

До Факултетния съвет на ФМИ  
на СУ “Св. Климент Охридски”

## СТАНОВИЩЕ

от: проф. дмн Гено Николов, Факултет по математика и информатика  
на СУ “Св. Климент Охридски ”

за дисертационния труд на Ана Александрова Авджиева  
“Някои асимптотически оптимални квадратурни формули”  
за присъждане на образователната и научна степен *Доктор*  
по научна специалност *Изчислителна математика*

Дисертационен труд *Някои асимптотически оптимални квадратурни формули* е с обем от 84 страници и се състои от увод, пет основни глави, благодарности и посвещение, авторска справка за приносите и декларация за оригиналност на резултатите, и списък на цитираната литература включващ 34 заглавия.

Класическият метод за построяване на квадратурни формули се основава на интерполация, най-често с алгебрични полиноми. Аргументи в подкрепа на такъв подход дава теоремата на Вайерщрас, според която всяка непрекъсната върху краен и затворен интервал функция може да се приближи с произволна отнапред избрана точност с алгебричен полином. Стремезът да се построи квадратурна формула с фиксиран брой възли и максимална алгебрическа степен на точност води до квадратурните формули на Гаус, Радо и Лобато. Този подход може да се приложи и към функциите от други линейни пространства, например от тригонометрични, експоненциални полиноми, обобщени полиноми по функции от Чебишови системи, сплайн-функции от фиксирана степен и т.н., при което говорим за квадратурни формули от Гаусов тип, т.е. имащи максимална тригонометрическа, експоненциална, сплайнова и прочие стапен на точност.

През 40-те години на миналия век възниква алтернативен подход за оценяване на качеството на квадратурните формули, а именно, теорията на оптималните квадратурни формули в даден клас от функции. Негови основоположници са изтъкнати математици като А. Сард, А. Колмогоров и С. М. Николски. При този подход възлите и коефициентите на квадратурната формула се търсят така, че максималната ѝ грешка в дадения клас от функции да възможно най-малка. Доказателството на съществуване и единственост на оптимални в даден клас от функции квадратурни

формули води до някои красиви, но и изключително трудни екстремални задачи.

Особен интерес представляват оптималните квадратурни формули в Соболевите класове от функции. Задачите за съществуване и единственост на оптимални квадратурни формули тук имат своята дуална формулировка за съществуване и единственост на моносплайни с минимална интегрална норма. Основен принос за решаването на тези задачи има Борислав Боянов. Налице е съществена разлика между периодичните и непериодичните Соболеви класове. В периодичния случай единствената (с точност до трансляция) оптимална квадратурна формула е съставната квадратурна формула на правоъгълниците, и константата на грешката  $\eta$  в периодичните Соболеви класове се изразява с интегрални норми на отместени Бернулиеви моносплайни.

В непериодичния случай няма универсална оптимална квадратурна формула, т.е. за различните Соболеви класове оптималните квадратурни формули са различни; при това, случаите, в които оптималните квадратурни формули са известни, са изключение. Този факт силно редуцира важността на оптималните квадратурни формули, и налага търсенето на близки по качество до оптималните квадратурни формули, които могат да се намерят в явен вид, например на редици от асимптотически оптимални квадратурни формули. Построяването на асимптотически оптимални квадратурни формули за някои непериодични класове на Соболев е предмет на дисертацията на Ана Авджиева.

Накратко ще се спира на съдържанието на дисертацията. В уводната глава се прави обзор на известните резултати, и се обосновава необходимостта от построяване на асимптотически оптимални квадратурни формули в непериодичните Соболеви класове. Във втора глава се излагат известни дефиниции, факти и теореми, които се използват в следващите глави. Тук влизат теоремата на Пеано за представяне на линейни функционали, в частност на остатъка на квадратурни формули, теорема за развитие на този остатък в ред, сведения за Бернулиевите полиноми и моносплайни, сумационните формули от тип на Ойлер–Маклорен.

В Глава 3 от дисертацията е предложен алгоритъм, основаващ се на метода на стрелбата, за построяване на Гаусовите квадратурни формули за пространствата от кубични сплайн функции с равноотдалечени възли. Интересът към тях е породен от асимптотическата им оптималност в Соболевия клас  $W_{\infty}^4$ , доказана през 1996 от Кьолер и Николов. Числено са намерени възлите и коефициентите на  $n$ -точковите квадратурни формули за  $n \leq 16$ , и са направени някои заключения от получените резултати,

най-важният от които е, че приложението на този метод е силно лимитирано от точността на машинните пресмятания, което налага използването на други подходи за строене на асимптотически оптимални квадратурни формули.

Такъв подход е предложен в Глава 4 от дисертацията, в която са построени редици от асимптотически оптимални квадратурни формули в Соболевите класове  $W_p^3$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) и  $W_p^4$ ,  $p = 1, 2$  и  $\infty$ . Идеята на подхода се състои в използването на подходящи сумационни формули от тип на Ойлер-Маклорен, които дават аналога на интегралното представяне на грешката на съставната квадратурна формула на правоъгълниците (респ., трапеците) в периодичния случай. Стойностите на производните на подинтегралната функция в краищата на интеграционния интервал, появяващи се в сумационните формули, се апроксимират с формули за числено диференциране с възли разположени в малки околности на тези краища. Получените по този начин квадратурни формули имат ядра на Пеано, които се различават от ядрата в периодичния случай само в тези околности, и в резултат са асимптотически оптимални. Построените квадратурни формули са с явно намерени коефициенти и възли (които в голямата си част са възлите на съставните квадратурни формули на правоъгълниците или трапеците). Пресметнати са и константите на грешките на тези квадратурни формули при  $p = 1, 2, \infty$  (за пресмятането на някои от тях е използвана системата Wolfram Mathematica).

Същата идея е приложена в Глава 5 от дисертацията за построяването на няколко редици от асимптотически оптимални дефинитни квадратурни формули от четвърти ред. Значението на дефинитните квадратурни формули се състои в това, че те дават едностранни оценки за интегралите от обобщено изпъкнали функции.

Причината да се построят няколко редици, а не по една редица от асимптотически оптимални положително и отрицателно дефинитни квадратурни формули се изяснява в Глава 6: оказва се, че подходящо комбиниране на двойки от дефинитни квадратурни формули от един и същ тип и ред води до получаване на резултати за монотонност на остатъците и полезни апостериорни оценки за грешката на квадратурните формули (Теорема 5 от дисертацията). В Теореме 6 и 7 са дадени такива двойки измежду дефинитните квадратурни формули, построени в Глава 5, и са намерени най-добрите константи, с които условията на Теорема 5 са изпълнени. Направените числени експерименти в тази глава илюстрират ефективността на получените апостериорни оценки.

Резултатите от дисертацията са отразени в 4 статии, всичките съвмес-

тни с научния ѝ ръководител, който декларира равностойния принос на дисертанта в тях. Две от публикациите са в сборници от материали на конференции: една в конференция на BGSIAM и една в докторантска конференция на ФМИ, публикувана от Университетско издателство "Св. Климент Охридски". Една от статиите е в Годишника на СУ (ФМИ), том 102, и една е изпратена за публикуване в *J. Comp. Appl. Math.*, списание с много висок импакт фактор. За нея са получени две положителни рецензии с препоръки, имащи козметичен характер, поради което имам всички основания да смятам, че ще бъде приета за печат.

Статията в материалите от конференцията на BGSIAM е цитирана в *J. Comp. Appl. Math.* от 2016г. Предвид скорошното излизане от печат на четирите статии по дисертацията, смятам, че цитирането им е въпрос на близко бъдеще.

Авторефератът на дисертационния труд е в обем от 27 страници, и отразява правилно съдържанието на дисертацията. Същото важи и за приложената там *Авторска справка* за приносите в дисертацията.

### **Заклучение.**

Дисертационният труд "Някои асимптотически оптимални квадратурни формули" на Ана Александрова Авджиева отговаря напълно на изискванията на ЗРАСРБ и на Правилника на ФМИ - СУ за придобиване на образователната и научна степен *Доктор*. Дисертантът е получил задълбочени познания в областта на численото интегриране. Тези свои познания той е приложил за получаване на важни резултати в теорията на квадратурните формули, имащи както теоритичен, така и приложен (специално резултатите от Глава 6) характер. За получаването на тези резултати Ана Авджиева е проявила умения и е преодоляла значителни технически трудности.

**Въз основа на изложеното по-горе убедено препоръчвам на уважаемия Факултетен Съвет на ФМИ да присъди на Ана Александрова Авджиева образователната и научна степен "Доктор" по научната специалност "Изчислителна математика".**

София, 10 август, 2016 г.

Подпис на рецензента:

(проф. дмн Гено Николов)