Физически факултет
Софийски университет "Св. Климент Охридски"

Боян Владимиров Лазов

Структура и свойства на статични пространствено-времеви многообразия с особени повърхнини

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователна и научна степен "ДОКТОР"

Професионално направление: 4.1 Физически науки

Научна специалност: 01.03.01 Теоретична и математическа физика

Научен ръководител: проф. дфн Стойчо Язаджиев

София, 2017

Съдържание

Глава 1

Увод

В дисертацията е разгледана класическа задача в теорията на диференциалните уравнения и във физиката – единствеността на решенията на физически значима система от диференциални уравнения. По-точно е установена единствеността на някои точни решения на гравитационните уравнения на Айнщайн, когато в тях има определени интересни повърхнини. Тези повърхнини са фотонната сфера и гърлото на червеева дупка.

В три глави са изложени оригиналните резултати. Първият е единствеността на решенията на уравненията на Айнщайн-Максуел при наличието на фотонна сфера. След това е разгледана подобна задача, когато има и скаларно поле. Последният резултат се отнася до единствеността на решенията с червеева дупка с фантомно скаларно и (фантомно) електромагнитно поле, когато константата на взаимодействие между скаларното и електромагнитното поле е единица.

Глава 2

Малко диференциална геометрия

За получаване на резултатите са необходими основни сведения от диференциалната геометрия.

2.1 Тензор на Айнщайн

Тензорът на Айнщайн е основен обект, за да се запишат уравненията на Айнщайн. Целта тук е да се достигне до неговата дефиниция.

2.1.1 Ковариантна производна

За четиримерно многообразие M с метричен тензор $g_{\mu\nu}$ и векторно поле X^μ ковариантната производна се дава от следната формула [1]:

$$\nabla_\nu X^\mu = \partial_\nu X^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} X^\alpha, \tag{2.1}$$

където $\Gamma^\mu_{\alpha\nu}$ е поле, наречено свързаност. Конкретна свързаност е свързаността на Леви-Чивита, която трябва да изпълнява следните две свойства:

1. $\Gamma^\mu_{\alpha\nu} = \Gamma^\mu_{\nu\alpha}$ (симетричност);

2. $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ (съгласуваност с метриката).

Тук коефициентите $\Gamma^\mu_{\alpha\nu}$ се наричат символи на Кристофел и се определят от

$$\Gamma^\mu_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\nu\alpha} \right) \tag{2.2}$$

Може да се взима ковариантна производна от тензор с произволен брой контравариантни и ковариантни индекси. Например

$$\nabla_\alpha T^\mu{}_\nu = \partial_\alpha T^\mu{}_\nu - \Gamma^\beta_{\alpha\nu} T^\mu{}_\beta + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^\beta{}_\nu. \tag{2.3}$$

Казва се, че тензор $T^{\mu\dots}{}_{\nu\dots}$ е паралелно пренесен по крива γ с тангенциален вектор u^μ, ако ковариантната му производна върху кривата е нула,

$$u^\alpha \nabla_\alpha T^{\mu\dots}{}_{\nu\dots} = 0. \tag{2.4}$$

2.1.2 Кривина

Тензорът на Риман $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ се дефинира от

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta X^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha X^\mu = -R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} X^\nu, \tag{2.5}$$

което важи за произволно векторно поле X^μ. В явен вид –

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha}\Gamma^\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\beta}\Gamma^\gamma_{\nu\alpha}. \tag{2.6}$$

Тензорът на Риман удовлетворява следните равенства:

1. $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$;
2. $R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} = 0$;
3. $\nabla_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\gamma\alpha} = 0$ (тъждества на Бианки).

След контракция се получава тензорът на Ричи $R_{\mu\nu}$,

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}, \tag{2.7}$$

който е симетричен тензор. След още една контракция се получава скаларът на Ричи R,

$$R = R^\mu{}_\mu. \tag{2.8}$$

Тогава тензорът на Айнщайн $G_{\mu\nu}$ се дефинира като

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \tag{2.9}$$

Той е симетричен тензор и удовлетворява контрактираните тъждества на Бианки,

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0. \tag{2.10}$$

2.2 Килингови вектори

Крайната цел тук е да се въведе понятието Килингов вектор.

2.2.1 Геодезични

Разглеждайки крива γ, параметризирана от параметър λ (т.е. описвана от функциите $x^\mu(\lambda)$), геодезичното уравнение е

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}=\kappa(\lambda)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{2.11}$$

Когато параметърът λ е собственото време (за времеподобна геодезична) или собственото разстояние (за пространственоподобна геодезична), геодезичното уравнение приема вида

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda}=0. \tag{2.12}$$

2.2.2 Производна на Ли

Производната на Ли при зададени вектори X^μ и Y^μ се дефинира като

$$\mathcal{L}_Y X^\mu = Y^\nu\partial_\nu X^\mu - X^\nu\partial_\nu Y^\mu. \tag{2.13}$$

Дефиницията може да се разшири за произволни тензори. Например, за тензорно поле $T^\mu_{\ \nu}$, производната му на Ли по вектора Y се дава от

$$\mathcal{L}_Y T^\mu_{\ \nu} = Y^\alpha\nabla_\alpha T^\mu_{\ \nu} - T^\alpha_{\ \nu}\nabla_\alpha Y^\mu + T^\mu_{\ \alpha}\nabla_\nu Y^\alpha. \tag{2.14}$$

Свързано понятие е преносът на Ли на тензорно поле по крива. $T^{\mu\dots}{}_{\nu\dots}$ е пренесен в смисъл на Ли по кривата γ с тангенциален вектор u^μ, ако производната му на Ли върху кривата е нула,

$$\mathcal{L}_u T^{\mu\dots}{}_{\nu\dots}=0. \tag{2.15}$$

2.2.3 Килингови вектори

За да е Килингово едно векторно поле X^μ, то трябва да изпълнява следното условие:

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu}=0. \tag{2.16}$$

Това условие може да се запише във вида

$$\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0. \tag{2.17}$$

2.3 Диференциална геометрия на повърхнините

Тук целта е да се достигне до уравненията на Гаус-Кодаци и теоремата на Гаус-Боне.

2.3.1 Хиперповърхнини

Нека M е четиримерно многообразие с координати $\{x^\mu\}_{\mu=0}^3$ и Лоренцова метрика $g_{\mu\nu}$ със сигнатура $(-,+,+,+)$. Тримерно подмногообразие (хиперповърхнина) Σ се задава по два начина: рестриктирайки координатите,

$$\Phi(x^\mu) = 0, \tag{2.18}$$

или чрез параметрични уравнения,

$$x^\mu = x^\mu(y^i), \tag{2.19}$$

където $\{y^i\}_{i=1}^3$ са координатите върху хиперповърхнината. Векторът $\partial_\mu \Phi$ е нормален към хиперповърхнината. За времеподобна или пространственоподобна хиперповърхнина единичният нормален вектор n_μ се дефинира като

$$n_\mu = \frac{\varepsilon \partial_\mu \Phi}{|g^{\alpha\beta}\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi|^{1/2}}, \tag{2.20}$$

където $\varepsilon = -1$ за пространственоподобна и $\varepsilon = 1$ за времеподобна. Стойността на ε е избрана така, че $n^\mu \partial_\mu \Phi > 0$.

За изотропна хиперповърхнина нормален вектор се дефинира като

$$k_\mu = -\partial_\mu \Phi. \tag{2.21}$$

От параметричните уравнения $x^\mu = x^\mu(y^i)$ следва, че

$$e_i^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \tag{2.22}$$

са тангенциални вектори към Σ. Тогава първата фундаментална форма (индуцираната метрика) на Σ е

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu. \tag{2.23}$$

Обратната метрика $g_{\mu\nu}$ може да се запише във вида

$$g^{\mu\nu} = \varepsilon n^\mu n^\nu + h^{ij} e_i^\mu e_j^\nu, \tag{2.24}$$

когато хиперповърхнината не е изотропна.

2.3.2 Външна кривина

За дефинирането на външна кривина на хиперповърхнина е необходимо да се разгледа тангенциално векторно поле X^μ, такова че

$$X^\mu = X^i e_i^\mu, \quad X^\mu n_\mu = 0, \quad X_i = X_\mu e_i^\mu. \tag{2.25}$$

Вътрешната ковариантна производна на вектора X_μ се дефинира като

$${}^h\nabla_i X_j = \nabla_\mu X_\nu e_i^\mu e_j^\nu = \partial_i X_j - {}^h\Gamma_{ij}^k X_k. \tag{2.26}$$

Векторът $\nabla_\mu X^\nu e_i^\mu$ има нормална компонента и разложението му се дава от

$$\nabla_\mu X^\nu e_i^\mu = {}^h\nabla_i X^j e_j^\nu - \varepsilon X^j K_{ji} n^\nu, \tag{2.27}$$

където втората фундаментална форма (външната кривина) K_{ji} на Σ е

$$K_{ji} = \nabla_\mu n_\nu e_j^\nu e_i^\mu. \tag{2.28}$$

K_{ij} е симетричен тензор,

$$K_{ij} = K_{ji}. \tag{2.29}$$

2.3.3 Уравнения на Гаус-Кодаци

Използвайки индуцираната метрика h_{ij} върху дадена хиперповърхнина Σ и съответната ѝ ковариантна производна, може да се дефинира изцяло вътрешен за повърхнината тензор на кривината чрез уравнението

$${}^h\nabla_i \, {}^h\nabla_j X^k - {}^h\nabla_j \, {}^h\nabla_i X^k = -{}^hR^k{}_{lij} X^l. \tag{2.30}$$

Тогава някои от компонентите на четиримерния тензор на Риман, рестриктирани върху хиперповърхнината, могат да се изразят чрез вътрешната и външната кривина на Σ. Тези изрази се наричат уравнения на Гаус-Кодаци,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} e_i^\alpha e_j^\beta e_k^\mu e_l^\nu = {}^hR_{ijkl} + \varepsilon \left(K_{il}K_{jk} - K_{ik}K_{jl}\right) \tag{2.31}$$

и

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} n^\alpha e_i^\beta e_j^\mu e_k^\nu = {}^h\nabla_k K_{ij} - {}^h\nabla_j K_{ik}. \tag{2.32}$$

2.3.4 Теоремата на Гаус-Боне

Теоремата на Гаус-Боне е много важен резултат в диференциалната геометрия, който свързва геометрията (чрез Гаусовата кривина) с топологията (чрез характеристиката на Ойлер) на двумерна повърхнина [2],

Теорема 2.3.1. *Нека Σ е компактно, ориентирано, двумерно Риманово многообразие с Гаусова кривина K и Ойлерова характеристика $\chi(\Sigma)$. Тогава*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma} K \mathrm{d}\sigma = \chi(\Sigma). \tag{2.33}$$

Тук $\mathrm{d}\sigma$ е ориентираният повърхнинен елемент на Σ.

Дадената теорема е класическият резултат за двумерни многообразия. Когато многообразието има топологията на сфера, $\chi(\Sigma) = 2$.

Глава 3

Обща теория на относителността

В тази глава са представени уравненията на Общата теория на относителността. Освен това е показано как се появяват за първи път фотонната сфера и червеевата дупка в решението на Шварцшилд.

3.1 Полеви уравнения на Айнщайн

В Общата теория на относителността пространство-времето е четиримерно Лоренцово многообразие $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$. Сигнатурата на метриката е $(-,+,+,+)$ и пространствено-времевите координати са означени с малки гръцки индекси. Полето, описващо гравитацията, е метричният тензор $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$. То се намира чрез решаване на система частни диференциални уравнения от втори ред, известни като полеви уравнения на Айнщайн,

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

където $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$ е тензорът на Айнщайн и $T_{\mu\nu}$ е тензорът на енергията и импулса.

3.2 Геодезично уравнение

Останалата част от теорията се дава от геодезичното уравнение, описващо движението на свободно падащи частици,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = 0, \tag{3.2}$$

където λ е афинен параметър.

Именно геодезичното уравнение води до понятието фотонна сфера.

3.3 Статично пространство-време

Първо се дефинира стационарно пространство-време.

Дефиниция 3.3.1. *Едно асимптотически плоско пространство-време $\mathfrak{L}^4$, което допуска асимптотически времеподобно Килингово векторно поле ξ^μ, се нарича стационарно.*

След това се дефинира статично пространство-време.

Дефиниция 3.3.2. *Едно стационарно пространство-време се нарича статично, ако асимптотически времеподобното Килингово векторно поле ξ^μ е ортогонално на (пространственоподобна) хиперповърхнина във всяка точка $x \in \mathfrak{L}^4$.*

Едно статично пространство-време допуска следната $3+1$ декомпозиция: съществуват гладко Риманово многообразие (M^3, g) и гладка lapse функция $N : M^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$, такива че

$$\mathfrak{L}^4 = \mathbb{R} \times M^3, \quad \mathfrak{g} = -N^2 \mathrm{d}t^2 + g. \tag{3.3}$$

3.4 Фотонна сфера в пространство-времето на Шварцшилд

Започвайки от метриката на Шварцшилд [3],

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi\right), \tag{3.4}$$

може да се получи r компонентата на геодезичното уравнение в явен вид,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + V(r) = \frac{1}{2}E^2, \tag{3.5}$$

където

$$V(r) = \frac{1}{2}\epsilon - \frac{M}{r}\epsilon + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}. \tag{3.6}$$

Тук λ е афинен параметър върху геодезичната, $\epsilon = \pm 1, 0$ за времеподобни, пространственоподобни или изотропни геодезични и E и L са запазващи се величини, асоциирани съответно с времеви транслации и ротации (т.е. енергия и момент на импулса).

Уравнение (3.5) е уравнението за движение на класическа частица с единична маса и енергия $\frac{1}{2}E^2$, движеща се в едномерен потенциал $V(r)$. Разглеждайки безмасова частица ($\epsilon = 0$), може да се намери, че максимумът на потенциала $V(r)$ е в

$$r = 3M. \tag{3.7}$$

С други думи, (3.7) е радиусът, на който фотон може вечно да обикаля централното масивно тяло, но орбитата е нестабилна. Сферата на $r = 3M$ в пространство-времето на Шварцшилд се нарича фотонна сфера. Тя може да се обобщи за други класове решения на полевите уравнения.

3.5 Първата червеева дупка

За да се види как възниква червеева дупка в пространство-времето на Шварцшилд, трябва първо да се отбележи, че стандартните координати (t, r, θ, ϕ) покриват само половината пространство-време [4]. По-добра координатна система е тази на Крускал (v, u, θ, ϕ), за която

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}}, \quad r \geq 0 \tag{3.8}$$

и

$$\frac{2uv}{u^2 + v^2} = \tanh\left(\frac{t}{2M}\right). \tag{3.9}$$

В тези координати метриката приема вида

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} \left(-\mathrm{d}v^2 + \mathrm{d}u^2\right) + r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi\right). \tag{3.10}$$

В координатите на Крускал може да се начертае диаграмата на Крускал, изобразяваща максимално разширеното пространство-време на Шварцшилд, и да се види моментното формиране на червеева дупка между два асимптотически плоски края в периода от координатно време $v \in [-1, 1]$.

Глава 4

Мотивация

Има две основни движещи сили за разглеждането на задачите в дисертацията. Първата и може би най-важната е, разбира се, физичната. Астрофизичните наблюдения стават все по-популярна част от експерименталната физика и ни дават огромно количество информация за структурата на нашата Вселена. Във връзка с това фотонните сфери са директно свързани с наблюдения на гравитационни лещи, докато използваемите червееви дупки, въпреки че са доста екзотични обекти, бавно биват приемани като физическа реалност поради наблюдения, намекващи, че Вселената ни е съставена основно от екзотична материя.

Втората движеща сила е математичната. Въпросът за съществуване и единственост на решения е съществена част от изучаването на диференциалните уравнения и е особено важен за силно нелинейни системи (какъвто е случаят с уравненията на Айнщайн).

4.1 Физика

Физичните аспекти на фотонните сфери са от съществено значение за наблюдателната физика. Отдавна е известно, че ултракомпактните обекти с радиуси $R < 3M$ могат да са физическа реалност [5]. По принцип релативистките свойства на едно разпределение на материя се определят от компактността му $\frac{R}{M}$. За черна дупка $\frac{R}{M} = 2$, докато обекти, за които $\frac{R}{M} > 6$, са почти Нютонови. Компактните обекти имат отношения радиус към маса между тези две стойности. Ултракомпактните обекти са тези с $2 < \frac{R}{M} < 3$ и те могат да притежават фотонна сфера.

Тези ултракомпактни обекти имат някои много интересни свойства: те действат като гравитационни лещи, тяхната светимост на Едингтън може да се променя и може да съществуват ограничени орбити за релативистки частици (например неутрина) около тях [6]. Гравитационното отклонение на светлина от ултракомпактни обекти е особено интересно. Първо, при компактните звезди с $R \simeq 1,76R_{\mathrm{S}}$, където R_{S} е радиусът на Шварцшилд, се наблюдава повърхностен пръстен на Айнщайн. Това е феномен, при който цялата повърхност на звездата се вижда в кръг около нея. За ултракомпактни обекти този ефект е много по-голям и има безкрайно много повърхностни пръстени на Айнщайн около звездата.

Освен това при отклонение на светлина от ултракомпактни обекти фотонните сфери се свързват с подобен феномен, известен като релативистки образи [7, 8]. Това са поредици от образи от двете страни на оптичната ос в допълнение към основните два образа, които трябва да се наблюдават при гравитационна леща, която е черна дупка на Шварцшилд. Техните източници са фотони, обикалящи около централния обект множество пъти, преди да достигнат наблюдателя (в зависимост от техния прицелен параметър). Докато основните образи са характеристични за слаби гравитационни полета, релативистките образи са феномен при силно поле. Поради това тяхното наблюдение би потвърдило геометрията на Шварцшилд близо до хоризонта на събитията. Това не е лека задача обаче, тъй като се очаква да са много бледи.

Изучаването на гравитационни лещи със скаларен заряд също води до много интересни изводи [9, 10]. В зависимост от отношението на скаларния заряд към масата се очаква да се наблюдават качествено различни образи. Например възможно е да има два пръстена на Айнщайн (или нито един) при големи такива отношения, докато при малки пръстенът е само един. Освен само при маса M и скаларен заряд q, удовлетворяващи $0 \leq \left(\frac{q}{M}\right)^2 < 3$, съществува фотонна сфера и това може да се определи наблюдателно от наличието на релативистки образи.

В допълнение към гравитационните лещи, съществуват множество други изследвания, които свързват фотонните сфери с наблюдателни ефекти. Има връзка например между нестабилните изотропни геодезични криви и характеристичните моди на черните дупки [11, 12]. Тази връзка идва от факта, че квазинормалните моди могат да бъдат интерпретирани като изотропни частици, уловени в нестабилната кръгова орбита и бавно изтичащи. Следователно може да се разгледа връзката между квазинормалните моди на черни дупки и гравитационните лещи в границата на силно отклонение [13]. Накрая трябва да се спомене, че гравитационните вълни от фазата на затихване след сливане на двойна система предоставят информация за съществуването на светлинен пръстен, а не на хоризонт на събитията, след сливането [14].

Освен фотонната сфера, друг важен обект, който ще бъде разгледан, е червеевата дупка. Червеевите дупки са може би едни от най-широко известните обекти, наред с черните дупки. Решения за използваеми червееви дупки за първи път са получени от Елис и Бронников [15, 16, 17]. Тяхното съществуване обаче изисква някаква екзотична материя – такава с тензор на енергията и импулса, нарушаващ условието за изотропност на енергията [18, 19, 20, 21]. Актуални космологични наблюдения намекват, че такава материя може да съществува във Вселената под формата на тъмна енергия [22].

Има още и нови публикации, показващи възможността за съществуването на статични червееви дупки без екзотична материя. Такъв е случаят в модифицираните теории на гравитацията [23] – например в четиримерната дилатонна гравитация на Айнщайн-Гаус-Боне [24, 25]. В модифицираните теории полевите уравнения имат допълнителни членове, но могат да бъдат записани с ефективен тензор на енергията и импулса [23]. Тогава енергетичното условие, което се нарушава, е обобщеното условие за изотропност на енергията, което се отнася до ефективния тензор на енергията и импулса. Следователно тензорът на енергията и импулса на нормалната материя може да удовлетворява всички стандартни енергетични условия, но трябва да има някакви ограничения върху геометрията на червеевата дупка.

Накрая трябва да се спомене, че могат да се разглеждат и въртящи се червееви дупки на Елис – симетрични и несиметрични. Те също имат интересни свойства. Например несиметричните могат да имат скорост на въртене на гърлото по-голяма от скоростта на светлината [26, 27], а и двата вида притежават ограничени орбити за масови и безмасови частици, което води до наличието на фотонен регион. Това от своя страна има последствия за наблюдателната физика.

В тази връзка Джоу изследва възможните начини за експериментално различаване на въртящи се червееви дупки на Елис и черни дупки на Кер [28]. Разлежда се възможността такива червееви дупки да имат тънки акреционни дискове, които да отразяват рентгенови лъчи, и се търсят признаци за наличието на червеева дупка в профила на линията на желязото в отразения спектър. Оказва се, че теоретично е възможно да се разграничават червееви и черни дупки по този начин, но сегашните ни наблюдения не са достатъчно добри в повечето случаи. Все пак за свръхмасивните кандидати за черни дупки в ядрата на галактиките може да бъде изключена възможността да са въртящи се червееви дупки на Елис.

4.2 Математика

Общата идея за доказване на единственост на определени решения на уравненията на Айнщайн, използвайки физически значими повърхнини, не е нова. Класическите резултати на Израел използват хоризонта на събитията [29, 30]. Основният резултат е следната теорема [29]:

Теорема 4.2.1. *Нека M^3 е пространствена хиперповърхнина $t = \text{const}$, максимално разширена, като $\mathfrak{g}(\xi, \xi) < 0$. Единственото статично пространство-време, удовлетворяващо*

1. *M^3 е регулярно, празно, некомпактно и асимптотически Евклидово;*
2. *Повърхнините $N = \text{const} > 0,\ t = \text{const}$ са регулярни, просто-свързани затворени 2-пространства;*
3. *Инвариантът $\mathfrak{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\mathfrak{R}^{\alpha\beta\mu\nu}$ е ограничен върху M^3;*
4. *Ако N има нулева долна граница върху M^3, вътрешната геометрия на 2-пространствата $N = c$ клони към граница при $c \to 0+$, съответстваща на затворено, регулярно 2-пространство с крайна площ;*

е решението на Шварцшилд.

Следващата стъпка е подобна теорема за електро-вакуумно пространство-време [30]. Тя показва единствеността на решението на Райснер-Нордстрьом. Условията на теоремата са подобни на тези в теорема 4.2.1.

Подходът на Израел може да се адаптира към други интересни повърхнини – например фотонните сфери, тъй като те имат подобни свойства на хоризонтите на събитията. За тази цел трябва да се мине през една статия на Клаудел, Вирбхадра и Елис от 2001 година [31], в която понятието фотонна сфера е обобщено чрез геометрична дефиниция за произволно пространство-време.

Дефиниция 4.2.1. *Фотонна повърхнина на пространство-времето $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g})$ е потопена, никъде пространственоподобна хиперповърхнина P в $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g})$, такава че за всяка точка $p \in P$ и всеки изотропен вектор $k^i \in T_pP$ съществува изотропна геодезична $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathfrak{L}$ of $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g})$, такава че $\dot{\gamma}(0) = k,\ |\gamma| \in P$.*

Доказана е важна теорема относно някои свойства на фотонните повърхнини.

Теорема 4.2.2. *Нека P^3 е времеподобна хиперповърхнина в $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$. Нека ν^α е единичен нормален вектор към P^3 и нека p_{ij} е индуцираната метрика върху P^3. Нека $\mathfrak{h}_{ij}$ е втората фундаментална форма на P^3 и нека χ_{ij} е безследовата част на $\mathfrak{h}_{ij}$. Тогава следните са еквивалентни:*

1. *P^3 е фотонна повърхнина;*
2. *$\mathfrak{h}_{ij}k^ik^j = 0$ за всяко изотропно векторно поле $k^i \in T_pP^3,\ \forall p \in P^3$;*
3. *$\chi_{ij} = 0$;*

4. всяка афинна изотропна геодезична на (P^3, p) е афинна изотропна геодезична на $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$.

След това можем да дефинираме фотонна сфера, която е съгласувана със симетриите на пространство-времето, ако има такива.

Дефиниция 4.2.2. *Нека $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ допуска група на изометрии G. Фотонна повърхнина P^3 на $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$, която е инвариантна относно действието на G в смисъла, че всяко $g \in G$ изобразява P^3 в P^3, ще се нарича G-инвариантна фотонна сфера.*

Сферичносиметрично и статично пространство-време е такова, което допуска група на изометрии $SO(3) \times \mathbb{R}$, такава че $\mathbb{R}$ орбитите са генерирани от Килингово поле K, което е ортогонално на хиперповърхнина и ортогонално на $SO(3)$ орбитите. Фотонната сфера се дефинира като $SO(3) \times \mathbb{R}$-инвариантна фотонна повърхнина в статично, сферичносиметрично пространство-време.

Седербаум развива това направление в [32] и обобщава дефиницията на фотонна сфера, като се отказва от условието за сферична симетрия. Важните теореми са две.

Дефиниция 4.2.3. *Времеподобна вписана хиперповърхнина $P^3 \hookrightarrow \mathfrak{L}^4$ в АП-геометро-статично пространство-време $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ се нарича фотонна повърхнина тогава и само тогава, когато всяка изотропна геодезична, първоначално тангенциална към P^3, остава тангенциална към P^3, докато съществува.*

Така може да се даде дефиниция на фотонна сфера.

Дефиниция 4.2.4. *Нека $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ е АП-геометро-статично пространство-време и $P^3 \hookrightarrow \mathfrak{L}^4$ е фотонна повърхнина. Тогава P^3 се нарича фотонна сфера, ако lapse функцията N на пространство-времето е константна върху P^3.*

Тук под АП-геометро-статично пространство-време се разбира пространство-време, което е гладко, асимптотически плоско, максимално разширено, статично и вакуумно.

Основният резултат е следната теорема [32]:

Теорема 4.2.3. *Нека $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ е АП-геометро-статично пространство-време, притежаващо фотонна сфера $P^3 \hookrightarrow \mathfrak{L}^4$ със средна кривина $\mathfrak{H}$, възникваща като вътрешната граница на $\mathfrak{L}^4$. Нека lapse функцията N да разслоява $\mathfrak{L}^4$ регулярно. Тогава $\mathfrak{H} = \mathrm{const}$ и $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ е изометрично на пространство-времето на Шварцшилд със същата маса $M = \frac{1}{\sqrt{3}\mathfrak{H}} > 0$.*

В това направление се продължава със статия на Язаджиев [33]. В нея се доказва единствеността на статичното пространство време, съдържащо фотонна сфера, когато се добави и скаларно поле φ. За тази цел е необходима подходяща модификация на дефиницията на фотонна сфера [33],

Дефиниция 4.2.5. *Нека $P^3 \hookrightarrow \mathfrak{L}^4$ е фотонна повърхнина. Тогава P^3 се нарича фотонна сфера, ако lapse функцията N и скаларното поле φ са константни върху P^3.*

Условието за регулярно разслояване на пространство-времето $\mathfrak{L}^4$ от lapse функцията N може да бъде заобиколено, като се мине през теоремата за положителност на масата [34, 35, 36]. Тя се излага в термини на множество от начални данни. Едно множество от начални данни се състои от ориентирано 3-мерно многообразие M^3 без граница, положително дефинитна метрика g_{ij}, втора фундаментална форма K_{ij}, локална масова плътност μ и локална плътност на потока J^i. g_{ij}, K_{ij}, μ и J^i трябва да удовлетворяват определени връзки [35]. Приема се, че μ и J^i удовлетворяват условието за доминантност на енергията:

$$\mu \geq (J^i J_i)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

Едно множество от начални данни се нарича асимптотически плоско, ако за някое компактно множество C, $M^3 \setminus C$ се състои от краен брой компоненти $M_1^3, ..., M_p^3$, такива че всяко M_k^3 е дифеоморфно на допълнението на компактно множество в $\mathbb{R}^3$. Върху всяко M_k^3 метриката има следното асимптотично развитие:

$$\begin{gathered} g_{ij} = \delta_{ij} + b_{ij}, \quad |b_{ij}| \leq k_1(1+r)^{-1}, \\ |\partial b_{ij}| \leq k_2(1+r^2)^{-1}, \quad |\partial\partial b_{ij}| \leq k_3(1+r^3)^{-1}, \end{gathered} \tag{4.2}$$

където k_1,k_2 и k_3 са положителни константи. Приема се, че асимптотичното поведение на скаларната кривина ${}^gR$ и на втората фундаментална форма K_{ij} е следното:

$$\begin{gathered} |R| \leq k_4(1+r^4)^{-1}, \quad |\partial R| \leq k_5(1+r^5)^{-1}, \\ |K_{ij}| + r\,|\partial K_{ij}| + r^2\,|\partial\partial K_{ij}| \leq k_6(1+r^2)^{-1}, \quad |\mathrm{tr}(K)| \leq k_7(1+r^3)^{-1}, \end{gathered} \tag{4.3}$$

където k_4,k_5, k_6 и k_7 са положителни константи. Освен това с всяко M_k^3 може да се асоциира АДМ маса M_k. Тогава (обобщената) теорема за положителност на масата гласи следното:

Теорема 4.2.4. *Нека (M^3, g_{ij}, K_{ij}) е асимптотически плоско множество от начални данни. Тогава $M_k \geq 0$ за $1 \leq k \leq p$.*

Вторият основен резултат на [35] се отнася за случая, когато някое M_k е нула. Необходимо е още едно допускане за метриката:

$$|\partial\partial\partial b_{ij}| + |\partial\partial\partial\partial b_{ij}| \leq k_8(1+r^4)^{-1}. \tag{4.4}$$

където отново k_8 е положителна константа. Теоремата е:

Теорема 4.2.5. *Ако асимптотически плоско множество от начални данни удовлетворява (4.4) и $M_k = 0$ за някое k, то може да бъде изометрично вписано в четиримерно пространство на Минковски като пространствено-подобна хиперповърхнина така, че g_{ij} да е индуцираната метрика и K_{ij} да е втората фундаментална форма. По-точно M^3 има топологията на $\mathbb{R}^3$.*

Използвайки теоремата за положителност на масата Бунтинг и Масууд-ул-Алам [37] заобикалят предположението за свързаност от теоремата на Израел. Така те доказват следната теорема:

Теорема 4.2.6. *Външното решение на Шварцшилд е единственото максимално разширено статично, вакуумно, асимптотически Евклидово пространство-време с регулярна, компактна граница на черна дупка.*

Теоремата за положителност на масата може да се приложи и към задачата за единственост на фотонна сфера. Седербаум и Галоуей правят това за вакуумния и електро-вакуумния случай [38, 39]. По този начин те изключват съществуването на статично пространство-време с множество фотонни сфери. Теоремата за вакуумния случай гласи следното [38]:

Теорема 4.2.7. *Нека $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ е геометро-статично пространство-време, което притежава фотонна сфера $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ със средна кривина $\mathfrak{H}$, възникваща като вътрешната граница на $\mathfrak{L}^4$. Тогава АДМ масата на $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ е $M = (\sqrt{3}\mathfrak{H})^{-1}$, където $\mathfrak{H} > 0$, и $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ е изометрично на региона извън фотонната сфера в пространство-времето на Шварцшилд с маса M. По-точно, (P^3, p) е свързана и е цилиндър върху топологична сфера.*

Тъй като тук фотонната сфера може да не е свързана, нейната дефиниция се модифицира по подходящ начин, така че lapse функцията N да е константна върху всяка свързана компонента на P^3. За електро-вакуумния случай теоремата е подобна.

Има и два резултата от Томикауа [40, 41], доказващи единственост на статичното пространство-време с конформно скаларно поле, притежаващо фотонна сфера. Разгледани са и двата случая за свързаността на фотонната сфера.

От тук нататък изследванията върху математичните аспекти на фотонните сфери се разклоняват в много различни направления. Едно направление е разглеждането на асферични фотонни и антифотонни (със стабилни фотонни орбити) повърхнини [42]. Друго направление е пертурбативният подход към въпроса за единствеността [43]. Трето е опитът за характеризиране на региона със силна гравитация в стационарно пространство-време, използвайки поведението на фотоните [44, 45, 46]. Там обаче фотонните орбити не са кръгови, а сферични, и се наблюдава фотонен регион, а не сфера [44], което значително усложнява ситуацията.

Едно допълнително направление за изследвания възниква при разглеждането на геометричните характеристики на червеевите дупки. Пропускайки много от детайлите, за статично пространство-време гърлото Σ на използваема червеева дупка е дефинирано от Хохбърг и Висър като двумерна хиперповърхнина с минимална площ, взета в една от пространствените хиперповърхнини с константно време [47]. Могат да се използват Гаусови нормални координати $x^i = (x^a, n)$ върху пространствената хиперповърхнина, така че Σ да се дава от $n = 0$. Тогава използваема червеева дупка може да се дефинира по следния начин:

Дефиниция 4.2.6. *Една двумерна хиперповърхнина Σ в пространствена хиперповърхнина с константно време на статично пространство-време се нарича гърло на използваема червеева дупка, ако върху Σ важат следните условия:*

$$\mathrm{tr}(k) = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{tr}(k)}{\partial n} \leq 0, \tag{4.5}$$

където k е втората фундаментална форма на Σ.

Друга формална дефиниция на статична, асимптотически плоска червеева дупка с два края, която е решение на уравненията на Айнщайн с фантомно скаларно поле, дава Язаджиев. Тя е следната [48]:

Дефиниция 4.2.7. *Едно решение на уравненията на Айнщайн с фантомно скаларно поле се нарича статична, асимптотически плоска използваема червеева дупка, ако са изпълнени следните условия:*

1. *Пространство-времето е строго статично (времеподобното Килингово векторно поле ξ^μ е времеподобно навсякъде);*

2. *Римановото многообразие (M^3, g) е пълно;*

3. *За компактно множество $K \in M^3$, $M^3 \setminus K$ се състои от два края End_+ и End_-, такива че всеки край е дифеоморфен на $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$, където $\bar{B}$ е затвореното единично кълбо в центъра на координатната система, и такива че асимптотичното поведение на три-метриката g_{ij}, lapse функцията N и скаларното поле φ е следното:*

$$g_{ij} = N_\pm^{-2}\left(1 + \frac{2M_\pm}{r}\right)\delta_{ij} + O\left(r^{-2}\right), \tag{4.6}$$

$$N = N_\pm\left(1 - \frac{M_\pm}{r}\right) + O\left(r^{-2}\right), \tag{4.7}$$

$$\varphi = \varphi_\pm - \frac{q_\pm}{r} + O\left(r^{-2}\right) \tag{4.8}$$

спрямо стандартната радиална координата r върху $\mathbb{R}^3$ и където δ_{ij} е стандартната плоска метрика върху $\mathbb{R}^3$.

Използвайки тази дефиниция, е доказана теорема за единственост [48],

Теорема 4.2.8. *Масата M и скаларният заряд q на статичните и асимптотически плоски използваеми червееви дупки, които са решения на уравненията на Айнщайн с фантомно скаларно поле, удовлетворяват неравенството $M^2 < q^2$. Освен това може да има само едно пространство-време $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g}, \varphi)$, което е статична и асимптотически плоска използваема червеева дупка, с дадена маса M, скаларен заряд q и асимптотична стойност φ_+ на скаларното поле, удовлетворяваща $0 < \sqrt{1 - \frac{M^2}{q^2}}\varphi_+ \leq \frac{\pi}{2}$, и то е изометрично на червеевата дупка на Елис-Бронников.*

Глава 5

Заредената фотонна сфера

В тази глава е доказана теорема за единственост на фотонна сфера в заредено пространство-време.

5.1 Предварителни дефиниции и уравнения

Разгледана е гравитация на Айнщайн-Максуел, описвана от следното действие:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi}\int_{\mathfrak{L}^4} \mathrm{d}^4x\sqrt{-\mathfrak{g}}(\mathfrak{R} - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}). \tag{5.1}$$

То води до следните уравнения:

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu} = 2\left(F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{4}\mathfrak{g}_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right), \tag{5.2}$$

$$\mathrm{d}\star F = 0, \tag{5.3}$$

$$\mathrm{d}F = 0. \tag{5.4}$$

За статично пространство-време съществува гладко Риманово многообразие (M^3, g) и гладка lapse функция $N : M^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$, такива че

$$\mathfrak{L}^4 = \mathbb{R}\times M^3,\ \ \mathfrak{g} = -N^2\mathrm{d}t^2 + g. \tag{5.5}$$

Нека $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ е Килинговото векторно поле. Тогава статичността на електромагнитното поле се дефинира от

$$\mathcal{L}_\xi F = 0. \tag{5.6}$$

Ще се разгледа случая само с електрично поле, където $\iota_\xi \star F = 0$.

Пространство-времето е асимптотически плоско, ако съществува компактно множество $K \in M^3$, такова че $M^3 \setminus K$ е дифеоморфно на $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$, където

$\bar{B}$ е затвореното единично кълбо в центъра на координатната система в $\mathbb{R}^3$, и такова че

$$g = \delta + O(r^{-1}), \quad N = 1 - \frac{M}{r} + O(r^{-2}). \tag{5.7}$$

Асимптотичното поведение на електромагнитното поле е

$$F = -\frac{Q}{r^2} dt \wedge dr + O(r^{-3}). \tag{5.8}$$

Тук M и Q са съответно масата и електричният заряд. Ще се разгледа физически интересният случай с $M > 0$ и $Q \neq 0$.

Фотонната повърхнина се дефинира от следната дефиниция [31]:

Дефиниция 5.1.1. *Една вписана времеподобна хиперповърхнина* $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ *се нарича фотонна повърхнина, ако всяка изотропна геодезична, първоначално тангенциална към* P^3*, остава тангенциална към* P^3 *докато съществува.*

Следва фотонната сфера:

Дефиниция 5.1.2. *Нека* $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ *е фотонна повърхнина. Тогава* P^3 *се нарича фотонна сфера, ако lapse функцията* N *е константна върху* P^3 *и едно-формата* $\iota_\xi F$ *е нормална към* P^3.

Предполага се, че lapse функцията N разслоява пространство-времето извън фотонната сфера регулярно, т.е.

$$\rho^{-2} = g\left({}^g\nabla N, {}^g\nabla N\right) \neq 0 \tag{5.9}$$

извън фотонната сфера. Пространствената част на този външен регион ще се означава с M^3_{ext} и по дефиниция има като вътрешна граница сечението Σ на най-външната фотонна сфера с M^3. По дефиниция Σ се дава от $N = N_0$ за някое $N_0 \in \mathbb{R}^+$. Като следствие от допускането всички множества $N = \mathrm{const}$, включително Σ, са топологично сфери и M^3_{ext} е топологично $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Едно-формата на електричното поле E се дефинира от

$$E = -\iota_\xi F \tag{5.10}$$

и удовлетворява $\mathrm{d}E = 0$. Поради това, че M^3_{ext} е простосвързано, съществува електричен потенциал Φ, такъв че $E = \mathrm{d}\Phi$. От дефиницията на фотонната сфера следва, че Φ е константен върху нея. Без ограничение на общността ще изберем $\Phi_\infty = 0$.

Използвайки (5.5) и електричния потенциал, се получават размерно редуцираните полеви уравнения:

$$ {}^{g}\Delta N = N^{-1}\, {}^{g}\nabla^i \Phi\, {}^{g}\nabla_i \Phi, \tag{5.11} $$

$$ {}^{g}R_{ij} = N^{-1}\, {}^{g}\nabla_i\, {}^{g}\nabla_j N + N^{-2}\left(g_{ij}\, {}^{g}\nabla^k \Phi\, {}^{g}\nabla_k \Phi - 2\, {}^{g}\nabla_i \Phi\, {}^{g}\nabla_j \Phi \right), \tag{5.12} $$

$$ {}^{g}\nabla^i \left(N^{-1}\, {}^{g}\nabla_i \Phi \right) = 0. \tag{5.13} $$

От горните може да се получи функционална зависимост между N и Φ върху M^3_{ext}:

$$ N^2 = \Phi^2 - 2\frac{M}{Q}\Phi + 1. \tag{5.14} $$

От принципа за максимума за елиптични частни диференциални уравнения и от асимптотичното поведение на N при $r \to \infty$ се получава следното неравенство за стойностите на N върху M^3_{ext}:

$$ N_0 \leq N < 1. \tag{5.15} $$

5.2 Помощни уравнения и теореми

Резултатите в този раздел са важни за основната теорема. Ще бъде използвана една теорема на Клодел, Вирбхадра и Елис [31]:

Теорема 5.2.1. *Нека $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ е вписана времеподобна хиперповърхнина. Тогава P^3 е фотонна повърхнина тогава и само тогава, когато втората ѝ фундаментална форма е пропорционална на индуцираната метрика p.*

Тогава втората фундаментална форма на P^3 може да се запише като $\mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{H}}{3} p$, където $\mathfrak{H}$ е средната кривина на P^3.

Теорема 5.2.2. *Нека $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g}, F)$ е статично, асимптотически плоско пространство-време, удовлетворяващо уравненията на Айнщайн-Максуел и притежаващо фотонна сфера $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$. Тогава P^3 има константни средна и скаларна кривина.*

Доказателство. За доказателството на теоремата първо се използва уравнението на Кодаци за $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ с единичен нормален вектор ν, водещо до

$$ 0 = (1-3)Y\left(\frac{\mathfrak{H}}{3}\right), \tag{5.16} $$

което означава, че P^3 има константна средна кривина.

След това може да се използва контрактираното уравнение на Гаус, откъдето се получава, че P^3 има скаларна кривина

$$ {}^{p}R = \frac{2}{3}\mathfrak{H}^2 + 2\frac{E_\nu^2}{N^2}. \tag{5.17} $$

Ако се покаже, че E_ν е константно върху P^3, ще следва, че ${}^{p}R$ също е константно. Това ще бъде изведено по-долу. □

Продължавайки напред, втората фундаментална форма h на $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$ с единичен нормален вектор ν е

$$ h(X,Y) = \frac{\mathfrak{H}}{3}\sigma(X,Y). \tag{5.18} $$

Тоест тя е пропорционална на индуцираната метрика и Σ има константна средна кривина $H = \frac{2}{3}\mathfrak{H}$. От този резултат и уравнението на Кодаци за $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$ се получава

$$ {}^{g}R(Y,\nu) = 0 \tag{5.19} $$

и че $\nu(N)$ е константно върху Σ, т.е.

$$ {}^{g}\mathcal{L}_X(\nu(N)) = 0. \tag{5.20} $$

Като директно следствие от (5.14) се получава, че E_ν също е константно върху Σ и следователно върху P^3.

След няколко прилагания на уравненията на Гаус-Кодаци, както и на теоремата на Гаус-Боне, дефиницията на Комар за маса и уравнението за $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$ [32]

$$ {}^{g}\Delta N = {}^{\sigma}\Delta N + {}^{g}\nabla^2 N(\nu,\nu) + ({}^{\sigma}\mathrm{tr} h)\nu(N), \tag{5.21} $$

се получава

$$ 1 = \frac{4\pi Q^2}{A_\Sigma} + \frac{3}{2}\left(M - Q\Phi_0\right) H \tag{5.22} $$

и

$$ 2[\nu(N)]_0 = N_0 H. \tag{5.23} $$

5.3 Теорема за единственост

Дефиниция 5.3.1. *Една фотонна сфера се нарича неекстремална, ако*

$$\frac{1}{4\pi}H^2 A_\Sigma \neq 1. \tag{5.24}$$

В разглежданата задача това е еквивалентно на $M^2 \neq Q^2$.

Основният резултат в тази глава е следната теорема:

Теорема 5.3.1. *Нека $(\mathfrak{L}^4_{\rm ext}, \mathfrak{g}, F)$ е статично и асимптотически плоско пространство-време с дадени маса M и заряд Q, удовлетворяващо уравненията на Айнщайн-Максуел и притежаващо неекстремална фотонна сфера като вътрешна граница на $\mathfrak{L}^4_{\rm ext}$. Нека lapse функцията да разслоява $\mathfrak{L}^4_{\rm ext}$ регулярно. Тогава $(\mathfrak{L}^4_{\rm ext}, \mathfrak{g}, F)$ е изометрично на пространство-времето на Райснер-Нордстръом с маса M и заряд Q, удовлетворяващи неравенството $\frac{Q^2}{M^2} \leq \frac{9}{8}$.*

Доказателство. Разглеждайки 3-метриката γ_{ij} върху $M^3_{\rm ext}$, дефинирана от

$$\gamma_{ij} = N^2 g_{ij}, \tag{5.25}$$

и един потенциал $\tilde{\lambda}$ (поради връзката (5.14)), дефиниран от

$$\mathrm{d}\tilde{\lambda} = -N^{-2}\mathrm{d}\Phi, \quad \tilde{\lambda}_\infty = 0, \tag{5.26}$$

полевите уравнения могат да се редуцират още:

$$R(\gamma)_{ij} = 2\left(\frac{M^2}{Q^2} - 1\right) D_i\tilde{\lambda} D_j\tilde{\lambda}, \tag{5.27}$$

$$D_i D^i \tilde{\lambda} = 0. \tag{5.28}$$

Следващата цел е да се покаже, че двете неравенства

$$\int_{M^3_{\rm ext}} D^i\left[\Omega^{-1}\left(\Gamma D_i\chi - \chi D_i\Gamma\right)\right]\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^3x \geq 0 \tag{5.29}$$

и

$$\int_{M^3_{\rm ext}} D^i\left(\Omega^{-1}D_i\chi\right)\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^3x \geq \int_{M^3_{\rm ext}} D^i\left[\Omega^{-1}\left(\Gamma D_i\chi - \chi D_i\Gamma\right)\right]\sqrt{\gamma}\mathrm{d}^3x, \tag{5.30}$$

се свеждат до равенство. Следвайки [33], това ще доведе до нулиращ се тензор на Бах $R(\gamma)_{ijk}$ за метриката γ_{ij} и до конформно плоска метрика g_{ij}. Разглеждат се два случая за знака на $\frac{Q^2}{M^2}$.

Когато $\frac{Q^2}{M^2} < 1$, се използва потенциал

$$\lambda = \sqrt{\frac{M^2}{Q^2} - 1}\tilde{\lambda}, \tag{5.31}$$

а функциите χ, Γ и Ω са дефинирани от

$$\chi = \left(\gamma^{ij} D_i \Gamma D_j \Gamma\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \Gamma = \frac{1 - e^{2\lambda}}{1 + e^{2\lambda}}, \quad \Omega = \frac{4e^{2\lambda}}{(1 + e^{2\lambda})^2}. \tag{5.32}$$

Когато $\frac{Q^2}{M^2} > 1$, се използва потенциал

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{M^2}{Q^2}}\tilde{\lambda}, \tag{5.33}$$

където $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$, а функциите Γ и Ω са различни и дефинирани от

$$\Gamma = \tan(\lambda), \quad \Omega = 1 + \Gamma^2 = \cos^{-2}(\lambda). \tag{5.34}$$

И в двата случая последната стъпка е да се пресметне явно $R(g)_{ijk}R(g)^{ijk} = 0$, откъдето може да се види, че пространствената геометрия е сферичносиметрична. Тогава от теоремата на Биркоф следва, че пространство-времето е изометрично на това на Райснер-Нордстрьом. Ограничението $\frac{Q^2}{M^2} \leq \frac{9}{8}$ е всъщност ограничение за съществуването на фотонна сфера и възниква свеждането на двете неравенства до равенство. $\square$

Глава 6

Добавяне на скаларно поле

В тази глава се разглежда единствеността на фотонна сфера при наличието едновременно на скаларно и на електрично поле.

6.1 Дефиниции и подготовка

Полевите уравнения за дилатонната гравитация на Айнщайн-Максуел са следните:

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu} = 2\,{}^{\mathfrak{g}}\nabla_{\mu}\varphi\,{}^{\mathfrak{g}}\nabla_{\nu}\varphi + 2e^{-2\alpha\varphi}\left(F_{\mu\beta}F_{\nu}{}^{\beta} - \frac{\mathfrak{g}_{\mu\nu}}{4}F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma}\right), \tag{6.1}$$

$${}^{\mathfrak{g}}\nabla_{[\beta}F_{\mu\nu]} = 0, \tag{6.2}$$

$${}^{\mathfrak{g}}\nabla_{\beta}\left(e^{-2\alpha\varphi}F^{\beta\mu}\right) = 0, \tag{6.3}$$

$${}^{\mathfrak{g}}\nabla_{\beta}\,{}^{\mathfrak{g}}\nabla^{\beta}\varphi = -\frac{\alpha}{2}e^{-2\alpha\varphi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{6.4}$$

За статично пространство-време съществува гладко Риманово многообразие (M^3, g) и гладка lapse функция $N : M^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$, такива че

$$\mathfrak{L}^4 = \mathbb{R}\times M^3,\ \mathfrak{g} = -N^2\mathrm{d}t^2 + g. \tag{6.5}$$

Статичността на полето на Максуел и на скаларното поле се дефинира чрез времеподобния Килингов вектор $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$,

$$\mathcal{L}_{\xi}F = 0, \tag{6.6}$$

$$\mathcal{L}_{\xi}\varphi = 0. \tag{6.7}$$

Ще бъде разгледан случаят, когато $\iota_{\xi}\star F = 0$, т.е. когато има само електрично поле. Освен това пространство-времето ще е асимптотически плоско в обичайния смисъл.

Фотонната повърхнина се дефинира от:

Дефиниция 6.1.1. *Една вписана времеподобна хиперповърхнина* $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ *се нарича фотонна повърхнина, ако всяка изотропна геодезична, която е първоначално тангенциална към* P^3*, остава тангенциална към* P^3*, докато съществува.*

Тогава фотонната сфера се дефинира от:

Дефиниция 6.1.2. *Нека* $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$ *е фотонна повърхнина. Тогава* P^3 *се нарича фотонна сфера, ако lapse функцията* N *е константна върху* P^3 *и едно-формите* $\iota_\xi F$ *и* $\mathrm{d}\varphi$ *са нормални към* P^3*.*

В тази глава отново се предполага, че lapse функцията N регулярно разслоява региона от пространство-времето извън фотонната сфера. Пространствената част на този регион ще се отбелязва с M^3_{ext}, а сечението на M^3 с P^3 ще се отбелязва със Σ. От предположението следва, че всички множества $N = \mathrm{const}$, включително Σ, са топологично сфери и M^3_{ext} е топологично $S^2 \times \mathbb{R}$.

Отново може да се въведе електричен потенциал Φ, който е константен върху P^3. Асимптотичните разложения на скаларното поле φ и електричния потенциал Φ са

$$\varphi = \varphi_\infty - \frac{q}{r} + O(r^{-2}), \tag{6.8}$$

$$\Phi = \Phi_\infty + \frac{Q}{r} + O(r^{-2}), \tag{6.9}$$

където q е скаларният заряд и Q е електричният заряд. Без ограничение на общността може да се фиксират $\varphi_\infty = 0$ и $\Phi_\infty = 0$.

Размерно редуцираните полеви уравнения са

$$ {}^g\Delta N = N^{-1} e^{-2\alpha\varphi}\, {}^g\nabla_i \Phi\, {}^g\nabla^i \Phi, \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} {}^gR_{ij} = {} & 2\, {}^g\nabla_i \varphi\, {}^g\nabla_j \varphi + N^{-1}\, {}^g\nabla_i\, {}^g\nabla_j N \\ & + N^{-2} e^{-2\alpha\varphi} (g_{ij}\, {}^g\nabla_k \Phi\, {}^g\nabla^k \Phi - 2\, {}^g\nabla_i \Phi\, {}^g\nabla_j \Phi), \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$ {}^g\nabla_i (N^{-1} e^{-2\alpha\varphi}\, {}^g\nabla^i \Phi) = 0, \tag{6.12}$$

$$ {}^g\nabla_i (N\, {}^g\nabla^i \varphi) = \alpha N^{-1} e^{-2\alpha\varphi}\, {}^g\nabla_i \Phi\, {}^g\nabla^i \Phi. \tag{6.13}$$

От принципа за максимума за елиптични частни диференциални уравнения и от асимптотичното поведение на N при $r \to \infty$ следва, че стойностите на N върху M^3_{ext} удовлетворяват

$$N_0 \leq N < 1. \tag{6.14}$$

6.2 Някои важни резултати за външната и вътрешната геометрия на фотонната сфера

Подобно на предната глава втората фундаментална форма на P^3 може да се запише като $\mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{H}}{3}p$, където $\mathfrak{H}$ е средната кривина на P^3. Този факт е съществен за доказването на следната теорема:

Теорема 6.2.1. *Нека $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g}, F, \varphi)$ е статично, асимптотически плоско пространство-време, удовлетворяващо полевите уравнения (6.10-6.13) и притежаващо фотонна сфера $(P^3, p) \hookrightarrow (\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g})$. Тогава P^3 има константни средна и скаларна кривина.*

Доказателството е аналогично на това на теорема 5.2.2. За скаларната кривина се получава изразът

$$^{p}R = \frac{2}{3}\mathfrak{H}^2 - 2({}^{g}\nabla_{\nu}\varphi)^2 + e^{-2\alpha\varphi}\frac{2}{N^2}E_{\nu}^2. \tag{6.15}$$

След това могат да бъдат получени връзки между масата, електричния заряд и скаларния заряд върху фотонната сфера. Чрез интегриране на (6.12) върху M^3_{ext} се получава

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} N^{-1}e^{-2\alpha\varphi}\,{}^{g}\nabla^{i}\Phi \mathrm{d}\Sigma_i. \tag{6.16}$$

Същото интегриране се извършва на (6.10) и (6.13) и води до следните изрази:

$$M = M_0 + \Phi_0 Q, \tag{6.17}$$
$$q = q_0 + \alpha\Phi_0 Q, \tag{6.18}$$

където M_0 е масата на фотонната сфера, дефинирана от

$$M_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} {}^{g}\nabla^{i}N \mathrm{d}\Sigma_i, \tag{6.19}$$

и q_0 е скаларният заряд на фотонната сфера, дефиниран от

$$q_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} N\,{}^{g}\nabla^{i}\varphi \mathrm{d}\Sigma_i. \tag{6.20}$$

Втората фундаментална форма h на $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$ с единичен вектор ν е

$$h(X, Y) = \frac{\mathfrak{H}}{3}\sigma(X, Y). \tag{6.21}$$

Следователно $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$ има константна средна кривина

$$H = \frac{2}{3}\mathfrak{H}. \tag{6.22}$$

След това може да се използва уравнението на Кодаци за $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$. След контракция и отчитайки (6.22), се получава

$${}^{g}R(Y, \nu) = 0. \tag{6.23}$$

Горното може да се използва, за да се докаже, че $\nu(N)$ е константно върху Σ (т.е. че $\mathcal{L}_X(\nu(N)) = 0$).

За функцията $N : M^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ и вписването $(\Sigma, \sigma) \hookrightarrow (M^3, g)$ е изпълнено [32]

$${}^{g}\Delta N = {}^{\sigma}\Delta N + {}^{g}\nabla^2 N(\nu, \nu) + {}^{\sigma}\mathrm{tr}(h)\nu(N). \tag{6.24}$$

То може да се използва в комбинация с уравненията на Гаус-Кодаци и теоремата на Гаус-Боне, за да се получат още няколко полезни уравнения:

$$2[\nu(N)]_0 = \frac{2}{\rho_0} = N_0 H, \tag{6.25}$$

$$N_0 = \frac{1}{4\pi} e^{-2\alpha\varphi_0} N_0^{-1} E_\nu^2 A_\Sigma - \frac{1}{4\pi} N_0 ({}^{g}\nabla_\nu \varphi)^2 A_\Sigma + \frac{3}{8\pi} H [\nu(N)]_0 A_\Sigma \tag{6.26}$$

и

$$1 = \frac{1}{4\pi} H^2 A_\Sigma - \frac{1}{4\pi} \left[N_0^{-2} [\nu(N)]_0^2 + ({}^{g}\nabla_\nu \varphi)^2 - e^{-2\alpha\varphi_0} N_0^{-2} E_\nu^2 \right] A_\Sigma. \tag{6.27}$$

6.3 Симетрии на размернoредуцираните полеви уравнения

За да се видят по-ясно симетриите на размерно редуцираните полеви уравнения, може да се използва нова 3-метрика γ_{ij} върху M^3_{ext}:

$$\gamma_{ij} = N^2 g_{ij}, \tag{6.28}$$

и нова функция u, такава че $N^2 = e^{2u}$. Освен това могат да се въведат следните нови потенциали:

$$U = u + \alpha\varphi, \ \Psi = \varphi - \alpha u, \ \hat{\Phi} = \sqrt{1 + \alpha^2}\Phi. \tag{6.29}$$

Тогава полевите уравнения придобиват вида

$$ {}^{\gamma}R_{ij} = \frac{1}{1+\alpha^2}(2D_iUD_jU - 2e^{-2U}D_i\hat{\Phi}D_j\hat{\Phi} + 2D_i\Psi D_j\Psi), \tag{6.30} $$

$$ D_iD^iU = e^{-2U}D_i\hat{\Phi}D^i\hat{\Phi}, \tag{6.31} $$

$$ D_iD^i\Psi = 0, \tag{6.32} $$

$$ D_i(e^{-2U}D^i\hat{\Phi}) = 0. \tag{6.33} $$

От тях могат да се получат две функционални зависимости между потенциалите. Първата е

$$ e^{2U} - 1 - \hat{\Phi}^2 + \frac{2(M+\alpha q)}{Q_\alpha}\hat{\Phi} = 0. \tag{6.34} $$

За втората може да се въведе още един потенциал ζ:

$$ \mathrm{d}\zeta = -e^{-2U}\mathrm{d}\hat{\Phi}, \quad \zeta_\infty = 0, \tag{6.35} $$

и той е свързан с Ψ чрез

$$ (q_0 - \alpha M_0)\zeta - Q_\alpha\Psi = 0. \tag{6.36} $$

Използвайки (6.34) и (6.36), полевите уравнения се записват като

$$ {}^{\gamma}R_{ij} = \frac{2}{1+\alpha^2}\left(\frac{M^2+q^2}{Q^2} - 1\right)D_i\zeta D_j\zeta, \tag{6.37} $$

$$ D_iD^i\zeta = 0. \tag{6.38} $$

6.4 Класификация на решенията на уравненията на Айнщайн-Максуел с дилатонно поле, съдържащи фотонна сфера

Както в предната глава, и тук ще бъдат разгледани неекстремални фотонни сфери, които в сегашния контекст удовлетворяват $M^2 + q^2 - Q^2 \neq 0$.

Теорема 6.4.1. *Нека $(\mathfrak{L}^4_{\mathrm{ext}}, \mathfrak{g}, F, \varphi)$ е статично и асимптотически плоско пространство-време с дадени маса M, електричен заряд Q и дилатонен заряд q, удовлетворяващо дилатонните уравнения на Айнщайн-Максуел и притежаващо неекстремална фотонна сфера като вътрешна граница на $\mathfrak{L}^4_{\mathrm{ext}}$. Нека lapse функцията разслоява $\mathfrak{L}^4_{\mathrm{ext}}$ регулярно. Тогава $(\mathfrak{L}^4_{\mathrm{ext}}, \mathfrak{g}, F, \varphi)$ е сферичносиметрично.*

Доказателство. Доказателството на теоремата отново минава през тензора на Бах. Необходими са малки модификации, за да бъде сведена задачата до случая на заредена фотонна сфера. Разглежданите неравенства са [33]

$$\int_{M^3_{\mathrm{ext}}} D^i \left[\Omega^{-1}(\Gamma D_i \chi - \chi D_i \Gamma)\right] \sqrt{\gamma} \mathrm{d}^3 x \geq 0 \tag{6.39}$$

и

$$\int_{M^3_{\mathrm{ext}}} D^i \left(\Omega^{-1} D_i \chi\right) \sqrt{\gamma} \mathrm{d}^3 x \geq \int_{M^3_{\mathrm{ext}}} D^i \left[\Omega^{-1}(\Gamma D_i \chi - \chi D_i \Gamma)\right] \sqrt{\gamma} \mathrm{d}^3 x. \tag{6.40}$$

Има два случая. В първия $M^2 + q^2 > Q^2$ и се избира потенциал λ, такъв че

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{M^2 + q^2}{Q^2} - 1\right) \frac{1}{1 + \alpha^2}} \zeta. \tag{6.41}$$

Тогава

$$\chi = \left(\gamma^{ij} D_i \Gamma D_j \Gamma\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \Gamma = -\tanh(\lambda), \quad \Omega = \frac{1}{\cosh^2(\lambda)}. \tag{6.42}$$

Вторият случай е при $M^2 + q^2 < Q^2$ и потенциалът λ е

$$\lambda = \sqrt{\left(1 - \frac{M^2 + q^2}{Q^2}\right) \frac{1}{1 + \alpha^2}} \zeta. \tag{6.43}$$

Тогава

$$\Gamma = -\tan(\lambda), \quad \Omega = \cos^{-2}(\lambda), \tag{6.44}$$

а функцията χ е същата.

Както в случая за заредена фотонна сфера, двете неравенства се свеждат до равенство, откъдето следва, че тензорът на Бах е нула и може да се получи, че 3-метриката g_{ij} е сферичносиметрична. □

Сега могат да бъдат класифицирани явно решенията на полевите уравнения и това води до втора основна теорема. За тази цел първо се въвежда параметър M_α:

$$M_\alpha = M + \alpha q. \tag{6.45}$$

Трябва да бъдат разгледани няколко случая.

Случай $M^2 + q^2 > Q^2$.

Размерно редуцираните уравнения (6.37, 6.38) придобиват вида

$$ {}^{\gamma}R_{ij} = 2D_i\lambda D_j\lambda, \tag{6.46} $$

$$ D_iD^i\lambda = 0. \tag{6.47} $$

Това са статичните вакуумни уравнения на Айнщайн за метриката γ_{ij} с ефективна lapse функция $N_{\text{eff}} = e^{\lambda}$ и ефективна маса $M_{\text{eff}} = \sqrt{M^2 + q^2 - Q^2}$. Тъй като решението на Шварцшилд е единственото статично и сферичносиметрично решение на вакуумните уравнения на Айнщайн, се получава

$$ e^{2\lambda} = 1 - \frac{2\sqrt{M^2 + q^2 - Q^2}}{r}, \tag{6.48} $$

$$ \gamma_{ij}dx^i dx^j = dr^2 + e^{2\lambda}r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{6.49} $$

Метриката на пространство-времето тогава е

$$ ds^2 = -N^2dt^2 + N^{-2}\left[dr^2 + e^{2\lambda}r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]. \tag{6.50} $$

Остава да бъдат получени lapse функцията N, електростатичният потенциал Φ и дилатонното поле φ. За тази цел трябва да се интегрира (6.35), отчитайки (6.36). В зависимост от M_α и Q_α ще се получат 3 класа от решения (за случаите $M_\alpha^2 > Q_\alpha^2$, $M_\alpha^2 = Q_\alpha^2$ и $M_\alpha^2 < Q_\alpha^2$).

Случай $M^2 + q^2 < Q^2$.

В този случай размерно редуцираните уравнения стават

$$ {}^{\gamma}R_{ij} = -2D_i\lambda D_j\lambda, \tag{6.51} $$

$$ D_iD^i\lambda = 0. \tag{6.52} $$

Решаването на тези уравнения за сферичносиметрично пространство води до

$$ \lambda = \arctan\left(\frac{\sqrt{Q^2 - M^2 - q^2}}{r}\right), \tag{6.53} $$

$$ \gamma_{ij} = dr^2 + (r^2 + Q^2 - M^2 - q^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{6.54} $$

Тогава четиримерната метрика е

$$ ds^2 = -N^2dt^2 + N^{-2}\left[dr^2 + (r^2 + Q^2 - M^2 - q^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{6.55} $$

и отново могат да бъдат получени явни изрази за N, Φ and φ.

Глава 7

Червееви дупки

В тази глава е разгледана единствеността на използваемите червееви дупки, които са решения на дилатонните уравнения на Айнщайн-Максуел с фантомно скаларно поле и (фантомно) електромагнитно поле, когато константата на взаимодействие между дилатонното и електромагнитното поле е едно.

7.1 Полеви уравнения и общи дефиниции

Теорията е зададена от следното действие:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-\mathfrak{g}}\left[\mathfrak{R} + 2\,{}^{\mathfrak{g}}\nabla_\mu\varphi\,{}^{\mathfrak{g}}\nabla^\mu\varphi - \varepsilon\, e^{-2\varphi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right], \tag{7.1}$$

където $\varepsilon = \pm 1$. То води до следните полеви уравнения върху $\mathfrak{L}^4$:

$$\mathfrak{R}_{\mu\nu} = -2\,{}^{\mathfrak{g}}\nabla_\mu\varphi\,{}^{\mathfrak{g}}\nabla_\nu\varphi + 2\varepsilon e^{-2\varphi}\left(F_{\mu\beta}F_\nu{}^\beta - \frac{\mathfrak{g}_{\mu\nu}}{4}F_{\beta\gamma}F^{\beta\gamma}\right), \tag{7.2}$$

$${}^{\mathfrak{g}}\nabla_{[\beta}F_{\mu\nu]} = 0, \tag{7.3}$$

$${}^{\mathfrak{g}}\nabla_\beta\left(e^{-2\varphi}F^{\beta\mu}\right) = 0, \tag{7.4}$$

$${}^{\mathfrak{g}}\nabla_\beta\,{}^{\mathfrak{g}}\nabla^\beta\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon e^{-2\varphi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{7.5}$$

Ще бъдат разгледани само *строго* статични решения, т.е. такива, притежаващи Килингово векторно поле ξ, което е времеподобно навсякъде. За такива решения съществува гладко Риманово многообразие (M^3, g) и гладка lapse функция $N : M^3 \longrightarrow \mathbb{R}^+$, такива че:

$$\mathfrak{L}^4 = \mathbb{R}\times M^3, \quad \mathfrak{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = -N^2\mathrm{d}t^2 + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{7.6}$$

Статичността на полетата е дефинирана по стандартния начин:

$$\mathcal{L}_\xi F = 0, \quad \mathcal{L}_\xi \varphi = 0. \tag{7.7}$$

Отново се разглежда чисто електричният случай, $\iota_\xi \star F = 0$.

Дефиницията на използваема червеева дупка е следната (подобно на [48]):

Дефиниция 7.1.1. *Едно решение на полевите уравнения (7.2-7.5) се нарича статична, асимптотически плоска използваема червеева дупка, ако са изпълнени следните условия:*

1. *Пространство-времето е строго статично;*
2. *Римановото многообразие (M^3, g) е пълно;*
3. *За някое компактно множество $K \in M^3$, $M^3 \setminus K$ се състои от два края* End_+ *и* End_-*, такива че всеки край е дифеоморфен на $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$, където $\bar{B}$ е затвореното единично кълбо в центъра на координатната система, и такива че асимптотичното поведение на три-метриката g_{ij}, lapse функцията N, скаларното поле φ и електромагнитното поле F е следното:*

$$g_{ij} = N_\pm^{-2}\left(1 + \frac{2M_\pm}{r}\right)\delta_{ij} + O\left(r^{-2}\right), \tag{7.8}$$

$$N = N_\pm\left(1 - \frac{M_\pm}{r}\right) + O\left(r^{-2}\right), \tag{7.9}$$

$$\varphi = \varphi_\pm - \frac{q_\pm}{r} + O\left(r^{-2}\right), \tag{7.10}$$

$$F = -\left(\frac{Q_\pm}{r^2} + O\left(r^{-3}\right)\right)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}r, \tag{7.11}$$

по отношение на стандартната радиална координата r върху $\mathbb{R}^3$, където δ_{ij} е стандартната плоска метрика върху $\mathbb{R}^3$.

Тук $N_\pm > 0$, $M_\pm$, $\varphi_\pm \neq 0$, $q_\pm \neq 0$, $\Phi_\pm \neq 0$ и $Q_\pm \neq 0$ са константи. $M_\pm$ и $q_\pm$ представляват АДМ масата и скаларният заряд на съответния край $\mathrm{End}_\pm$. Параметрите $Q_\pm$ са свързани със запазващия се заряд, асоцииран с всеки край. Избира се $N_- \leq N_+$.

Както в предишните глави, може да се въведе електромагнитен потенциал Φ, дефиниран върху M^3, който (отчитайки (7.11)) има следното асимптотично поведение:

$$\Phi = \Phi_\pm + \frac{Q_\pm}{r} + O\left(r^{-2}\right). \tag{7.12}$$

Така размерно редуцираните полеви уравнения са следните:

$$
\begin{aligned}
& {}^{g}\Delta N = \varepsilon\, N^{-1} e^{-2\varphi}\, {}^{g}\nabla_i \Phi\, {}^{g}\nabla^i \Phi, && (7.13)\\
& {}^{g}R_{ij} = -2\, {}^{g}\nabla_i \varphi\, {}^{g}\nabla_j \varphi + N^{-1}\, {}^{g}\nabla_i\, {}^{g}\nabla_j N && (7.14)\\
& \qquad + \varepsilon\, N^{-2} e^{-2\varphi} (g_{ij}\, {}^{g}\nabla_k \Phi\, {}^{g}\nabla^k \Phi - 2\, {}^{g}\nabla_i \Phi\, {}^{g}\nabla_j \Phi), &&\\
& {}^{g}\nabla_i (N^{-1} e^{-2\varphi}\, {}^{g}\nabla^i \Phi) = 0, && (7.15)\\
& {}^{g}\nabla_i (N\, {}^{g}\nabla^i \varphi) = -\varepsilon\, N^{-1} e^{-2\varphi}\, {}^{g}\nabla_i \Phi\, {}^{g}\nabla^i \Phi. && (7.16)
\end{aligned}
$$

От принципа за максимума за елиптични частни диференциални уравнения и асимптотичното поведение на N следва, че стойностите на N върху M^3 удовлетворяват

$$N_- \leq N \leq N_+ \tag{7.17}$$

и равенство се достига само в случая $Q_\pm = M_\pm = 0$.

7.2 Функционални зависимости между потенциалите

Може да се разгледа конформно трансформираната метрика γ_{ij} върху M^3, дефинирана от

$$\gamma_{ij} = N^2 g_{ij}. \tag{7.18}$$

Удобно е и да се въведат нови потенциали:

$$U = \ln(N) + \varphi, \quad \Psi = \ln(N) - \varphi, \tag{7.19}$$

които позволяват опростяване на редуцираните уравнения (7.13-7.16):

$$
\begin{aligned}
& {}^{\gamma}R_{ij} = D_i U D_j \Psi + D_i \Psi D_j U - 2\varepsilon\, e^{-2U} D_i \Phi D_j \Phi, && (7.20)\\
& D_i D^i U = 0, && (7.21)\\
& D_i D^i \Psi = 2\varepsilon\, e^{-2U} D_i \Phi D^i \Phi, && (7.22)\\
& D_i (e^{-2U} D^i \Phi) = 0. && (7.23)
\end{aligned}
$$

Могат да се наложат следните ограничения върху асимптотичните стойности на потенциалите U, Ψ и Φ:

$$U_+ = -U_-, \quad \Psi_+ = -\Psi_-, \quad \Phi_+ = -\Phi_-. \tag{7.24}$$

От симетриите на полевите уравнения могат да се получат две функционални зависимости между потенциалите. Първата е

$$e^{2U_+} - e^{2U} - 2\tilde{M}_+ \frac{\tilde{\Phi}}{\tilde{Q}_+} = 0, \tag{7.25}$$

където

$$\tilde{Q}_\pm = e^{-2U_\pm}\, Q_\pm, \quad \tilde{\Phi} = \Phi - \Phi_+, \quad \tilde{M}_+ = M_+ + q_+. \tag{7.26}$$

$$\tag{7.27}$$

За втората първо се въвежда потенциал η, дефиниран от

$$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\Psi - 2\varepsilon e^{-2U}\Phi \mathrm{d}\Phi, \tag{7.28}$$

и тогава зависимостта е

$$\left[(M_+ - q_+) + 2\varepsilon\Phi_+\tilde{Q}_+\right]\tilde{U} = \tilde{M}_+\tilde{\eta}, \tag{7.29}$$

където

$$\tilde{U} = U - U_+, \quad \tilde{\eta} = \eta - \eta_+. \tag{7.30}$$

Използвайки тази зависимости, полевите уравнения се редуцират още – до следния вид:

$$^{\gamma}R_{ij} = -\frac{2}{\tilde{M}_+^2}\left(q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon\tilde{Q}_+^2 e^{2U_+}\right) D_iUD_jU, \tag{7.31}$$

$$D_iD^iU = 0. \tag{7.32}$$

Накрая може да се изведе полезното неравенство

$$\int_{M^3} D_iUD^iU\mathrm{d}\mu = 8\pi U_+\tilde{M}_+ > 0. \tag{7.33}$$

7.3 Теорема за единственост

Може да се формулира следното твърдение:

Теорема 7.3.1. *Асимптотичните заряди M_+, q_+, $\tilde{Q}_+$ и асимптотичната стойност U_+ на потенциала U за статични, асимптотически плоски използваеми червееви дупки, които са решения на дилатонните уравнения на*

Айнщайн-Максуел (7.2-7.5) с фантомно скаларно поле и (евентуално фантомно) електромагнитно поле, удовлетворяват неравенството

$$q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon \tilde{Q}_+^2 e^{2U_+} > 0. \tag{7.34}$$

В допълнение за фиксирана стойност на параметъра $\varepsilon = \pm 1$ може да има само едно статично, асимптотически плоско пространство-време на използваема червеева дупка $(\mathfrak{L}^4, \mathfrak{g}, \varphi, \Phi)$ с асимптотични стойности на потенциалите, удовлетворяващи (7.24), с дадена маса M_+, скаларен заряд q_+, електричен заряд $\tilde{Q}_+$ и асимптотична стойност на потенциала U_+, удовлетворяващи неравенството

$$0 < \sqrt{\frac{q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon \tilde{Q}_+^2 e^{2U_+}}{\tilde{M}_+^2}}\, U_+ \leq \frac{\pi}{2}. \tag{7.35}$$

То е изометрично на сферичносиметричното решение, получено по-долу.

Доказателство. Тримерното Риманово многообразие (M^3, γ_{ij}) с метрика γ_{ij}, дадена от (7.18), е пълно асимптотически плоско многообразие с два края с нулева маса, ${}^{\gamma}M_{\pm} = 0$.

Асимптотичното поведение на γ_{ij} може да се получи от асимптотичното поведение на g_{ij} и на lapse функцията N:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-2}). \tag{7.36}$$

Допускането, че е удовлетворено неравенството

$$q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon \tilde{Q}_+^2 e^{2U_+} \leq 0. \tag{7.37}$$

ще доведе до противоречие.

Вследствие на (7.37) (M^3, γ_{ij}) е пълно асимптотически плоско Риманово многообразие, което притежава неотрицателна скаларна кривина, както може да се види от (7.31), и нулева обща маса за всеки от двата му края. От строгата версия на теоремата за положителност на енергията [34, 35] следва, че (M^3, γ_{ij}) е изометрично на $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$. Това е противоречието и следователно трябва да е изпълнено

$$q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon \tilde{Q}_+^2 e^{2U_+} > 0. \tag{7.38}$$

Сега може да се въведе ново скаларно поле λ, дефинирано от

$$\lambda = \sqrt{\frac{q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon \tilde{Q}_+^2 e^{2U_+}}{\tilde{M}_+^2}}\, U, \tag{7.39}$$

с асимптотични стойности, удовлетворяващи

$$0 < \lambda_+ = -\lambda_- \leq \frac{\pi}{2}, \tag{7.40}$$

Чрез този потенциал полевите уравнения придобиват вида

$$^{\gamma}R_{ij} = -2D_i\lambda D_j\lambda, \tag{7.41}$$

$$D_iD^i\lambda = 0. \tag{7.42}$$

Така задачата се свежда до тази, решена в [48]. Отчитайки (7.40) може да се направи конформната трансформация

$$h_{ij} = \Omega^2\gamma_{ij}, \tag{7.43}$$

където

$$\Omega^2 = \frac{\sin^4(\frac{\lambda+\lambda_+}{2})}{\sin^4(\lambda_+)}. \tag{7.44}$$

Скаларната кривина на h_{ij} е нула. Асимптотичното ѝ разложение в End$_-$ е

$$h_{ij} = \Omega^2\gamma_{ij} = \frac{\left(q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon e^{2U_+}\tilde{Q}_+^2\right)^2}{16\sin^4(\lambda_+)r^4}\delta_{ij} + O\left(r^{-6}\right). \tag{7.45}$$

Чрез координатна смяна $y^i = x^i/r^2$ и нова радиална координата R, такава че $R^2 = \delta_{ij}y^iy^j$, асимптотичното разложение може да се запише като

$$h(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}) = \frac{\left(q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon e^{2U_+}\tilde{Q}_+^2\right)^2}{16\sin^4(\lambda_+)}\delta_{ij} + O(R^2). \tag{7.46}$$

при $R \to 0$.

Следва добавяне на точка ∞ в $R = 0$ и конструиране на многообразието $\tilde{M}^3 = M^3 \cup \{\infty\}$. То е геодезично пълно, скаларно плоско и с един асимптотичен край End$_+$. Според теоремата за положителност на енергията [34, 35] пълната му маса $^h\tilde{M}$ спрямо метриката h_{ij} трябва да е неотрицателна, $^h\tilde{M} \geq 0$. Но от асимптотичното поведение на h_{ij}

$$h_{ij} = \left(1 - 2\cot(\lambda_+)\sqrt{q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon e^{2U_+}\tilde{Q}_+^2}\,\frac{1}{r}\right)\delta_{ij} + O(r^{-2}), \tag{7.47}$$

при $r \to \infty$ следва, че ${}^h\tilde{M} = -2\cot(\lambda_+)\sqrt{q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon e^{2U_+}\tilde{Q}_+^2}$. Отчитайки неравенство (7.33), следва, че ${}^h\tilde{M} \leq 0$ и равенство се достига при $\lambda_+ = \frac{\pi}{2}$. Следователно ${}^h\tilde{M} = 0$ и $\lambda_+ = \frac{\pi}{2}$.

Тогава $(\tilde{M}^3, h_{ij})$ е геодезично пълно, скаларно плоско Риманово многообразие с един асимптотически плосък край и нулева маса и от теоремата за положителност на енергията следва, че $(\tilde{M}^3, h_{ij})$ е изометрично на $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$.

Чрез директно интегриране на полевите уравнения (7.41, 7.42) се получават решенията, описващи червееви дупки:

$$\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \left(1 + \frac{q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon e^{2U_+}\tilde{Q}_+^2}{4R^2}\right)^2 \left(\mathrm{d}R^2 + R^2\mathrm{d}\theta^2 + R^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right), \quad (7.48)$$

$$\lambda = 2\arctan\left(\frac{2R}{\sqrt{q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon e^{2U_+}\tilde{Q}_+^2}}\right) - \frac{\pi}{2}, \quad (7.49)$$

където $R \in (0, +\infty)$. $\square$

7.3.1 Конструиране на решенията

Остава да бъдат получени Φ, N и φ като функции на λ. Това става чрез използване на функционалните зависимости между потенциалите и резултатът е следният:

$$\Phi = -\frac{\tilde{Q}_+}{2\tilde{M}_+}\left[e^{\frac{2\tilde{M}_+\lambda}{C_\lambda}} - \cosh\frac{\pi\tilde{M}_+}{C_\lambda}\right], \quad (7.50)$$

$$N^2 = \exp\left[\left(2M_+ - \frac{\varepsilon\,\tilde{Q}_+^2}{\tilde{M}_+}e^{2U_+}\right)\frac{\lambda}{C_\lambda} + \frac{\varepsilon\,\tilde{Q}_+^2}{2\tilde{M}_+^2}\left(e^{\frac{2\tilde{M}_+\lambda}{C_\lambda}} - \cosh\frac{\pi\tilde{M}_+}{C_\lambda}\right)\right], \quad (7.51)$$

$$\varphi = \left(q_+ + \frac{\varepsilon\,\tilde{Q}_+^2}{2\tilde{M}_+}e^{2U_+}\right)\frac{\lambda}{C_\lambda} - \frac{\varepsilon\,\tilde{Q}_+^2}{4\tilde{M}_+^2}\left(e^{\frac{2\tilde{M}_+\lambda}{C_\lambda}} - \cosh\frac{\pi\tilde{M}_+}{C_\lambda}\right), \quad (7.52)$$

$$C_\lambda = \sqrt{q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon e^{2U_+}\tilde{Q}_+^2}. \quad (7.53)$$

Доказателството на теоремата налага ограничение върху асимптотичната стойност на потенциала λ, $\lambda_+ = -\lambda_- = \frac{\pi}{2}$, което чрез уравнение (7.39) води до ограничение върху U_+:

$$U_+ = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\tilde{M}_+^2}{q_+^2 - M_+^2 + \varepsilon\tilde{Q}_+^2 e^{2U_+}}}. \quad (7.54)$$

Глава 8

Заключение

Търсенето на точни решения на уравненията на Айнщайн е трудна задача поради силно нелинейната им природа. Поради това всеки резултат за съществуването и единствеността на такива решения е от жизнена важност за математичното изучаване на Общата теория на относителността.

Освен математиката неоспоримо по-важна е физиката зад уравненията на Айнщайн. Техните решения са ни дали много нови физически (и дори философски) идеи. Известни примери са черните и червеевите дупки. Друг пример е фотонната сфера. Всички тези обекти имат много интересни наблюдаеми свойства и сега е идеалното време за изучаването им, имайки предвид ускореното развитие на астрофизиката и в частност скорошното засичане на гравитационни вълни.

Освен това обектите, споменати по-горе, могат да се характеризират геометрично като повърхнини със специални свойства и могат да се използват за доказването на теореми за единственост в Общата теория на относителността. Първите подобни резултати използват хоризонта на събитията на черна дупка. Следват подобни резултати за фотонни сфери и червееви дупки. Тази дисертация доразви установени резултати, като ги разшири до по-сложни системи от уравнения, включващи електромагнитно и скалрно поле.

Остава много бъдеща работа. Например не изглежда да има някакъв напредък към класификацията на въртящите се решения, използвайки фотонни траектории. Освен това винаги стои въпросът с обобщаването на известни теореми за повече измерения. Може би това ще е следващата стъпка?

Научни приноси

Научните приноси от дисертацията са следните:

- Обобщения на дефиницията за фотонна сфера за статични, асимптотически плоски решения на полевите уравнения на Айнщайн-Максуел и Айнщайн-Максуел със скаларно поле;
- Функционални зависимост между lapse функцията, електростатичния потенциал и скаларното поле в статичните, асимптотически плоски решения на уравнения на Айнщайн-Максуел със скаларно поле (на които уравненията на Айнщайн-Максуел са частен случай);
- Резултати за външната и вътрешата геометрия на фотонната сфера в статичните и асимптотически плоски решения на уравненията на Айнщайн-Максуел и Айнщайн-Максуел със скаларно поле;
- Теорема за единственост за статичното, асимптотически плоско пространство-време на Айнщайн-Максуел, притежаващо фотонна сфера;
- Теорема за класификация на статичните, асимптотически плоски решения на уравненията на Айнщайн-Максуел със скаларно поле, притежаващи фотонна сфера;
- Генериране на статичните, асимптотически плоски решения на уравненията на Айнщайн-Максуел без и със скаларно поле, притежаващи фотонна сфера;
- Дефиниция за статична, асимптотически плоска използваема червеева дупка, която е решение на уравненията на Айнщайн-Максуел с фантомно скаларно поле, (евентуално фантомно) електромагнитно поле и константа на взаимодействие между скаларното и електромагнитното поле, равна на едно;
- Функционални зависимости между lapse функцията, електростатичното поле и фантомното скаларно поле в статичните, асимптотически плоски използваеми червееви дупки, които са решения на уравненията на Айнщайн-Максуел със скаларно поле;
- Теорема за единственост на статичната и асимптотически плоска използваема червеева дупка, която е решение на уравненията на Айнщайн-Максуел с фантомно скаларно поле, с (евенуално фантомно) електромагнитно поле и константа на взаимодействие между скаларното и електромагнитното поле, равна на едно;
- Генериране на решението за статична и асимптотически плоска използваема червеева дупка в теорията на Айнщайн-Максуел със скаларно поле.

Статии

Оригиналните статии, включени в дисертацията, са следните:

- "Uniqueness Of The Static Einstein-Maxwell Spacetimes With A Photon Sphere", S. Yazadjiev, B. Lazov, Classical And Quantum Gravity 32, 165021 (2015);
- "Classification Of The Static And Asymptotically Flat Einstein-Maxwell-Dilaton Spacetimes With A Photon Sphere", S. Yazadjiev, B. Lazov, Physical Review D 93, 083002 (2016);
- "Uniqueness Theorem For Static Phantom Wormholes In Einstein-Maxwell-Dilaton Theory", B. Lazov, P. Nedkova, S. Yazadjiev, arXiv:1711.00290 [gr-qc] (2017).

Доклади

Следните доклади бяха изнесени на международни конференции:

- "Uniqueness Theorem For The Static Einstein-Maxwell Spacetimes Possessing A Photon Sphere" на Compact Stars And Black Holes, Тюбинген, Германия, 07 - 09 Юли 2015;
- "Uniqueness Of The Static Einstein-Maxwell Spacetimes With A Photon Sphere" на 14th Marcel Grossmann Meeting On General Relativity And Gravitation, Рим, Италия, 12 - 18 Юли 2015;
- "Classification Theorem For The Static And Asymptotically Flat Einstein-Maxwell-dilaton Spacetimes Possessing A Photon Sphere" на 19th International Conference Geometry, Integrability And Quantization, Варна, България, 02 - 07 Юни 2017.

Следните доклади бяха изнесени на национални конференции:

- "Единственост на статичните решения на уравненията на Айнщайн-Максуел, съдържащи фотонна сфера" на Трети национален конгрес по физически науки, София, България, 29 Септември - 02 Октомври 2016.

Библиография

[1] "A Relativist's Toolkit", E. Poisson, Cambridge University Press (2004)

[2] "Lectures On Differential Geometry", S. S. Chern, W. H. Chen, K. S. Lam, World Scientific Publishing (2000)

[3] "Lecture Notes On General Relativity", S. M. Carroll, arXiv:gr-qc/9712019 (1997)

[4] "Embeddings And Time Evolution Of The Schwarzschild Wormhole", P. Collas, D. Klein, American Journal Of Physics 80, 203 (2012)

[5] "Ultracompact ($R < 3M$) Objects In General Relativity", B. R. Iyer, C. V. Vishveshwara, S. V. Dhurandhar, Classical And Quantum Gravity 2, 219-228 (1985)

[6] "Properties Of Ultracompact Neutron Stars", R. J. Nemiroff, P. A. Becker, K. S. Wood, The Astrophysical Journal 406, 590-595 (1993)

[7] "Schwarzschild Black Hole Lensing", K. S. Virbhadra, G. F. R. Ellis, Physical Review D 62, 084003 (2000)

[8] "Relativistic Images Of Schwarzschild Black Hole Lensing", K. S. Virbhadra, Physical Review D 79, 083004 (2009)

[9] "Role Of The Scalar Field In Gravitational Lensing", K. S. Virbhadra, D. Narasimha, S. M. Chitre, Astronomy And Astrophysics 337, 1-8 (1998)

[10] "Gravitational Lensing By Naked Singularities", K. S. Virbhadra, G. F. R. Ellis, Physical Review D 65, 103004 (2002)

[11] "Geodesic Stability, Lyapunov Exponents, And Quasinormal Modes", V. Cardoso, A. S. Miranda, E. Berti, H. Witek, V. T. Zanchin, Physical Review D 79, 064016 (2009)

[12] "Unstable Circular Null Geodesics Of Static Spherically Symmetric Black Holes, Regge Poles, And Quasinormal Frequencies", Y. Décanini, A. Folacci, B. Raffaelli, Physical Review D 81, 104039 (2010)

[13] "Connection Between Black-Hole Quasinormal Modes And Lensing In The Strong Deflection Limit", I. Zh. Stefanov, S. S. Yazadjiev, G. G. Gyulchev, Physical Review Letters 104, 251103 (2010)

[14] "Is The Gravitational-Wave Ringdown A Probe Of The Event Horizon?", V. Cardoso, E. Franzin, P. Pani, Physical Review Letters 117, 089902 (2016)

[15] "Ether Flow Through A Drainhole: A Particle Model In General Relativity", H. G. Ellis, Journal Of Mathematical Physics 14, 104 (1973)

[16] "Scalar-Tensor Theory And Scalar Charge", K. A. Bronnikov, Acta Physica Polonica B 4, 251-266 (1973)

[17] "The Evolving, Flowless Drainhole: A Nongravitating-Particle Model In General Relativity Theory", H. G. Ellis, General Relativity And Gravitation 10, 105-123 (1979)

[18] "Wormholes, Time Machines, And The Weak Energy Condition", M. S. Morris, K. S. Thorne, U. Yurtsever, Physical Review Letters 61, 1446 (1988)

[19] "Superluminal Travel Requires Negative Energies", K. D. Olum, Physical Review Letters 81, 3567 (1998)

[20] "Rotating Traversable Wormholes", E. Teo, Physical Review D 58, 024014 (1998)

[21] "Null Energy Condition In Dynamic Wormholes", D. Hochberg, M. Visser, Physical Review Letters 81, 746 (1998)

[22] "The Cosmological Constant And Dark Energy", P. J. E. Peebles, B. Ratra, Reviews Of Modern Physics 75, 559 (2003)

[23] "Modified-Gravity Wormholes Without Exotic Matter", T. Harko, F. S. N. Lobo, M. K. Mak, S. V. Sushkov, Physical Review D 87, 067504 (2013)

[24] "Wormholes In Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory", P. Kanti, B. Kleihaus, J. Kunz, Physical Review Letters 107, 271101 (2011)

[25] "Stable Lorentzian Wormholes In Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory", P. Kanti, B. Kleihaus, J. Kunz, Physical Review D 85, 044007 (2012)

[26] "Rotating Ellis Wormholes In Four Dimensions", B. Kleihaus, J. Kunz, Physical Review D 90, 121503(R) (2014)

[27] "Geometry Of Spinning Ellis Wormholes", X. Y. Chew, B. Kleihaus, J. Kunz, Physical Review D 94, 104031 (2016)

[28] "Search For Astrophysical Rotating Ellis Wormholes With X-Ray Reflection Spectroscopy", M. Zhou, A. Cardenas-Avendano, C. Bambi, B. Kleihaus, J. Kunz, Physical Review D 94, 024036 (2016)

[29] "Event Horizons In Static Vacuum Space-Times", W. Israel, Physical Review 164, 1776 (1967)

[30] "Event Horizons In Static Electrovac Space-Times", W. Israel, Communications In Mathematical Physics 8, 245-260 (1968)

[31] "The Geometry Of Photon Surfaces", C.-M. Claudel, K. S. Virbhadra, G. F. R. Ellis, Journal Of Mathematical Physics 42, 818 (2001)

[32] "Uniqueness Of Photon Spheres In Static Vacuum Asymptotically Flat Spacetimes", C. Cederbaum, arXiv:1406.5475 [math.DG] (2014)

[33] "Uniqueness Of The Static Spacetimes With A Photon Sphere In Einstein-Scalar Field Theory", S. Yazadjiev, Physical Review D 91, 123013 (2015)

[34] "On The Proof Of The Positive Mass Conjecture In General Relativity", R. Schoen, Sh.-T. Yau, Communications In Mathematical Physics 65, 45-76 (1979)

[35] "Proof Of The Positive Mass Theorem. II", R. Schoen, Sh.-T. Yau, Communications In Mathematical Physics 79, 231-260 (1981)

[36] "A New Proof Of The Positive Energy Theorem", E. Witten, Communications In Mathematical Physics 80, 381-402 (1981)

[37] "Nonexistence Of Multiple Black Holes In Asymptotically Euclidean Static Vacuum Space-Time", G. L. Bunting, A. K. M. Masood-ul-Alam, General Relativity And Gravitation 19, 147-154 (1987)

[38] "Uniqueness Of Photon Spheres Via Positive Mass Rigidity", C. Cederbaum, G. J. Galloway, arXiv:1504.05804 [math.DG] (2015)

[39] "Uniqueness Of Photon Spheres In Electro-Vacuum Spacetimes", C. Cederbaum, G. J. Galloway, Classical And Quantum Gravity 33, 075006 (2016)

[40] "On Uniqueness Of Static Black Hole With Conformal Hair", Y. Tomikawa, T. Shiromizu, K. Izumi, arXiv:1612.01228 [gr-qc] (2016)

[41] "On Uniqueness Of Static Spacetimes With Non-Trivial Conformal Scalar Field", Y. Tomikawa, T. Shiromizu, K. Izumi, Classical And Quantum Gravity 34, 155004 (2017)

[42] "Aspherical Photon And Anti-Photon Surfaces", G. W. Gibbons, C. M. Warnick, Physics Letters B 763, 169-173 (2016)

[43] "Uniqueness Of Static Photon Surfaces: Perturbative Approach", H. Yoshino, Physical Review D 95, 044047 (2017)

[44] "Spherical Photon Orbits Around A Kerr Black Hole", E. Teo, General Relativity And Gravitation 35, 1909-1926 (2003)

[45] "Fundamental Photon Orbits: Black Hole Shadows And Spacetime Instabilities", P. V. P. Cunha, C. A. R. Herdeiro, E. Radu, Physical Review D 96, 024039 (2017)

[46] "Extension Of Photon Surfaces And Their Area: Static And Stationary Spacetimes", H. Yoshino, K. Izumi, T. Shiromizu, Y. Tomikawa, Progress Of Theoretical And Experimental Physics 2017, 063E01 (2017)

[47] "Geometric Structure Of The Generic Static Traversable Wormhole Throat", D. Hochberg, M. Visser, Physical Review D 56, 4745 (1997)

[48] "Uniqueness Theorem For Static Wormholes In Einstein-Phantom Scalar Field Theory", S. Yazadjiev, Physical Review D 96, 044045 (2017)

[49] "On Totally Umbilic Submanifolds Of Semi-Riemannian Manifolds", V. Perlick, Nonlinear Analysis 63, e511-e518 (2005)