

РЕЦЕНЗИЯ

на дисертационен труд
за придобиване на научната степен “Доктор на науките”

Област 4: “Природни науки, математика и информатика”

Научно направление 4.5: “Математика”

Тема: “Ефективна теория на моделите:
скок на структура, кодиране и декодиране”

Автор: проф. д-р Александра Андреева Соскова

Тема на дисертационния труд

Представеният дисертационен труд е посветен на ефективната теория на моделите и изследва връзките между определимост и изчислимост в математическите структури. Целта на автора е да развие методи за оценка на сложността на математически структури като работата е фокусирана върху изследването на обекти с изброим носител.

Дисертационният труд обхваща и обобщава изследванията на автора през последните 10-15 години. Някои от по-важните задачи, разгледани в дисертационния труд са следните:

- (1) Да се въведе понятие скок на структура, като аналог на Тюринговия скок и да се изследват различни структурни свойства, в частност, теореми за обръщане на скока. Да се изследват специални въпроси като, например, дали е вярно, че множеството от всички скокове на елементите на спектъра е също спектър.
- (2) Да се намерят теоретико-моделни условия, при които една структура допуска строго обръщане на скока.
- (3) Да се изследват ефективни вложения на един клас структури в друг. Да се изясни въпроса за съществуването на ефективно декодиране за специални класове, които са на върха на Тюрингово изчислимите вложения.
- (4) Да се изследва въпроса за това дали кохезивните степени на всеки две копия на една изчислима наредба са наредби от един и същи тип.

- (5) Да се изследват подструктури в степенната структура на \mathcal{D}_e на номерационните степени, различни от тоталните и непрекъснатите степени, имащи интересни свойства.

Литературен обзор

Общото ми впечатление е, че проф. Соскова познава отлично съвременното състояние на разглежданите проблеми. Голяма част от изследванията ѝ са върху един кръг от задачи от теория на моделите и теория на изчислимостта, считани като значими, както в теоретичен план, така и за приложенията. Направеният литературен обзор и големият брой цитирани източници демонстрират както дълбоко познаване на областта на изследванията, така и възможности творчески да я развива.

Методика

В изследванията си дисертантът използва основно езика на теория на множествата, комбинаторни методи, както и методи, типични за ефективна теория на моделите (метод на форсинга). Дисертацията има допирни точки с някои области на абстрактната алгебра.

Съдържание и резултати на дисертационния труд

Дисертационният труд е в обем от 270 нестандартни машинописни страници и се състои от увод, шест глави и списък на използваната литература, включващ 162 заглавия. По-долу ще изложим накратко съдържанието на отделните глави от дисертацията.

Глава 1 е уводна. Тя съдържа кратко изложение на съдържанието на дисертацията по глави. Представени са кратки сведения за еволюцията на разглежданите понятия, както и някои идеи, мотивиращи последващите изследвания.

В **глава 2** не се съдържат оригинални резултати. Тя е посветена на въвеждането на някои важни понятия и методи, които са централни за разглеждания дисертационен труд. Тук се включват изчислимост по Тюринг, генеричност и форсинг, изчислима сводимост, спектър на степените, определимост (дефинируемост).

В **глава 3** се изследва понятието скок на структура, въведено от А. Соскова и И. Сосков, което е обобщение на относителната изчислимост на Московакис. В последните години то е развито от редица изследователи, между които е и авторът на този дисертационен труд.

По важните резултати в тази глава се свеждат до следните. Доказана е Теорема 3.2.1, съгласно която скокът на структура е спектър или, по-конкретно, за всяка структура \mathcal{A} съществува структура \mathcal{B} , за която $DS_1(\mathcal{A}) = DS(\mathcal{B})$. По-нататък е доказан резултат за обръщане на скока (Теорема 3.3.9). Ако \mathcal{A} и \mathcal{B} са структури,

за които $DS(\mathcal{A}) \subseteq DS_1(\mathcal{B})$, то тогава съществува структура \mathcal{C} , за която е изпълнено $DS(\mathcal{C}) \subseteq DS(\mathcal{B})$ и $DS_1(\mathcal{C}) = DS(\mathcal{A})$.

Получените резултати са използвани по-нататък върху n -тия скок на структурата \mathcal{A} , дефиниран като $DS_n(\mathcal{A}) = \{\mathbf{d}^n : \mathbf{d} \in DS(\mathcal{A}), \text{ където } 1 \leq n < \omega\}$. Доказано е, че ако $DS(\mathcal{A}) \subseteq DS_n(\mathcal{B})$, то съществува структура \mathcal{C} , за която $DS(\mathcal{C}) \subseteq DS(\mathcal{B})$ и $DS_n(\mathcal{C}) = DS(\mathcal{A})$ (Теорема 3.4.2). Друг важен резултат в тази глава е Теорема 3.4.8, според която за всяко $n \in \mathbb{N}$ и всяка Тюрингова степен $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}^n$ съществува структура \mathcal{C} , за която $DS_n(\mathcal{C}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} > \mathbf{d}\}$.

В **глава 4** се разглежда понятието строго обръщане на скока. Една структура допуска строго обръщане на скока, ако удовлетворява следното условие: за всеки оракул X , ако X' изчислява $D(\mathcal{C})'$ за някакво изоморфно копие \mathcal{C} на \mathcal{A} , то X пресмята $D(\mathcal{B})$ за някакво $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$.

В тази глава са намирани моделно-теоретични условия за това една структура \mathcal{A} да допуска строго обръщане на скока (Теорема 4.2.5). Доказано е че много от известните класове от структури удовлетворяват условията на Теорема 4.2.5. Това са някои специални класове от линейни наредби (Теорема 4.3.2 и 4.3.3); булеви алгебри без 1-атоми (Твърдение 4.3.6); модели на елементарни теории от първи ред, за които множеството на всички Σ_2 -теорема е рекурсивно номеруемо (Теорема 4.3.13); диференциално затворени полета с характеристика 0 (Теорема 4.33). Доказано е, че наситеният модел на диференциално затворените полета с характеристика 0 има силно затворено копие (Следствие 4.3.36).

Глава 5 разглежда един нов подход към алгоритмичната сложност на алгебрични структури. Нека \mathcal{K} и \mathcal{K}' са два класа структури, а Θ е изчислимо по Тюринг влагане на \mathcal{K} в \mathcal{K}' , за който

$$\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{K} \iff \Theta(\mathcal{A}_1) \cong \Theta(\mathcal{A}_2).$$

По-късно други автори въвеждат изчислими функтори, които са по-силна версия на изчислимото влагане по Тюринг.

По-важните резултати в глава 5 са следните:

Съществува граф G , такъв че за всяка линейна наредба L графът G не може да бъде редуциран по Медведев до скока L' (Твърдение 5.2.4). От друга страна за всеки граф H съществува линейна наредба L , за която H е сводим по Медведев до втория скок $L^{(2)}$.

В края на 80-те години Фридман и Стенли построяват изчислимо по Тюринг влагане от класа на всички графи в класа на всички линейни наредби. В теорема 5.2.7 е доказано, че не съществуват $L_{\omega_1, \omega}$ формули, които за всички графи интерпретират G в $L(G)$.

Раздел 5.3. е посветен на въпроса за интерпретиране на поле в групата на Хайзенберг. Те продължават един резултат на Малцев, съгласно който за всяко поле F съществува негово копие дефинирано в групата на Хайзенберг $H(F)$ чрез екзистенциални формули с параметри. В Теорема 5.3.13 е доказано, че съществуват

екзистенциални формули без параметри, които дефинират ефективно интерпретиране на F в $H(F)$. По-нататък са доказани достатъчни условия за елиминиране на параметри (Теорема 5.49).

В края на главата в твърдение 5.5.1 е доказано, че всяко алгебрично затворено поле C с характеристика 0 може да се интерпретира в $SL_2(C)$ чрез екзистенциални формули, зависещи от два параметъра.

Глава 6 разглежда ефективни версии на някои моделно-теоретични конструкции. Централен проблем тук е изясняването на въпроса кога изоморфни изчислими линейни наредби индуцират изоморфни кохезивни степени. По-важните резултати се съдържат в Теорема 6.4.4, 6.6.2, 6.6.4, 6.6.5, както и в Следствия 6.4.6 и 6.6.2.

Глава 7 съдържа резултати за номерционните степени на подмножества на \mathbb{N} . Съществува естествено влагане на структурата на Тюринговите степени \mathcal{D}_T в структурата на номерационните степени \mathcal{D}_e . Централен проблем тук е изследването на структурните свойства на други естествени подструктури на \mathcal{D}_e . Важни резултати се получени в Теорема 7.5.4 и 7.6.1, където е показано че веригата от включвания “граф кототални – кототални – слабо кототални” множества е строга. Други съществени резултати в тази глава са Твърдение 7.3.1, Теорема 7.4.3 и Теорема 7.4.17.

Приноси на дисертационния труд

Някои от по-важните приноси в дисертационния труд са свеждат до следното:

- (1) Доказано е, че всеки скок спектър е спектър.
- (2) Доказани са резултати за n -тия скок спектър.
- (3) Доказани са резултати за обръщане на скока.
- (4) Доказани са условия за това една структура да допуска строго обръщане на скока.
- (5) Доказани са ефективни версии на някои моделно-теоретични конструкции.
- (6) Доказани са резултати за интерпретиране на полета с характеристика 0 в групата на Хайзенберг.
- (7) Доказано е, че веригата от включвания “граф кототални – кототални – слабо кототални” множества е строга.
- (8) Изследвани са структурни свойства на някои подструктури на структурата на номерационните степени.

Забележки и коментари по дисертационния труд

Във връзка с дисертационния труд имам следните забележки, въпроси и коментари:

- (1) Работата е изключително добре оформена. Видни са огромните усилия за създаване на един огромен като обем и в същото време прегледен текст.
- (2) Не ми е ясна разликата между теорема и твърдение. Така например, доказателството на теорема 3.2.1 използва две твърдения и една лема.
- (3) Тъй като една част от работите по дисертацията са написани в съавторство, добре би било на съответните места да се отделят приносите на съавторите. В същото време съзнавам, че в повечето случаи това едва ли е възможно, тъй като резултати често се получават паралелно като в окончателната публикация влизат тези доказателства, които са най-подходящи.

Публикации по дисертационния труд

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в осем статии. Четири от статиите са в списания с импакт-фактор:

- Journal of Logic and Computation (2008,2019) – IF 0.789; 0.86
- Journal of Symbolic Logic (2019) – IF 0.642
- Transactions of the American Mathematical Society (2019) – IF 1.422

Останалите четири статии са в сборници с доклади от конференции: две са публикувани в поредицата Lecture Notes in Computer Science и други две са в докладите, съответно, на 6-тия и 7-ия Общогръцки симпозиум по логика (Panhellenic Logic Symposium).

Резултатите от дисертационния труд са представени за публикуване и в две други работи, които са в процес на рецензиране.

Представените от дисертанта публикации напълно отговарят на минималните национални изисквания по т. 7 (показател 7).

Авторство на получените резултати

В излезлите от печат осем работи, които са включени в дисертационния труд, една е самостоятелна, три са с един съавтор, една е с двама, една с пет и две с шест съавтори. В края на реферата е посочено, че в работите, написани в съавторство, приносът на дисертанта е равностоен на този на останалите съавтори. Приемам това заявление, още повече че в редица случаи реалният принос трудно може да се определи точно.

Цитирания на публикациите от дисертационния труд

Дисертантът е приложил списък на 78 цитирания на статиите, в които са публикувани резултатите от дисертационния труд. В материалите към дисертационния труд е направено описание на местата, където се появяват тези цитирания. Приемам, че резултатите са известни и добре приети в професионалната общност.

Автореферат и авторска справка

Авторефератът и авторската справка са направени съгласно изискванията и отразяват правилно резултатите и приносите в дисертационния труд.

Заклучение

Дисертацията е посветена на един кръг от задачи от ефективна теория на моделите, които имат както теоретично, така и определено практическо значение. Те хвърлят светлина върху фундаменталния въпрос за това как структурните ограничения влияят на алгоритмичните свойства на обектите. В дисертационния труд са доказват резултати и са развити техники, позволяващи да се сравняват свойства, отнасящи се до изчислимостта в различни структури. С това този труд не само отговаря на голям брой въпроси от принципна важност за теорията, но и разкрива нови посоки за изследване.

Считам, че представеният дисертационен труд “Ефективна теория на моделите: скок на структура, кодиране и декодиране” с автор Александра Андреева Соскова съдържа резултати, които представляват оригинален принос в ефективна теория на моделите. Считам, че трудът отговаря на изискванията на “Закона за развитие на академичния състав в Република България”, Правилника за прилагането му и Правилника на СУ за присъждане на научната степен “Доктор на науките”. Гореизложеното ми дава основание да дам **положителна оценка** на представения дисертационен труд и да препоръчам на Уважаемото Жюри да присъди на Александра Андреева Соскова научната степен “Доктор на науките” в област 4 “Природни науки, математика и информатика”, научно направление 4.5 “Математика” (Математическа логика).

София, 17.03.2021 г.

Рецензент:

(проф. д.м.н. Иван Ланджев)