

С Т А Н О В И Щ Е

от проф. дмн Йохан Тодоров Давидов
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

относно дисертация
за придобиване на образователната и научна степен "доктор"
в област на висше образование 4. Природни науки, Математика и информатика,
професионално направление 4.5 Математика,
научна специалност: *Геометрия*

Автор: ас. Марина Павлова Чомакова

Тема: Геометрия на паракватернионните контактни многообразия

Със заповед РД 38-281/09.06.2025 на Ректора на Софийския университет "Св. Климент Охридски" проф. д-р Георги Вълчев съм определен за член на научното жури по посочената по-горе процедура. Като член на научното жури получих всички документи, изисквани от Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагането на ЗРАСРБ и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в СУ "Св. Климент Охридски".

Кратки биографични данни

Средното си образование Марина Чомакова завършва в Софийската математическа гимназия през 2011 г. В периода 2011-2015 г. тя е студент в бакалавърската програма "Приложна математика" на Факултета по математика и информатика (ФМИ) на Софийския университет "Св. Климент Охридски" (СУ). По това време тя придобива и допълнителна квалификация за учител по математика. В периода 2015-2017 е студент в магистърската програма "Алгебра, геометрия и топология" на ФМИ, СУ. От 2018 до 2024 е задочен докторант в Катедрата по геометрия на ФМИ с прекъсване по майчинство в периода 2019-2021. От 2014 Марина Чомакова е асистент в Катедрата по геометрия на ФМИ.

Участие в научни проекти

Марина Чомакова е била член на екипа на пет научни проекта. Три от тях са били финансирани от Софийския университет, един - от Фонд "Научни изследвания" и един проект е финансиран от Европейската комисия по Плана за възстановяване и устойчивост.

Преподавателска дейност

Във Факултета по математика и информатика Марина Чомакова е водила упражнения по аналитична геометрия, диференциална геометрия, геометрия (аналитична геометрия и линейни трансформации), линейна алгебра и аналитична геометрия.

Обща характеристика на дисертацията.

Дисертацията на Марина Чомакова е в областта на суб-псевдо Римановата геометрия, по-специално геометрия на паракватернионните контактни многообразия. Това е паракватернионна версия на геометрията на кватернионните

контактни многообразия, разработвана предимно от българските математици Стефан Иванов, Иван Минчев, Димитър Василев (който работи в САЩ), Симеон Замковой и Александър Петров. Много от важните резултати в тази област са получени от българската група. Марина Чомакова е нов член на групата, доста успешен по мое мнение.

Дисертацията се състои от 123 страници със списък на използваната литература от 32 заглавия. Основа на съдържанието ѝ са три съвместни статии на авторката. Две от тях са със С. Иванов и С. Замковой и една е със С. Иванов и И. Минчев. С. Иванов и И. Минчев са декларирали, че всеки от съавторите има равен принос за резултатите в съвместната работа. Симеон Замковой не е сред живите и няма декларация от него относно двете статии, в които той е съавтор. Другият съавтор - Стефан Иванов, не е представил коментари или възражения. Мисля, че може да се приеме, че приносите на съавторите в споменатите две статии са равни.

Резултатите в дисертацията не са били използвани за получаване на образователна или научна степен, или академична позиция. Бих искал да отбележа още, че не съм открил плагиатство в дисертацията.

Анализ на научното съдържание на дисертацията

В увода на дисертацията (7 страници) са описани основните задачи, разглеждани в дисертацията, съдържанието на нейните три глави и са формулирани най-важните резултати.

В Глава 1 (49 страници) са доказани основни факти за паракватернионните контактни многообразия, разглеждани са важни примери и е изледвана кривината на така наречената канонична свързаност.

Паракватернионна (накратко "PQC") структура върху $(4n + 3)$ -мерно гладко многообразие M се състои от подразслоение H на TM с ранг $4n$, метрика g върху H и подразслоение PQ на $End(H)$ от ранг 3, такива че в околност U на всяка точка на M съществуват 1-форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ със стойности в \mathbb{R}^3 и тройка $\vartheta = (I_1, I_2, I_3)$ от сечения на PQ със следните свойства: (1) $H|U$ е ядрото на η ; (2) (i) Ендоморфизмите I_1, I_2, I_3 пораждат PQ върху U ; (ii) I_1 и I_2 са почти паракомплексни структури ($I_1^2 = I_2^2 = Id$), а I_3 е почти комплексна структура ($I_3^2 = -Id$); (iii) I_1, I_2, I_3 са съвместими с метриката g , в смисъл че $g(I_1X, I_1Y) = g(I_2X, I_2Y) = -g(I_3X, I_3Y) = g(X, Y)$; (iv) (I_1, I_2, I_3) удовлетворяват тъждествата на имагинерните единични паракватерниони $I_1^2 = I_2^2 = Id_H, I_3^2 = -Id_H, I_1I_2 = -I_2I_1 = I_3$; (3) $2g(I_1X, Y) = -d\eta_1(X, Y), 2g(I_2X, Y) = -d\eta_2(X, Y), 2g(I_3X, Y) = d\eta_3(X, Y), X, Y \in H|U$.

При тези условия, метриката g е от неутрална сигнатура $(2n, 2n)$.

Понятието за паракватернионна контактна структура е паракватернионна версия на понятието за кватернионна контактна структура, въведено от О. Biquard. Той показва, че върху всяко кватернионно контактено многообразие съществува специална свързаност. За паракватернионни контактни многообразия съществуването на подобна свързаност е доказано в първа глава на дисертацията. По-конкретно, доказано е, че ако M е PQC-многообразие от размерност > 7 , съществува единствено разслоение V , допълващо H до TM , и единствена свързаност ∇ върху M с някои "хубави" свойства, които тук пропускаме

за краткост. Ще отбележим само, че метриката g се продължава върху цялото допирателно разслоение $TM = H \oplus V$ до псевдо Риманова метрика от сигнатура $(2n + 1, 2n + 2)$. Свързаността ∇ запазва тази метрика и освен това запазва разлагането $TM = H \oplus V$, както и разслоението PQ . Тази свързаност е наречена "канонична" в дисертацията. Ако $\dim M = 7$, тя съществува при някои допълнителни условия. Разслоенията H и V се наричат хоризонтално и, съответно, вертикално. Каноничната свързаност има торзия, която подробно е изследвана в Глава 1. В тази глава са дадени и основните примери на RQC-многообразия. Това са паракватернионната група на Хайзенберг и пара-3-Сасакиевите многообразия, в частност пара-3-Сасакиевата псевдосфера S^{4n+3} . Друга тема е кривината на каноничната свързаност. Изведени са полезни формули за кривината. Показано е, например, че тензорът на Ричи на каноничната свързаност ∇ върху хоризонталното разслоение H се определя грубо казано от торзията T на ∇ чрез явна формула. Този тензор се нарича RQC-тензор на Ричи, а неговат следа- RQC-скаларна кривина. Едно RQC-многообразие се нарича RQC-Айнщайново, ако неговият RQC-тензор на Ричи е пропорционален на метриката g . Коефициентът на пропорционалност е, разбира се, RQC-скаларната кривина разделена на $4n$. Един от важните резултати, получени в първа глава, гласи, че едно RQC-многообразие е локално изоморфно на паракватернионната група на Хайзенберг тогава и само тогава, когато кривинният 4-тензор върху H се анулира. Доказано е също така, че всяко пара-3-Сасакиево многообразие е RQC-Айнщайново, чиято RQC-скаларна кривина е равна на $16(n + 2)$. Друг важен резултат е, че всяко RQC-Айнщайново многообразие (M, η) от размерност по-голяма от 7 с ненулева RQC-скаларна кривина е локално RQC-хомотетично на пара-3-Сасакиево многообразие. Тук "RQC-хомотетично" означава, че съществува $SO(1, 2)$ -матрица Ψ , чиито елементи са гладки функции, такава че $\frac{16(n+2)}{Scal} \Psi \cdot \eta$ е пара-3-Сасакиева структура. По-общо, по дефиниция паракватернионна контактна конформна трансформация между две паракватернионни контактни многообразия (M, η) и $(\bar{M}, \bar{\eta})$ е дифеоморфизъм $\Phi : M \rightarrow \bar{M}$, такъв че $\Phi^* \bar{\eta} = \mu \Psi \cdot \eta$, където μ е положителна гладка функция и Ψ е $SO(1, 2)$ -матрица с елементи гладки функции; ако μ е константа, Φ се нарича паракватернионна контактна хомотетия.

В първия параграф на Глава 2 (тази глава е 39 страници) е показано, че паракватернионните контактни структури на паракватернионната група на Хайзенберг и псевдосферата от същата размерност са локално RQC-конформно еквивалентни чрез трансформацията на Cayley подобно на кватернионно контактния случай. Най-важното постижение в Глава 2 е въвеждането и изучаването на тензорно поле, наречено паракватернионна контактна конформна кривина, което може да се разглежда като паракватернионен контактен аналог на тензора на Вайл (Weyl) в Римановата геометрия. Доказано е, че паракватернионната контактна конформна кривина е инвариантна при RQC-конформни трансформации. Освен това е установено, че паракватернионната контактна конформна кривина на RQC-многообразие е нула тогава и само тогава, когато многообразието е локално RQC-конформно еквивалентно на паракватернионната група на Хайзенберг с нейната стандартна RQC-структура. Тези резултати заслужават висока оценка. .

Туисторното пространство \mathcal{Z} и рефлекторното пространство \mathcal{R} на паракватернионна контактна структура по дефиниция са разслоенията $\mathcal{Z} = \{I \in PQ : I^2 = -Id\}$ и $\mathcal{R} = \{I \in PQ : I^2 = Id\}$. Да напомним, че каноничната свързаност ∇ запазва разслоението PQ . Следователно допирателното разслоение на тоталното пространство на разслоението PQ може да се разложи в директна сума на хоризонтално и вертикално подразслоение, като хоризонталното подразслоение се дефинира чрез каноничната свързаност. Като се използва това разлагане, може да се дефинират естествени CR и пара- CR -структури върху тоталните пространства на разслоенията \mathcal{Z} и, съответно, \mathcal{R} . Дефинирането на тези структури изисква разглеждания от технически характер, които за краткост на изложението ще пропуснем. Съгласно основният резултат на Глава 3 (19 страници) и двете структури са интегрируеми.

Апробация на резултатите

Основните резултати на дисертацията са публикувани в три статии. Те са представени и на конференцията "Седмица на математиката и информатиката", България, 2024 г.

Автореферат.

Авторефератът е изготвен съгласно изискванията и правилно отразява съдържанието на дисертацията.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Документите и материалите, представени от ас. Марина Чомакова, отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и Правилника за реда и условията за получаване на академична степен и заемане на академична длъжност на СУ "Св. Кл. Охридски".

Макар теорията на паракватернионните контактни многообразия да се развива паралелно на кватернионно контактния случай, в дисертацията са преодоленни редица технически трудности и са получени важни резултати. Без съмнение работата на Марина Чомакова заслужава висока оценка.

Въз основа на гореизложеното давам положителна оценка за проведеното изследване в рецензираната дисертация и предлагам на научното жури да гласува за присъждане на ас. Марина Павлова Чомакова на научната и образователна степен "доктор" в област на висшето образование 4. Природни науки, Математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, научна специалност "Геометрия".

31.08.2025

Изготвил становището:

(проф. дмн Йохан Давидов)