СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
"СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА ВЕРОЯТНОСТИ, ОПЕРАЦИОННИ ИЗСЛЕДВАНИЯ
И СТАТИСТИКА

Застрахователни модели на риск и вероятност за фалит

Красимира Янкова Костадинова

Автореферат на дисертация за придобиване на образователна и научна степен
Доктор

Професионално направление 4.5. Математика
(Математическо моделиране и приложение на математиката в икономиката)

Научен ръководител:
проф. дмн Леда Минкова

София, 2016 г.

Съдържание

1 Обща характеристика на дисертационния труд **1**
Актуалност на темата 1
Цели и задачи на дисертационния труд 3
Апробация на резултатите 3
Структура на дисертационния труд 5

2 Съдържание на дисертационния труд **5**
Глава 1. Въведение 6
Глава 2. Сложен Поасонов процес 7
Глава 3. Приложения в теорията на риска 14
Глава 4. Двумерен Поасонов отрицателно биномен процес на риск 20
Глава 5. Обобщени модели на риск на Пойа-Аепли . 25
Глава 6. Двумерни обобщени разпределения, развиващи се в степенен ред с инфлационен параметър 32

Основни приноси в дисертацията **38**

Литература **41**

Декларация за оригиналност **46**

1 Обща характеристика на дисертационния труд

Актуалност на темата

Моделите на риск са много актуална тема и са изучавани от много автори като например Grandell (1997), [11], Rolski et al. (1999), [40], Klugman et al. (2004), [16] и др.. Намират приложение в теорията на риска, в застраховането и финансите и др. (виж например Mikosch (2004), [24] и Mikosch (2009), [25]).

Класическият модел на риск $X(t)$ има вида

$$X(t) = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad t \geq 0 \quad (\sum_{1}^{0} = 0), \tag{1}$$

където $\{N(t),\ t \geq 0\}$ е хомогенен Поасонов процес.

Известно е, че при Поасоновия процес средното и дисперсията са равни. При застрахователни и финансови данни дисперсията е винаги по-голяма от средното. Това прави моделирането с Поасонов процес нереалистично и води до различни обобщения на Поасоновия процес, а оттам и на класическия модел на риск. Мярката за разсейване в този случай е индексът на Фишер (FI), въведен от Fisher през 1934г., [8]. Индексът на Фишер изразява отношението на дисперсията на процеса към средната му стойност, виж още Xekalaki (2006), [43], Minkova and Balakrishnan (2013), [31]. За Поасоновия процес $FI(N(t)) = 1$ и казваме, че той е equi-dispersed. Ако $FI(N(t)) > 1$, случайният процес се нарича over-dispersed, а ако $FI(N(t)) < 1$ - under-dispersed. Ако $FI(N(t)) \leq 1$, това прави моделирането с този процес нереалистично, тъй като финансовите данни са с по-голямо разсейване. Затова от статистическа гледна точка е необходимо $FI(N(t)) > 1$. В статията на Minkova and Balakrishanan (2014b), [33] се доказва, че двумерното Поасоново разпределение се нарича over-dispersed (equi-dispersed, under-dispersed), ако двумерният индекс на Фишер $FI_2(N_1, N_2) > 2$ $(FI_2(N_1, N_2) = 2,\ FI_2(N_1, N_2) < 2)$.

В литературата са дадени много различни обобщения на Поасоновия процес. Едно такова обобщение е сложният Поасонов процес, използван като броящ процес в модела на риск. Друго обобщение на Поасоновия процес е разглеждането му като сложен процес на раждане. В Minkova (2001), [26] са дадени някои модификации на процесите на раждане.

Обикновенно моделите на риск се разглеждат в термините на застраховането, но биха могли да се прилагат и в много други случаи. При класическите модели на риск се предполага, че плащанията, извършвани от дадена компания са независими помежду си. Плащанията се осъществяват в моменти от време, описвани от Поасонов процес, който притежава свойството отсъствие на памет. Моделирането на различни по характер рискови ситуации в практиката налага дефинирането на по-общи процеси на риск.

В дисертацията са включени модели на риск с някои обобщения на броящия процес. Това дава възможност за представяне на модела като сложен процес или като сложен процес на раждане. Изучава се вероятността за фалит, която е приета като мярка за риск и се ползва от банки, застрахователни компании, финансови институции и др.. За тези процеси се извежда съвместното разпределение на времето до фалит, при условие, че фалит настъпи и дефицит в момента на фалит. Изучава се влиянието на различни параметри върху характеристиките на модела. В дисертацията са включени и двумерни модели на риск, модел на риск с два вида бизнес и модел на риск със стохастични приходи. При всеки модел се търси подходяща апроксимация, която води до практическо приложение на резултатите. Включени са и двумерни обобщени разпределения, развиващи се в степенен ред с инфлационен параметър.

Цели и задачи на дисертационния труд

Целите на настоящия дисертационен труд са:

1. Да се дефинират модели на риск с някои обобщения на броящия процес.

2. Да се дефинират по-общи модели на риск, да се анализират и да се оцени вероятността за фалит.

Конкретните задачи за реализирането на поставените цели са:

1. Да се разгледа стандартния модел на риск с някои обобщения на броящия процес.

2. Да се изучи вероятността за фалит, която е приета като мярка за риск.

3. Да се анализират двумерните модели на риск.

4. Да се изучат различни методи за обобщаване на модела на риск в непрекъснато време.

Апробация на резултатите

Резултатите, включени в дисертационния труд, са докладвани на 2 семинара, 1 национална конференция и 9 конференции с международно участие:

1. XV-th International Summer Conference on Probability and Statistics (ISCPS-2012), Pomorie, Bulgaria, 23–30 June 2012.

2. Научна конференция с международно участие "MATTEX 2012" - 22 - 24 ноември, Шумен, България.

3. International Conference on Mathematical Methods and Models in Biosciences, Sofia, Bulgaria, 16–21 June 2013.

4. Семинар за докторантите-бенефициенти по договор № BG051PO001-3.3.06-0052, София, България, 2 юли 2013.

5. Doctoral Conference in Mathematics, Informatics and Education [MIE 2013], Sofia, Bulgaria, September 19–21, 2013.

6. XVI-th International Summer Conference on Probability and Statistics (ISCPS-2014), Pomorie, Bulgaria, 21–28 June 2014.

7. International Conference on Mathematical Methods and Models in Biosciences and Young Scientist School, Sofia, Bulgaria, 22–27 June 2014.

8. Doctoral Conference in Mathematics, Informatics and Education [MIE 2014], Sofia, Bulgaria, September 23–25, 2014.

9. V Congress of Mathematicians of Macedonia, September 24–27, 2014, Ohrid, Republic of Macedonia.

10. International Conference on Mathematical Methods and Models in Biosciences and Young Scientist School, Blagoevgrad, Bulgaria, 14–19 June 2015.

11. Докторантска конференция по математика и информатика, 15–18 октомври 2015, София, България.

12. Национален семинар по Стохастика, 2 март 2016, София, България.

Публикациите по дисертацията са 6 на брой, които са описани в Литературата под номера [18], [19], [20], [21], [22] и [23].

Структура на дисертационния труд

Дисертационният труд се състои от 107 страници и съдържа:

1. Шест глави:

   Глава 1. Въведение

   Глава 2. Сложен Поасонов процес

   Глава 3. Приложения в теорията на риска

   Глава 4. Двумерен Поасонов отрицателно биномен процес на риск

   Глава 5. Обобщени модели на риск на Пойа-Аепли

   Глава 6. Двумерни обобщени разпределения, развиващи се в степенен ред с инфлационен параметър

2. Основни приноси в дисертацията

3. Библиография

4. Списък с публикации и доклади

5. Декларация за оригиналност

2 Съдържание на дисертационния труд

Дисертационният труд се състои от 6 глави.

Глава 1. Въведение

Глава 1 се състои от 2 параграфа и има встъпителен характер.

Включени са основни понятия от теорията на риска като модел на Крамер-Лундберг, процес на резерв на застрахователната компания, вероятност за фалит и не-фалит на застрахователната компания, хомогенен Поасонов процес и сложен Поасонов процес.

Процесът на риск $X(t)$, който има вида (1), се нарича класически модел на риск или модел на Крамер-Лундберг. Основните резултати от анализа на класическия модел на риск се съдържат например в Grandell (1991), [10]. При класическия модел на риск c е положителна реална константа, която изразява интензивността на премията за единица време, а $\{N(t),\ t \geq 0\}$ е хомогенен Поасонов процес. За дадена застрахователна компания, процесът $\{N(t),\ t \geq 0\}$ се интерпретира като броя на исковете, предявени към компанията в интервал от време $[0, t]$. Случайните величини $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ са неотрицателни, независими и еднакво разпределени, независими от броящия процес $\{N(t),\ t \geq 0\}$. Случайната сума $\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ представя натрупаните искове към застрахователната компания до момента t. Исковете $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ са разпределени като случайната величина Z с функция на разпределение $F,\ F(0) = 0$ и средна стойност μ.

При зададен начален капитал на застрахователната компания u, състоянието ѝ в момента t се описва с процеса

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad t \geq 0.$$

Процесът $U(t)$ се нарича процес на резерв, виж Kaas et al. (2001), [15]. Една общоприета мярка за риска на една застрахователна компания е вероятността за фалит. Нека $\tau =$

$\inf\{t : X(t) < -u\}$, с условието $\inf \emptyset = \infty$, да бъде времето до фалит на една застрахователна компания, имаща начален капитал $u \geq 0$. Означаваме чрез $\Psi(u) = P(\tau < \infty)$ - вероятността за фалит, а чрез $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ - вероятността, че компанията няма да фалира или вероятността за не-фалит.

При класическия модел на риск, броящият Поасонов процес има равни средно и дисперсия. Тъй като финансовите данни са с по-голямо разсейване, това води до нереалистично моделиране на данните.

В тази работа се разглежда модел на риск, при който броящият процес $N(t)$ е сложен Поасонов процес. Това води до модели, които са по-подходящи за описание на реални процеси.

В параграф 1.1 е направен литературен обзор.

Получените в дисертацията резултати са описани накратко в параграф 1.2.

Глава 2. Сложен Поасонов процес

Тази глава съдържа два параграфа.

В параграф 2.1 се анализира Поасонов процес от ред k. В параграф 2.1.1 се разглеждат някои свойства на Поасоновия процес от ред k, дефиниран от Philippou (1983), [37] и Charalambides (1986), [5] като сложен Поасонов процес. Извеждат се рекурентните формули (Твърдение **2.1** и Твърдение **2.2**) и вероятностната функция на процеса (Теорема **2.1**). В параграф 2.1.2 се дефинира Поасонов процес от ред k като сложен процес на раждане.

Разглеждаме сложния Поасонов процес $N(t),\ t > 0$, дефиниран върху фиксирано вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и зададен чрез

$$N(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N_1(t)}. \tag{2}$$

Нека в сложния Поасонов процес (2), усложняващата случайна величина X да бъде дискретна равномерно разпределена върху $k > 1$ точки, а броящият процес $N_1(t)$ е Поасонов процес с интензивност $k\lambda > 0$, $(N_1(t) \sim Po(k\lambda t))$.

Вероятностната и пораждащата функция на X и $N_1(t)$ съответно са определени чрез формулите

$$p_i = P(X = i) = \frac{1}{k}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{3}$$

$$\psi_X(s) = \frac{s}{k}\frac{1 - s^k}{1 - s}, \quad s \in (0, 1), \tag{4}$$

$$P(N_1(t) = i) = \frac{(k\lambda t)^i e^{-k\lambda t}}{i!}, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

и

$$\psi_{N_1(t)}(s) = e^{-k\lambda t(1-s)}. \tag{6}$$

За пораждащата функция на процеса $N(t)$, определен чрез (2), се получава

$$\psi_{N(t)}(s) = e^{-k\lambda t(1-\psi_X(s))}, \tag{7}$$

където $\psi_X(s)$ е пораждащата функция на усложняващата случайна величина X, зададена чрез (4).

Определение 2.1. *Случайният процес, дефиниран чрез пораждащата функция (7) и усложняващо разпределение, дефинирано чрез (4) се нарича Поасонов процес от ред k с параметър λ, $(N(t) \sim Po_k(\lambda t))$.*

Забележка 2.2. *Средното и дисперсията на Поасоновия процес от ред k се задават чрез*

$$E(N(t)) = \frac{1 + k}{2}k\lambda t \quad и \quad Var(N(t)) = \frac{(k + 1)(2k + 1)}{6}k\lambda t.$$

За индекса на Фишер се получава

$$FI(N(t)) = \frac{Var(N(t))}{E(N(t))} = 1 + \frac{2}{3}(k-1) > 1,$$

т.е. Поасоновият процес от ред k е over-dispersed в сравнение с Поасоновия процес. Това прави Поасоновия процес от ред k подходящ за финансови изчисления.

Твърдения **2.1** и **2.2** дават обобщение на рекурентните формули на Панжер (виж Panjer (1981), [35]).

Твърдение 2.1. *Вероятностната функция на Поасоновия процес от ред k удовлетворява следните рекурентни формули*

$$p_i = \begin{cases} \lambda t p_0, & i = 1 \\ \left(2 + \frac{\lambda t - 2}{i}\right) p_{i-1} - \left(1 - \frac{2}{i}\right) p_{i-2}, & \\ & i = 2, 3, \ldots, k \\ \left(2 + \frac{\lambda t - 2}{i}\right) p_{i-1} - \left(1 - \frac{2}{i}\right) p_{i-2} - \frac{k+1}{i}\lambda t p_{i-k-1} + \frac{k}{i}\lambda t p_{i-k-2}, & \\ & i = k+1, k+2, \ldots \end{cases}$$

Твърдение 2.2. *Вероятностната функция на Поасоновия процес от ред k удовлетворява рекурентните формули*

$$p_i = \begin{cases} \lambda t \sum_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{i}\right) p_j, & i = 1, 2, \ldots, k \\ \lambda t \sum_{j=i-k}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{i}\right) p_j, & i = k+1, k+2, \ldots \end{cases} \tag{8}$$

Теорема 2.1. *Вероятностната функция на $Po_k(\lambda t)$ процес се задава чрез*

$$p_0 = e^{-k\lambda t},$$

$$p_i = e^{-k\lambda t} \sum_{j=1}^{i} \binom{i-1}{j-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$p_i = e^{-k\lambda t} [\sum_{j=1}^{i} \binom{i-1}{j-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

$$- \sum_{n=1}^{l} (-1)^{n-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \sum_{j=0}^{i-n(k+1)} \binom{i-n(k+1)+n-1}{j+n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}] ,$$

$$i = l(k+1) + m,\ m = 0, 1, \ldots, k,\ l = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Нека $\{N(t), t \geq 0\}$ да бъде броят на появяването на дадено събитие в интервала $(0, t]$.

Преходните вероятности на броящия процес $N(t) \sim Po_k(\lambda t)$, за всяко $m = 0, 1, \ldots,$ се определят чрез следните постулати

$$P(N(t+h) = n \mid N(t) = m) = \begin{cases} 1 - k\lambda h + o(h), & n = m, \\ \\ \lambda h + o(h), & n = m + i, \\ & i = 1, \ldots, k, \end{cases} \tag{9}$$

където $o(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Разглеждайки застрахователна компания, постулатите на Поасоновия процес от ред k могат да се интерпретират по следния начин: вероятността да има $1, 2, \ldots, k$ иска в интервал с дължина h е $\lambda h + o(h)$, а вероятността да няма нито един иск в интервал с дължина h е $1 - k\lambda h + o(h)$. От постулатите също следва, че за повече от k иска, вероятността е $o(h)$, т.е. за $i = k+1, k+2, \dots, P(N(t+h) = m+i \mid N(t) = m) = o(h)$.

Нека $P_m(t) = P(N(t) = m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Горните постулати (9) водят до следните уравнения на Колмогоров

$$
\begin{aligned}
&P_0'(t) = -k\lambda P_0(t),\\
&P_m'(t) = -k\lambda P_m(t) + \lambda \sum_{j=1}^{m\wedge k} P_{m-j}(t),\ m = 1, 2, \dots
\end{aligned}
\tag{10}
$$

с начални условия

$$
P_0(0) = 1 \quad \text{и} \quad P_m(0) = 0, \quad m = 1, 2, \dots . \tag{11}
$$

Началните условия могат да се интерпретират по следния начин: стартирайки от начало, вероятността да няма иск към застрахователната компания е единица, а вероятността да има $1, 2, \dots$ иска е нула.

Определение 2.2. *Случайният процес, дефиниран чрез (10) и (11) се нарича Поасонов процес от ред k.*

В параграф 2.2 се дефинира Поасонов отрицателно биномен процес. В параграф 2.2.1 се дефинира Поасонов отрицателно биномен процес като сложен Поасонов процес. Извеждат се рекурентните формули (Твърдение **2.3**) и вероятностната функция на процеса (Теорема **2.2**). В параграф 2.2.2 се дефинира Поасонов отрицателно биномен процес като сложен процес на раждане.

Разглеждаме сложния Поасонов процес (2), където усложняващата случайна величина X има отрицателно биномно разпределение с параметри r и γ, ($X \sim NB(r, \gamma)$).

Вероятностната и пораждащата функция на X са определени чрез

$$
q_i = P(X = i) = \binom{r+i-1}{i} \gamma^r (1-\gamma)^i, \quad i = 0, 1, \dots \tag{12}
$$

и

$$\psi_1(s) = \psi_X(s) = \left(\frac{\gamma}{1-(1-\gamma)s}\right)^r. \tag{13}$$

Нека броящият процес $N_1(t)$ да бъде Поасонов процес с интензивност $\lambda > 0$, $(N_1(t) \sim Po(\lambda t))$ с вероятностна функция

$$P(N_1(t) = i) = \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots \tag{14}$$

и пораждаща функция

$$\psi_{N_1(t)}(s) = E(s^{N_1(t)}) = e^{-\lambda t(1-s)}. \tag{15}$$

За пораждащата функция на процеса $N(t)$, определен чрез (2), се получава

$$\psi(s) = \psi_{N(t)}(s) = e^{-\lambda t(1-\psi_1(s))}, \tag{16}$$

където $\psi_1(s)$ е пораждащата функция на усложняващата случайна величина X, зададена чрез (13).

Определение 2.3. *Случайният процес, дефиниран чрез пораждащата функция (16) и усложняващо разпределение, дефинирано чрез (12) и (13) се нарича Поасонов отрицателно биномен процес с означението $N(t) \sim PoNB(\lambda t, r, \gamma)$.*

Забележка 2.6. *В случая $r = 1$, разпределението на X в (12) се редуцира до геометричното разпределение и $PoNB(\lambda t, 1, \gamma)$ разпределение съвпада с разпределението на Пойа-Аепли (виж Johnson et al. (2005), [13] и Minkova (2002), [27]). Съответният процес на Пойа-Аепли беше въведен от Minkova (2004), [28] и характеризиран от Chukova and Minkova (2013), [6].*

Теорема 2.2. *Вероятностната функция на $PoNB(\lambda t, r, \gamma)$ процес се задава чрез*

$$
\begin{aligned}
P_0(t) &= e^{-\lambda t(1-\gamma^r)}, \\
P_i(t) &= (1-\gamma)^i \sum_{m=1}^{\infty} \binom{rm+i-1}{i} \frac{(\lambda t \gamma^r)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \quad i = 0, 1, \dots .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Твърдение 2.3. *Вероятностната функция на Поасонов отрицателно биномен процес удовлетворява следните рекурентни формули*

$$
iP_i(t) = (1-\gamma)[(i-1+\lambda t r q_0)P_{i-1}(t) + \lambda t r \sum_{j=1}^{i-1} q_j P_{i-j-1}(t)], \tag{18}
$$

за $i = 2, 3, \dots$. q_j, $j = 0, 1, \dots$, са вероятностите на усложняващата $NB(r, \gamma)$ случайна величина, дадена в (12), а $P_1(t) = \lambda t r (1-\gamma) q_0 P_0(t)$ с $P_0(t) = e^{-\lambda t(1-\gamma^r)}$.

Забележка 2.7. *Средното и дисперсията на Поасоновия отрицателно биномен процес се задават чрез*

$$
E(N(t)) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \lambda t r \quad \text{и} \quad Var(N(t)) = \frac{(1-\gamma)(1+r-\gamma r)}{\gamma^2} \lambda t r.
$$

За индекса на Фишер се получава

$$
FI(N(t)) = \frac{Var(N(t))}{E(N(t))} = 1 + \frac{(1-\gamma)(r+1)}{\gamma} > 1,
$$

т.е. Поасоновият отрицателно биномен процес е over-dispersed в сравнение с Поасоновия процес. Това прави Поасоновия отрицателно биномен процес подходящ за финансови изчисления.

Преходните вероятности на броящия процес $N(t) \sim PoNB(\lambda t, r, \gamma)$, се определят чрез следните постулати

$$P(N(t+h) = n \mid N(t) = m) = \begin{cases} 1 - \lambda(1-\gamma^r)h + o(h), n = m, \\ \\ \lambda q_i h + o(h), n = m + i, \ i \geq 1, \end{cases} \tag{19}$$

където $o(h) \to 0$ при $h \to 0$. q_i е вероятностното разпределение на усложняващата случайна величина $X \sim NB(r, \gamma)$.

Нека $P_m(t) = P(N(t) = m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Горните постулати (19) водят до следните уравнения на Колмогоров

$$P_0'(t) = -\lambda(1-\gamma^r)P_0(t),$$

$$P_m'(t) = -\lambda(1-\gamma^r)P_m(t) + \lambda \sum_{i=1}^{m} q_i P_{m-i}(t), \ m = 1, 2, \dots \tag{20}$$

с начални условия

$$P_0(0) = 1 \quad \text{и} \quad P_m(0) = 0, \quad m = 1, 2, \dots \ . \tag{21}$$

Определение 2.4. *Случайният процес $N(t)$, дефиниран чрез диференциални уравнения (20) и начални условия (21) се нарича Поасонов отрицателно биномен процес.*

Резултатите от тази глава са публикувани в Kostadinova and Minkova (2013), [20] и в Kostadinova (2013), [18].

Глава 3. Приложения в теорията на риска

Тази глава съдържа два параграфа. В нея се анализират два модела на риск. В края на всеки параграф от тази глава 3 се представя пример с експоненциално разпределени искове към дадена застрахователна компания.

В параграф 3.1 се анализира Поасонов модел на риск от ред k. За този модел на риск се извежда функцията $G(u, y)$, изразяваща вероятността да настъпи фалит при начален капитал u и дефицит в момента на фалит най-много y. Като граничен случай се получава вероятността за фалит, както и вероятността за фалит при нулев начален капитал на една застрахователна компания (Теорема **3.3**).

Разглеждаме модела на риск (1), където броящият процес $\{N(t),\ t \geq 0\}$ е Поасонов процес от ред k. Този модел на риск се нарича Поасонов модел на риск от ред k.

Интерпретацията на броящия процес е следната: ако застрахователните полици (исковете X_i) са разделени в независими групи, то броят на групите има Поасоново разпределение. Предполагаме, че групите са хомогенни, еднакво разпределени и че броят на полиците във всяка една от групите има усложняващо разпределение - при този модел равномерно разпределение върху k точки.

Коефициентът на натрупване θ, изразяващ отношението на средно приходите върху разходите, за Поасонов модел на риск от ред k, се задава чрез

$$\theta = \frac{EX(t)}{E\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i} = \frac{2c}{k(k+1)\lambda\mu} - 1.$$

Приемаме, че този коефициент на натрупване е положителен. Когато $\theta < 0$, $\Psi(u) = 1$. В случай на положителен коефициент на натрупване $\theta > 0$, интензивността на премията за единица време c трябва да удовлетворява следното неравенство

$$c > \frac{k(k+1)}{2}\lambda\mu,$$

т.е. средно приходите да са по-големи от разходите - условие за нетната печалба.

Основното в приложението на този модел е да се анализира функцията $G(u, y)$, която е въведена от Gerber et al.

(1987), [9] и дефинирана от Klugman et al. (2004), [16]. Тази функция изразява вероятността да настъпи фалит при начален капитал u и дефицит в момента на фалит $D = |u + X(\tau)|$ най-много y, т.е.

$$G(u, y) = P(\tau < \infty, D \le y), \quad y \ge 0. \tag{22}$$

За $y \to \infty$, тази функция $G(u, y)$ клони към вероятността за фалит, т.е.

$$\lim_{y \longrightarrow \infty} G(u, y) = \Psi(u). \tag{23}$$

Използвайки постулатите на Поасонов процес от ред k получаваме следното диференциално уравнение за $G(u, y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(u,y)}{\partial u} &= \frac{k\lambda}{c} G(u, y) \\ &- \frac{k}{c}\left[\int_0^u G(u-x, y) dH(x) + [H(u+y) - H(u)]\right], \end{aligned} \tag{24}$$

където

$$H(x) = \frac{\lambda}{k} \sum_{i=1}^{k} F^{*i}(x) \tag{25}$$

е вероятностната функция на разпределение на натрупаните искове, а $F^{\star i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ е функцията на разпределение на $Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_i$. От (25) следва, че $H(x)$ е несобствена функция на разпределение на исковете с $H(0) = 0$ и $H(\infty) = \lambda$.

Нормираме функцията $H(x)$ чрез $H_1(x) = \frac{H(x)}{\lambda}$, която е собствена функция на разпределение. В термините на $H_1(x)$, уравнение (24) приема следния вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(u,y)}{\partial u} &= \frac{k\lambda}{c} \left[G(u, y)\right. \\ &\left.- \int_0^u G(u-x, y) dH_1(x) - [H_1(u+y) - H_1(u)]\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Теорема 3.1. *Функцията $G(0,y)$ се задава чрез*

$$G(0,y) = \frac{k\lambda}{c}\int_0^y [1 - H_1(u)]du. \qquad (27)$$

Теорема 3.2. *За $u \geq 0$, вероятността за фалит $\Psi(u)$ удовлетворява уравнението*

$$\frac{\partial \Psi(u)}{\partial u} = \frac{k\lambda}{c}\left[\Psi(u) - \int_0^u \Psi(u-x)dH_1(x) - [1 - H_1(u)]\right]. \qquad (28)$$

Теорема 3.3. *Вероятността за фалит при нулев начален капитал удовлетворява*

$$\Psi(0) = \frac{k(k+1)\lambda\mu}{2c}. \qquad (29)$$

Нека исковете към дадена застрахователна компания са експоненциално разпределени с функция на разпределение $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$, $x \geq 0$, $\mu > 0$. В този случай, за началното условие $G(0,y)$ се получава

$$G(0,y) = \frac{\lambda}{c}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\Gamma(i)}\left[\mu\gamma\left(\frac{y}{\mu}, i+1\right) + y\Gamma\left(\frac{y}{\mu}, i\right)\right],$$

където $\Gamma(i)$ е Гамма функцията, а с $\gamma(x,\alpha) = \int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ и $\Gamma(x,\alpha) = \int_x^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ са означени непълните Гамма функции.

В параграф 3.2 се анализира Поасонов отрицателно биномен модел на риск. За този модел на риск се извежда функцията $G(u,y)$, изразяваща вероятността да настъпи фалит при начален капитал u и дефицит в момента на фалит най-много y. Като граничен случай се получава вероятността за фалит, както и вероятността за фалит при нулев начален капитал на една застрахователна компания (Теорема **3.6**).

Разглеждаме модела на риск (1), където броящият процес $\{N(t),\ t \geq 0\}$ е Поасонов отрицателно биномен процес. Този модел на риск се нарича Поасонов отрицателно биномен модел на риск.

Коефициентът на натрупване θ, за Поасонов отрицателно биномен модел на риск, се дефинира чрез

$$\theta = \frac{EX(t)}{E\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i} = \frac{c\gamma}{\lambda\mu r(1-\gamma)} - 1.$$

Приемаме, че този коефициент на натрупване е положителен. В случай на положителен коефициент на натрупване $\theta > 0$, натрупаната премия за единица време c трябва да удовлетворява следното неравенство

$$c > \frac{\lambda\mu r(1-\gamma)}{\gamma}.$$

Като се използват постулатите за Поасонов отрицателно биномен процес (19) се получава, че

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial G(u,y)}{\partial u} = \tfrac{\lambda(1-\gamma^r)}{c} G(u,y) \\ &-\tfrac{\lambda}{c}\left[\int_0^u G(u-x,y)dH(x) + [H(u+y) - H(u)]\right], \end{aligned} \tag{30}$$

където

$$H(x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i F^{*i}(x)$$

е несобствена функция на разпределение на исковете с $H(0) = 0$ и $H(\infty) = 1 - \gamma^r$. $F^{\star i}(x),\ i = 1, 2, \ldots,$ е функцията на разпределение на $Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_i$, а вероятностите $q_i,\ i = 0, 1, \ldots,$ са зададени в (12).

В термините на нормираната функция на разпределение $H_1(x) = \dfrac{H(x)}{1-\gamma^r}$, уравнение (30) приема вида

$$\frac{\partial G(u,y)}{\partial u} = \frac{\lambda(1-\gamma^r)}{c} \Big[G(u,y) - \int_0^u G(u-x,y)dH_1(x) - [H_1(u+y) - H_1(u)] \Big]. \tag{31}$$

Теорема 3.4. *Функцията $G(0,y)$ за Поасонов отрицателно биномен модел на риск се задава чрез*

$$G(0,y) = \frac{\lambda(1-\gamma^r)}{c} \int_0^y [1 - H_1(u)]du. \tag{32}$$

Теорема 3.5. *За $u \geq 0$, вероятността за фалит $\Psi(u)$ и вероятността за не-фалит $\Phi(u)$ удовлетворяват уравненията*

$$\frac{\partial \Psi(u)}{\partial u} = \frac{\lambda(1-\gamma^r)}{c} \left[\Psi(u) - \int_0^u \Psi(u-x)dH_1(x) - [1 - H_1(u)] \right] \tag{33}$$

и

$$\frac{\partial \Phi(u)}{\partial u} = \frac{\lambda(1-\gamma^r)}{c} \left[\Phi(u) - \int_0^u \Phi(u-x)dH_1(x) \right]. \tag{34}$$

Теорема 3.6. *Вероятността за фалит при нулев начален капитал удовлетворява*

$$\Psi(0) = \frac{r(1-\gamma)}{c\gamma}\lambda\mu. \tag{35}$$

Нека исковете към дадена застрахователна компания са експоненциално разпределени с функция на разпределение $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}, \ x \geq 0, \ \mu > 0$. В този случай, за началното условие $G(0,y)$ се получава

$$G(0,y) = \frac{\lambda\mu\gamma^r}{c} \sum_{i=1}^{\infty} \binom{r+i-1}{i} (1-\gamma)^i \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\gamma(\frac{y}{\mu}, j+1)}{\Gamma(j+1)}.$$

Резултатите от тази глава са публикувани в Kostadinova and Minkova (2013), [20] и в Kostadinova (2013), [18].

Глава 4. Двумерен Поасонов отрицателно биномен процес на риск

Тази глава съдържа два параграфа.

В параграф 4.1 се дефинира двумерен Поасонов отрицателно биномен процес като сложен Поасонов процес с двумерно отрицателно биномно усложняващо разпределение. Намират се моментите и съвместната вероятностна функция на този двумерен броящ процес (Теорема **4.1**).

Разглеждаме сложния Поасонов процес (2), където броящият процес $N_1(t) \sim Po(\lambda t)$. Вероятностната и пораждащата функция на $N_1(t)$ се задават чрез (14) и (15). $X_i,\ i = 1, 2, \ldots$ са независими и еднакво разпределени като X случайни величини, независими от $N_1(t)$.

Предполагаме, че усложняващата случайна величина X има двумерно отрицателно биномно разпределение. Вероятностната и пораждащата функция на X (виж Kocherlakota and Kocherlakota (1992), [17]) са определени чрез

$$P(X = k, Y = l) = \binom{k+l}{l}\binom{r+k+l-1}{k+l}\alpha^k\beta^l\gamma^r \tag{36}$$

и

$$\psi_1(s_1, s_2) = \left(\frac{\gamma}{1 - \alpha s_1 - \beta s_2}\right)^r, \tag{37}$$

където $k, l = 0, 1, \ldots,\ (k, l) \neq (0, 0), \gamma = 1 - \alpha - \beta, P(X = 0, Y = 0) = \gamma^r$, а $r \geq 1$ е дадено цяло число. Използваме означението $(X, Y) \sim BNB(r, \alpha, \beta)$.

Определение 4.1. *Сложният Поасонов процес, дефиниран чрез пораждаща функция*

$$\psi(s_1, s_2) = e^{-\lambda t(1-\psi_1(s_1,s_2))}, \tag{38}$$

където $\psi_1(s_1, s_2)$ е пораждащата функция на усложняващото разпределение, дадена в (37), се нарича двумерен бро-

ящ процес $(N_1(t), N_2(t))$. *Казваме, че броящият процес, дефиниран в (38), има двумерно Поасоново отрицателно биномно разпределение с параметри* $\lambda t, \alpha$ *и* β, *с означението* $(N_1(t), N_2(t)) \sim BPNB(\lambda t, \alpha, \beta)$.

Средните се задават чрез

$$E(N_1(t)) = \frac{r\alpha\lambda t}{\gamma} \quad \text{и} \quad E(N_2(t)) = \frac{r\beta\lambda t}{\gamma},$$

докато дисперсиите се определят чрез

$$Var(N_1(t)) = \frac{\alpha r}{\gamma^2}[1+r\alpha-\beta]\lambda t \;\; \text{и} \;\; Var(N_2(t)) = \frac{\beta r}{\gamma^2}[1-\alpha+r\beta]\lambda t.$$

За корелационния коефициент се получава

$$Corr(N_1(t), N_2(t)) = (r+1)\sqrt{\frac{\alpha\beta}{(1+r\alpha-\beta)(1+r\beta-\alpha)}}.$$

Теорема 4.1. *Вероятностната функция на* $(N_1(t), N_2(t))$ *се задава чрез*

$$f(i,j) = \binom{i+j}{j}\alpha^i\beta^j \sum_{m=1}^{\infty} \binom{rm+i+j-1}{i+j} \frac{(\lambda t\gamma^r)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$
$$i,j = 0,1,\dots,\; (i,j) \neq (0,0), \tag{39}$$

където $f(0,0) = e^{-\lambda t(1-\gamma^r)}$.

В параграф 4.2 се разглежда двумерен модел на риск, при който броящият процес е дефинираният двумерен Поасонов отрицателно биномен процес. За новия модел на риск се разглеждат два типа вероятности за фалит и се получават съответните Лапласови трансформации. В края на глава 4 се представя пример с експоненциално разпределени искове към дадена застрахователна компания.

Разглеждаме следния двумерен процес

$$U_1(t) = u_1 + c_1 t - \sum_{j=1}^{N_1(t)} Z_j^1, \qquad U_2(t) = u_2 + c_2 t - \sum_{j=1}^{N_2(t)} Z_j^2$$

за два вида бизнес. Тук u_1 и u_2 са началните капитали. c_1 и c_2 изразяват натрупаните премии за единица време. $Z^1, Z_1^1, Z_2^1, \ldots$ и $Z^2, Z_1^2, Z_2^2, \ldots$ са две независими редици от независими случайни величини, независими от броящите процеси $N_1(t)$ и $N_2(t)$, представящи съответните размери на исковете. Едномерният случай на този модел е анализиран от Kostadinova (2013), [18]. Нека $\mu_1 = E(Z^1)$ и $\mu_2 = E(Z^2)$ да бъдат средните на исковете. Означаваме чрез $S_1(t) = \sum_{j=1}^{N_1(t)} Z_j^1$ и $S_2(t) = \sum_{j=1}^{N_2(t)} Z_j^2$ съответните натрупани искове от първи и втори тип към застрахователната компания до момента t. Chan et al. (2003), [4] анализират случая, когато $N_1(t) = N_2(t) = N(t)$.

Разглеждаме две възможни времена до фалит

$$\tau_{max} = \inf\{t | \max(U_1(t), U_2(t)) < 0\}$$

и

$$\tau_{sum} = \inf\{t | U_1(t) + U_2(t) < 0\},$$

и съответните вероятности за фалит

$$\Psi_{\max}(u_1, u_2) = P(\tau_{max} < \infty) \quad \text{и} \quad \Psi_{sum}(u_1, u_2) = P(\tau_{sum} < \infty).$$

В статията на Omey and Minkova (2013), [34] са дадени следните резултати (Лема **4.1** и Лема **4.2**) за Лапласовите трансформации

Лема 4.1. *За съвместната функция на преживяване* $P(S_1(t) > x, S_2(t) > y)$ *имаме*

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1 x - s_2 y} P(S_1(t) > x, S_2(t) > y) dx dy \\ &= \tfrac{1 - LT_{S_1(t)}(s_1) - LT_{S_2(t)}(s_2) + LT_{(S_1(t), S_2(t))}(s_1, s_2)}{s_1 s_2}. \end{aligned} \tag{40}$$

В нашия случай, за Лапласовата трансформация на вероятността за фалит $\Psi_{max}(u_1, u_2)$ имаме

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s_1 x - s_2 y} P(S_1(t) > x, S_2(t) > y) dx dy$$

$$= \frac{1}{s_1 s_2} \Bigg[1 - e^{-\lambda t \left[1 - \left(\frac{1-\rho_1}{1-\rho_1 LT_{Z^1}(s_1)} \right)^r \right]} - e^{-\lambda t \left[1 - \left(\frac{1-\rho_2}{1-\rho_2 LT_{Z^2}(s_2)} \right)^r \right]}$$

$$+ e^{-\lambda t \left[1 - \left(\frac{\gamma}{1-\alpha LT_{Z^1}(s_1) - \beta LT_{Z^2}(s_2)} \right)^r \right]} \Bigg].$$

Лема 4.2. *За функцията на преживяване* $P(S_1(t) + S_2(t) > x)$ *имаме*

$$\int_0^\infty e^{-sx} P(S_1(t) + S_2(t) > x) dx = \frac{1}{s}[1 - LT_{S_1(t)+S_2(t)}(s)]. \qquad (41)$$

Тогава, за Лапласовата трансформация на вероятността за фалит $\Psi_{sum}(u_1, u_2)$ се получава

$$\int_0^\infty e^{-sx} P(S_1(t) + S_2(t) > x) dx = \frac{1}{s}[1 - e^{-\lambda t [1 - (\frac{\gamma}{1-\alpha LT_{Z^1}(s) - \beta LT_{Z^2}(s)})^r]}].$$

Нека исковете към дадена застрахователна компания са експоненциално разпределени с параметри $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$, т.е. с функции на разпределение $F_{Z^1}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu_1}}$, $x \geq 0$ и $G_{Z^2}(y) = 1 - e^{-\frac{y}{\mu_2}}$, $y \geq 0$. Означаваме чрез

$$e(n, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{e^x \Gamma(n+1, x)}{\Gamma(n+1)}$$

отрязаната експоненциална функция. $\Gamma(n)$ е Гама функция, а $\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$ е непълната Гама функция.

За вероятността за фалит $\Psi_{max}(u_1, u_2)$ в случай на експоненциално разпределени искове се получава

$$P(S_1(t) > x, S_2(t) > y) = e^{-\lambda t(1-\gamma^r)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i e(i-1, \frac{x}{\mu_1}) \sum_{m=1}^{\infty} \binom{rm+i-1}{i} \frac{(\lambda t\gamma^r)^m}{m!} e^{-\frac{x}{\mu_1}} e^{-\lambda t}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j e(j-1, \frac{y}{\mu_2}) \sum_{m=1}^{\infty} \binom{rm+j-1}{j} \frac{(\lambda t\gamma^r)^m}{m!} e^{-\frac{y}{\mu_2}} e^{-\lambda t}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha^i \beta^j e(i-1, \frac{x}{\mu_1}) e(j-1, \frac{y}{\mu_2}) \binom{i+j}{j}$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \binom{rm+i+j-1}{i+j} \frac{(\lambda t\gamma^r)^m}{m!} e^{-\frac{x}{\mu_1}-\frac{y}{\mu_2}} e^{-\lambda t},$$

където $x = u_1 + c_1 t$ и $y = u_2 + c_2 t$.

За вероятността за фалит $\Psi_{sum}(u_1, u_2)$ в случай на експоненциално разпределени искове се получава

$$P(S_1(t) + S_2(t) > x) = e^{-\lambda t(1-\gamma^r)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha+\beta)^i e(i-1, \frac{x}{\mu}) \sum_{m=1}^{\infty} \binom{rm+i-1}{i} \frac{(\lambda t\gamma^r)^m}{m!} e^{-\frac{x}{\mu}} e^{-\lambda t},$$

където $x = u_1 + u_2 + (c_1 + c_2)t$.

Резултатите от тази глава са публикувани в Kostadinova and Minkova (2014), [21].

Глава 5. Обобщени модели на риск на Пойа-Аепли

Тази глава съдържа два параграфа. В нея се разглеждат някои обобщения на модела на риск на Пойа-Аепли.

В параграф 5.1 се разглежда модел на риск на Пойа-Аепли с два вида бизнес. Дефинира се експоненциален мартингал, свързан с този модел на риск (Лема **5.1** и Лема **5.2**) и се получава съответната мартингална апроксимация на вероятността за фалит (Твърдение **5.1**). Изследва се в детайли частният случай, когато исковете към дадена застрахователна компания са експоненциално разпределени.

Разглеждаме модела на риск $\{Z(t), t \geq 0\}$ на една застрахователна компания, зададен чрез

$$Z(t) = ct - \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (\sum_{1}^{0} = 0). \tag{42}$$

Тук c е положителна реална константа, която изразява натрупаната премия за единица време. Редиците $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ са редици от взаимно независими и еднакво разпределени случайни величини, с функции на разпределение F_X и F_Y съответно, такива че $F_X(0) = 0$ и $F_Y(0) = 0$. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ са независими съответно от броящите процеси $M(t),\ t \geq 0$ и $N(t),\ t \geq 0$. Процесите $M(t)$ и $N(t)$ се интерпретират като броя на исковете от първи и втори тип към застрахователната компания в интервал от време $[0, t]$. Предполагаме, че броящите процеси $M(t),\ t \geq 0$ и $N(t),\ t \geq 0$ са независими процеси на Пойа-Аепли със съответни параметри $\lambda_i > 0$ и $\rho_i \in [0, 1),\ i = 1, 2$, т.е. $M(t) \sim PA(\lambda_1, \rho_1)$ и $N(t) \sim PA(\lambda_2, \rho_2)$. Означаваме чрез $S_1(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} X_i$ и $S_2(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ натрупаните искове към застрахователната компания до момента t.

Пораждащите функции на $M(t)$ и $N(t)$ са зададени чрез

$$\psi_{M(t)}(s) = e^{-\lambda_1 t\left(1-\frac{(1-\rho_1)s}{1-\rho_1 s}\right)} \quad \text{и} \quad \psi_{N(t)}(s) = e^{-\lambda_2 t\left(1-\frac{(1-\rho_2)s}{1-\rho_2 s}\right)}.$$

Този модел на риск (42) се нарича модел на риск на Пойа-Аепли с два вида бизнес.

Нека $E(X) = \mu$ и $E(Y) = \nu$ и да предположим, че средните и дисперсиите са крайни.

Коефициентът на натрупване θ, за този модел на риск, се задава чрез

$$\theta = \frac{c}{\frac{\lambda_1}{1-\rho_1}\mu + \frac{\lambda_2}{1-\rho_2}\nu} - 1. \tag{43}$$

Приемаме, че този коефициент на натрупване е положителен. В случай на положителен коефициент на натрупване $\theta > 0$, интензивността на премията за единица време c трябва да удовлетворява следното неравенство

$$c > \frac{\lambda_1 \mu}{1-\rho_1} + \frac{\lambda_2 \nu}{1-\rho_2}.$$

Означаваме чрез

$$\tau(u) = \inf\{t > 0, u + Z(t) \leq 0\}$$

времето до фалит на една застрахователна компания, имаща начален капитал u. Допускаме $\tau = \infty$, ако за всяко $t > 0$, $u + Z(t) > 0$.

Означаваме чрез $\Psi(u) = P(\tau(u) < \infty)$ - вероятността за фалит в безкраен интервал от време, а чрез $\Psi(u,t) = P(\tau(u) \leq t)$ - вероятността за фалит в краен интервал от време.

Означаваме чрез $LS_X(r) = \int_0^\infty e^{-rx} dF_X(x)$ Лапласовата трансформация на случайната величина X с функция на разпределение $F_X(x)$.

Лема 5.1. *За модел на риск на Пойа-Аепли с два вида бизнес*

$$Ee^{-rZ(t)} = e^{-g(r)t},$$

където

$$g(r) = rc + \lambda_1 \frac{1 - LS_X(-r)}{1 - \rho_1 LS_X(-r)} + \lambda_2 \frac{1 - LS_Y(-r)}{1 - \rho_2 LS_Y(-r)}. \tag{44}$$

От мартингалната теория се получава

Лема 5.2. *За всяко $r \in \mathbb{R}$ процесът*

$$W(t) = e^{-rZ(t)+g(r)t}, \ t \geq 0 \tag{45}$$

е $\mathcal{F}_t^Z = \sigma\{Z(s), s \leq t\}$-мартингал, при условие, че $LS_X(-r) < \infty$ и $LS_Y(-r) < \infty$.

Използвайки мартингалните свойства на $W(t)$, се получават някои полезни неравенства за вероятността за фалит. Мартингалната апроксимация в класическия случай е дадена в Schmidli (1996), [42].

Твърдение 5.1. *Нека $r > 0$. За вероятностите за фалит при модел на риск на Пойа-Аепли с два вида бизнес са в сила следните резултати*

i) $\Psi(u,t) \leq e^{-ru} \sup\limits_{0\leq s\leq t} e^{-g(r)s}, \ 0 \leq t < \infty.$

ii) $\Psi(u) \leq e^{-ru} \sup\limits_{s\geq 0} e^{-g(r)s}.$

iii) Ако експонентата на Лундберг R съществува, тогава R е строго положително решение на

$$\begin{aligned} &c(1-\rho_1 LS_X(-r))(1-\rho_2 LS_Y(-r))r \\ &+\lambda_1(1-LS_X(-r))(1-\rho_2 LS_Y(-r)) \\ &+\lambda_2(1-LS_Y(-r))(1-\rho_1 LS_X(-r)) = 0 \end{aligned} \tag{46}$$

и $\Psi(u) \leq e^{-Ru}$.

Нека исковете към дадена застрахователна компания са експоненциално разпределени. Предполагаме, че случайната величина $X \sim Exp(\mu)$, а $Y \sim Exp(\nu)$, или с функции на разпределение $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$ и $F_Y(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\nu}}$, $x \geq 0$. За Лапласовата трансформация на X и Y се получава

$$LS_X(-r) = \frac{1}{1-\mu r} \quad \text{и} \quad LS_Y(-r) = \frac{1}{1-\nu r}.$$

Тогава, за функцията $g(r)$ в (44) в този случай се получава

$$g(r) = cr - \lambda_1 \frac{\mu r}{1-\rho_1-\mu r} - \lambda_2 \frac{\nu r}{1-\rho_2-\nu r}.$$

Уравнението $g(r) = 0$ има нулев корен $r_1 = 0$ и два положителни корени. За по-големия корен R на уравнението се получава следното неравенство

$$R > \frac{1}{2}\left[\frac{1-\rho_1}{\mu} + \frac{1-\rho_2}{\nu} - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{c}\right].$$

В параграф 5.2 се разглежда модел на риск на Пойа-Аепли със стохастични приходи. Извеждат се уравнения за вероятността за не-фалит в безкраен интервал от време. Дефинира се експоненциален мартингал, свързан с този модел на риск (Лема **5.3** и Лема **5.4**) и е дадена съответната мартингална апроксимация на вероятността за фалит (Твърдение **5.2**). Анализира се случаят с експоненциално разпределени приходи на застрахователната компания и експоненциално разпределени искове към застрахователната компания.

Разглеждаме следния модел на риск

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0, \quad (\sum_1^0 = 0), \tag{47}$$

където u е началният капитал на застрахователната компания. Редиците $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ са редици от взаимно независими и еднакво разпределени случайни величини, със съответни функции на разпределение $G(x)$ и $F(x)$, такива че $G(0) = 0$ и $F(0) = 0$. Предполагаме, че X и Y са независими от броящите процеси $M(t),\ t \geq 0$ и $N(t),\ t \geq 0$. Случайната величина X представя прихода на компанията, а Y - размера на иска към застрахователната компания. Означаваме чрез $S_1(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} X_i$ и $S_2(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ съответно натрупаната сума от приходите на компанията и натрупаната сума от исковете към компанията до момента t. Предполагаме, че броящите процеси $M(t) \sim PA(\lambda_1 t, \rho_1)$ и $N(t) \sim PA(\lambda_2 t, \rho_2)$ са независими. Модела на риск (47) с независими Поасонови процеси $M(t)$ и $N(t)$ е въведен от Boikov (2002), [3].

Този модел на риск (47) се нарича модел на риск на Пойа-Аепли със стохастични приходи.

От определението за процес на Пойа-Аепли за достатъчно малък интервал с дължина h имаме следните постулати

- $(1-\lambda_1 h)(1-\rho_2)\rho_2^{i-1}\lambda_2 h + o(h),\ i = 1, 2, \ldots$ е вероятността процеса $M(t)$ да няма скокове в малък интервал с дължина h, а процеса $N(t)$ да има i скока.

- $(1-\rho_1)\rho_1^{i-1}\lambda_1 h(1-\lambda_2 h) + o(h),\ i = 1, 2, \ldots$ е вероятността процеса $M(t)$ да има i скока в малък интервал с дължина h, а процеса $N(t)$ да няма скокове.

- $(1-\lambda_1 h)(1-\lambda_2 h) + o(h)$ е вероятността процесите $M(t)$ и $N(t)$ да нямат скокове.

Нека $E(X) = \nu$ и $E(Y) = \mu$ и да предположим, че средните и дисперсиите са крайни.

Коефициентът на натрупване θ, за този модел на риск, се задава чрез

$$\theta = \frac{E(S_1(t) - S_2(t))}{E(S_2(t))} = \frac{\lambda_1 \nu}{\lambda_2 \mu} \frac{1-\rho_2}{1-\rho_1} - 1. \tag{48}$$

Приемаме, че този коефициент на натрупване е положителен. В случай на положителен коефициент на натрупване $\theta > 0$, трябва да е изпълнено $\lambda_1 \nu (1-\rho_2) > \lambda_2 \mu (1-\rho_1)$.

Означаваме чрез

$$\Phi(u) = P(U(t) \geq 0, \text{за всяко } t > 0)$$

вероятността за не-фалит в безкраен интервал от време. Съответната вероятност за фалит се задава чрез $\Psi(u) = 1 - \Phi(u)$.

Според постулатите за вероятността за не-фалит в безкраен интервал от време се получава

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= (1-\lambda_1 h)(1-\lambda_2 h)\Phi(u) \\ &+ (1-\lambda_1 h) \sum_{i=1}^{\infty} (1-\rho_2)\rho_2^{i-1} \lambda_2 h \int_0^u \Phi(u-x) dF^{*i}(x) \\ &+ (1-\lambda_2 h) \sum_{i=1}^{\infty} (1-\rho_1)\rho_1^{i-1} \lambda_1 h \int_0^\infty \Phi(u+x) dG^{*i}(x) + o(h), \end{aligned}$$

където $F^{*i}(x)$ е функцията на разпределение на $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_i$, а $G^{*i}(x)$ е функцията на разпределение на $X_1 + X_2 + \ldots + X_i$.

Означаваме чрез

$$H_1(x) = (1-\rho_1) \sum_{i=1}^{\infty} \rho_1^{i-1} G^{*i}(x) \;\text{ и }\; H_2(x) = (1-\rho_2) \sum_{i=1}^{\infty} \rho_2^{i-1} F^{*i}(x)$$

съответно функцията на разпределение на натрупаната сума от приходите на компанията и натрупаната сума от исковете към компанията. Лесно се проверява, че $H_1(\infty) = 1$ и

$H_2(\infty) = 1$. В термините на $H_1(x)$ и $H_2(x)$, при $h \to 0$, се получава следното уравнение за вероятността за не-фалит в безкраен интервал от време $\Phi(u)$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\Phi(u) = \lambda_1 \int_0^\infty \Phi(u+x)dH_1(x) + \lambda_2 \int_0^u \Phi(u-x)dH_2(x). \tag{49}$$

Означаваме чрез $Z(t) = S_1(t) - S_2(t)$ процеса на риск, съответстващ на модела на риск в (47).

Лема 5.3. *За модела на риск на Пойа-Аепли със стохастични приходи, зададен в (47)*

$$Ee^{-rZ(t)} = e^{-g(r)t},$$

където

$$g(r) = \lambda_1 \frac{1 - LS_X(r)}{1 - \rho_1 LS_X(r)} + \lambda_2 \frac{1 - LS_Y(-r)}{1 - \rho_2 LS_Y(-r)}. \tag{50}$$

От мартингалната теория се получава

Лема 5.4. *За всяко $r \in \mathbb{R}$ процесът*

$$W(t) = e^{-rZ(t)+g(r)t}, \ t \geq 0 \tag{51}$$

е $\mathcal{F}_t^Z = \sigma\{Z(s), s \leq t\}$-мартингал, при условие, че $LS_X(r) < \infty$ и $LS_Y(-r) < \infty$.

Означаваме чрез $\Psi(u,t) = P(\tau(u) \leq t)$ - вероятността за фалит в краен интервал от време $[0,t]$.

Твърдение 5.2. *Нека $r > 0$. За вероятностите за фалит при модел на риск на Пойа-Аепли със стохастични приходи са в сила следните резултати*

i) $\Psi(u,t) \leq e^{-ru} \sup\limits_{0 \leq s \leq t} e^{-g(r)s}, 0 \leq t < \infty.$

ii) $\Psi(u) \leq e^{-ru} \sup\limits_{s \geq 0} e^{-g(r)s}.$

iii) Ако експонентата на Лундберг R съществува, тогава R е строго положително решение на

$$\begin{aligned} &\lambda_1(1 - LS_X(r))(1 - \rho_2 LS_Y(-r)) \\ &+\lambda_2(1 - LS_Y(-r))(1 - \rho_1 LS_X(r)) = 0 \end{aligned} \tag{52}$$

и $\Psi(u) \leq e^{-Ru}$.

Нека предположим, че случайната величина $X \sim Exp(\nu)$, а $Y \sim Exp(\mu)$, т.е. с функции на разпределение $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$ и $G(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\nu}}, \ x > 0$. В този случай, вероятността за нефалит в безкраен интервал от време $\Phi(u)$ се задава чрез

$$\Phi(u) = 1 - \frac{\lambda_2[\mu(1-\rho_1) + \nu(1-\rho_2)]}{\nu(1-\rho_2)(\lambda_1+\lambda_2)} e^{-\frac{\lambda_1\nu(1-\rho_2)-\lambda_2\mu(1-\rho_1)}{\mu\nu(\lambda_1+\lambda_2)}u}. \tag{53}$$

В термините на коефициента на натрупване θ, формула (53) приема вида

$$\Phi(u) = 1 - \frac{\lambda_2[\mu(1-\rho_1) + \nu(1-\rho_2)]}{\nu(1-\rho_2)(\lambda_1+\lambda_2)} e^{-\frac{\lambda_1(1-\rho_2)}{\mu(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{\theta}{1+\theta}u}.$$

Резултатите от тази глава са публикувани в Kostadinova (2014), [19] и в Kostadinova and Minkova (2016b), [23].

Глава 6. Двумерни обобщени разпределения, развиващи се в степенен ред с инфлационен параметър

В тази глава се въвежда семейство от сложни обобщени разпределения, развиващи се в степенен ред (GPSD) с двумерно геометрично усложняващо разпределение, което се нарича семейство от двумерни обобщени разпределения, развиващи се в степенен ред с инфлационен параметър (IGPSD).

Член на това семейство е двумерното разпределение на Пойа-Аепли от II тип, въведено от Minkova and Balakrishanan (2014b), [33].

Тази глава съдържа два параграфа. В параграф 6.1 се извеждат вероятностната функция (Теорема **6.1**), условните разпределения (Теорема **6.2**) и условните моменти за това семейство от двумерни IGPSD.

Разглеждаме редицата $(X_i, Y_i), i = 1, 2, \ldots$ от независими и еднакво разпределени случайни величини, разпределени като (X, Y). Дефинираме

$$N_1 = X_1 + \ldots + X_Z \text{ и } N_2 = Y_1 + \ldots + Y_Z,$$

където Z е независима от (X, Y) и принадлежи на семейство от GPSD с пораждаща функция $\psi(s) = \frac{g(\theta s)}{g(\theta)}$, където $g(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} a(m)\theta^m$.

За даден параметър $\pi \in (0, 1)$, частните случаи на функциите $a(m)$, $g(\theta)$ и параметъра θ са дадени в следната таблица

$X \sim Bi(n, \theta)$:	$a(m) = \binom{n}{m}$	$g(\theta) = (1+\theta)^n$	$\theta = \frac{\pi}{1-\pi}$
$X \sim NB(r, \theta)$:	$a(m) = \binom{m+r-1}{m}$	$g(\theta) = (1-\theta)^{-r}$	$\theta = 1 - \pi$
$X \sim Po(\theta)$:	$a(m) = \frac{1}{m!}$	$g(\theta) = e^{\theta}$	$\theta = \lambda$
$X \sim LS(\theta)$:	$a(m) = \frac{1}{m}$	$g(\theta) = -ln(1-\theta)$	$\theta = 1 - \pi$

В биномния и отрицателно биномния случай, съответните допълнителни параметри n и r са дадени положителни цели числа.

Предполагаме, че (X, Y) има двумерно геометрично разпределение с пораждаща функция

$$\psi_1(s_1, s_2) = \frac{\gamma}{1 - \alpha s_1 - \beta s_2}, \tag{54}$$

където $0 < \alpha, \beta < 1$ и $\gamma = 1 - \alpha - \beta \neq 0$ (виж Kocherlakota and Kocherlakota (1992), [17]). Тогава съвместната пораждаща функция на (N_1, N_2) се задава чрез

$$\Psi(s_1, s_2) = \frac{g(\theta\psi_1(s_1, s_2))}{g(\theta)}, \tag{55}$$

където $\psi_1(s_1, s_2)$ е пораждащата функция на усложняващото разпределение в (54).

Определение 6.1. *Вероятностното разпределение на (N_1, N_2), съответстващо на (55), се отнася към семейство от двумерни обобщени разпределения от II тип, развиващи се в степенен ред с инфлационен параметър ($BIGPSD_{II}$).*

Теорема 6.1. *Вероятностната функция на $BIGPS_{II}$ разпределения се задава чрез*

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \tfrac{g(\theta\gamma)}{g(\theta)}, \\ f(i,j) &= \frac{\binom{i+j}{i}\alpha^i\beta^j}{g(\theta)} \sum_{m=1}^{\infty} a(m)\binom{i+j+m-1}{m-1}(\theta\gamma)^m, \\ & \quad i, j = 0, 1, \ldots, \ (i,j) \neq (0,0). \end{aligned} \tag{56}$$

Нека $\Psi_{N_2|(N_1=k)}(s_2)$, $k = 0, 1, \ldots,$ да бъде условната пораждаща функция на N_2, при условие N_1.

Теорема 6.2. *Пораждащата функция на N_2, при условие N_1, се задава чрез*

$$\Psi_{N_2|(N_1=0)}(s_2) = \frac{1}{g(\frac{\theta\gamma}{1-\beta})} \sum_{m=0}^{\infty} a(m)(\theta\gamma)^m \frac{1}{(1-\beta s_2)^m}, \tag{57}$$

а за $k=1,2,\dots,$ *имаме*

$$\Psi_{N_2|(N_1=k)}(s_2)=\frac{\sum\limits_{m=1}^{\infty} a(m)(\theta\gamma)^m\binom{m+k-1}{m-1}\frac{1}{(1-\beta s_2)^{m+k}}}{\sum\limits_{m=1}^{\infty} a(m)(\theta\gamma)^m\binom{m+k-1}{m-1}\frac{1}{(1-\beta)^{m+k}}}. \tag{58}$$

Диференцирането на (57) води до условното средно

$$E[N_2|N_1=0]=\frac{\beta}{(1-\beta)g(\frac{\theta\gamma}{1-\beta})}\sum_{m=0}^{\infty} a(m)m\left(\frac{\theta\gamma}{1-\beta}\right)^m,$$

а диференцирането на (58) за $k=1,2,\dots,$ до условното средно

$$E[N_2|N_1=k]=\frac{(k+1)\beta}{1-\beta}\frac{\sum\limits_{m=1}^{\infty} a(m)\binom{m+k}{m-1}\left(\frac{\theta\gamma}{1-\beta}\right)^m}{\sum\limits_{m=1}^{\infty} a(m)\binom{m+k-1}{m-1}\left(\frac{\theta\gamma}{1-\beta}\right)^m}.$$

В параграф 6.2 като примери се разглеждат останалите три члена на дефинираното семейство от разпределения: двумерно биномно разпределение с инфлационен параметър (Следствие **6.1** и Твърдение **6.1**), двумерно отрицателно биномно разпределение с инфлационен параметър (Следствие **6.2** и Твърдение **6.2**) и двумерно логаритмично разпределение с инфлационен параметър (Следствие **6.3** и Твърдение **6.3**) и са сравнени с двумерното разпределение на Пойа-Аепли.

Следствие 6.1. *Вероятностната функция на* $BIBi_{II}(n, \alpha,\beta,\pi)$ *разпределение се задава чрез*

$$f(i,j)=\binom{i+j}{i}\alpha^i\beta^j\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}\binom{m+i+j-1}{m-1}(\pi\gamma)^m(1-\pi)^{n-m}, \tag{59}$$

за $i, j = 0, 1, \ldots,\ (i, j) \neq (0, 0)$ *и* $f(0, 0) = [1 - \pi(1 - \gamma)]^n$.

В Твърдение **6.1** от дисертацията се дават рекурентните формули за вероятностната функция на двумерното биномно разпределение с инфлационен параметър.

За двумерния индекс на Фишер се получава $2 < FI_2(N_1, N_2) < 2\frac{1+\rho}{1-\rho}$, т.е. $BIBi_{II}$ разпределение е under-dispersed в сравнение с двумерното разпределение на Пойа-Аепли от II тип и over-dispersed в сравнение с двумерното Поасоново разпределение.

Следствие 6.2. *Вероятностната функция на* $BINB_{II}(r, \alpha, \beta, \pi)$ *разпределение се задава чрез*

$$f(i, j) = \pi^r \binom{i+j}{i} \alpha^i \beta^j \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m+r-1}{m} \binom{m+i+j-1}{m-1} ((1-\pi)\gamma)^m, \tag{60}$$

за $i, j = 0, 1, \ldots,\ (i, j) \neq (0, 0)$ *и* $f(0, 0) = \left[\frac{\pi}{1-(1-\pi)\gamma}\right]^r$.

В Твърдение **6.2** от дисертацията се дават рекурентните формули за вероятностната функция на двумерното отрицателно биномно разпределение с инфлационен параметър.

За двумерния индекс на Фишер се получава $FI_2(N_1, N_2) > 2\frac{1+\rho}{1-\rho}$, т.е. $BINB_{II}$ разпределение е over-dispersed в сравнение с двумерното разпределение на Пойа-Аепли от II тип.

Следствие 6.3. *Вероятностната функция на* $BILS_{II}(\alpha, \beta, \pi)$ *разпределение се задава чрез*

$$f(i, j) = -\frac{\alpha^i \beta^j}{\log(\pi)} \binom{i+j}{i} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{m+i+j-1}{m-1} \frac{((1-\pi)\gamma)^m}{m}, \tag{61}$$

за $i, j = 0, 1, \ldots,\ (i, j) \neq (0, 0)$ *и* $f(0, 0) = \frac{\log(1-(1-\pi)\gamma)}{\log(\pi)}$.

В Твърдение **6.3** от дисертацията се дават рекурентните формули за вероятностната функция на двумерното логаритмично разпределение с инфлационен параметър.

За маргиналните индекси на Фишер се получава

$$FI(N_1) = \frac{Var(N_1)}{E(N_1)} = 1 + \frac{\alpha}{\gamma\pi} \frac{1 - \pi + (1+\pi)\log(\pi)}{\log(\pi)}$$

и

$$FI(N_2) = \frac{Var(N_2)}{E(N_2)} = 1 + \frac{\beta}{\gamma\pi} \frac{1 - \pi + (1+\pi)\log(\pi)}{\log(\pi)}.$$

Ако $-\log(\pi) > \frac{1-\pi}{1+\pi}$, то (N_1, N_2) е over-dispersed по отношение на двумерното Поасоново разпределение. Ако $-\log(\pi) < \frac{1-\pi}{1+\pi}$, тогава (N_1, N_2) е under-dispersed по отношение на двумерното Поасоново разпределение.

За сравняване с двумерното разпределение на Пойа-Аепли, индексите на Фишер могат да се пренапишат по следния начин

$$FI(N_1) = \frac{1+\rho_1}{1-\rho_1} + \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \left[\frac{1 - \pi + (1+\pi)\log(\pi)}{\pi \log(\pi)} - 2 \right]$$

и

$$FI(N_2) = \frac{1+\rho_2}{1-\rho_2} + \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \left[\frac{1 - \pi + (1+\pi)\log(\pi)}{\pi \log(\pi)} - 2 \right].$$

В случая, когато $\rho_1 = \rho_2 = \rho :$ ако $-\log(\pi) > 1$, то (N_1, N_2) е over-dispersed по отношение на двумерното разпределение на Пойа-Аепли, но ако $-\log(\pi) < 1$, то е under-dispersed.

Резултатите от тази глава са публикувани в Kostadinova and Minkova (2016a), [22].

Основни приноси в дисертацията

1. Дефиниран е Поасонов процес от ред k като сложен процес на раждане. Получени са рекурентните формули и вероятностната функция на този процес (Глава 2, 2.1).

2. Дефиниран е Поасонов отрицателно биномен процес като сложен Поасонов процес и като сложен процес на раждане. Получени са рекурентните формули и вероятностната функция на този процес (Глава 2, 2.2).

3. Анализиран е Поасонов модел на риск от ред k, като се разглежда модела на риск, при който броящият процес е дефинираният Поасонов процес от ред k. Изведена е функцията $G(u, y)$, изразяваща вероятността да настъпи фалит при начален капитал u и дефицит в момента на фалит най-много y. Като граничен случай е получена вероятността за фалит, както и вероятността за фалит при нулев начален капитал на една застрахователна компания. Разгледан е частният случай, когато исковете към дадена застрахователна компания са експоненциално разпределени (Глава 3, 3.1).

4. Анализиран е Поасонов отрицателно биномен модел на риск, като се разглежда модела на риск, при който броящият процес е дефинираният Поасонов отрицателно биномен процес. Изведена е функцията $G(u, y)$, изразяваща вероятността да настъпи фалит при начален капитал u и дефицит в момента на фалит най-много y. Като граничен случай е получена вероятността за фалит, както и вероятността за фалит при нулев начален

капитал на една застрахователна компания. Разгледан е частният случай, когато исковете към дадена застрахователна компания са експоненциално разпределени (Глава 3, 3.2).

5. Дефиниран е двумерен Поасонов отрицателно биномен процес като сложен Поасонов процес. Намерени са моментите и съвместната вероятностна функция на този процес (Глава 4, 4.1).

6. Изследван е двумерен Поасонов отрицателно биномен модел на риск, при който броящият процес е дефинираният двумерен Поасонов отрицателно биномен процес. За този модел на риск са разгледани два типа вероятности за фалит и са получени съответните Лапласови трансформации. Представен е пример с експоненциално разпределени искове към дадена застрахователна компания (Глава 4, 4.2).

7. Разгледан е модел на риск на Пойа-Аепли с два вида бизнес. Дефиниран е експоненциален мартингал, свързан с този модел на риск и е получена съответната мартингална апроксимация на вероятността за фалит. Анализиран е в детайли частният случай, когато исковете към дадена застрахователна компания са експоненциално разпределени (Глава 5, 5.1).

8. Разгледан е модел на риск на Пойа-Аепли със стохастични приходи. Получени са уравнения за вероятността за не-фалит в безкраен интервал от време. Дефиниран е експоненциален мартингал, свързан с този модел на риск и е дадена съответната мартингална апроксимация на вероятността за фалит. Анализиран е случаят с експоненциално разпределени приходи на застрахова-

телната компания и експоненциално разпределени искове към застрахователната компания (Глава 5, 5.2).

9. Въведено е семейство от двумерни обобщени разпределения, развиващи се в степенен ред с инфлационен параметър. За това семейство от разпределения е намерена вероятностната функция, условните разпределения и условните моменти. Намерени са моментите, пораждащата и вероятностната функция на останалите три члена от дефинираното семейство от разпределения: двумерно биномно разпределение с инфлационен параметър, двумерно отрицателно биномно разпределение с инфлационен параметър и двумерно логаритмично разпределение с инфлационен параметър и са сравнени с двумерното разпределение на Пойа-Аепли (Глава 6).

Литература

[1] Aki S., Kuboku H., Hirano K. (1984). On discrete distributions of order k. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **36**, 431–440.

[2] Balakrishnan N., Koutras M.V. (2002). *Runs and Scans with Applications*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, New York.

[3] Boikov A.V. (2002). The Cramér-Lundberg model with stochastic premium process. *Theory Probab. Appl.*, **47**, 489–493.

[4] Chan W–S., Yang H., Zhang L. (2003). Some results on ruin probabilities in a two–dimensional risk model. *Insurance Mathematics & Economics*, **32**, 345–358.

[5] Charalambides Ch.A. (1986). On discrete distributions of order k. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **38**, 557–568.

[6] Chukova S., Minkova L.D. (2013). Characterization of the Pólya - Aeppli process. *Stochastic Analysis and Applications*, **31**, 590–599.

[7] Chukova S., Minkova L.D. (2015). Pólya - Aeppli of order k Risk Model. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **44(3)**, 551–564.

[8] Fisher R.A. (1934). The effect of methods of ascertainment upon the estimation of frequencies. *Annals of Eugenics*, **6**, 13–25.

[9] Gerber H., Goovaerts M., Kaas R. (1987). On the probability and severity of ruin. *ASTIN Bull.*, **17**, 151–163.

[10] Grandell J. (1991). *Aspects of Risk Theory.* Springer - Verlag, New York.

[11] Grandell J. (1997). *Mixed Poisson Processes.* Chapman & Hall, London.

[12] Hirano K. (1986). Some properties of the distributions of order k. In *Fibonacci Numbers and Their Applications* (Eds., Philippou A.N., Bergum G.E., Horadam A.F.), pp. 43–53, D. Reidel Publishing Company.

[13] Johnson N.L., Kemp A.W., Kotz S. (2005). *Univariate Discrete Distributions.* John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 3rd edition.

[14] Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions.* John Wiley & Sons, New York.

[15] Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[16] Klugman S.A., Panjer H., Willmot G. (2004). *Loss Models: From Data to Decisions.* John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition.

[17] Kocherlakota S., Kocherlakota K. (1992). *Bivariate Discrete Distributions.* Marcel Dekker, New York.

[18] Kostadinova K.Y. (2013). On a Poisson Negative Binomial Process. In *Advanced Research in Mathematics and Computer Science, Doctoral Conference in Mathematics, Informatics and Education*, September, 19–21, Sofia, 25–33.

[19] Kostadinova K.Y. (2014). Pólya-Aeppli risk model with two lines of business. In *Advanced Research in Mathematics and*

Computer Science, Doctoral Conference in Mathematics, Informatics and Education, September, 23–25, Sofia, 27-31.

[20] Kostadinova K., Minkova L.D. (2013). On the Poisson process of order k. *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, **22**, 117–128.

[21] Kostadinova K., Minkova L.D. (2014). On a bivariate Poisson negative binomial risk process. *Biomath*, **3**, 47–52.

[22] Kostadinova K., Minkova L.D. (2016a). Type II family of Bivariate Inflated-parameter Generalized Power Series Distributions. *Serdica Mathematical Journal*, **42(1)**, 27–42.

[23] Kostadinova K., Minkova L.D. (2016b). The Pólya-Aeppli risk model with stochastic premium process. *Annual of Sofia University* (in press).

[24] Mikosch T. (2004). *Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with Stochastic Processes*. Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg.

[25] Mikosch T. (2009). *Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with the Poisson Process*. Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, 2nd edition.

[26] Minkova L.D. (2001). Inflated-parameter modification of the pure birth process. *Compt. Randue Bulg. Acad. Sci.*, **54(11)**, 17–22.

[27] Minkova L.D. (2002). A Generalization of the Classical Discrete Distributions. *Commun. Statist. - Theory and Methods*, **31**, 871–888.

[28] Minkova L.D. (2004). The Pólya-Aeppli process and ruin problems. *J. Appl. Math. Stoch. Analysis*, **3**, 221–234.

[29] Minkova L.D. (2010a). The Pólya - Aeppli distribution of order k. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **39(3)**, 408–415.

[30] Minkova L.D. (2010b). Compound Birth processes in Risk Models. *Proceedings of the 6th Conference in Actuarial Science & Finance on Samos*, June 2-6, 2010, available in: www.actuar.aegean.gr/samos2010/proceedings.html

[31] Minkova L.D., Balakrishnan N. (2013). Compound weighted Poisson distributions. *Metrika*, **76(4)**, 543–558.

[32] Minkova L.D., Balakrishnan N. (2014a). On a bivariate Pólya-Aeppli distribution. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **43**, 5026–5038.

[33] Minkova L.D., Balakrishnan N. (2014b). Type II bivariate Pólya-Aeppli distribution. *Statistics & Probabiliy Letters*, **88**, 40–49.

[34] Omey E., Minkova L.D. (2013). Bivariate Geometric Distributions. *HUB RESEARCH PAPERS*, **2013/02**, ECONOMICS & BUSINESS SCIENCE.

[35] Panjer H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound discrete distributions. *ASTIN Bull.*, **12**, 22–26.

[36] Patil G.P. (1962). Certain properties of the generalized power distributions. *Ann. Inst. Stat. Math.*, **14**, 179–182.

[37] Philippou A.N. (1983). The Poisson and compound Poisson distribution of order k and some of their properties. *Zapiski Nauchnyka Seminarov Lenigrand, Math. Inst. Steklova*, **130**, 175–180.

[38] Philippou A.N., Georghiou C., Philippou G.N. (1983). A generalized geometric distribution and some of its properties. *Statistics&Probability Letters*, **1**, 171–175.

[39] Philippou A.N., Makri F.S. (1986). Successes, runs and longest runs. *Statistics&Probability Letters*, **4**, 211–215.

[40] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* John Wiley & Sons, Chichester.

[41] Ross S. (1996). *Stochastic processes.* John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition.

[42] Schmidli H. (1996). Martingales and Insurance Risk. In *8th International Summer School on Probability Theory and Mathematical Statistics*, 155–188.

[43] Xekalaki E. (2006). Under- and overdispersion. In *Encyclopedia of actuarial science*, **3**, (Eds., Teugels J.L., Sundt B.), pp. 1700–1705, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

Декларация за оригиналност

Декларирам, че настоящата дисертация на тема "Застрахователни модели на риск и вероятност за фалит"съдържа оригинални резултати, получени при проведени от мен научни изследвания (с подкрепата и съдействието на научния ми ръководител). Резултатите, които са получени, описани и/или публикувани от други учени, са надлежно и подробно цитирани в библиографията.

Настоящата дисертация не е прилагана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Дата:
София, 2016 г.

Подпис:............................
Красимира Костадинова