

Становище относно дисертационния труд "Дзета функции на линейни кодове и локално крайни модули" на Иван Бойчев Маринов

Дисертационният труд използва методи на алгебричната геометрия за решаване на комбинаторни задачи. Трудът се състои от шест глави и съдържа 169 страници.

1. **Актуалност на разработвания проблем:** В началото на XXI век Ivan Duursma въвежда ζ -полинома $P_C(t)$ на линейен код $C \subset \mathbb{F}_q^n$ и описва твърденията на Mac Williams за тегловото разпределение на C и на неговия дуален код $C^\perp \subset \mathbb{F}_q^n$ чрез функционално уравнение за $P_C(t)$ и $P_{C^\perp}(t)$. Нека $C^{\text{MDS}} \subset \mathbb{F}_q^n$ е MDS-код със същата дължина n и размерност $k = \dim C^{\text{MDS}} = \dim C$ като C . Развивайки идеи на Duursma, Иван Маринов използва редуциран полином на Duursma $D_C(t) \in \mathbb{Q}[t]$ за определяне на броя на думите от C^{MDS} с фиксирано тегло, които трябва да се заменят с думи от друго фиксирано тегло, за да се получи C . С помощта на коефициентите на $D_C(t)$ той интерпретира твърденията на Mac Williams за тегловото разпределение на двойка дуални линейни кодове като поляризирани условия на Riemann-Roch.

От друга страна, през втората половина на XIX век Alexander Grothendieck описва крайните етални покрития на схеми чрез непрекъснати действия на про-крайни групи върху крайни множества. В този дух, дисертацията на Иван Маринов изучава крайните неразклонени покрития на локално крайни модули над абсолютната група на Galois \mathfrak{G} на крайно поле \mathbb{F}_q и техните обвивки на Galois. Той доказва необходимо и достатъчно условие, при което локално краен \mathfrak{G} -модул M изпълнява аналога на хипотезата на Riemann.

2. **Степен на познаване на състоянието на проблема:** Иван Маринов е навлязъл задълбочено в областта на алгебричната геометрия и комбинаториката. Той познава в детайли актуалното състояние на решаваните в дисертацията проблеми. Показател за това са подробните и изчерпателни предварителни сведения.
3. **Научни приноси:** Оригиначните резултати на дисертацията на Иван Маринов са изложени в глави четири, пет и шест. Четвърта глава описва тегловото разпределение на линейен код C чрез неговия редуциран полином на Duursma $D_C(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Тя проверява, че от аналога на хипотезата на Riemann за линейен код C следва формална самодуалност на C и положителност на рода на C . Формално самодуалните линейни кодове от род 1 са специален вид почти MDS-кодове. През 1995 г. Додунеков и Ланджев въвеждат и изучават почти MDS-кодовете, а през 2012 г. Kim и Нун намираат необходимо и достатъчно условие,

при което почти MDS-код изпълнява аналога на хипотезата на Riemann. Вторият параграф от четвърта глава на дисертационния труд на Иван Маринов характеризира формално самодуалните кодове C от род 2, изпълняващи аналога на хипотезата на Riemann чрез коефициентите на редуцирания полином на Duursma $D_C(t)$ на C . Третият параграф на глава четири въвежда редуциран полином на Duursma $D_F(t) \in \mathbb{Z}[t]$ на функционално поле $F = \mathbb{F}_q(X)$ на гладка неприводима проективна крива $X \subset \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ от род g , определена над крайно поле \mathbb{F}_q . Тя характеризира $D_F(t)$ като ζ -полином на виртуално функционално поле $\mathbb{F}_q(Y)$ на крива $Y \subset \mathbb{P}^m(\overline{\mathbb{F}}_q)$ от род $g - 1$, определена над \mathbb{F}_q и доказва двустранна граница за броя $h(F)$ на класовете на линейна еквивалентност на дивизорите върху X от фиксирана степен.

Петата глава е посветена на еквивалентността на твърденията на Mac Williams за двойка дуални линейни кодове C, C^\perp с поляризираны условия на Riemann-Roch за техните ζ -функции. Този резултат е получен с помощта на свойствата на редуцираните полиноми на Duursma $D_C(T), D_{C^\perp}(t)$ и е съпроводен с някои усредняващи и вероятностни интерпретации на коефициентите на $D_C(t)$ и $D_{C^\perp}(t)$.

Шестата глава изучава ζ -функциите на локално крайни модули M над абсолютната група на Galois \mathfrak{G} на крайно поле \mathbb{F}_q . Множество M с действие на \mathfrak{G} е локално краен \mathfrak{G} -модул, ако всички \mathfrak{G} -орбити върху M са крайни и за всяко $m \in \mathbb{N}$ съществуват краен брой \mathfrak{G} -орбити $\text{Orb}_{\mathfrak{G}}(x) \subset M$ от степен $\deg \text{Orb}_{\mathfrak{G}}(x) := |\text{Orb}_{\mathfrak{G}}(x)| = m$. Дзета функцията на безкраен локално краен \mathfrak{G} -модул M е безкрайното произведение $\zeta_M(t) := \prod_{\text{Orb}_{\mathfrak{G}}(x) \subset M} \left(\frac{1}{1 - t^{\deg \text{Orb}_{\mathfrak{G}}(x)}} \right)$. В първия параграф на

глава шест, произволно \mathfrak{G} -еквивариантно изображение $\xi : M \rightarrow L$ на локално крайни \mathfrak{G} -модули е асоциирано с инерционно изображение, с помощта на което се получава комбинаторно описание на ξ . Вторият параграф характеризира локално крайните \mathfrak{G} -модули M , за които частното $P_M(t) = \frac{\zeta_M(t)}{\zeta_{\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_q)}(t)}$ на ζ -функцията на M с ζ -функцията $\zeta_{\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_q)}(t)$ на проективната права $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_q)$ е полином $P_M(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Обобщавайки някои свойства на гладките неприводими проективни криви $X \subset \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}}_q)$, третият параграф на глава шест дискутира крайните неразклонени H -Galois покрития $\xi_H : M \rightarrow M/H$, $\xi_H(x) = \text{Orb}_H(x)$ чрез локално краен \mathfrak{G} -модул M и крайните неразклонени покрития $\xi : M \rightarrow L$, които имат обвивка на Galois. В последния, четвърти параграф на глава шест се въвежда относителният порядък на Hasse-Weil $\text{ord}_{\mathfrak{G}}(M/L)$ и относителният H -порядък $\text{ord}_{\mathfrak{G}}^H(M/L)$ на локално крайни \mathfrak{G} -модули M, L с действие на H върху M . Изучават се някои свойства на $\text{ord}_{\mathfrak{G}}(M/L)$, $\text{ord}_{\mathfrak{G}}^H(M/L)$ и се доказва основният резултат на глава шест - необходимо и достатъчно условие за изпълнение на аналога на хипотезата на Riemann за локално краен \mathfrak{G} -модул M относно проективната права $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_q)$. С конкретен пример се илюстрира съществуването на локално крайни \mathfrak{G} -модули, изпълняващи предположенията на основния резултат, които не са изоморфни на гладка неприводима проективна крива, определена над \mathbb{F}_q . Извежда се функционално уравнение за полиномиалното ζ -частно $P_M(t) = \frac{\zeta_M(t)}{\zeta_{\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_q)}(t)} \in \mathbb{Z}[t]$ на локално краен \mathfrak{G} -модул M , изпълняващ аналога на хипотезата на Riemann относно $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_q)$.

4. **Публикации върху дисертационния труд:** Резултатите от дисертацията са оформени под формата на три съвместни статии с научния ръководител и публикувани в рецензирани и реферирани списания. Статията за редуцирания полином на Duursma, изложена в глава четири е публикувана в списанието *Advances in Mathematics of Communication* с Impact Factor. Разглежданията от пета глава са публикувани в *Electronic Notes in Discrete Mathematics* с SJR, а статията за аналога на хипотезата на Riemann за локално крайни модули над абсолютната група на Galois на крайно поле е приета в Годишника на Софийски университет. В качеството си на съавтор на тези статии декларирам, че двамата с Иван Маринов имаме равноправно участие в тях. Получените резултати са докладвани на три международни конференции и шест национални научни форуми. Пет от докладите са изнесени от Иван Маринов, а останалите четири - от мен.
5. **Авторефератът** отразява правдиво приносите и съдържанието на дисертацията "Дзета функции на линейни кодове и локално крайни модули".
6. **Заклучение:** Дисертационният труд доказва, че Иван Бойчев Маринов е получил задълбочени теоретични познания в областта на алгебричната геометрия и комбинаториката. Той е развил умения за самостоятелни научни изследвания. Дисертационният труд удовлетворява всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за неговото прилагане, както и Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности на Софийски университет "Свети Климент Охридски" и на Факултета по математика и информатика към Софийски университет "Свети Климент Охридски". Това ми дава основание да препоръчам убедено присъждането на образователната и научна степен "Доктор" на Иван Бойчев Маринов.

София, 16 април 2018

Написала становището: Азнив Киркор Каспарян
катедра Алгебра
Факултет по математика и информатика
Софийски университет "св. Климент Охридски"