СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ПРИНОС КЪМ СУБДИФЕРЕНЦИАЛНОТО СМЯТАНЕ

Михаил Атанасов Хамамджиев

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация
за присъждане на образователната и научна степен

ДОКТОР

в професионално направление
4.5. Математика (Математически анализ)

Научен ръководител: доц. д-р Милен Иванов

СОФИЯ
2018

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на 13.09.2018 г. на заседание на катедра Математически анализ на Факултета по математика и информатика (ФМИ) на Софийския университет "Св. Климент Охридски" – протокол № 5 от 13.09.2018 г.

Дисертационният труд е на английски език и съдържа 40 страници, от които 2 страници библиография, включваща 15 заглавия.

Дисертантът работи като асистент във Факултета по математика и информатика на Софийския университет "Св. Климент Охридски". Изследванията са проведени в рамките на редовна докторантура в докторска програма "Математически анализ" към катедра Математически анализ на Факултета по математика и информатика при Софийския университет "Св. Климент Охридски".

Съдържание

Предговор

Както е известно, теорията на диференциалното и интегрално смятане е основана през 17 век от Нютон и Лайбниц. Важна предпоставка в онези времена е свойството на диференцируемост на разглежданите функции. Нютон формулира законите за движение и за всеобщо привличане, като разглежда механиката в идеални условия, които се изпълняват с добро приближение например от небесните тела в орбита. В този контекст е естествено всичките разглеждани функции да бъдат гладки.

През двадесети век, изследвайки други области на механиката и по-общо на математиката, много учени, като например Моро и Рокафелар, виждат необходимост от систематично проучване на негладките явления. За случаите, в които гладкост липсва, те предлагат концепцията за субградиента като обобщение на производната. Основната идея не е сложна - ако си представим графиката на функцията $t \to |t|$, приближена чрез гладки функции в околност на нулата, то бихме могли да си представим, че тя има много допирателни в нулата. Тази дисертация се занимава със субдиференциалното смятане.

Настоящият дисертационният труд е разделен на следните части: Предговор, Глава 1 – Предварителни сведения, Глава 2 – Регуляризация на Моро-Йосида, Глава 3 – Многопосочни неравенства, Глава 4 – Заключение и Литература.

В Глава 1 – *Предварителни сведения* са дадени някои основни дефиниции и добре известни фундаментални резултати, които се използват по-нататък в изложението.

В Глава 2 – *Регуляризации на Моро-Йосида* разглеждаме някои свойства на тези регуляризаци над сепарабелни пространства.

Идеята на регуляризациите е да подобрят някои от характеристиките на даден обект, като същевременно запазят други техни свойства. Сама по себе си, регуляризацията на Моро-Йосида (над $\mathbb{R}^n$) ни дава начин за изглаждане на дадена изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция f, като при това регуляризацията f_λ ($\lambda > 0$) запазва точките на минимум (ако такъв се достига) на f. Гладкостта на регуляризацията се дължи на гладкостта на нормата, взета на квадрат. В безкрайномерни пространства (в текущия дисертационен труд разглеждаме само банахови пространства, което все пак е доста широк клас) възникват допълнителни трудности. Например в нерефлексивни пространства достигането на минимум не е гарантирано. Което остава, е локализация на точките, чиито функционални стойности са близо до инфимума. Тоест, "малките" стойности на регуляризацията и оригиналната функция се достигат в близки точки. Също така, в общи банахови пространства не винаги съществува ренормировка до еквивалентна гладка норма, което означава, че регуляризацията няма как да е гладка. Основният резултат на Глава 2 в този случай е, че нормата на субградиента на регуляризацията все пак има хубаво свойство, а именно – непрекъснатост в смисъл, пригоден за многозначно изображение. В сепарабелния случай съществуването на гладка еквивалентна норма гарантира гладкостта на регуляризацията относно тази норма и съответно нормата на нейната производна е непрекъсната функция в класическия смисъл.

Глава 3 – *Множествени неравенства* е посветена на обобщения на класическата теорема за средните стойности на Лагранж.

Да припомним за сравнение класическата теорема за средните стойности, изучавана в първи курс. Тя е едномерна теорема, която гласи, че за дадена гладка функция f, дефинирана над отсечка, винаги може да се намери точка от вътрешността на отсечката, за която тангентата към функцията в тази точка има същия наклон, както секущата на точките с координати краищата на отсечката и съответните функционални стойности в тях. За негладка функция f версията на теоремата се изпълнява като неравенство за възможните обобщения на производната: производна на Дини, субдиференциал и пр. Кларк и Ледяев в [9] формулират първото множествено неравенство, при което краищата на отсечката са заменени със затворени, изпъкнали и ограничени множества и вместо отсечка се разглежда изпъкналата комбинация на тези множества. Базовото пространство е банахово, f е локално липшицова и се разглежда по отношение на субдиференциала на Кларк. Този резултат е от тип множество-множество. По-нататъшни разработки като напр. [10, 11] разглеждат резултати от тип точка-множество (т.е. единият край на отсечката е заменен със множество) с различни изисквания за базовото пространство, функцията и субдиференциала. Основният резултат в Глава 3 е от тип множество-множество, макар и по природа да е близък до неравенство от тип точка-множество. С него се обобщават известните досега резултати от тип точка-множество, като предположенията са банахово пространство, функция f, която е полунепрекъсната отдолу, и субдиференциал, който е конструиран аксиоматично и като цяло е много общ и включва в себе си класовете на всички популярни субдиференциали. Доказателството се отличава с това, че използва помощна функция по начин, подобен на стандартното доказателство на теоремата на Лагранж за средните стойности.

Представяне на дисертационния труд

В тази част на автореферата към дисертационния труд ще изложим накратко важните резултати със съпътващи коментари и разяснения. За целта трябва отначало да въведем необходимите дефиниции и използвани резултати от литературата. Ще припомним също така и някои от използваните в дисертацията означения.

Разглежданото пространство винаги е банахово и го бележим с X с прилежаща норма $\|\cdot\|$. Затвореното единично кълбо и единичната сфера означаваме съответно с B_X и S_X. Дуалното пространство бележим с X^*, а дуалната норма с $\|\cdot\|_*$. В **Глава 1** припомняме следните свойства.

Една норма $\|\cdot\|$ в банаховото пространство X е строго изпъкнала, което накратко бележим с (R), ако за $x, y \in S_X$ е изпълнено

$$\|x + y\| = 2,$$

тогава и само тогава, когато $x = y$.

Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство и $f : X \to \mathbb{R}$ е функция.

Казваме, че f е диференцируема по Гато в точката $x \in X$ ако за всяко $h \in X$ границата

$$f'(x)(h) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

съществува и е линейна непрекъсната функция по h, тоест $f'(x) \in X^*$. Функционалът $f'(x)$ наричаме производна по Гато или диференциал на Гато на f в x.

Казваме, че $\|\cdot\|$ е гладка по Гато или G-норма, ако $\|\cdot\|$ е диференцируема по Гато във всички $x \in S_X$.

В изпъкналия анализ субдиференциалът се дефинира по следния начин:

Нека $f : X \to \mathbb{R}$ е някаква функция. Дефинираме субдиференциалния оператор ∂^- на f в точка x като множественото изображение $\partial^- f : X \to 2^{X^*}$ чрез

$$\partial^- f(x) := \{p \in X^* : \langle p, y - x \rangle \le f(y) - f(x) : \ \forall y \in X\}.$$

Аналогично супердиференциал, ε-субдиференциал и ε-супердиференциал се дефинират като:

$$\partial^+ f(x) := \{p \in X^* : \langle p, y - x\rangle \geq f(y) - f(x) : \ \forall y \in X\},$$

$$\partial^-_\varepsilon f(x) := \{p \in X^* : \langle p, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) + \varepsilon : \ \forall y \in X\},$$

$$\partial^+_\varepsilon f(x) := \{p \in X^* : \langle p, y - x\rangle \geq f(y) - f(x) - \varepsilon : \ \forall y \in X\}.$$

Обикновено в литературата при субдиференциалите минусът се пропуска, т.е. $\partial f(x) = \partial^- f(x)$ и аналогично за $\partial_\varepsilon f(x)$.

Тъй като субдиференциалът е многозначно изображение, ние се нуждаем още от понятие за "норма" на $\partial f(x)$. Стандартно в многозначния анализ функция от множество е множество от стойностите на функцията във всяка точка от множеството и по този тертип "норма" на субдиференциала ∂ на изпъкнала функция f в точката x е реалнозначно множествено изображение $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ дефинирано като:

$$\|\partial f(x)\| := \{\|p\| : p \in \partial f(x)\}.$$

Да припомним и важните понятия за инфимална и супремална конволюция:

Нека X е топологично пространство и нека φ, ψ са две реалнозначни функции, които не са тъждествено $+\infty$, дефинирани над X. Техните инфимална и супремална конволюция са дефинирани съответно чрез:

$$f \Box g(x) := \inf\{f(x - y) + g(y) : y \in X\},$$

$$f \triangle g(x) := \sup\{f(x - y) + g(y) : y \in X\}.$$

Ще отбележим, че инфималната конволюция на две изпъкнали функции е отново изпъкнала функция. С помощта на инфималната конволюция се дефинира и регуляризацията на Моро-Йосида:

Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, която не е тъждествено $+\infty$, и нека $g_\lambda(x) := \frac{1}{2\lambda}\|x\|^2$ за всяко $\lambda > 0$. Тогава регуляризацията на Моро-Йосида f_λ на f се дефинира като:

$$f_\lambda(x) := f \Box g_\lambda(x) = \inf_{y \in X}\{f(x - y) + \frac{1}{2\lambda}\|y\|^2)\} = \inf_{y \in X}\{f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2\}.$$

Глава 2 от дисертационния труд е посветена на регуляризацията на Моро-Йосида. В **Параграф 2.1** припомняме конструкцията на еквивалентна норма над сепарабелно банахово пространство, чиято дуална норма е строго изпъкнала. След това припомняме дуалността между строгата изпъкналост и диференцируемостта по Гато:

Ако дуалната норма $\|\cdot\|_*$ над X^* на $\|\cdot\|$ е строго изпъкнала, то нормата $\|\cdot\|$ над X е диференцируема по Гато.

Параграф 2.2 е посветена на главния резултат в **Глава 2** и неговото доказателство. Резултатите от тази секция са публикувани в [8].

Теорема 2.2.1 Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство и нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ е функция, тъждествено различна от $+\infty$, изпъкнала и ограничена отдолу. Тогава нейната регуляризация по Моро-Йосида f_λ, където $\lambda > 0$, притежава свойството, че многозначното изображение

$$x \to \|\partial f_\lambda(x)\|$$

е непрекъснато в следния смисъл: $\forall x \in X$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такова, че ако $\|y - x\| < \delta$ и $p \in \partial f_\lambda(x)$, $q \in \partial f_\lambda(y)$, то

$$\Big| \|p\| - \|q\| \Big| < \varepsilon.$$

Ще отбележим, че ограничеността на f се използва само, за да гарантираме, че регуляризацията на Моро-Йосида е добре дефинирана, и може да се замени с произволно ограничение, което гарантира този факт, като например $f(x) > -c(1 + \|x\|)$.

Доказателството се провежда за $\lambda = \frac{1}{2}$, откъдето лесно се извежда общият случай. Стъпките накратко:

Нека

$$h(x) := f_{\frac{1}{2}}(x) = \inf_{y \in X} \{f(y) + \|x - y\|^2\}.$$

Доказателството се основава на изследване на т. нар. ε-argmin множество на h:

$$j_\varepsilon(x) := \{y \in X : f(y) + \|x - y\|^2 < h(x) + \varepsilon\}.$$

Установяват се следните свойства:

- Ако $y, z \in j_\varepsilon(x)$, то $\Big| \|x - y\| - \|x - z\| \Big| < 2\sqrt{\varepsilon}$. Така $j_\varepsilon(x)$ е ограничено $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$.
- Нека $j_\varepsilon(x) \subseteq KB_X$ и $j_\varepsilon(y) \subseteq KB_X$ за някоя константа $K > 0$. Тогава h е $4K$-липшицова над KB_X.
- За всяко $x \in X$ и всяко $\varepsilon > 0$ съществува $c(\varepsilon) > 1$ такова че за всяко $\delta : 0 < \delta < \varepsilon$ и всяко $y \in X$ такова, че $\|x - y\| < \delta$ имаме:

$$j_\delta(x) \subseteq j_{c(\varepsilon)\delta}(y).$$

- Нека $p \in \partial h(x)$ и $y \in j_\varepsilon(x)$. Тогава

$$-p \subseteq \partial_\varepsilon g(x - y).$$

От тези и теоремата на Брьонстед-Рокафелар следва, че, ако $p \in \partial h(x)$ и $y \in j_{\varepsilon^2}(x)$, то

$$\Big| \|p\| - 2\|x - y\| \Big| \leq 3\varepsilon,$$

откъдето Теорема 2.2.1 следва непосредствено.

Параграф 2.3 на **Глава 2** представя някои добре известни свойства на регуляризацията на Моро-Йосида и едно важно следствие на Теорема 2.2.1. Кратко описание на съдържанието на секцията може да се намери отново в [8].

Теорема 2.3.1 Ако $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство, такова че $\|\cdot\|_*$ е строго изпъкнала, то за всяко $\lambda > 0$ регуляризацията на Моро-Йосида f_λ на тъждествено различна от $+\infty$, изпъкнала, полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е диференцируема по Гато във всяка точка $x \in X$ и при това функцията

$$x \to \|f'_\lambda(x)\|$$

е непрекъсната.

В **Глава 3** се разглеждат множествени неравенства, които са естествено обобщение на теоремата за средните стойности на Лагранж. Липсата на гладкост на разглежданите функции предполага работа със субградиенти, като субдиференциалът, който дефинираме, е възможно най-общият, за който доказателството върви, и включва повечето известни субдиференциали.

Стандартни означения в главата са $[A, B]$ за интервалът, дефиниран между две подмножества A и B на банаховото пространство X:

$$[A, B] := \{z \in X : z = \lambda x + (1 - \lambda)y \ \forall x \in A, \forall y \in B, \forall \lambda \in [0, 1]\}.$$

и $A_\delta := A + \delta B_X$, тоест, долен положителен реален индекс $\delta > 0$ на множеството A бележи множеството от точки на A, разширени със затворена околност с дебелина δ.

В **Параграф 3.1** е представено исторически първото множествено неравенство (на Кларк и Ледяев, [9]), което вдъхновява всички по-нататъшни изследвания:

Нека X е банахово пространство и нека $A, B \subseteq X$ са непразни, затворени, изпъкнали и ограничени множества. Нека $f : X \to \mathbb{R}$ е непрекъснато диференцируема по Гато в околност на $[A, B]$. Нека в допълнение поне едно от множествата A и B е компактно и нека е даден $\varepsilon > 0$. Тогава съществува $\xi \in [A, B]$ такова, че

$$\inf_B f - \sup_A f < \langle f'(\xi), y - x\rangle + \varepsilon \ \forall x \in A, \forall y \in B.$$

В същата работа този резултат е обобщен за негладки функции и е доказано множествено неравенство, като е използван субдиференциалът на Кларк.

Подчертаваме, че тези резултати са от тип множество-множество и че изискването поне едно от множествата A и B да е компактно в безкрайномерно пространство е съществено ограничение. По-нататък са дискутирани прилики и разлики на нашия резултат с този. В някакъв смисъл, нашият резултат е по-близък до второто неравенство на Кларк и Ледяев, [10].

В **Параграф 3.2** конструираме аксиоматично субдиференциал, който е много общ по своята същност и включва в себе си всички популярни в литературата субдиференциали. Този субдиференциал ще наричаме *допустим*.

Нека X е банахово пространство. Припомняме, че субдиференциален оператор ∂, приложен към полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ поражда множествено изображение

$$\partial f : X \to 2^{X^*}.$$

Дефиниция 3.2.1 Нека X е банахово пространство и $f :\to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и е тъждествено различна от $+\infty$ полунепрекъсната отдолу функция. Казваме, че ∂ е *допустим*, ако има следните свойства:

(P1) $\partial f(x) = \emptyset$ ако $x \notin \mathrm{dom} f$;

(P2) $\partial f(x) = \partial g(x)$ винаги, когато f и g съвпадат в околност на x;

(P3) Ако f е изпъкнала и непрекъсната функция в околност на x, то $\partial f(x)$ съвпада с понятието за субдиференциал от изпъкналия анализ;

(P4) Ако g е изпъкнала и непрекъсната в околност на z и $f + g$ има локален минимум в z, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $p \in \partial f(x)$ и $q \in \partial g(y)$ такива, че:

$$\|x - z\| < \varepsilon,\ \|y - z\| < \varepsilon,\ |f(x) - f(z)| < \varepsilon \text{ and } \|p + q\| < \varepsilon.$$

За нашите цели е по-подходящо да използваме друга аксиома, а именно (P4'), която е еквивалентна на (P4), защото тя капсулова стандартната употреба на вариационния принцип на Екланд:

(P4') Ако g е изпъкнала и непрекъсната и ако $f + g$ е ограничена отдолу, то съществуват редици $p_n \in \partial f(x_n)$ и $q_n \in \partial g(y_n)$ такива, че:

$$\|x_n - y_n\| \to 0,\ (f(x_n) + g(y_n)) \to \inf(f + g) \text{ and } \|p_n + q_n\| \to 0.$$

Непосредствено от Следствие 4.64 [12, p.305] следва, че гладкия субдиференциал в гладко банахово пространство (типовете гладкост синхроницирани, разбира се) е допустим. Ще отбележим, че (P4) е моделирана според съответното свойство за гладък субдиференциал.

Следствие 5.52 [12, p.385] и Теорема 7.23 [12, p. 475] имплицират, че субдиференциалът на Кларк и G-субдиференциалът на Йофе изпълняват повече от (P4), а именно ако z е локален минимум на $f + g$, то

$$0 \in \partial f(z) + \partial g(z).$$

Също така по подобни причини е ясно, че граничният субдиференциал над асплундови пространства, разглеждан от Мордухович и други, е допустим.

Всичко това показва, че повечето от субдиференциалите са допустими по естествен начин над съответните си базови пространства.

Параграф 3.3 е посветен на основния резултат в **Глава 3**, а именно Теорема 3.3.1. Този резултат е публикуван в [7]. Тук също така се дават сравнения с други множествени неравенства.

Теорема 3.3.1 Нека X е банахово пространство и нека ∂ е допустим субдиференциал. Нека A и B са непразни, затворени, ограничени и изпъкнали подмножества на X. Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е тъждествено различна от $+\infty$ полунепрекъсната отдолу функция, такава че $A \cap \operatorname{dom} f \neq \varnothing$. Нека f е ограничена отдолу върху множеството $C := \overline{[A, B]_\delta}$ за някое $\delta > 0$. Нека

$$\mu < \inf_C f. \tag{1}$$

Нека $r, s \in \mathbb{R}$ са такива, че

$$r = \inf_A f, \;\; s < \inf_{B_\delta} f. \tag{2}$$

Тогава, за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $\xi \in [A, B]_\delta$ и $p \in \partial f(\xi)$ такива, че

$$f(\xi) < \inf_{[A,B]} f + |r - s| + \varepsilon, \tag{3}$$

$$\|p\| < \frac{\max\{r, s\} - \mu}{r} + \varepsilon, \tag{4}$$

и

$$\inf_B p - \inf_A p > s - r. \tag{5}$$

Да направим сравнение с исторически първия резултат, представен в Параграф 3.1. Нашето множествено неравенство (5) е от различен характер, тъй като то включва разлика на инфимуми, вместо разлика на инфимум и супремум. От друга страна, ако A се замени с точка, т.е. $A = \{a\}$ (това ние наричаме неравенство от тип *точка-множество*, за да го разграничим от общия случай, който е от тип *множество-множество*) нашият резултат влече нещо, което е много близко до оригиналния резултат. За f ограничена отдолу над $C = \overline{[A, B]_\delta}$ съществува $N \in \mathbb{N}$ такова, че $\forall n > N$ имаме, че f е ограничена отдолу над $\overline{[A, B]_{1/n}}$. Така можем да изберем (монотонно растяща) редица $s_n < \inf_{B_{1/n}} f \le \inf_B f$. При $n \to +\infty$, имаме, че $\inf_{B_{1/n}} f \to \inf_B f$, тогава за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим достатъчно голямо n такова, че $|s_n - \inf_B f| < \varepsilon$. По Теорема 3.3.1 можем да намерим ξ_n произволно близо до $[A, B]$ и $p_n \in \partial f(\xi_n)$ такива, че те удовлетворяват (5), или

$$\inf_B p_n - p_n(a) > s_n - f(a) > \inf_B f - f(a) - \varepsilon,$$

което е подобно на оригиналния резултат разглеждан като тип точка-множество, при това за по-общ субдиференциал, но трябва да се има предвид, че това ξ не е непременно в $[A, B]$ тъй като границата $\lim \xi_n$ не съществува в общия случай.

В [10] авторите доказват друго множествено неравенство. То е от тип точка-множество за $A = \{a\}$ и B - затворено, изпъкнало и ограничено и хилбертово базово пространство X. Функцията f е е тъждествено различна от $+\infty$, полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу върху множеството $[a, B]_\delta$ за някое $\delta > 0$. Субдиференциалът тук е проксимален, т.е. $p \in \partial^\pi f(x)$ ако $f(x) \neq +\infty$ и $\exists \sigma > 0$ такова, че за всяко y в околност на x имаме

$$f(y) - f(x) + \sigma \|x - y\|^2 \geq \langle p, y - x \rangle .$$

Тогава можем да намерим за всяко $r < \lim_{\delta \downarrow 0} \inf_{B_\delta} f - f(a)$ и за всяко $\varepsilon > 0$ точка $\xi \in [a, B]_\varepsilon$ и $p \in \partial^\pi f(\xi)$ такива, че

$$r < \inf_B p - \langle p, a \rangle \text{ and } f(\xi) < \inf_{[a,B]} f + |r| + \varepsilon.$$

Ясно е, че Теорема 3.3.1 при $A = \{a\}$ обобщава този резултат в няколко посоки - базово пространство и вид на субдиференциала.

Ще включим още едно сравнение – с резултатът от [11], Теорема 3.5. Този резултат отново разглежда множествено неравенство от тип точка-множество и е много подобен на резултата от [10], но също така е и по-общ – за банахово пространство с β-гладка еквивалентна норма и съответстващия β-субдиференциал. Отново, Теорема 3.3.1 ни дава този резултат.

Важно е да се отбележи, че нашият резултат е от тип множество-множество и като такъв е по-общ от всеки подобен резултат от тип точка-множество.

От техниката на доказателството ще се спрем единствено на идеята за конструкция на спомагателната функция φ_K, която играе ролята на линейната функция от стандартното доказателство на теоремата за средните стойности на Лагранж.

Хипографиката на функцията $f : X \to \mathbb{R}$ се означава с

$$\text{hyp } f := \{(x, t) : t \leq f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}.$$

Функцията ψ е важна поради следното ѝ свойство:

Нека A и B са непразни и изпъкнали подмножества в банаховото пространство X. Нека $r, s \in \mathbb{R}$ са такива, че $r \neq s$. Дефинираме вдлъбнатата функция ψ чрез нейната хипографика

$$\text{hyp } \psi := \text{co}\{A \times [-\infty, r], B \times [-\infty, s]\}, \tag{6}$$

където co означава изпъкналата обвивка на множествата. Нека $x_0 \in \text{dom } \psi = [A, B]$ е такова, че $\psi(x_0) \neq s$. Нека $p \in \partial^+_\varepsilon \psi(x_0)$. Тогава

$$\inf_A p - \inf_B p \leq r - s + \frac{r - s}{\psi(x_0) - s}\varepsilon. \tag{7}$$

След това конструираме функцията φ_K, за която е вярно следното ключово за доказателството на Теорема 3.3.1 твърдение.

Твърдение 3.4.3 Нека A и B са непразни и изпъкнали подмножества на банаховото X и нека $r, s \in \mathbb{R}$ са такива, че $r \neq s$. Разглеждаме функцията ψ, дефинирана по-горе. Нека $K > 0$ и

$$\varphi_K(x) := (-K\,\|\cdot\|)\Delta\psi(x) = \sup\{\psi(y) - K\,\|x-y\| : y \in X\}.$$

Тогава φ_K е K-липшицова и вдлъбната.

Нека $\bar{x}$ е такова, че съществува $c > 0$ за което множествата

$$U := \{z \in [A, B] : \psi(z) - K\,\|z - \bar{x}\| > \varphi_K(\bar{x}) - c\}$$

и

$$V := \{z \in [A, B] : |s - \psi(z)| < c\}$$

не се пресичат, т.е. $U \cap V = \varnothing$.

Ако $p \in \partial^+\varphi_K(\bar{x})$, то

$$\inf_B p - \inf_A p \geq s - r.$$

Дказателството на Теорема 3.3.1 се нуждае от още няколко технически леми, за да бъде свързана оценката от Твърдение 3.4.3 с функцията f от теоремата, за да се изведе (5) и да бъдат доказани допълнителните оценки (3) и (4).

Авторска справка

Дисертационният труд разглежда някои въпроси от субдиференциалното смятане.

В Глава 1 – Предварителни сведения – са дадени основни дефиниции и твърдения, използвани в следващите глави.

В Глава 2 – Регуляризация на Моро-Йосида – е показано, че субдиференциалът на регуляризацията на Моро-Йосида на функция, която изпъкнала и ограничена отдолу, и не е тъждествено $+\infty$, има норма, която е непрекъсната в определен смисъл.

Като следствие, ако съществува еквивалентна диференцируема по Гато норма (като например в сепарабелни банахови пространства), регуляризацията на Моро-Йосида, дефинирана с помощта на тази норма, е диференцируема и нормата на нейната производна е непрекъсната функция.

В Глава 3 – Множествени неравнества – е доказано нов вид множествено неравенство за средните от тип множество-множество, което обобщава класическата теорема за средните на Лагранж. Резултатът е на базата на много общ вид субдиференциал, дефиниран аксиоматично.

Освен това, ако резултатът се разглежда като тип точка-множество, то той е по-силен от предишните известни резултати от този тип.

Публикации, свързани с дисертацията

1. Mihail Hamamdjiev, A Property Of The Moreau-Yosida Regularization, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, Vol 71, No2, 161–168, 2018;

2. Mihail Hamamdjiev and Milen Ivanov, New Multirectional Mean Value Inequality, Journal of Convex Analysis, Volume 25, No. 4, 1279–1290, 2018.

Представяне на резултатите, свързани с дисертацията

Част от резултатите в дисертацията са представени на конференции, измежду които:

1. Изнесен доклад „Selections of the Gâteaux subdifferential", Spring Scientific Session of FMI 2015, 28 March, 2015, https://www-old.fmi.uni-sofia.bg/en/events-1;

2. Изнесен доклад „Selections of the Gâteaux subdifferential", MIDOC 2015, 15.10.2015-18.10.2015, https://math.bas.bg/midoc2015/;

3. Изнесен доклад „A generalization of the Clarke-Ledyaev inequality" , Spring Scientific Session of FMI 2017, 25.03.2017, https://www.fmi.uni-sofia.bg/en/node/7095;

4. Изнесен доклад „New multidirectional mean value inequality", MDS2017, 10.07.2017-14.07.2017, https://mds2017.math.bas.bg/;

5. Изнесен доклад „On Clarke-Ledyaev inequality", Spring Scientific Session of FMI 2018, 31.03.2018, https://www.fmi.uni-sofia.bg/en/node/7555/.

6. Представен постер „New Multidirectional Mean Value Inequality", 45th Winter School in Abstract Analysis, Svratka, Czech Republic, http://www.karlin.mff.cuni.cz/ lhota/History.php/;

7. Представен постер „New Multidirectional Mean Value Inequality", ContrOpt 2017, Monastir, Tunisia, http://lama.univ-savoie.fr/ContrOpt2017/.

Декларация за оригиналност

Авторът декларира, че този дисертационен труд съдържа собствени резултати, получени от него или в съвместна работа с научния ръководител. Използваните резултати на други автори са надлежно цитирани.

Библиография

[1] Deville, Robert and Godefroy, Gilles and Zizler, Václav, Smoothness and renormings in Banach spaces, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 64, Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

[2] Fabian, Marián and Habala, Petr and Hájek, Petr and Montesinos, Vicente and Zizler, Václav, Banach space theory, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, The basis for linear and nonlinear analysis, Springer, New York, 2011.

[3] Gilles Godefroy, Renormings of Banach spaces, Handbook of the geometry of Banach spaces. Volume 1, 781–835, 2001.

[4] A. Brondsted, Ralph Tyrrell Rockafellar, On the subdifferentiality of convex functions, In: Proceedings of the American Mathematical Society, 1965.

[5] Milen Ivanov, Sequential representation formulae for G-subdifferential and Clarke subdifferential in smooth Banach spaces, Journal of Convex Analysis, Volume 11, No 1, 179–196, 2004.

[6] Robert R. Phelps, Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, Springer - Verlag, 1989.

[7] Mihail Hamamdjiev and Milen Ivanov, New Multirectional Mean Value Inequality, Journal of Convex Analysis, Volume 25, No. 4, 1279–1290, 2018.

[8] Mihail Hamamdjiev, A Property Of The Moreau-Yosida Regularization, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, Vol 71, No2, 161–168, 2018.

[9] Francis Clarke and Yuri Ledyaev, Mean Value Inequalities, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 122, Number 4, 1994.

[10] Francis Clarke and Yuri Ledyaev, Mean Value Inequalities in Hilbert Space, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 344, Number 1, 1994.

[11] Qiji Zhu, Clarke-Ledyaev Mean Value Inequalities in Smooth Banach Spaces, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 32, Issue 3, 315-324, May 1998.

[12] Jean-Paul Penôt, Calculus Without Derivatives, Springer, 2013.

[13] Lionel Thibault and Nadia Zlateva, Integrability of Subdifferentials of Directionally Lipschitz Functions, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 133, No. 10, 2939-2948, 2005.

[14] Haim Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011

[15] John L. Kelly General Topology, D. Van Nostrand Company, Inc., 1955