

# Становище

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:

*„Subdifferential analysis of convex-like functions“*

за придобиване на  
образователна и научна степен „доктор“  
от

докторант: **Матей Боянов Константинов**

в област на висше образование: **4. Природни науки, математика и информатика,**

професионално направление: **4.5. Математика,**

докторска програма: **Изследване на операциите на Факултет по математика и информатика (ФМИ) на СУ „Св. Климент Охридски“**

Рецензията е изготвена от проф. дмн Михаил Иванов Кръстанов, в качеството му на член на научното жури, съгласно Заповед № РД 38-113/06.03.2023 г. на Ректора на СУ „Св. Климент Охридски“.

## 1. Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали

Представените материали са изготвени в съответствие със Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за приложение на ЗРАСРБ, както и с Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности (ПУРПНСЗАД) в СУ „Св. Кл. Охридски“. Те включват: Дисертация на английски език; Автореферат на български език; Автобиография на български език; Списък от научни публикации по темата на дисертацията; Справка за изпълнението на минималните изисквания по член 2б, ал. 2 и 3 от ЗРАС на РБ; Заявление от докторанта; Декларация на докторанта за оригиналност и липса на плагиатство; Доклад от научния ръководител; Доклад за сходство; Отчет от софтуерния продукт StrikePlagiarism.com за липса на плагиатство; Протокол за проверка на оригиналност; Становище във връзка с процедурата за предотвратяване на плагиатство, подписана от научния ръководител, и други.

Дисертационният труд на докторанта Матей Константинов е с обем от 79 страници и съдържа увод, три глави, в които са изложени получените резултати, заключение, апендикс и библиография от 55 заглавия. Написан е на английски език. В Увода е направена кратка мотивация на изследванията, дефинирани са някои от основните понятия, използвани в дисертационния труд и са представени основните получени резултати. В първа глава се дефинират и изследват  $\gamma$ -равномерно проксимално регулярни подмножества на хилбертови пространства. Във втора глава се разглеждат регулярни функции с квадратична оценка отдолу. В трета глава е представено едно ново доказателство на класическата теорема на Moreau-Rockafellar за интегрируемост на субдиференциала на полунепрекъснати отдолу изпъкнали функции, дефинирани в банахово пространство. За удобство на

читателя, някои добре известни факти, както и доказателства на известни твърдения, използвани в дисертационния труд, са събрани в апендикс.

## **2. Данни и лични впечатления за кандидата**

От представената творческа автобиография се вижда, че Матей Константинов е роден на 5.09.1994 г.. Висшето си образование е завършил във Факултета по математика и информатика на Софийския университет, като през 2017 година получава бакалавърска степен, а през 2019 година – магистърска степен. И двете са по специалност “Приложна математика”. Още като студент той печели сребърни медали от Националната студентска олимпиада по компютърна математика през 2015 г., 2016 г., 2017 г. и 2018 г., както и бронзови медали от Национална студентска олимпиада по математика през 2015г. и 2017 г.. От 10 февруари 2020 г. до 10 февруари 2023 година е редовен докторант в докторска програма „Изследване на операциите“ на ФМИ, СУ с научен ръководител проф. дн Надя Златева.

Познавам Матей Константинов още като студент. Направи ми силно впечатление със своето сериозно отношение към математиката. С каквото и да се заеме, той се стреми да го разбере до най-малките подробности. Нещо повече, Матей Константинов може и да обяснява сложни математически въпроси по един разбираем и достъпен начин. И затова неговите студенти го харесват и уважават.

## **3. Съдържателен анализ на научните постижения на кандидата, съдържащи се в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени в процедурата**

В увода на представения дисертационен труд е направен кратък исторически преглед на известните до този момент резултати по темата на дисертацията и са представени основните резултати, получени от автора.

В първа глава се разглеждат  $r$ -равномерно проксимално регулярни подмножества (uniformly prox-regular subsets with constant  $r$ ) на хилбертови пространства. В началото авторът прави кратък исторически преглед на това понятие. След това са въведени използваните означения, дадени са необходимите дефиниции и са формулирани някои свойства на тези множества (Теорема 1.1.3). Останалата част на първа глава е посветена на доказателството на една нова вътрешна характеристика на  $r$ -проксимално регулярно подмножество на едно хилбертово пространство (Теорема 1.1.1), която е един от основните резултати в този дисертационен труд. В тази теорема са формулирани три свойства. За тях е доказано, че са еквивалентни. Съответното доказателство е свързано с дълги пресмятания. Чертежите, направени от Матей Константинов, улесняват четенето и разбирането на това доказателство.

Във втора глава се изучават функции с квадратична оценка отдолу (epi uniformly lower regular functions). И тук, в началото на тази глава е направен кратък исторически преглед на статиите, в които се изследва това понятие. След това са дефинирани използваните означения и са въведени необходимите понятия, които се използват в тази глава. Основните резултати (Теорема 2.2.1 и Теорема 2.2.2) дават връзка между функции с квадратична оценка отдолу и техните епиграфики. По-конкретно, в Теорема 2.2.1 е доказано, че ако една функция е епи  $r$  регулярна отдолу, то епиграфиката ѝ е епи  $r$  проксимално регулярно множество. В Теорема 2.2.2 е доказано, че ако епиграфиката

на една функция е епиграфично проксимално регулярно множество, то съществува  $\rho'$ , така че съответната функция е епиграфично  $\rho'$  регулярна отдолу. Тук трябва да отбележим, че ако епиграфичната на една функция е епиграфично проксимално регулярна, но обратното не е вярно. Използвайки Теорема 1.1.1., са доказани някои свойства на епиграфично проксимално регулярни множества (Теорема 2.3.1. и Теорема 2.3.2.). Като следствие от Теорема 2.2.1, Теорема 2.2.2, Теорема 2.3.1. и Теорема 2.3.2 е получена характеристика на свойството епиграфично проксимално регулярност на една собствена полунепрекъсната отдолу функция (Теорема 2.4.1). Получено е и едно следствие за точките от графиката на тази функция.

В трета глава е представен вариант на  $\epsilon$  субдиференциалния метод, който е приложен към собствена изпъкнала полунепрекъсната отдолу функция. В началото на тази глава са въведени използваните означения, формулирани са две твърдения, доказани от Brøndsted и Rockafellar, и е доказана Лема 3.1.5, която дава една полезна оценка. Тази оценка се използва за да се докаже, че броят на итерациите на представения  $\epsilon$  субдиференциалния метод е краен (получена е оценка отгоре за техния брой). Като приложение на този резултат е получено ново доказателство на теоремата на Moreau-Rockafellar за интегрируемост на субдиференциала на полунепрекъснати отдолу изпъкнали функции, дефинирани в банахово пространство: ако в едно банахово пространство са дефинирани две полунепрекъснати отдолу изпъкнали функции, като субдиференциалът на едната се съдържа в субдиференциала на другата, то тези две функции се различават с константа.

Използваните литературни източници са 55 на брой. Подредени са във възходящ ред по отношение на фамилията на първия автор съгласно стандартната лексикографична наредба. Тези източници показват отлично познаване на научната област на дисертацията от докторанта. Може би тук играе важна роля фактът, че неговият научен ръководител заедно с доцент Милен Иванов активно работят в областта на вариационния анализ.

#### 4. Аprobация на резултатите

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в 3 статии, всичките в реномирани списания с импакт фактор или импакт ранг:

**M. Konstantinov, N. Zlateva**, Epsilon subdifferential method and integrability, *Journal of Convex Analysis* 29 (2021), 571-582.

**M. Konstantinov, N. Zlateva**, Direct proofs of intrinsic properties of prox-regular sets in Hilbert spaces, *Journal of Applied Analysis* (2023) (to appear).

**M. Konstantinov, N. Zlateva**, Epigraphical characterization of uniformly lower regular functions in Hilbert spaces, *Journal of Convex Analysis* (2023) (to appear).

Наукометричните показатели на тези статии, сравнени с минималните изисквания за образователна и научна степен „доктор“, съгласно Постановление № 26 от 13 февруари 2019 г. за изменение и допълнение на Правилника за прилагане на Закона за развитието на академичния състав в Република България, приет с Постановление № 202 на Министерския съвет от 2010 г. (обн., ДВ, бр. 75 от 2010 г.; изм. и доп., бр. 19 от 2011

г., бр. 9 от 2012 г., бр. 62 от 2013 г., бр. 60 от 2014 г., бр. 57 от 2015 г. и бр. 56 от 2018 г.) са както следва: Всички публикации от Група Г и събират общо 102 точки, при минимални изисквания от 30 точки за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в научната област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика. Първата публикация е в Q4 на Web of Science и се оценява с 36 точки, втората е в Q4 на Scopus и се оценява с 30 точки, а третата е в Q4 на Web of Science и се оценява с 36 точки. Получените 102 точки значително (повече от 3 пъти) надвишават минималните изисквания за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в научната област и професионално направление на процедурата

Въз основа на представените материали, рецензентът приема, че няма доказано по законоустановения ред плагиатство в представения дисертационен труд и научните статии по тази процедура.

Резултати от дисертацията са представени от автора досега със следните доклади:

**M. Konstantinov**, N. Zlateva, Epsilon Subdifferential Method And Integrability, 15-th International Workshop on Well-Posedness of Optimization Problems and Related Topics, June 28-July 2, 2021, Borovets, Bulgaria, <http://www.math.bas.bg/~bio/WP21/>;

**M. Konstantinov**, N. Zlateva, Direct proofs of intrinsic properties of prox-regular sets in Hilbert spaces, Spring Scientific Session, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University “St. Kliment Ohridski”, 26 March, 2022, Sofia, Bulgaria, <https://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/proletna-nauchna-sesiya-na-fmi-2022/>;

**M. Konstantinov**, N. Zlateva, Epsilon Subdifferential Method and Integrability, 10-th International Conference on Numerical Methods and Applications, August 22-26, 2022, Borovets, Bulgaria, <http://www.math.bas.bg/~nummeth/nma22/index.html>.

## 5. Качества на автореферата

Авторефератът е написан на български език и е в обем от 28 страници. Той точно отразява съдържанието на дисертационния труд и съответства на изискванията на ЗРАСРБ и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в СУ „Климент Охридски“. Номерацията на твърденията, дефинициите, литературните източници и други в автореферата и в дисертационния труд съвпадат, което улеснява четенето. Направи ми добре впечатление чертежът, с който се визуализира разгледания от него вариант на  $\epsilon$  субдиференциалния метод.

## 6. Критични бележки и препоръки

Струва ми се, че дисертацията би спечелила, ако докторантът бе отделил малко повече място в началото на всяка глава за да обясни идеите на доказателствата, да подчертае трудностите, които е преодолял. Всичко това би направило по-четим този дисертационен труд.

## 7. Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го публикации и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащи се в тях научни резултати, **потвърждавам**, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението на ЗРАСРБ и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности (ПУРПНСЗД) в СУ за придобиване от кандидата на образователната и научна степен „доктор“ в научната област: **4. Природни науки, математика и информатика**, професионално направление: **4.5. Математика, докторска програма „Изследване на операциите“** на Факултет по математика и информатика (ФМИ) на СУ „Св. Климент Охридски“. Искам да подчертая, че качествата на дисертационния труд значително превишават минималните национални изисквания в професионалното направление. Тук трябва да отбележа, че не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

Въз основа на гореизложеното, **убедено препоръчвам** на научното жури да присъди на **Матей Боянов Константинов** образователната и научна степен „доктор“ в научна област: **4. Природни науки, математика и информатика**, професионално направление: **4.5. Математика, докторска програма „Изследване на операциите“** на Факултет по математика и информатика (ФМИ) на СУ „Св. Климент Охридски“.

29.05. 2023. г.

Изготвил рецензията:

/проф. дмн Михаил Иванов Кръстанов/

---