй като разгледаните уравнения са от тип твърди.

- За първи път са изследвани пертурбации на неутронни и на кваркови звезди в  $R^2$  гравитация, чрез така нареченото приближение на Каулинг. Изследван е голям брой уравнения на състоянието за неутронни и за кваркови звезди, както и различни съотношения между параметрите на звездата и честотите на осцилации. Изследванията са направени за голям набор от стойности на параметъра  $a$ , покриващи целия интервал от възможни стойности, позволени от наблюденията.

Коментирана е независимостта от УнС на съответните съотношения, а също така е наблюдавана и независимост от гравитационната теория. Получени са стойностите за свободните параметри в  $R^2$  гравитация за известни в литературата фитираци полиноми, описващи разглежданите съотношения.

- За първи път са изследвани орбиталните и епицикличните честоти на частица, движеща се по кръгова орбита около неутронна или кваркова звезда в  $R^2$  гравитация. Разгледаните честоти са в основата на един от най-популярните модели за описание на наблюдаваните в лъчението на някой пулсари квази-периодични осцилации.

Изследван е голям набор от стойности за свободния параметър  $a$  за статични и за бавно въртящи се модели. Получени са радиусите на последната стабилна кръгова орбита, като е наблюдавано намаление на радиуса спрямо този в ОТО с около 10%. Получени са орбиталните и епицикличните честоти. При орбиталните и при максималната радиална епициклична честота е наблюдавано увеличение с около 10% спрямо ОТО. Установено е, че бавното въртене няма съществен принос към резултатите (около 4%). Наблюдавано е характерно за някой параметри поведение в рамките на теорията, проявяващо се с увеличение на стойността на свободния параметър.

# Публикации в реферирани списания включени в дисертацията

## Публикации в международни реферирани списания

- Yazadjiev, Stoytcho S.; Doneva, Daniela D.; Kokkotas, Kostas D.; Staykov, Kalin V., Non-perturbative and self-consistent models of neutron stars in  $R$ -squared gravity, JCAP 06 (2014) 003
- Staykov, Kalin V.; Doneva, Daniela D.; Yazadjiev, Stoytcho S.; Kokkotas, Kostas D., Slowly rotating neutron and strange stars in  $R^2$  gravity, JCAP 10 (2014) 006
- Staykov, Kalin V.; Doneva, Daniela D.; Yazadjiev, Stoytcho S.; Kokkotas, Kostas D., Gravitational wave asteroseismology of neutron and strange stars in  $R^2$  gravity, Phys. Rev. D 92, 043009 (2015)
- Staykov, Kalin V.; Doneva, Daniela D.; Yazadjiev, Stoytcho S., Orbital and epicyclic frequencies around neutron and strange stars in  $R^2$  gravity, The European Physical Journal C, 75(12), Dec. 2015

## Доклади на конференции по темата на дисертационния труд

### Доклади на международни конференции

- Доклад на тема “Properties and asteroseismology of compact stars in  $f(R)$  theories” на конференцията Compact Stars and Black Holes, Tuebingen, 07 – 09 Юли, 2015 г.
- Доклад на тема “Neutron and Strange Stars in  $R$ -Squared Gravity” на конференцията Fourteenth Marcel Grossman Meeting (MG-14), Rome, от 12 до 18 Юли, 2015 г.

### Доклади на национални конференции

- Доклад на тема “Статични и бавновъртящи се неутронни звезди в  $R^2$  гравитация” на Трети Национален Конгрес по физически науки, София, 29.09 – 02.10.2016 г.

## Благодарности

Първо искам да благодаря на моя научен ръководител проф. д-р Стойчо Язаджиев за подкрепата, положените усилия, множеството съвети и доверието. Успоредно искам да благодаря и научният ми консултант д-р Даниела Донева. Благодарен съм и за моето бързо навлизане в изчислителната физика, за многото съвети и за търпението.

Бих искал да благодаря на проф. Костас Кокотас за гостоприемството по време на посещенията ми на групата по Теоретична астрофизика към Университета в Тюбинген. Също така бих искал да благодаря и на колегите ми Боян Лазов и д-р Петя Недкова за съдействието и научните дискусии.

Не на последно място искам да благодаря на семейството ми и на приятелите ми за подкрепата и за проявеното разбиране през тези години.

## Литература

- [1] Sean M. Carroll. Lecture notes on general relativity. 2007.
- [2] N.D. Birrell and P.C.W. Davies. Quantum Fields in Curved Space. *Cambridge Monogr.Math.Phys.*, 1982.
- [3] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, and Constantinos Skordis. Modified Gravity and Cosmology. *Phys.Rept.*, 513:1–189, 2012.
- [4] et al. Riess, Adam G. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, Sep 1998.
- [5] S. Perlmutter et al. Measurements of  $O\odot$  and  $O>$  from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, 1999.
- [6] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni.  $f(R)$  Theories Of Gravity. *Rev.Mod.Phys.*, 82:451–497, 2010.
- [7] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa.  $f(R)$  theories. *Living Rev.Rel.*, 13:3, 2010.
- [8] Shin’ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. Unified cosmic history in modified gravity: from  $F(R)$  theory to Lorentz non-invariant models. *Phys.Rept.*, 505:59–144, 2011.
- [9] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [10] Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-VCH, 1983.
- [11] Max Camenzind. *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes (Astronomy and Astrophysics)*. Springer-Verlag Berlin and Hei, 2005.
- [12] P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. E. Roberts, and J. W. T. Hessels. A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay. *Nature*, 467:1081–1083, 2010.
- [13] J. S. Read, B. D. Lackey, B. J. Owen, and J. L. Friedman. Constraints on a phenomenologically parametrized neutron-star equation of state. *Phys. Rev. D*, 79(12):124032, June 2009.
- [14] John L. Friedman and Nikolaos Stergioulas. *Rotating Relativistic Stars (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 2013.
- [15] S. Chandrasekhar. The dynamical instability of gaseous masses approaching the schwarzschild limit in general relativity. *The Astrophysical Journal*, 140:417, Aug 1964.
- [16] Kostas D. Kokkotas and Bernd G. Schmidt. Quasinormal modes of stars and black holes. *Living Rev. Rel.*, 2:2, 1999.
- [17] S. Yoshida and Y. Kojima. Accuracy of the relativistic Cowling approximation in slowly rotating stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 289:117–122, 1997.
- [18] F. D. Ryan. Gravitational waves from the inspiral of a compact object into a massive, axisymmetric body with arbitrary multipole moments. *Phys. Rev. D*, 52:5707–5718, 1995.
- [19] A. Maselli, L. Gualtieri, P. Pani, L. Stella, and V. Ferrari. Testing Gravity with Quasi-periodic Oscillations from Accreting Black Holes: The Case of Einstein-Dilaton-Gauss-Bonnet Theory. *ApJ*, 801:115, March 2015.

- [20] M. Shibata and M. Sasaki. Innermost stable circular orbits around relativistic rotating stars. *Phys. Rev. D*, 58(10):104011, November 1998.
- [21] G. Pappas and T. A. Apostolatos. Revising the Multipole Moments of Numerical Spacetimes and its Consequences. *Physical Review Letters*, 108:231104, 2012.
- [22] A. Cooney, S. Dedeo, and D. Psaltis. Neutron stars in  $f(R)$  gravity with perturbative constraints. *Phys. Rev. D*, 82:064033, 2010.
- [23] A. Savas Arapoglu, Cemsinan Deliduman, and K. Yavuz Eksi. Constraints on Perturbative  $f(R)$  Gravity via Neutron Stars. *JCAP*, 1107:020, 2011.
- [24] J. B. Hartle. Slowly Rotating Relativistic Stars. I. Equations of Structure. *ApJ*, 150:1005, 1967.
- [25] J. B. Hartle and K. S. Thorne. Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars. *ApJ*, 153:807, 1968.
- [26] Stoytcho S. Yazadjiev, Daniela D. Doneva, Kostas D. Kokkotas, and Kalin V. Staykov. Non-perturbative and self-consistent models of neutron stars in  $R$ -squared gravity. *JCAP*, 1406:003, 2014.
- [27] D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, N. Stergioulas, and K. D. Kokkotas. Rapidly rotating neutron stars in scalar-tensor theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 88:084060, 2013.
- [28] H. Robe. Les oscillations non radiales des polytropes. *Annales d'Astrophysique*, 31:475, February 1968.
- [29] L. S. Finn. Relativistic stellar pulsations in the Cowling approximation. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 232:259–275, 1988.
- [30] Hajime Sotani and Kostas D. Kokkotas. Probing strong-field scalar-tensor gravity with gravitational wave asteroseismology. *Phys. Rev. D*, 70:084026, 2004.
- [31] K. V. Staykov, D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, and K. D. Kokkotas. Gravitational wave asteroseismology of neutron and strange stars in  $R^2$  gravity. *Phys. Rev. D*, 92(4):043009, August 2015.
- [32] Daniela D. Doneva, Stoytcho S. Yazadjiev, Nikolaos Stergioulas, Kostas D. Kokkotas, and Tilemachos M. Athanasiadis. Orbital and epicyclic frequencies around rapidly rotating compact stars in scalar-tensor theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 90, :044004, May 2014.
- [33] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, Second Edition*. Cambridge University Press, 1992.
- [34] Eugeny Babichev and David Langlois. Relativistic stars in  $f(R)$  and scalar-tensor theories. *Phys.Rev.*, D81:124051, 2010.
- [35] Luisa G. Jaime, Leonardo Patino, and Marcelo Salgado. Robust approach to  $f(R)$  gravity. *Phys.Rev.*, D83:024039, 2011.
- [36] E. Santos. Neutron stars in generalized  $f(R)$  gravity. *Ap&SS*, 341:411–416, 2012.
- [37] M. Orellana, F. García, F. A. Teppa Pannia, and G. E. Romero. Structure of neutron stars in  $R$ -squared gravity. *General Relativity and Gravitation*, 45:771–783, 2013.

- [38] Hamzeh Alavirad and Joel M. Weller. Modified gravity with logarithmic curvature corrections and the structure of relativistic stars. *Phys.Rev.*, D88:124034, 2013.
- [39] Artyom V. Astashenok, Salvatore Capozziello, and Sergei D. Odintsov. Further stable neutron star models from f(R) gravity. *JCAP*, 1312:040, 2013.
- [40] T. Damour and G. Esposito-Farèse. Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments. *Phys. Rev. D*, 54:1474–1491, 1996.
- [41] H. Sotani. Slowly rotating relativistic stars in tensor-vector-scalar theory. *Phys. Rev. D*, 81:084006, 2010.
- [42] H. Sotani. Slowly rotating relativistic stars in scalar-tensor gravity. *Phys. Rev. D*, 86:124036, 2012.
- [43] K. V. Staykov, D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, and K. D. Kokkotas. Slowly rotating neutron and strange stars in  $R^2$  gravity. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 10:6, October 2014.
- [44] Joachim Naf and Philippe Jetzer. On the  $1/c$  Expansion of f(R) Gravity. *Phys.Rev.*, D81:104003, 2010.
- [45] A. W. Steiner, J. M. Lattimer, and E. F. Brown. The Equation of State from Observed Masses and Radii of Neutron Stars. *ApJ*, 722:33–54, 2010.
- [46] J. et al. Antoniadis. A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. *Science*, 340:448, April 2013.
- [47] J. M. Lattimer and B. F. Schutz. Constraining the Equation of State with Moment of Inertia Measurements. *ApJ*, 629:979–984, 2005.
- [48] M Kramer and N Wex. TOPICAL REVIEW: The double pulsar system: a unique laboratory for gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 26:073001, 2009.
- [49] B. P. et al. Abbott. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116(6), Feb 2016.
- [50] B. P. et al. Abbott. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Physical Review Letters*, 116(24):241103, June 2016.
- [51] H. Sotani and K. D. Kokkotas. Stellar oscillations in scalar-tensor theory of gravity. *Phys. Rev. D*, 71:124038, 2005.
- [52] Erich Gaertig and Kostas D. Kokkotas. Gravitational wave asteroseismology with fast rotating neutron stars. *Phys. Rev. D*, 83:064031, 2011.
- [53] D. D. Doneva, E. Gaertig, K. D. Kokkotas, and C. Krüger. Gravitational wave asteroseismology of fast rotating neutron stars with realistic equations of state. *Phys. Rev. D*, 88(4):044052, August 2013.
- [54] Hajime Sotani. Probing tensor-vector-scalar theory with gravitational wave asteroseismology. *Phys. Rev. D*, 80(6), Sep 2009.
- [55] Stoytcho S Yazadjiev and Daniela D Doneva. Possible dark energy imprints in the gravitational wave spectrum of mixed neutron-dark-energy stars. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(03):037, Mar 2012.

- [56] Daniela D. Doneva and Stoytcho S. Yazadjiev. Gravitational wave spectrum of anisotropic neutron stars in Cowling approximation. *Phys. Rev. D*, 85:124023, 2012.
- [57] Nils Andersson and Kostas D. Kokkotas. Towards gravitational wave asteroseismology. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 299:1059–1068, 1998.
- [58] Omar Benhar, Valeria Ferrari, and Leonardo Gualtieri. Gravitational wave asteroseismology revisited. *Phys. Rev. D*, 70:124015, 2004.
- [59] H. K. Lau, P. T. Leung, and L. M. Lin. Inferring Physical Parameters of Compact Stars from their f-mode Gravitational Wave Signals. *ApJ*, 714:1234–1238, May 2010.
- [60] L. K. Tsui and P. T. Leung. Universality in quasi-normal modes of neutron stars. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 357:1029–1037, March 2005.
- [61] C. Chirenti, G. H. de Souza, and W. Kastaun. Fundamental oscillation modes of neutron stars: Validity of universal relations. *Phys. Rev. D*, 91(4):044034, February 2015.
- [62] D. Gondek-Rosińska, W. Kluźniak, N. Stergioulas, and M. Wiśniewicz. Epicyclic frequencies for rotating strange quark stars: Importance of stellar oblateness. *Phys. Rev. D*, 89(10):104001, May 2014.
- [63] Kalin V. Staykov, Daniela D. Doneva, and Stoytcho S. Yazadjiev. Orbital and epicyclic frequencies around neutron and strange stars in  $r^2$  gravity. *The European Physical Journal C*, 75(12), Dec 2015.