Р Е Ц Е Н З И Я

на дисертационен труд за присъждане на научната степен **доктор на науките**
в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление 4.5. Математика;
научна специалност Геометрия и топология

Автор: доц. д-р Иван Минчев Минчев, катедра Геометрия при ФМИ на СУ "Климент Охридски"

Тема на дисертационния труд: *Геометрия на кватернионно-контактните многообразия и проблем на Ямабе*

Рецензент: доц. д-р Георги Тодоров Ганчев, асоцииран член на ИМИ при БАН, пенсионер

Със заповед No РД 38–113 от 19.02.2020 г. на Ректора на Софийския университет "Климент Охридски"(СУ) съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на настоящия дисертационен труд.

1. Общо представяне на получените материали

Представеният от доц. Иван Минчев комплект материали е в съответствие с Правилника за развитие на академичния състав на СУ и включва следните документи:

1) автобиография в европейски формат;
2) копие от дипломата за висше образование;
3) копие от дипломата за образователната и научна степен "доктор";
4) автореферат на английски и български;
5) дисертационен труд на английски;
6) декларация за оригиналност и достоверност на приложените документи;
7) справка за изпълнението на минималните изисквания по чл. 2б от ЗРАСРБ;
8) копия на научните публикации;
9) копие на дипломата за хабилитация по математика от Германия;
10) CD с приложените документи.

2. Кратки биографични данни за кандидата

Иван Минчев е роден на 12.06.1975 г. в София. През периода 1995–2001 г. завършва висшето си образование по специалността *математика* в СУ със защита на дипломна работа. От 2002 до 2005 г. е редовен докторант в катедра "Геометрия" с тема на дисертационния труд: *Диференциална геометрия на метрични свързаности с торзия.* След защита на дисертационния труд през 2006 г. получава ОНС "доктор" по специалността Геометрия и Топология. От Октомври 2006 г. до Ноември 2008 г. специализира в Хумболтовия университет в Берлин, Германия, а от Ноември 2008 г. до Март 2012 г. специализира във Филипс университета в Марбург, Германия. Тази специализция завършва с хабилитация пред авторитетна международна комисия през 2012 г. През периода Май 2012 г. – Май 2013 г. е главен асистент в катедра Геометрия на ФМИ при СУ, а от Май 2013 г. е доцент в същата катедра. Ще отбележим и специализацията в Мазарик университета в Бърно, Чехия от Ноември 2013 до Ноември 2016 г.

3. Актуалност на тематиката

Настоящият дисертационен труд е посветен на диференциалната геометрия на кватернионно-контактните (QC-) многообразия, като специално внимание е отделено на QC-проблема на Ямабе. Понятието QC-геометрия се появява преди около 20 години и е обект на интензивно изследване през тези две десетилетия. Като известни математици, поставили основите на тази съвременна теория, ще споменем LeBrun и Biquard.

4. Познаване на проблема и методика на изследването

Постройката и организацията на дисертационния труд показват високо професионален подход към изучаването на поставения проблем.

Избраната методика е подходяща за решаването на поставените задачи. Получените резултати недвусмислено показват високата степен на познаване на проблема и владеене на специфичните методи на изследване на разглежданите многообразия.

5. Характеристика и оценка на дисертационния труд

В дисертационния труд се третира важна и актуална проблематика от QC-геометрията. Трудът е в обем 212 стандартни страници. Изложението е разпределено в 5 глави, включително библиография, състояща се от 91 заглавия.

Под QC-структура H върху (4n+3)-мерно многообразие M^{4n+3} се разбира $4n$-мерно разпределение върху M, което локално се задава като ядро на $\mathbb{R}^3$-значна 1-форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, за която рестрикциите върху H на трите 2-форми $d\eta_i|_H$ са фундаментални форми на кватернионна сруктура върху H. В исторически аспект 4-мерните автодуални (self-dual) Айнщайнови метрики могат да се разглеждат като кватернионно-Келерови метрики с размерност 4. Тогава QC-геометрията може да се разглежда като естествено обобщение на тримерната конформна Риманова геометрия за размерности от вида $4n + 3$.

Впечатляващ резултат в настоящия труд е пълното решаване на проблема на Ямабе върху кватернионната група на Хайзенберг $\mathbb{G}(H)$.

QC-конформните трансфрмации на 1-формата η, запазващи QC-структурата H, имат вида $\tilde{\mu} = \mu\Psi\,\eta$, където μ е положителна функция, а Ψ е $SO(3)$-значна функция върху M. Върху M съществува канонично определен конформен клас от метрики $[g]$ на разпределението H и кватернионна структура Q. Към всяка фиксирана метрика g от класа $[g]$ се асоциира еднозначно определена линейна свързаност върху M (свързаност на Бикар), запазваща QC-структурата и метриката g. Важна инварианта на едно QC-многообразие (M, H) е скаларната кривина $Scal$ на свързаността на Бикар. Най-общо казано, проблемът на Ямабе се състои в намирането на метриките g от класа $[g]$, за които $Scal = const$.

Втора глава е посветена на QC-проблема на Ямабе в QC-геометрията. Предшественици на този проблем в класическата теория са съответните проблеми в Римановия случай и CR-случая. Важна роля при решаването на двата класически случая играе изследването на плоския модел, който се дава от съответната група на Хайзенберг. В QC-геометрията тази роля се изпълнява от кватернионната група на Хайзенберг. В тази глава се дава частично решение на проблема на Ямабе за кватернионната група на Хайзенберг. Пробемът на Ямабе заема важно място в изследванията на редица водещи математици през последните десетилетия. Не може да не отбележим, че успешните изследвания в съвременния вариант на тази проблематика стават с решителното участие на автора и редица български диференциални геометри.

Основни теореми в тази глава са теореми A, B и C.

В Теорема A се разглеждат конформните трансформации $\Theta = \dfrac{1}{2h}\,\tilde{\Theta}$ на стандартната структура върху $G(H)$. При условие, че новата структура е отново Айнщайнова, се намират експлицитно всички глобални функции h върху кватернионната група на Хайзенбрг с това свойство. Методът на изследване тук е детайлното изучаване на свойствата на свързаността на Бикар, базирано на отличното познаване на класическите случаи.

Трансформцията на Кели е аналог на стереографската проекция в Римановата геометрия. Тази трансформация дава естествено отъждествяване на S^{4n+3} без една точка с кватернионната група на Хайзенберг $\mathbb{G}(H)$ с размерност $4n+3$.

Използвайки трансформацията на Кели и Теорема А, авторът доказва Теорема В, която дава частично решение (с изключение на един непълен случай) на QC-проблема на Ямабе върху S^{4n+3}. В Теорема В се разглеждат конформните трансформации $\eta = f\,\tilde{\eta}$ на стандартната контактна форма $\tilde{\eta}$ върху S^{4n+3} при предположение, че новата форма η има постоянна QC-скаларна кривина $Scal = const$.

При размерност $n > 1$ Теорема B дава пълно описание на функциите f. В случая $n = 1$ тези функции се описват при допълнителното предположение, че съответното на η вертикално разпределение е интегруемо.

В Теорема С се разглежда QC-многообразие M с положителна QC-скаларна кривина $Scal > 0$. В случая $n = 1$ се прави допълнителното предположение $Scal = const$. Тогва твърденията:

i) M е QC-Айнщайново многообразие;

ii) М е локално 3-Сасакиево многообразие;

iii) линейната свързаност на Бикар е симетрична,

са еквивалентни.

В хода на доказателството на горната теорема ще споменем важния резултат Теорема 5.9:

Скаларната QC-кривина на всяко QC-Айнщайново многообразие $(n > 1)$ е константа и вертикалното допълнение V на структурата е интегруемо разпределение. Върху

7-мерно QC-Айнщайново многообразие ($n = 1$) QC-скаларната кривина е константа точно когато V е итегруемо разпределение.

Теоремите се отличават с максимална стегнатост и максимално опростени формулировки, което се постига с отлично познаване на литературата и задълбочено изследване на поставените проблеми. В този контекст ще споменем и Теорема 8.10, в която се доказва, че всяко от векторните полетата на Рийб е QC-векторно поле точно когато QC-структурата на многообразието е хомотетична на 3-Сасакиева структура.

Глава 3. Тук се попълват нерешените случаи от Глава 2. Основна теорема в тази глава е Теорема D, в която се доказва, че QC-скаларната кривина на всяко 7-мерно QC-Айнщайново многообразие е константа. Като следствие от Теорема D се доказва, че в случая $n = 1$ съответното на η вертикално разпределение е интегруемо. Този реултат допълва Теорема B.

Теорема D и Теорема 5.9 дават пълно доказателство на факта, че QC-Айнщайновите многообразия с произволна размерност имат постоянна QC-скаларна кривина.

С този резултат авторът и неговите (български) съавтори се нареждат сред класиците в тази тематика.

В Теорема C отпада допълнителното изискване за QC-Айнщайновите многообразия с размерност 7. Тук методът на изследване е много интересен, тъй като включва конструирането на специална линейна свързаност $\tilde{\nabla}$ върху каноничното вертикално разпределение V на разпределението H. С помощта на тази линейна свързаност се доказва забележителната Теорема 11.3:

Едно QC-многообразие е QC-Айнщайново точно когато линейната свързаност $\tilde{\nabla}$ е плоска.

По този начин Теорема C става пълна и обхваща всички случаи. Второто условие в Теорема C се допълва така: Ако QC-многообразието M е с отрицателна QC-скаларна кривина $Scal < 0$, то (M, h) се оказва локално негативно 3-Сасакиево многообразие. Ако $Scal = 0$, то полетата на Рийб на QC-структурата са отново Килингови полета за Римановата метрика h, които комутират помежду си в този случай.

Глава 4. Тук основни теореми са Теорема E и Теорема F.

Нека $\tilde{\eta} = \dfrac{1}{2h}\,\eta$ е конформна деформация на стандартната контактна 1-форма $\tilde{\eta}$ върху единичната сфера S^{4n+3}, $n > 1$. Ако 1-формата η е с постоянна QC-скаларна кривина, в Теорема B беше доказано, че с точност до мултипликативна константа η е 1-форма от вида $\phi^*(\tilde{\eta})$, където ϕ е произволен конформен QC-автоморфизъм върху сферата. В случая $n = 1$ това твърдение следваше при допълнителното предположение, че вертикалното допълнение на η е интегруемо разпределение върху сферата. В Теорема E допълнителното предположение се отстранява и се получава пълно решение на Проблема на Ямабе за S^7.

Доказателство за задълбоченото познаване на третираната от автора проблематика е намирането на връзка между проблема на Ямабе за S^7 и неравенството на Фоланд и Щайн за кватернионната група на Хайзенберг $\mathbf{G}(\mathbb{H})$.

Неравенството на Фоланд и Щайн за $\mathbf{G}(\mathbb{H})$ е аналог на неравенството на Соболев за $\mathbb{R}^n$: Съществува константа $S > 0$, такава че за всяка гладка функция u с компактен носител върху $\mathbf{G}(\mathbb{H})$ е изпълнено неравенството (3.3) от дисертацията. Авторът поставя и решава следния естествен проблем:

Да се намери най-малката константа $S > 0$ в неравенството на Фоланд и Щайн и да се намерят функциите u, за които неравенството се превръща в равенство.

Транслациите и дилатациите на $\mathbf{G}(\mathbb{H})$ са преобразувания на групата, които запазват разпределението H. Тези преобразувания носят общото наименование конформни QC-автоморфизми на групата.

В Теорема F е намерена най-добрата константа S_2 за L^2-неравенството на Фоланд и Щайн върху 7-мерната група на Хайзенберг $\mathbf{G}(\mathbb{H})$ и функцията v, която дава конкретна екстремала на това неравенство. Всички неотрицателни екстрмали на неравенството се получават от v чрез конформен автоморфизъм на групата.

В Глава 5 се третира L^2-неравенството на Фоланд и Щайн върху кватернионната група $\mathbf{G}(\mathbb{H})$ с произволна размерност. Тук основна теорема е Теорема G, в която е намерена най-добрата константа S_2 и конкретна фамилия от неотрицателни функции F, които превръщат неравенството в равенство; всички неотрицателни функции, които минимизират неравенството, се получават от функциите F чрез конформен автоморфизъм на групата. Намерена е и QC-константата λ на Ямабе за стандартната QC-сфера S^{4n+3}.

6. Приноси и значимост на разработката

Основните научни приноси на кандидата имат характер на обосноваване, формулиране и решаване на проблеми, които са важна част от съвременното развитие на тази проблематика в международен аспект. Тези приноси могат да се обединят както следва:

- Експлицитно описание на конформните деформации на стандартната QC-структура върху кватернионната група на Хайзенберг, които я трансформират отново в QC-Айнщайнова структура.

- Пълно описание на конформните трансформации на стандартната контактна 1-форма върху сферата S^{4n+3}, които я трансформират в 1-форма с постянна QC-скаларна кривина, което дава пълно решение на QC-проблема на Ямабе върху S^{4n+3}.

- Доказателство на факта, че скаларната QC-кривина на всяко QC-Айнщайново многообразие е константа и характеризиране на QC-Айнщайновите многообразия като 3-Сасакиеви многообразия.

- Намиране на най-добрата константа в неравенството на Фоланд и Щайн и описание на функциите, за които неравенството се превръща в равенство.

- Намиране на QC-константата на Ямабе за стандартната QC-сфера S^{4n+3}.

7. Публикации и цитирания

Представеният дисертационен труд отговаря на специфичните изисквания на ФМИ при СУ за придобиване на научната степен **доктор на науките** по професионално направление 4.5. математика. Представени са 2 статии, публикувани в следните научни списания:

[IMV]: Memoirs of the American Mathematical Society, IF 1,727, Q1;

[IMV]: Mathematical Research Letters, IF 0,716, Q2.

Представените 2 статии са съвместни с по двама съавтори. Несъмнено приносите на дисертанта в съвместните научни публикации са най-малко равностойни на неговите съавтори. Представените трудове са с много висок рейтинг и нареждат автора сред водещите изследователи в тематиката.

Авторът е представил 13 впечатляващи цитирания в статии само от групата Q1 и Q2.

8. Автореферат

Авторефератът е направен според изискванията и отразява точно и пълно основните резултати, получени в дисертационния труд.

9. Лични впечатления

Познавам дисертанта от процедурата му по присъждане на научното звание "доцент" през 2013 г., от която имам много добри преки впечатления. Доц. Иван Минчев се оформи като млад, високообразован учен, с много добра перспектива за развитие и получаване на международно признание.

Заключение:

Дисертационният труд съдържа научни резултати, които представляват оригинален принос в математиката и отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на СУ "Климент Охридски". Представените научни статии и дисертационен труд напълно съответстват на специфичните изисквания на ФМИ, приети във връзка с Правилника на СУ за приложение на ЗРАСРБ. Дисертационният труд показва, че дисертантът Иван Минчев притежава задълбочени теоретични познания и професионални умения по научна специалност *Геометрия и топология* и е получил оригинални и значими научни приноси с широк международен отзвук.

Поради гореизложеното, убедено давам своята положителна оценка за проведеното изследване, представено в рецензираните по-горе дисертационен труд и автореферат, и предлагам на почитаемото научно жури **да присъди** научната степен "**доктор на науките**" на **Иван Минчев Минчев** в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление 4.5. Математика; научна специалност Геометрия и топология.

20.04.2020 г., Рецензент:...

София (доц. д-р Георги Ганчев)