СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НЕРАВЕНСТВА ОТ ТИП НА МАРКОВ В L_2-НОРМИ ПРИ ТЕГЛА НА ГЕГЕНБАУЕР

Драгомир Ивов Алексов

Автореферат на дисертационен труд

за присъждане на образователна и научна степен "Доктор"
професионално направление "Математика"
научна специалност "Изчислителна математика"

Научен ръководител: проф. дмн Гено Николов

София, 2017 г.

1 Неравенството на братята Андрей и Владимир Маркови – исторически бележки. Неравенствата от тип на Марков като теореми за сравнение

Неравенствата на Марков и на Бернщайн са едни от най-важните полиномиални неравенства с многобройни приложения в теорията на апроксимациите, числения анализ и други области на математиката.

Историята на неравенството на Марков, или както е по-правилно да се казва, неравенството на братята Андрей и Владимир Маркови, започва с един въпрос, който обаче не е зададен от математик. През 1887 г. знаменитият руски химик Дмитрий Иванович Менделеев, изучавайки зависимостта на температурата на кипене на спиртни разтвори от концентрацията на спирта в тях, поставя въпроса:

Да се намери максималната абсолютна стойност на всеки един от коефициентите на полином от втора степен $p_0 + p_1x + p_2x^2$, ако е известно, че отклонението от нулата на този полином в интервала $[a, b]$ не превишава зададено число Δ.

В обзорната си статия [12] Б. Боянов пише: "This was a great question...", имайки предвид не самия въпрос (Менделеев сам решава горната задача), а последствията, които поражда. През 1889 г. известният руски математик Андрей Андреевич Марков [23] отговаря на въпроса на Менделеев в по-общия случай на полином P от степен n, намирайки максималните възможни стойности на коефициентите p_0, p_1 и p_n на полинома P. Всъщност, А. А. Марков решава по-общата задача за намиране на точните горни граници за $P(c)$ и $P'(c)$, където c е дадена точка, и в резултат получава неравенството

$$|P'(x)| \leq \frac{2n^2}{b-a} \max_{a\leq x\leq b} |P(x)|, \qquad x \in [a, b], \tag{1.1}$$

вярно за всеки алгебричен полином от степен ненадминаваща n.

Три години по-късно, през 1892 г., Владимир Андреевич Марков - по-малкият брат на А. Марков, тогава 17-годишен студент в Санкт Петербургския университет, разширява неравенството (1.1) за производни от по-висок ред. Той отбелязва, че с линейна трансформация интервалът $[a, b]$ може да се сведе до $[-1, 1]$. Основният резултат в работата му [24] е

Теорема А. *За всеки алгебричен полином P от степен ненадминаваща n е изпълнено неравенството*

$$\|P^{(k)}\|_{C[-1,1]} \leq c_n^{(k)} \, \|P\|_{C[-1,1]} \;, \qquad k = 1, \dots, n \,, \tag{1.2}$$

където

$$c_n^{(k)} := \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(k-1)^2)}{1.3\dots(2k-1)} = T_n^{(k)}(1) = \|T_n^{(k)}\|_{C[-1,1]}.$$

Равенството в (1.2) се достига тогава и само тогава когато $P = c\,T_n$, където T_n е n-тия полином на Чебишов от първи род, $T_n(x) = \cos n \arccos x,\ x \in [-1, 1]$, и c е произволна константа.

Доказателството на Теорема А в [24], известна понастоящем като неравенство на Марков или на братята Андрей и Владимир Маркови, се простира върху 110 страници. За повече от 120 години от доказването му до наши дни, неравенството на Марков е предизвикателство за математиците и предмет на различни обобщения. Изчерпателна информация за историята на класическото неравенство на братята Маркови, както и няколко от доказателствата му, може да се намери в обзорната статия на А. Шадрин [49]. Без да навлизаме в подробности и без претенции за изчерпателност, ще посочим някои резултати, свързани с неравенствата от тип на Марков в равномерна норма.

Навсякъде по-долу с π_n ще означаваме множеството от всички алгебрични полиноми от степен ненадминаваща n.

Едно изключително красиво уточнение на Теорема A е дадено от американските математици Р. Дафин и А. Шефер [20], които показват, че условието $\|P\|_{C[-1,1]} \le 1$ в неравенството на Марков

$$\|P\|_{C[-1,1]} \le 1 \ \Rightarrow \ \|P^{(k)}\|_{C[-1,1]} \le \|T_n^{(k)}\|_{C[-1,1]}, \qquad P \in \pi_n$$

може да се замени с по-слабо изискване, а именно, изпълнено е

$$\max_{0\le\nu\le n} \Big| P\Big(\cos\frac{\nu\pi}{n}\Big)\Big| \le 1 \ \Rightarrow \ \|P^{(k)}\|_{C[-1,1]} \le \|T_n^{(k)}\|_{C[-1,1]}, \qquad P \in \pi_n\,. \tag{1.3}$$

При допълнителното предположение, че P е полином от степен ненадминаваща n с реални коефициенти, Дафин и Шефер доказват неравенство в ивица от комплексната равнина:

$$\max_{0\le\nu\le n} \Big| P\Big(\cos\frac{\nu\pi}{n}\Big)\Big| \le 1 \ \Rightarrow \ \big|P^{(k)}(x+i\,y)\big| \le \big|T_n^{(k)}(1+i\,y)\big|, \quad (x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R}\,. \tag{1.4}$$

Точките $\{\cos\frac{\nu\pi}{n}\}_{\nu=0}^n$ в (1.3) са точките на локален екстремум в интервала $[-1,1]$ за Чебишовия полином T_n. Мотивирани от това наблюдение и от факта, че фамилията на ултрасферичните полиноми $P_n^{(\lambda)}$ (полиномите ортогонални в интервала $[-1,1]$ при тегло $w_\lambda(x)=(1-x^2)^{\lambda-1/2}$, $\lambda>-1/2$) съдържа полинома на Чебишов от първи род T_n (в частния случай $\lambda=0$), Боянов и Николов [13] разширяват (1.4), доказвайки, че за $Q_n := P_n^{(\lambda)}$ е вярна импликацията

$$P\in\pi_n,\ |P| \le \big|Q_n\big| \text{ в нулите на } (1-x^2)Q_n'(x) \ \Rightarrow \ \|P^{(k)}\|_{C[-1,1]} \le \|Q_n^{(k)}\|_{C[-1,1]} \tag{1.5}$$

за всяко $k\ge1$, ако $\lambda\ge0$, и за всяко $k\ge2$, ако $-1/2<\lambda\le0$.

В [28] Николов отбелязва, че (1.5), и в частност (1.4), може да се интерпретира като *теорема за сравнение*: неравенствата $|P|\le|Q_n|$ между абсолютните стойности на два полинома от π_n, P и Q_n в $n+1$ различни точки от реалната права (не непременно точките на локален екстремум на Q_n) влече неравенства между норми на производните им $P^{(k)}$ и $Q_n^{(k)}$. Това наблюдение му дава основание да предложи следната дефиниция: *двойката (Q_n,Δ), съставена от полином Q_n от степен n и множество Δ състоящо се от $n+1$ точки върху реалната права, допуска неравенство от тип на Дафин и Шефер (DS-неравенство), ако за подходяща норма (равномерна или L_2 норма с тегло)*

$$P\in\pi_n \ \text{ и } \ |P|\le|Q_n| \ \text{ върху } \ \Delta \ \Rightarrow \ \|P^{(k)}\| \le \|Q_n^{(k)}\|, \qquad k=1,\dots,n. \tag{1.6}$$

Екстремалният полином Q_n Николов нарича *мажоранта*, а точките съставящи Δ - *точки на сравняване*. В поредица от работи [26, 22, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36] (виж също обзорната статия [38]) е разработен апарат и са доказани различни DS-неравенства, в които ролята на мажоранта играят ултрасферичните или свързани с ултрасферичните полиноми, полиномите на Ермит и Лагер. В частност, в [32, 35] Николов доказва, че за всяко множество Δ, съставено от $n+1$ точки в интервала $[-1,1]$, които разделят нулите на T_n, двойката (T_n,Δ) допуска DS-неравенство в $C[-1,1]$ норма. Този резултат включва като частен случай (1.3), доказаното от Дафин и Шефер уточнение на неравенството на В. А. Марков. В същото време, този резултат показва екстремалната роля на Чебишовия полином T_n като "полином–змия" в *неравенства от тип на Марков с криволинейна мажоранта*. Следва кратко описание на неравенствата от тип на Марков с криволинейна мажоранта и връзката им с асоциираните полиноми–змии.

При зададена непрекъсната и положителна върху интервала $[-1,1]$ функция φ (наричана криволинейна мажоранта), съществува единствен (с точност до ориентация) реалнозначен полином $\omega_{n,\varphi}$ от степен n, чиято графика в $[-1,1]$ осцилира максимален брой пъти между графиките на φ и $-\varphi$, допирайки се алтернативно до тях. В литературата полиномът $\omega_{n,\varphi}$ се нарича *полином–змия за мажорантата* φ. Така например, $\omega_{n,\varphi}=T_n$ е полином-змия за $\varphi(x)\equiv 1$, а абсцисите на допирните точки на графиката му с ± 1 са точките $t_\nu=\cos\frac{\nu\pi}{n}$, $\nu=0,\ldots,n$ (*точки на алтернанс за* $\omega_{n,\varphi}$).

Една недоказана хипотеза гласи, че полиномите-змии са екстремалните полиноми в неравенствата на Марков с криволинейна мажоранта. Прецизната формулировка на хипотезата е, че за всяка криволинейна мажоранта φ, супремумът

$$\sup\Big\{\frac{\|P^{(k)}\|_{C[-1,1]}}{\|P\|_{C[-1,1]}}\,:P\in\pi_n,\ |P(x)|\le\varphi(x),\ x\in[-1,1]\Big\}=:c_n^{(k)}(\varphi)$$

се достига за полинома-змия $\omega_{n,\varphi}$, т.е., екстремалният полином в неравенството на Марков за полиномите ограничени от криволинейната мажоранта φ е асоциираният полином-змия $\omega_{n,\varphi}$. Предвид резултата на Дафин и Шефер, би могло да се предположи, че е в сила и усилен вариант на хипотезата, а именно: $\omega_{n,\varphi}$ е екстремален в по-широкия клас от полиномите, ограничени по модул от φ върху множеството Δ, съставено от точките на алтернанс за $\omega_{n,\varphi}$ (т.е., в неравенството от тип на Дафин и Шефер за полиноми ограничени от криволинейната мажоранта φ).

Докато усилената хипотеза не е вярна в общия случай (известен е контрапримерът $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$, $k=1$), досега не е известен случай на мажоранта φ, за която полиномът-змия $\omega_{n,\varphi}$ да не е екстремален в неравенството на Марков с криволинейна мажоранта φ. А. Шадрин отбелязва в [48], че при произволна мажоранта φ, хипотезата е вярна за $k=n-1,n$ (т.е. за последните две производни), а в [33] е дадено доказателство и за случая $k=n-2$. В [40, 41] е доказана усилената хипотеза за случаите, когато всички коефициенти в развитието на полинома-змия $\omega_{n,\varphi}$ по полиномите на Чебишов от първи род са с един и същ знак или знаците на тези коефициенти алтернират. Доста изненадващо, този резултат обхваща известните досега (и добавя нови) неравенства на Марков за полиноми с криволинейна мажоранта, като същевременно ги усилва в смисъла на Дафин и Шефер.

Що се отнася до "комплексния" вариант (1.4) на неравенството на Дафин и Шефер, за да бъде той разширен за класа на ултрасферичните полиноми $P_n^{(\lambda)}$, като се използва разработения от тях метод, е необходимо да се установи следното геометрично свойство:

$$\big|P_n^{(\lambda)}(x+i\,y)\big|\le\big|P_n^{(\lambda)}(1+i\,y)\big|\,,\qquad (x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R},\quad \lambda\ge 0. \tag{1.7}$$

Доказателството на (1.7) за случая $\lambda=0$, предложено от Дафин и Шефер, съществено се опира на геометрията на нулите на Чебишовия полином T_n, и е неприложимо в общия случай. В [37] Николов предлага друг подход, за да докаже (1.7), и в резултат разширява "комплексната" версия (1.4) за $Q_n=P_n^{(\lambda)}$, $\lambda\ge 0$:

$$|P|\le\big|Q_n\big| \text{ в нулите на } (1-x^2)Q_n'(x)\ \Rightarrow\ \big|P^{(k)}(x+i\,y)\big|\le\big|Q_n^{(k)}(1+i\,y)\big|,\ (x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R}$$

за всеки полином $P \in \pi_n$ с реални коефициенти и за $k = 1, \dots, n$. Равенството се достига само за $P = \pm Q_n$ и само при $x = \pm 1$.

Уточнен вариант на свойството (1.7) на ултрасферичните полиноми (полиноми на Гегенбауер) и доказателство на аналогично свойство на полиномите на Якоби са дадени съответно в [39] и [5]. В [4] е установено подобно геометрично свойство на полиномите на Ермит и в резултат е доказано DS-неравенство в ивица от комплексната равнина с мажоранта полинома на Ермит.

2 Неравенства на Марков в L_2 норми: известни резултати

В най-общ смисъл, неравенствата от тип на Марков дават оценка отгоре за някоя норма на производната на алгебричен полином от степен ненадминаваща n чрез (не непременно същата) норма на самия полином, т.е., те са неравенства от вида

$$\|P^{(k)}\| \le c\,|||P|||, \qquad P \in \pi_n\,,$$

където $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ са дадени норми, и c е константа, зависеща от n, k и избраните норми.

Интерес представлява точната константа (*константа на Марков*) в такива неравенства, т.е., величината

$$c_n^{(k)} := \sup_{P \in \pi_n} \frac{\|P^{(k)}\|}{|||P|||}\,,$$

както и поведението на $c_n^{(k)}$ при фиксирано k когато n расте. Когато точната константа на Марков е неизвестна (което е типичния случай), интерес представлява намирането на двустранни оценки за нея,

$$(0 <)\ \underline{c}_n^{(k)} \le c_n^{(k)} \le \overline{c}_n^{(k)}$$

с малко (равномерно ограничено по n) частно $\overline{c}_n^{(k)}/\underline{c}_n^{(k)}$. Такива оценки позволяват да се установяви точния порядък на $c_n^{(k)}$ по отношение на n. Не на последно място, когато този порядък е известен, например, $c_n^{(k)} = \mathcal{O}(n^\gamma)$ при $n \to \infty$, е полезно да се намери *асимптотическата константа на Марков*

$$c^{(k)} := \lim_{n \to \infty} \frac{c_n^{(k)}}{n^\gamma}\,,$$

или да се получат двустранни оценки за нея. Накрая, в случаите когато нормите $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ зависят от параметри, е добре да се изясни поведението на точната константа на Марков и на асимптотическата константа на Марков за граничните стойности на тези параметри.

В случая, когато $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ са L_2-норми, точната константа на Марков $c_n^{(k)}$ има проста характеризация: тя е най-голямата сингулярна стойност на асоциирана матрица от ред $n+1-k$. Независимо от тази проста характеризация, дори в случаите на L_2-норми породени от класическите функции на тегла на Лагер и Якоби (и в частност на Гегенбауер), точните константи на Марков, с едно изключение, са неизвестни. По-долу ще посочим известните досега резултати, отнасящи се до неравенства на Марков в L_2-нормите, породени от класическите тегла на Ермит, Лагер и Якоби (ограничавайки се до случая на едни и същи норми за полинома и производните му).

Неравенства на Марков в L_2-норми с тегла на Ермит. В този случай

$$(a,b) = (-\infty,\infty), \quad w_H(x) = e^{-t^2}, \quad \|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} w_H(t)|f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Това е и единственият случай на класическа функция на тегло, в който са известни както точните константи на Марков:

$$c_n^{(k)} = c_n^{(k)}(w_H) = \Big(2^k \, \frac{n!}{(n-k)!} \Big)^{1/2}, \qquad k = 1, \dots, n,$$

така и екстремалния полином (един и същ за всяко k), а именно, n-тия полином на Ермит

$$H_n(t) = (-1)^n \, e^{t^2} \, \frac{d^n}{dt^n} \big\{ e^{-t^2} \big\}.$$

Причината този случай да е тривиален (и да се причислява към математическия фолклор) се дължи на факта, че производната на n-тия полином на Ермит е равна, с точност до множител константа, на полинома на Ермит от степен $n-1$ (по-точно, $H_n'(t) = 2n \, H_{n-1}(t)$). Това свойство свежда точната константа на Марков до най-големия елемент в диагонална матрица.

Неравенства на Марков в L_2-норми с тегла на Лагер. В този случай

$$(a,b) = (0,\infty), \quad w_\alpha(x) = t^\alpha \, e^{-t}, \ (\alpha > -1), \quad \|f\|_{w_\alpha} = \left(\int_0^\infty w_\alpha(t)|f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Ще се ограничим с посочването на резултати, отнасящи се до неравенството на Марков за първата производна в нормата $\| \cdot \|_{w_\alpha}$. Да означим с $c_n(\alpha)$ точната константа на Марков в това неравенство,

$$c_n(\alpha) := \sup_{P \in \pi_n} \frac{\|P'\|_{w_\alpha}}{\|P\|_{w_\alpha}}.$$

В работата си [47] от 1944 г., изучаваща главно точната константа в неравенството на Марков в L_2-норма при постоянно тегло за интервала $[-1,1]$, Е. Шмидт отбелязва, че за константата на Марков $c_n(0)$, т.е., при тегло на Лагер $w(t) = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, е изпълнено

$$c_n(0) = \frac{2n+1}{\pi} \Big(1 - \frac{\pi^2}{24(2n+1)^2} + \frac{R_n}{(2n+1)^4} \Big)^{-1}, \qquad n \ge 2,$$

където $-8/3 < R_n < 4/3$.

През 1960 г. П. Туран [51] намира точната стойност на $c_n(0)$:

$$c_n(0) = \Big(2 \sin \frac{\pi}{4n+2} \Big)^{-1}$$

и както споменахме по-горе, това е единствения случай, в който точната константа на Марков е известна. Отбелязваме, че $c_n(0) = \mathcal{O}(n)$ при $n \to \infty$, и за асимптотическата константа на Марков е изпълнено

$$c(0) = \lim_{n \to \infty} \frac{c_n(0)}{n} = \frac{2}{\pi}.$$

П. Дьорфлер [15] през 1987 г. доказва оценката $c_n(\alpha) \leq \frac{n}{\sqrt{\alpha+1}}$, а през 1991 г. в [16] установява двустранните оценки

$$\frac{n^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} + \frac{(2\alpha^2+5\alpha+6)\,n}{3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{\alpha+6}{3(\alpha+2)(\alpha+3)} \leq c_n(\alpha)^2 \leq \frac{n(n+1)}{2(\alpha+1)}\,, \qquad (2.1)$$

откъдето следва, че $c_n(\alpha) = \mathcal{O}(n)$ при $n \to \infty$ за всяко фиксирано $\alpha > -1$. През 2000 г. Аптекарев, Дро и Калягин [6] и независимо от тях Дьорфлер [17] през 2002 г. намират асимптотическата константа на Марков $c(\alpha)$:

$$c(\alpha) := \lim_{n\to\infty} \frac{c_n(\alpha)}{n} = \frac{1}{j_{(\alpha-1)/2,1}}\,,$$

където $j_{\nu,1}$ е първата положителна нула на Беселовата функция $J_\nu(z)$.

В [42] Николов и Шадрин подобряват оценките (2.1), доказвайки двустранните неравенства

$$\frac{2\big(n+\frac{2\alpha}{3}\big)\big(n-\frac{\alpha+1}{6}\big)}{(\alpha+1)(\alpha+5)} < \big[c_n(\alpha)\big]^2 < \frac{\big(n+1\big)\big(n+\frac{2(\alpha+1)}{5}\big)}{(\alpha+1)\big((\alpha+3)(\alpha+5)\big)^{\frac{1}{3}}}\,,$$

валидни за всяко $\alpha > -1$ и $n \geq 3$, като за оценката отдолу се предполага $n > (\alpha+1)/6$.

В последваща работа [43] същите автори получават оценката

$$c_n^2(\alpha) \leq \frac{4n\big(n+2+\frac{3(\alpha+1)}{4}\big)}{\alpha^2+10\alpha+8}\,, \qquad \alpha \geq 2\,,$$

точна по порядък едновременно по отношение на n и α когато те клонят към безкрайност, и като следствие оценките

$$\frac{2n(n+\alpha+3)}{3(\alpha+1)(\alpha+8)} \leq c_n^2(\alpha) \leq \frac{4n(n+\alpha+3)}{(\alpha+1)(\alpha+8)}\,, \qquad n \geq 3,\ \alpha \geq 2\,.$$

Пак в [43] са доказани и граничните релации

$$\lim_{\alpha\to-1}(\alpha+1)c_n^2(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2}\,, \qquad \frac{2n}{3} \leq \lim_{\alpha\to\infty} \alpha\, c_n^2(\alpha) \leq 3n\,.$$

С използване на компютърна алгебра, Николов и Улучев [45] доказват подобрени долни граници за $c_n(\alpha)$ за всяко $\alpha > -1$ и подобрени горни граници за $c_n(\alpha)$ при умерено големи α. Получените в [42, 43, 45] оценки за $c_n(\alpha)$ влекат оценки за асимптотическата константа на Марков $c(\alpha)$ и от там за първата положителна нула на Беселовите функции, които няма да обсъждаме тук.

Неравенства на Марков в L_2-норми с тегла на Гегенбауер. В този случай

$$[a,b] = [-1,1], \quad w_\lambda(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2},\ (\lambda > -1/2), \quad \|f\|_{w_\lambda} = \left(\int_{-1}^{1} w_\lambda(t)|f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

И тук ще се ограничим с посочване на резултати, свързани с неравенството на Марков за първата производна в нормата $\|\cdot\|_{w_\lambda}$. Нека с $c_n(\lambda)$ означим точната константа на Марков в това неравенство, т.е.

$$c_n(\lambda) := \sup_{P\in\pi_n} \frac{\|P'\|_{w_\lambda}}{\|P\|_{w_\lambda}}\,.$$

През 1944 г. Е. Шмидт [47] разглежда случая на константно тегло в интервала $[-1,1]$ (т.е., тегло на Гегенбауер с $\lambda=1/2$) и доказва, че при $n\ge 5$ е изпълнено

$$c_n(1/2)=\frac{(n+3/2)^2}{\pi}\Big(1-\frac{\pi^2-3}{12(n+3/2)^2}+\frac{R_n}{(n+3/2)^4}\Big)^{-1}, \qquad -6<R_n<13. \tag{2.2}$$

От тук в частност следва, че $c_n(1/2)=\mathcal{O}(n^2)$ при $n\to\infty$, и за асимптотическата константа на Марков е изпълнено

$$c(1/2):=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n(1/2)}{n^2}=\frac{1}{\pi}.$$

Шмидт анонсира този резултат без доказателство още през 1932 г., а междувременно, през 1937 г. Хил, Сегьо и Тамаркин [21], изучавайки неравенството на Марков в $L_p[-1,1]$-норма с тегло единица, достигат до същия извод за стойността на асимптотическата константа на Марков в случая $p=2$.

През 2003 г. Николов [34] изследва други два частни случая на тегла на Гегенбауер, а именно $w_0(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $w_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ (Чебишови тегла), и получава следните двустранни оценки за константите на Марков:

$$\begin{aligned} 0.472135\,n^2 &\le c_n(0)\le 0.472871\,(n+2)^2\,,\\ 0.248549\,n^2 &\le c_n(1)\le 0.250987\,(n+4)^2\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Изследвайки положителната дефинитност на някои билинейни форми, Дро и Елхами [18, Следствие 6.8] в частност получават следните оценки отгоре за константата на Марков $c_n(\lambda)$, валидни за всяко $\lambda>-1/2$:

$$[c_n(\lambda)]^2<\frac{n(n+2)(n+2\lambda)(n+2\lambda+2)}{4(2\lambda+1)}, \qquad n \ \text{четно}, \tag{2.4}$$

$$[c_n(\lambda)]^2<\frac{(n+1)(n+2\lambda+1)\big[n^2+2(\lambda+1)n+2\lambda-1\big]}{4(2\lambda+1)}, \qquad n \ \text{нечетно}. \tag{2.5}$$

В статия от 2017 г. Николов и Шадрин [44] получават двойка от двустранни оценки за $c_n(\lambda)$, използвайки оценки за различни матрични норми на асоциираната матрица:

$$\frac{1}{4}\frac{n^2(n+\lambda)^2}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \;<\; [c_n(\lambda)]^2 \;<\; \frac{n(n+2\lambda+2)^3}{(\lambda+2)(\lambda+3)}, \qquad \lambda\ge 2\,; \tag{2.6}$$

$$\frac{(n+\lambda)^2(n+2\lambda')^2}{(2\lambda+1)(2\lambda+5)} \;<\; [c_n(\lambda)]^2 \;<\; \frac{(n+\lambda+\lambda''+2)^4}{2(2\lambda+1)\sqrt{2\lambda+5}}, \qquad \lambda>-\frac{1}{2}\,, \tag{2.7}$$

където $\lambda'=\min\{0,\lambda\},\ \lambda''=\max\{0,\lambda\}$. В частност, авторите доказват, че $c_n^2(\lambda)$ е асимптотически еквивалентна с израза $\lambda^{-2}n(n+2\lambda)^3$, по-точно, изпълнено е

$$\frac{1}{16}\frac{n(n+2\lambda)^3}{\lambda^2}\le [c_n(\lambda)]^2\le \frac{n(n+2\lambda)^3}{\lambda^2}\,, \qquad n\ge 3,\ \lambda\ge 7.$$

Нека направим кратък коментар на тези оценки. Оценката отдолу в (2.7) е по-добра от оценката отдолу в (2.6), която е включена само с цел сравняване на оценките отгоре и отдолу за $c_n(\lambda)$ в (2.6) - при големи n частното им е приблизително равно на 2. Макар че оценката отгоре в (2.7) не е с точния порядък по отношение на λ при $\lambda\to\infty$, за $\lambda\le 25$ тя е по-добра от оценката отгоре в (2.6).

За асимптотическата константа на Марков $c(\lambda)$ Аптекарев, Дро и Калягин [6] доказват, че

$$c(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \frac{c_n(\lambda)}{n^2} = \frac{1}{2 j_{\frac{\lambda-3/2}{2},1}}, \tag{2.8}$$

където $j_{\nu,1}$ е първата положителна нула на Беселовата функция J_ν. Съотношението $c_\alpha = 2\,c_\lambda$ между асимптотическата константа на Марков при тегло на Лагер w_α и асимптотическата константа на Марков при тегло на Гегенбауер w_λ, $\alpha = \lambda - 1/2$, е намерена независимо и от Бьотхер и Дьорфлер в [9, Теорема 1.2]

За да завършим краткия преглед на L_2-неравенствата на Марков при класическите функции на тегла, отбелязваме, че в [9, 10, 11] Бьотхер и Дьорфлер изучават неравенства от тип на Марков при тегла на Лагер и на Гегенбауер, включително и за производни от по-висок ред и при различни тегла за нормите на полинома и на производните му. Те идентифицират съответните асимптотически константи на Марков с норми на някои оператори на Волтера, чието пресмятане в явен вид обаче изглежда еквивалентно трудна задача с тази за намирането в явен вид на самите константи. В [7] Аптекарев, Дро, Калягин и Туляков намират асимптотическите константи на Марков при някои тегла на Якоби.

3 Съдържание и описание на резултатите в дисертацията

В дисертацията се изучава точната константа $c_n(\lambda)$ в неравенството на Марков за първата производна на алгебрични полиноми в L_2-нормите, индуцирани от функцията на тегло на Гегенбауер

$$w_\lambda(t) = (1-t^2)^{\lambda-1/2}, \qquad \lambda > -\frac{1}{2}.$$

В Глава 1 на дисертацията са изложени исторически бележки за неравенството на братята Андрей и Владимир Маркови в равномерна норма и са посочени някои от обобщенията му, в това число изключително красивото му уточнение, доказано от американските математици Р. Дафин и А. Шефер през 1941 г., интерпретацията на техния резултат като теорема за сравнение, и ролята на така наречените “полиноми-змии” в неравенствата от тип на Марков с криволинейни мажоранти. В главата е направен обзор на известните резултати върху неравенства от тип на Марков в L_2-нормите индуцирани от класическите функции на тегла на Ермит, Лагер и Гегенбауер.

Глава 2 има спомагателен характер. В §1 е изложено доказателство на характеризацията на точната константа в неравенство на Марков в произволни L_2-норми като най-голяма сингулярна стойност на определена матрица $\mathbf{B}$. Доказателството е за случая на първа производна и едни и същи L_2-норми на полинома и производната му, но общият случай се доказва напълно аналогично. В §2 е дадена характеризация на точната константа на Марков при тегло на Гегенбауер, а именно, показано е, че $c_n^2(\lambda)$ е равна на 4 пъти по-голямата от максималните собствени стойности на две положително дефинитни матрици $\mathbf{A}_{\lfloor n/2 \rfloor}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}_{\lfloor n+1/2 \rfloor}$ (Теорема 2.2).

В Глава 3 се изучава случаят на постоянно тегло, $w(t) \equiv 1,\ t \in [-1,1]$, т.е. тегло на Гегенбауер с $\lambda = 1/2$. Въпреки че за този случай е налице силният резултат на Е. Шмидт (2.2), целта е да се изследва до какви оценки води подходът, предложен от Николов в

[34] за получаване на оценките (2.3) в случаите на Чебишови тегла. Резултатът, доказан в тази глава е Теорема 3.1, съгласно която

$$0.317837(n+1/2)^2 \le c_n(1/2) \le 0.325779(n+1.6)^2. \tag{3.1}$$

В §1 на Глава 3 са представени някои резултати от [34], които се използват в доказателството на Теорема 3.1. Доказателството на (3.1) (различно за случаите на четно и нечетно n) е изложено в §2 на Глава 3, като доказателството на оценките отгоре включва използването (макар и минимално) на системата за компютърна алгебра *Mathematica*.

В Глава 4 са доказани два основни резултата. Първият от тях е оценка отгоре за константата на Марков $c_n(\lambda)$, валидна за всяко $\lambda > -1/2$:

Теорема 4.1. *За всяко $\lambda > -1/2$ и за всяко $n \in \mathbb{N}$, най-добрата константа в неравенството на Марков*

$$\|p'\|_{w_\lambda} \le c_n(\lambda)\|p\|_{w_\lambda}$$

може да се оцени така:

$$c_n(\lambda) < \frac{(n+1)(n+2\lambda+1)}{2\sqrt{2\lambda+1}}\,. \tag{3.2}$$

Доказателството на Теорема 4.1, изложено в §1 на Глава 4, почива на факта, че най-голямата собствена стойност на положително определена матрица се мажорира от следата на матрицата. За реализацията на доказателството са пресметнати в явен вид и са сравнени следите на положително дефинитните матрици $\mathbf{A}_{\lfloor n/2\rfloor}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}_{\lfloor n+1/2\rfloor}$.

В §2 на Глава 4 е направено сравнение на най-големите собствени стойности $\widetilde{\nu}_{\lfloor n/2\rfloor}$, $\nu_{\lfloor n/2\rfloor}$ и $\widetilde{\nu}_{\lfloor n+1/2\rfloor}$ съответно на матриците $\widetilde{\mathbf{A}}_{\lfloor n/2\rfloor}$, $\mathbf{A}_{\lfloor n/2\rfloor}$, и $\widetilde{\mathbf{A}}_{\lfloor n+1/2\rfloor}$, и в резултат е доказана следната теорема:

Теорема 4.2. *Точната константа $c_n(\lambda)$ в неравенството на Марков в L_2-норма с тегло на Гегенбауер w_λ, $\lambda > -1/2$, се задава чрез*

$$c_n(\lambda) = \begin{cases} 2\sqrt{\nu_m}\,, & \text{ако} \quad n = 2m, \\ 2\sqrt{\widetilde{\nu}_{m+1}}\,, & \text{ако} \quad n = 2m+1\,. \end{cases}$$

Нещо повече, ако $p \in \pi_n$, $p \ne 0$, е екстремален полином в това неравенство, т.е., $\|p'\|_{w_\lambda} = c_n(\lambda)\,\|p\|_{w_\lambda}$, тогава, за някое $\theta \in \mathbb{R}$,

$$p(t) = e^{i\theta}\sum_{k=0}^{\lfloor n-1/2\rfloor} t_{n-2k}\,C_{n-2k}^{\lambda}(t)\,, \qquad \text{като} \quad t_n > 0 \quad \text{и} \quad t_{n-2k} \ge 0, \quad 1 \le k \le \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor.$$

В частност, p е четен (съответно, нечетен) полином ако n е четно (съответно, нечетно).

При по-силното ограничение $\lambda \ge 0$ този (напълно естествен и очакван) резултат е доказан в [34]. Въпреки че е сравнително лесно да се покаже, че при произволна четна функция на тегло в симетричен спрямо началото интервал екстремалният полином в неравенството на Марков е четен или нечетен, в общия случай не е ясно дали четността на екстремалния полином е същата както на n.

В последната Глава 5 на дисертацията доказваме двустранни оценки за константата $c_n(\lambda)$, валидни за всяко $\lambda > -1/2$. Случаите на четно и нечетно n са разгледани отделно, и резултатите са формулирани в следните две теореми:

Теорема 5.1. *За всяко четно $n \geq 4$ и за всяко $\lambda > -\frac{1}{2}$ най-добрата константа на Марков $c_n(\lambda)$ може да се оцени по следния начин:*

$$\frac{(n+2)(n+2\lambda)(n+\lambda+\frac{1}{2})^2}{(2\lambda+1)(2\lambda+5)} \leq c_n(\lambda)^2 \leq \frac{n(n+2\lambda)(n+2\lambda+2)\sqrt{(n+2)(n+2\lambda+3)}}{2(2\lambda+1)\sqrt{2\lambda+5}}\,.$$

Теорема 5.2. *За всяко нечетно $n \geq 3$ и за всяко $\lambda > -\frac{1}{2}$, най-добрата константа на Марков $c_n(\lambda)$ може да се оцени по следния начин:*

$$\frac{(n+1)\big(n+\lambda+\frac{1}{2}\big)^2(n+2\lambda+1)}{(2\lambda+1)(2\lambda+5)} \leq c_n^2(\lambda) \leq \frac{(n+1)^{\frac{3}{2}}(n+2\lambda+1)^2(n+2\lambda'+1)^{\frac{1}{2}}}{2(2\lambda+1)\sqrt{2\lambda+5}}\,,$$

където $\lambda' = \max\{\lambda, 0\}$.

За случая на четно n, сравнението на оценката отгоре за $c_n(\lambda)$ в Теорема 5.1 и тази в (2.4) на Дро и Елхами от [18] показва, че оценката в Теорема 5.1 е по-добрата при $n \geq 4$ за всяко $\lambda > -1/2$.

В случая на нечетно n, сравнението на оценката отгоре за $c_n(\lambda)$ в Теорема 5.2 и тази в (2.5) на Дро и Елхами от [18] показва, че оценката от Теорема 5.2 е по-добрата за всяко $n \geq 5$, ако $\lambda \geq 0$, и за всяко $n \geq n_0(\lambda)$, ако $-1/2 < \lambda < 0$, където можем да изберем $n_0(\lambda) = \Big(\frac{2\sqrt{2\lambda+5}}{2\sqrt{2\lambda+5}-2}\Big)^{1/2}$.

Като следствие от Теореми 5.1 и 5.2 получаваме двустранни оценки за $c_n(\lambda)$, които са валидни за всяко $n \geq 3$, без значение каква е четността му.

Следствие 5.1. *За всяко $n \geq 3$ и за всяко $\lambda > -\frac{1}{2}$, най-добрата константа $c_n(\lambda)$ в неравенството на Марков*

$$\|p'\|_{w_\lambda} \leq c_n(\lambda)\,\|p\|_{w_\lambda}, \qquad p \in \pi_n,$$

удовлетворява неравенствата

$$\frac{(n+1)\big(n+\lambda+\frac{1}{2}\big)^2(n+2\lambda)}{(2\lambda+1)(2\lambda+5)} \leq c_n^2(\lambda) \leq \frac{\big(n+\frac{5}{4}\lambda+\frac{9}{8}\big)^4}{2(2\lambda+1)\sqrt{2\lambda+5}}\,. \tag{3.3}$$

Макар и по-слаби, оценките в Следствие 5.1 подобряват оценките (2.7) на Николов и Шадрин [44]. В частните случаи $\lambda = 0$, 1 и $1/2$, комбинацията на оценките отгоре от Следствие 5.1 с оценките отдолу от [34] и от Теорема 1.3 ни дават

Следствие 5.2. *За случаите на Чебишови тегла $w_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $w_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ и за случая на постоянно тегло $w_{1/2}(x) = 1$ имаме*

$$\begin{aligned}
0.472135\,n^2 \leq\ & c_n(0) && \leq 0.472871\left(n+\frac{9}{8}\right)^2,\\
0.317837\,(n+1/2)^2 \leq\ & c_n(\tfrac{1}{2}) && \leq 0.319472\left(n+\frac{7}{4}\right)^2,\\
0.248549\,n^2 \leq\ & c_n(1) && \leq 0.250987\left(n+\frac{19}{8}\right)^2.
\end{aligned}$$

От Теореми 5.1 и 5.2 се получават също така следните асимптотични неравенства:

Следствие 5.3. *За всяко $n \geq 3$, е в сила*

$$\frac{(n+2)(n-1)n^2}{4} \leq \lim_{\lambda \to -\frac{1}{2}} (2\lambda+1)\, c_n^2(\lambda) \leq \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

От оценките (2.6) на Николов и Шадрин [44] става ясно, че за асимптотическата константа на Марков

$$c(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n(\lambda)}{n^2}$$

е изпълнено $c(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-1})$ при $\lambda \to \infty$ (същото заключение може да се направи и от (2.8) и известните оценки за първата положителна нула на Беселовата функция, виж например [19]). Отбелязваме, че оценката отдолу за $c_n(\lambda)$ в Следствие 5.1 влече оценка отдолу за $c(\lambda)$, която е с точния порядък $\mathcal{O}(\lambda^{-1})$ при $\lambda \to \infty$; нещо повече, тази оценка и оценката отгоре в (2.6) водят до заключението

$$\frac{1}{\sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda+5)}} \leq c(\lambda) \leq \frac{1}{\sqrt{(\lambda+2)(\lambda+3)}}\,,$$

което показва че, асимптотически, оценката отдолу в Следствие 5.1 (както и оценката отдолу в (2.6)) би могла да се подобри най-много с множител по-малък от две. Що се отнася до сравнението на оценките отгоре за $c_n(\lambda)$ в Следствие 5.1 и в (2.6), можем да кажем следното: макар оценката в Следствие 5.1 да влече оценка отгоре за $c(\lambda)$ която е $\mathcal{O}(\lambda^{-3/4})$ при $\lambda \to \infty$, т.е. не е от правилния порядък, за умерено големи λ, например $\lambda \leq 25$, тази оценка е по-добра от тази в (2.6).

Подходът към доказателствата на Теореми 5.1 и 5.2 се основава на важна връзка между константата на Марков и екстремалната нула на ортогонален полином. Тази връзка е доказана в Теорема 5.4:

Теорема 5.4. *Най-добрата константа $c_n(\lambda)$ в неравенството на Марков се дава чрез*

$$c_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\mu_1}}\,, & n = 2m, \\ \frac{2}{\sqrt{\widetilde{\mu}_1}}\,, & n = 2m-1\,, \end{cases}$$

където μ_1 и $\widetilde{\mu}_1$ са най-малките нули съответно на полиноми P_m и $\widetilde{P}_m$ с водещ коефициент единица, които са ортогонални върху интервал от $\mathbb{R}_+$. Полиномите $\{P_k\}$ са дефинирани чрез три-членната рекурентна връзка

$$P_k(\mu) = \Big[\mu - \frac{1}{\alpha_k^2}\Big(\frac{1}{\beta_{k-1}^2} + \frac{1}{\beta_k^2}\Big)\Big] P_{k-1}(\mu) - \frac{1}{\alpha_{k-1}^2 \alpha_k^2 \beta_{k-1}^4} P_{k-2}(\mu)\,, \quad k \geq 2\,,$$
$$P_0(\mu) = 1\,, \quad P_1(\mu) = \mu - \frac{1}{\alpha_1^2 \beta_1^2}\,.$$

Полиномите $\{\widetilde{P}_k\}$ удовлетворяват същата рекурентна зависимост, като навсякъде α и β са заменени с $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$.

Величините α_k, $\widetilde{\alpha}_k$, β_k и $\widetilde{\beta}_k$ са известни (формули (2.8)–(2.11) от Глава 2), и посредством тричленната рекурентна връзка могат да се пресметнат коефициентите пред най-ниските степени в тези ортогонални полиноми.

Както може да се види от доказателството на Теорема 5.4, връзката между най-добрата константа в L_2-неравенства на Марков и най-малката нула на ортогонален полином е валидна за широк клас от такива неравенства. За частния случай на неравенства при тегла на Лагер, това наблюдение е отбелязано в [17].

В § 2 на Глава 5 са намерени формулите за коефициентите пред втората и третата най-високи степени в съответстващите им реципрочни полиноми с водещ коефициент единица, като за намирането и доказателството им е използвана системата *Mathematica*. В същия §са получени подходящи двустранни оценки за коефициентите пред третите по големина степени в тези полиноми. В §3 с помощта на Предложение 5.3 са доказани Теореми 5.1 и 5.2, а в § 4 е дадено доказателството на Следствия 5.1 и 5.3.

4 Апробация на резултатите

Резултатите, включени в дисертационния труд, са публикувани в статиите с номера [1], [2] и [3] от списъка с цитираната литература, а именно:

1. D. Aleksov, An approach for derivation of Markov-type inequalities in L_2 norms, *Ann. Univ. Sofia, Fac. Math Inf.* **101** (2015), 215–235.

2. D. Aleksov, G. Nikolov, and A. Shadrin, On the Markov inequality in the L_2 norm with the Gegenbauer weight, *J. Approx. Theory* **208** (2016), 9–20.

3. D. Aleksov and G. Nikolov, Markov L_2 inequality with the Gegenbauer weight, *J. Approx. Theory* **225** (2018), 224–241. https://doi.org/10.1016/j.jat.2017.10.008

Публикациите [2] и [3] са в списание с импакт-фактор.

Части от резултатите, включени в дисертацията, са докладвани от автора на следните специализирани научни форуми:

1. Aleksov D., Markov type inequalities in L_2 norms with a Gegenbauer weight function, Workshop on Approximation Theory, CAGD, Numerical Analysis, and Symbolic Computation, August 25-31, 2014, Sozopol (Bulgaria)

2. Aleksov D., Markov Type Inequalities in the L_2-Norms Associated with the Gegenbauer Weight Functinons , 125 години математика и природни науки в Софийския университет „Св. Климент Охридски", 2014

3. Aleksov D., Markov Type Inequalities in L_2 Norms with a Gegenbauer Weight Function, Workshop on Approximation Theory, CAGD, Numerical Analysis, and Symbolic Computation, September 6-11, 2016, Sofia, Bulgaria

5 Авторска справка

По мнение на автора, основните научни приноси в този дисертационен труд са:

1. Доказани са двустранни оценки за най-добрата константа $c_n(\lambda)$ в неравенството на Марков в L_2-норми индуцирани от функциите на тегло на Гегенбауер. Тези оценки подобряват известните в литературата резултати.

2. Доказано е, че екстремалният полином в L_2-неравенствата на Марков за първата производна на полиноми от степен ненадминаваща n при тегла на Гегенбауер е четен (респ. нечетен) когато n е четно (респ. нечетно) число.

3. Доказана е теорема, характеризираща най-добрата константа в L_2-неравенства на Марков посредством екстремалната (най-малката) нула на полином, ортогонален по отношение на мярка с носител върху $\mathbb{R}_+$

6 Декларация

Декларирам, че представената във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен “доктор“ в Софийски университет “Св. Климент Охридски“ дисертация на тема: “Неравенства от тип на Марков в L_2-норми при тегла на Гегенбауер“ е мой труд и в нейното разработване не са ползвани чужди публикации и разработки в нарушение на авторските им права. Цитиранията на всички източници на информация, текст, илюстрации, таблици, изображения и други са обозначени според стандартите. Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

Подпис:......................................

7 Благодарности

Най-искрено благодаря на научния ми ръководител проф. д.м.н. Гено Николов за оказаната помощ и проявеното търпение от негова страна.

Работата ми върху този дисертационен труд бе частично финансирана по Договор ДН 02/14 “Съвременни методи в конструктивната теория на функциите” с Фонд “Научни изследвания” на МОН, а също така и по проектите 75/2015, 30/2016 и 80.10-11/2017 с Фонд “Научни изследвания” на Софийския университет “Св. Климент Охридски”.

Литература

[1] D. Aleksov, An approach for derivation of Markov-type inequalities in L_2 norms, *Ann. Univ. Sofia, Fac. Math Inf.* **101** (2015), 215–235.

[2] D. Aleksov, G. Nikolov, and A. Shadrin, On the Markov inequality in the L_2 norm with the Gegenbauer weight, *J. Approx. Theory* **208** (2016), 9–20.

[3] D. Aleksov and G. Nikolov, Markov L_2 inequality with the Gegenbauer weight, *J. Approx. Theory* **225** (2018), 224–241. https://doi.org/10.1016/j.jat.2017.10.008

[4] A. Alexandrov and G. Nikolov, An inequality of Duffin-Schaeffer type for Hermite polynomials, in: *Constructive Theory of Functions, Sozopol 2010*, G. Nikolov and R. Uluchev, eds., Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2012, pp. 9–20.

[5] A. Alexandrov, H. Dietert, G. Nikolov and V. Pillwein, Proof of a conjecture of M. Patrick concerning Jacobi polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* **428** (2015), 750–761.

[6] A. I. Aptekarev, A. Draux, and V. A. Kalyagin, On the asymptotics of sharp constants in Markov-Bernstein inequalities in integral metrics with classical weights, *Russian Math. Surveys* **35** (2000), 163–165.

[7] A. I. Aptekarev, A. Draux, V. A. Kalyagin, and D. N. Tulyakov, Asymptotics of sharp constants in Markov-Bernstein inequalities in integral norm with Jacobi weight, *Proc. Amer. Math. Soc.* **143** (2015), 3847–3862.

[8] R. Askey, Orthogonal polynomials and special functions, SIAM, Philadelphia, 1975.

[9] A. Boettcher and P. Doerfler, Weighted Markov-type inequalities, norms of Volterra operators, and zeros of Bessel functions, *Math. Nachr.* **283**(2010), 357–367.

[10] A. Boettcher and P. Doerfler, On the best constant in Markov-type inequalities involving Gegenbauer norms with different weights, *Oper. Matr.* **161**(2010), 40–57.

[11] A. Boettcher and P. Doerfler, On the best constant in Markov-type inequalities involving Laguerre norms with different weights, *Monatsh. Math.* **5**(2011), 261–272.

[12] B. Bojanov, Markov-type inequalities for polynomials and splines, *Approximation Theory X (Nashville, TN, 2002*, Ch. Chui et al., eds., Vanderbilt University Press, pp. 31–90.

[13] B. Bojanov and G. Nikolov, Duffin and Schaeffer type inequality for ultraspherical polynomials, *J. Approx. Theory* **84** (1996), 129–138.

[14] H. Brass, *Quadraturverfahren*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1977.

[15] P. Doerfler, New inequalities of Markov type, *SIAM J. Math. Anal.* **18** (1987), 490–494.

[16] P. Doerfler, Über die bestmögliche Konstante in Markov-Ungleichungen mit Laguerre Gewicht, *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II* **200** (1991), 13–20.

[17] P. Doerfler, Asymptotics of the best constant in a certain Markov-type inequality, *J. Approx. Theory* **114** (2002), 84–97.

[18] A. DRAUX, C. ELHAMI, On the positivity of some bilinear functionals in Sobolev spaces, *J. Comput. Appl. Math.* **106** (1999), 203–243.

[19] A. ELBERT, Some recent results on the zeros of Bessel functions and orthogonal polynomials, *J. Comp. Appl. Math.* **133** (2001), 65–83.

[20] R. J. DUFFIN AND A. C. SCHAEFFER, A refinement of an inequality of brothers Markoff, *Trans. Amer. Math. Soc.* **50** (1941), 517–528.

[21] E. HILLE, G. SZEGŐ, AND J. D. TAMARKIN, On some generalizations of a theorem of A. Markoff, *Duke Math. J.* **4** (1937), 729–739.

[22] D. B. HUNTER AND G. P. NIKOLOV, Gegenbauer weight functions admitting L_2 Duffin and Schaeffer type inequalities, in: *Computation and application of orthogonal polynomials* (G. Golub, W. Gautschi and G. Opfer, Eds.), ESNM, Vol. 131, Birkhäuser, Basel, 1999, 121–131.

[23] A. A. MARKOV, On a question of D. I. Mendeleev, Zap. Petersburg Akad. Nauk, **62** (1889), 1–24 (in Russian).

[24] V. A. MARKOV, *On functions least deviated from zero in a given interval*, St. Petersburg, 1892 (in Russian); German translation: Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig fon Null abweichen, *Math. Ann.* **77** (1916), 213–258.

[25] G. V. MILOVANOVIĆ, D. S. MITRINOVIĆ, AND TH. M. RASSIAS, *Topics in Polynomials: Extremal problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific, Singapore, 1994.

[26] L. MILEV AND G. NIKOLOV, On the inequality of I. Schur, *J. Math. Anal. Appl.* **16** (1997), 421–437.

[27] L. MIRSKY, An inequality of the Markov-Bernstein type for polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **14** (1983), 1004–1008.

[28] G. NIKOLOV, On certain Duffin and Schaeffer type inequalities, *J. Approx. Theory* **93** (1998), 157–176.

[29] G. NIKOLOV, Inequalities of Duffin-Schaeffer-Schur type, *Annuaire Univ. Sofia* **90** (1998), 109–123.

[30] G. NIKOLOV, An inequality for polynomials with elliptic majorant, *J. Inequal. Appl.* **4** (1999), 315–325.

[31] G. NIKOLOV, An inequality for polynomials with elliptic majorant, *J. Inequal. Appl.* **4** (1999), 315–325.

[32] G. NIKOLOV, Inequalities of Duffin-Schaeffer type, *SIAM J. Math. Anal.* **33** (2001), 686–698.

[33] G. NIKOLOV, Snake polynomials and Markov-type inequalities, in: *Approximation Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov* (B. Bojanov, Ed.) Darba, Sofia, 2001, 342–352.

[34] G. NIKOLOV, Markov-type inequalities in the L_2-norms induced by the Tchebycheff weights, *Arch. Inequal. Appl.* **1** (2003), no. 3-4, 361–375.

[35] G. Nikolov, Inequalities of Duffin-Schaeffer type II, *East J. Approx.* **11** (2005), no. 2, 147–168.

[36] G. Nikolov, An extension of an inequality of I. Schur, *Math. Nachr.* **278** (2005), no.10, 1190–1208.

[37] G. Nikolov, An extension of an inequality of Duffin and Schaeffer, *Constr. Approx.* **21** (2005), 181–191.

[38] G. Nikolov, Polynomial inequalities of Markov and Duffin–Schaeffer type, in: *Constructive Theory of Functions, Varna 2005*, (B. Bojanov, Ed.), Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2006, pp. 201–246.

[39] G. Nikolov and A. Alexandrov, On the behavior of Gegenbauer polynomials in the complex plane, *Results Math.* **62** (2012), 415–428.

[40] G. Nikolov and A. Shadrin, On Markov–Duffin–Schaeffer inequalities with a majorant, in: *Constructive Theory of Functions, Sozopol 2010* (G. Nikolov and R. Uluchev, Eds.), Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2012, pp. 227–264.

[41] G. Nikolov and A. Shadrin, On Markov–Duffin–Schaeffer inequalities with a majorant. II, in: *Constructive Theory of Functions, Sozopol 2013* (K. Ivanov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2014, pp. 175–197.

[42] G. Nikolov and A. Shadrin, On the L_2 Markov inequality with Laguerre weight. In: *Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis*, N.K. Govil et al. (eds.), Springer Optimization and Its Applications **117**, pp. 1–17, DOI 10.1007/978-3-319-49242-1_1.

[43] G. Nikolov and A. Shadrin, Markov L_2 inequality with the Laguerre weight, in: *Constructive Theory of Functions, Sozopol 2016*, (K. Ivanov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2017, to appear.

[44] G. Nikolov and A. Shadrin, On the Markov inequality in the L_2-norm with the Gegenbauer weight, arXiv:1701.07682v1 [math.CA], 2017, *Constr. Approx.* https://doi.org/10.1007/s00365-017-9406-2

[45] G. Nikolov and R. Uluchev, Estimates for the best constant in a Markov L_2–inequality with the assistance of computer algebra, *Ann. Univ. Sofia, Ser. Math. Inf.* **104** (2017), to appear.

[46] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 2002.

[47] E. Shmidt, Über die nebst ihren Ableitungen ortogonalen Polynomensysteme und das zugehörige Extremum, *Math. Anal.* **119** (1944), 165–204.

[48] A. Yu. Shadrin, Interpolation with Lagrange polynomials: A simple proof of Markov inequality and some of its generalization, *Approx. Theory Appl. (N.S.)*, **8** (1992), 51–61.

[49] A. Shadrin, Twelve proofs of the Markov inequality. In: *Approximation Theory: A volume dedicated to Borislav Bojanov*, (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, eds.), Professor Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2004, pp. 233–298. Available also at: http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/people/Alexei/papers/markov.pdf

[50] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, AMS Colloq. Publ. **23**, AMS, Providence, RI, 1975.

[51] P. Turán, Remark on a theorem of Erhart Schmidt, *Mathematica (Cluj)*, **2**, no. 25, 1960, 373–378.