РЕЦЕНЗИЯ

от доц. д-р Андрей Стефанов Андреев,

на дисертацията на Ана Александрова Авджиева, на тема
„Някои асимптотически оптимални квадратурни формули",
представена за получаване на образователна и научна степен „Доктор",
професионално направление: Математика (Изчислителна математика)

Дисертацията съдържа 84 страници, разпределени в Увод, 5 глави, литература, авторска справка и два други раздела. Резултатите, представени в дисертацията, са публикувани в пет съвместни статии, като научният ръководител проф. Г. Николов е съавтор и в петте статии (общо тя има 11 статии). Това е естествено, тъй като тематиката на дисертацията е обект на дългогодишни изследвания, както от проф. Г. Николов, така и от неговия научен ръководител академик Б. Боянов. Трябва да се отбележи, че изследванията в областта на численото интегриране, като клон на Числения анализ, имат както класическо звучене, свързано с имената на Нютон, Гаус и други известни математици, така и сериозни приложения в практиката, свързани с възможностите на съвременните компютри. Българската математика също има съществен принос в тази област на Числения анализ, където резултатите на Обрешков и Чакалов са повлияли върху научните интереси на Б. Боянов (със съществен принос в тази област на математиката) и оттам на редица негови ученици.

Определено личи, че дисертантката е добре запозната с дългогодишната история на проблемите, свързани с алгоритмите за численo интегриране, които, както казах, имат в момента твърде практическо звучене и са в основата на редица направления в Теорията на апроксимациите и Числения анализ, предвид на директното им компютърно приложение. Ето защо считам, че темата на дисертацията е актуална и приемам, че дисертантът има равностойно участие в постигнатите резултати.

Две от статиите са публикувани в рецензирани научни списания, едната в Годишника на СУ, а другата, „Asymptotically optimal definite quadrature formulae of 4-th order", ще излезе в реномираното издание „Journal of Computational and Applied Mathematics", с импакт фактор (5-Year Impact Factor) - **1.294** (тази статия по-рано е публикувана електронно в *arHiv:1605.02510v1/math.NA/ 9 May 2016*). Така едно от основните изисквания в **Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени...във ФМИ на СУ „Св. Кл. Охридски"** (Глава 3, Член 4) е напълно удовлетворено.

Резултатите на една от публикациите на кандидатката са цитирани през 2016 г. в статия в „Journal of Computational and Applied Mathematics".

В Увода, съдържащ 14 страници, са въведени някои от основните понятия, използвани в дисертацията, направена е научна и историческа справка на част от резултатите в областта на квадратурните формули, както и кратко представяне по глави на получените от кандидатката резултати.

В глава 2 също са дефинирани известни, но основни понятия като сплайн функции, интегралното представяне в Соболевия клас W_p^r на линеен функционал, анулиращ полиномите от дадена степен. Важен инструмент тук е, че в случая, когато линейния функционал е грешката $R[Q;f] = \int_0^1 f(x)dx - Q(f)$, на дадена квадратура от вида $Q[f] = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$, то има явно представяне на ядрото на Пеано $K_r(Q;t)$,

$$K_r(Q;t) = \frac{(1-t)^r}{r!} - \frac{1}{(r-1)!}\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - t)_+^{r-1},$$

така че $R[Q;f] = \int_0^1 K_r(Q;t)\, f^{(r)}(t)dt,\ f \in W_p^r$. Въведено е и понятието Бернулиев моносплайн върху реалната ос (1-периодично продължение на Бернулиевия полином) и чрез сумационните формули на Ойлер-Маклорен са дадени в явен вид оценките за грешката на съставните квадратури на правоъгълниците и трапеците.

Новите резултати в дисертацията са представени в Глави 3-6, поради което ще се спра по-подробно върху тях.

В глава 3 е предложен числен алгоритъм за пресмятане на възлите и теглата на Гаусова квадратурна формула в пространството на кубичните сплайни с $2n$-2 равноотдалечени възли. При класическата Гаусова квадратура n-те възли и n-те коефициенти се избират така, че квадратурата е точна за алгебрични полиноми от степен $2n$-1. Задачата има единствено решение за всяко n. По аналогия кандидатката си е поставила задачата да намери възлите и коефициентите на сплайн квадратурата така, че тя да е точна за всеки кубичен сплайн (размерността на пространството от такива кубични сплайни е $2n$). Важно е да се каже, че подобно на полиномите и сплайн функциите притежават добри апроксимационни свойства (теоремата на Вайерщрас гласи, че всяка непрекъсната функция в краен интервал е граница на равномерно сходяща редица от полиноми, т.е. очаква се, че ако дадено твърдение е вярно за полиномите, то то е „приблизително” вярно и за непрекъснатите функции), като ролята на степента на полиномите се поема от броя на възлите на сплайна. Важността на тези изследвания следва от работата на Kohler и Nikolov от 1995 г., които доказват асимтотическата оптималност на Гаусовите сплайн квадратури в някои Соболеви класове W_p^r (асимтотически оптимални са в W_∞^r за всяко r, а за нечетни r в W_p^r за всяко $p \in [1,\infty]$). Използвайки ядрото на Пеано и доказвайки симетричност на възлите и коефициентите на квадратурата, кандидатката е намерила в явен вид нелинейна система от 3-ти ред за определянето им. Проведени са редица числени пресмятания (нелинейните системи са различни при четен и нечетен брой възли) с помощта на програмата WOLFRAM MATHEMATICA при брой на възлите на кубичния сплайн от 3 до 16. По този начин са получени в явен вид 14 нови квадратурни формули. Числено се наблюдава закономерност, че теглата (те са положителни) на квадратурата се увеличават към средата на интервала, а Гаусовите възли се разпределят сравнително равномерно. Интересно е за мене, защо така намерените Гаусови кубични сплайн квадратури не са сравнени числено с друг вид квадратури или приложени за интеграли, за които знаем точната стойност.

Глава 4 е посветена на намиране на асимтотически оптимални квадратурни формули в пространствата на Соболев W_p^3 и W_p^4. За построяването на такъв вид квадратури в W_p^3 кандидатката тръгва от сумационните формули на Ойлер-Маклорен, свързани със съставните квадратури на правоъгълниците $Q_n^M[f]$ и трапеците $Q_n^T[f]$, от вида

$$\int_0^1 f(x)dx = Q_n^M[f] + \frac{1}{24n^2}[f'(1) - f'(0)] + \frac{1}{n^3}\int_0^1 B_3\,(nx - 0.5)f^{(3)}(x)dx,$$

$$\int_0^1 f(x)dx = Q_n^{\mathrm{T}}[f] + \frac{1}{12n^2}[f'(1) - f'(0)] + \frac{1}{n^3}\int_0^1 B_3\,(nx)f^{(3)}(x)dx.$$

Ясно е, че ако производните в горните формули се заменят с формули за числено диференциране (с грешка, анулираща се върху полиномите от степен 2, за да може грешката да се изрази чрез третата производна), ще се получи квадратура, която използва само стойности на подинтегралната функция, т.е. получават са квадратури от вида

$$Q_n^M[f] + \tfrac{1}{24n^2}\textstyle\sum_{i=1}^{3} c_i[f(t_i) - f(1-t_i)],$$

$$Q_n^{\mathrm{T}}[f] + \frac{1}{12n^2}\sum_{i=1}^{3} c_i[f(t_i) - f(1-t_i)],$$

за които ядрото на Пеано може да се изчисли. В резултат за различни формули за числено диференциране са изследвани свойствата им на асимптотическа оптималност (АО). Доказано е, че горните квадратури са асимтотически оптимални при подходящ избор на апроксимиране на производните в по-горните формули на Ойлер-Маклорен (тук са дадени две от няколкото вида апроксимациите в левия край на интервала, където $x_{i,n}$ и $y_{i,n}$ са съответно възлите на съставните квадратурни формули на правоъгълниците и трапеците.):

- $n(-2f(y_{1,n}) + 3f(y_{2,n}) - f(y_{3,n}))$ е АО в W_∞^3 и W_2^3, но не в W_1^3;
- $\frac{n}{3}(-8f(x_{0,n}) + 9f(y_{1,n}) - f(y_{2,n}))$ е АО в W_∞^3 и W_2^3, но не в W_1^3.

Подобни резултати за асимтотическа оптималност в W_p^3 са получени и за съставните квадратури на трапеците $Q_n^T[f]$. Например, апроксимацията

$$f'(0) \approx \tfrac{n}{2}(-3f(x_{0,n}) + 4f(x_{1,n}) - f(x_{2,n})),$$

води до АО квадратура в W_∞^3 и W_2^3, но не в W_1^3. Кандидатката е намерила и АО квадратура в W_1^3. Тя е изведена чрез апроксимацията

$$f'(0) \approx \tfrac{3n}{2}(-3f(x_{0,n}) + 4f(x_{1,3n}) - f(x_{2,3n})).$$

Аналогични резултати за намиране на асимтотически оптимални квадратурни формули в пространствата на Соболев W_p^4 са предложени на базата на съставните квадратури на правоъгълниците $Q_n^M[f]$ и трапеците $Q_n^T[f]$ (отново се използват сумационните формули на Ойлер-Маклорен) – например:

$$\int_0^1 f(x)dx = Q_n^M[f] + \frac{1}{24n^2}[f'(1) - f'(0)] - \frac{7}{5760n^4}[f'''(1) - f'''(0)]$$
$$+ \frac{1}{n^4}\int_0^1 B_4\,(nx - 0.5)f^{(4)}(x)dx.$$

Разликата с разглежданията в пространството W_p^3 е, че в случая се налага да се апроксимират числено третите производни, по такъв начин, че грешката от численото диференциране да се изразява с четвъртата производна на подинтегралната функция. На практика, това се свежда до използване на четири точки за апроксимиране на третите производни, например апроксимацията,

$$f'''(0) \approx n^3\left(-f(x_{0,n}) + 3f(x_{1,n}) - 3f(x_{2,n}) + f(x_{3,n})\right),$$

води до намиране на асимтотически оптимална квадратура в W_∞^4 .

Трябва да се отбележи, че в Глава 4 са намерени в явен вид (дадени са техните коефициенти и възли) редица асимтотически оптимални квадратури в пространствата на Соболев W_p^3 и W_p^4, т.е. те са готови за използване на практика.

В Глава 5 на дисертацията са конструирани редица асимтотически оптимални положително и отрицателно дефинитни квадратурни формули от четвърти ред, т.е., квадратурата е точна за полиноми от трета степен. Такива квадратури са важни за практиката, тъй като дават възможност за оценка отгоре и отдолу на интеграла $\int_0^1 f(x)dx$, когато съответната производна на подинтегралната функция не си мени знака. Типичен пример на положително дефинитна квадратура от ред *2n* е класическата квадратура на Гаус с n възли,

$$\int_0^1 p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)} f(x_i) + R(f),\ p(x) > 0,$$

с остатъчен член $R(f) = \frac{f^{(2n)}(\tau)}{(2n)!}\int_0^1 p(x)(x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2 dx$, знакът на който зависи само от знака на $f^{(2n)}$, а коефициентите $c_i^{(n)}$ са положителни числа. Задачата за съществуване и единственост на оптималните положително и отрицателно дефинитни квадратури е атакувана от редица известни математици – Шмайзер, Йетер, Ланге и др. Резултатите на Ланге от 1977 г. представят явно остатъците в оптималните дефинитни квадратурни формули от четвърти ред и това дава възможност за проверка на асимтотическата оптималност на друга дефинитна квадратура от този ред. Отново за намиране на асимтотически оптимални дефинитни квадратурни формули от четвърти ред са използвани съставните квадратури на правоъгълниците $Q_n^M[f]$ и трапеците $Q_n^T[f]$ и сумационните формули на Ойлер-Маклорен. Чрез $Q_n^T[f]$ (съответно $Q_n^M[f]$) са построени 6 отрицателно и 5 положително дефинитни асимтотически оптимални квадратури от ред 4. Да отбележим, че оптималните дефинитни квадратури не са известни и затова намирането в явен вид (пресмятане на възлите и коефициентите) на асимтотически оптимални дефинитни квадратури е важно за приложенията. От друга страна една двойка от положителна и отрицателна дефинитни квадратури осигурява сигурна оценка на грешката при интегрирането.

В Глава 6 е разгледан въпросът за оценка на грешката при използване на дадена дефинитна (положителна или отрицателна) квадратурна формула от даден ред, при условие, че е налице и друга такава от същия тип и подинтегралната функция е изпъкнала (вдлъбната) от същия ред. Връзката между резултатите в Глава 5 и 6 е голяма, тъй като в Глава 5 са намерени над 10 асимтотически оптимални дефинитни квадратури и кандидатката е показала как по двойки тези отрицателно (положително) дефинитни асимтотически оптимални квадратурни формули от ред 4 могат да бъдат използвани за оценка на грешката на коя да е от тях. Показано е, че 10 двойки (съответно 8 двойки) отрицателно (съответно положително) дефинитни квадратури могат да се използват за тази цел. Проведени са редица числени експерименти при брой на възлите 16 и 32 за функциите

$$f(x) = e^x \text{ и } g(x) = -\frac{e^{-x}\log\frac{1+x}{2}}{\sqrt{1+x}}.$$

В термините на дисертацията функциите *f(x)* и *g(x)* са изпъкнали от четвърти ред, т.е.

$$f^{(4)}(x) \geq 0,\ g^{(4)}(x) \geq 0, \qquad x \in [0,1[.$$

Получените оценки на грешката от численото интегриране са в интервала $[10^{-10}, 10^{-7}]$, т.е. от практическа гледна точка, предложените в дисертацията квадратури осигуряват добър и по-важното: с оценка за грешката резултат. Разбира се, за оценка на грешката може да се използват и две дефинитни квадратури – с отрицателна и положителна дефинитност.

Авторефератът е от 19 страници и отразява точно съдържанието на дисертацията и научните приноси.

Резултатите от дисертацията са докладвани на математически форуми с участието на известни специалисти по числено интегриране, като тук трябва да се отбележи участието на Ана Авджиева в международната конференция “Constructive Theory of Functions”, Созопол, 2016.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ:

От казаното по-горе правя извода и определено считам, че в дисертацията са разгледани и доказани важни и технически трудни нови резултати в областта на числените методи по числено интегриране, които имат практическо приложение. Уверено предлагам на Научното жури да присъди на докторантката Ана Александрова Авджиева, образователната и научна степен „Доктор”, в професионално направление: Математика (Изчислителна математика)

09.10.2016

С уважение:

/доц. А.Андреев/