

Становище

За дисертацията на доц. д-р **Надя Пейчева Златева**

### **Вариационен анализ: методи и приложения**

За присъждане на научната степен **ДОКТОР НА НАУКИТЕ**

В направление 4.5 Математика

Автор на становището: проф. дмн Румен Петров Малеев

**Данни за кандидатката.** Доц. Надя Златева е завършила с отличие математика, специализация Изследване на операциите във ФМИ на СУ през 1992 г. След дипломирането си е хоноруван асистент във ФМИ, след което през 1994 става редовен докторант. През 1999 г. защитава кандидатска дисертация под ръководството на проф. Пандо Георгиев. След защитата е гл. асистент в катедра ВОИС на ФМИ и нс I ст. в ИМИ БАН. Хабилитира се през 2005 г. във ФМИ.

**Документи.** В съответствие с Правилника на СУ доц. Златева е представила необходимите документи, както и електронни копия от тях. Предложената дисертация представлява печатен текст на английски от 220 страници, състоящ се от три глави и библиография, съдържаща 172 заглавия.

**Авторефератът** вярно отразява съдържанието на дисертацията, както и приносите на авторката и тяхното място в потока на съвременните изследвания в съответното направление. „Разширената“ му форма едва ли облекчава използването му.

**Обзор на съдържанието на дисертацията и научни приноси.** Дисертацията на доц. Златева е посветена на изучаването на важни методи и приложения на вариационния анализ.

Един от основните обекти на изследване в глава 1 е класът на полунепрекъснатите отдолу функции с квадратична оценка отдолу. Тези функции притежават „хубавите“ свойства на изпъкналите функции, свързани с регуляризация, интегруемост, свойства от втори ред и др.. Получена е характеристика на функциите с квадратична оценка отдолу в банахово пространство в термините на хипомонотонност на определени отсичания на техните субдиференциали. Един красив резултат на дисертантката, показва, че в гладко банахово пространство проксималният субдиференциал и субдиференциалът на Кларк за тези функции съвпадат. Тези резултати са аналози на съответни резултати в  $R^n$  и в хилбертово пространство, получени от Поликен за  $R^n$  и Леви, Поликен, Тибо в хилбертовия

случай. Сериозни изследвания в глава 1 са посветени и на изучаване на проксимално регулярните множества<sup>1</sup> в банахови пространства, които са едновременно равномерно изпъкнали и равномерно гладки със степенни оценки на съответните модули<sup>2</sup>. Сред множеството резултати ще отбележим предложеното подходящо продължение на дефиницията на свойството проксимална регулярност за случая на равномерно изпъкнали банахови пространства и получените характеристики на това свойство в точка  $x^*$  на заворено множество  $C \subset X$  в термините на диференцируемост на функцията разстояние  $d_C$ , еднозначност и непрекъснатост на изображението метрична проекция  $P_C$ .

Задачата за интегруемост на субдиференциали, която е обект на интензивни изследвания в последните десетилетия, е свързана с важния за приложенията въпрос дали от  $\partial f(x) \subset \partial g(x)$ ,  $\forall x \in X$ , където  $\partial f$  и  $\partial g$  са субдиференциалите на  $f$  и  $g$ , следва, че  $f$  и  $g$  се отличават с константа. Това е така за полунепрекъснати отдолу изпъкнали функции в банахови пространства според класически резултат на Моро-Рокафелар. Значително разширение на областта от задачи за интегруемост с положителен отговор на този въпрос в зависимост от изискванията, предявявани към функциите  $f$  и  $g$ , е реализирана през 90-те години: от Поликен в крайномерния случай – за  $f$  и  $g$  полунепрекъснати отдолу функции с квадратична оценка отдолу; от Латер, Тибо, Загородни - за  $f$  и  $g$  изпъкнало субдиференциално подобни в банахово пространство (например полунепрекъснати отдолу функции с квадратична оценка отдолу, разлика иа изпъкнали функции и др.) и от Иванов, Златева - в класа на полуизпъкналите функции. Изследванията в глава 2 на дисертацията са посветени на различни задачи за интегруемост на субдиференциали на функции на една и две променливи в банахови пространства. Сред получените резултати ще отбележим характеристиката в термините на субдиференциали на липшицовите по посока полунепрекъснати отдолу функции, използвана за доказване на интегруемост на субдиференциалите на регулярни липшицови по посока функции, както и тези за локална интегруемост на субдиференциалите на някои класове от липшицови по посока функции на две променливи.

Глава 3 съдържа интересни изследвания на използваните в оптимизацията многозначни изображения. За зависещи от параметър минимаксни задачи от типа  $\inf_{x \in K} \sup_{y \in L} f(x, y, \lambda)$ , където  $\lambda$  е параметър, е получено достатъчно условие за непрекъснатост по Обен на изображението решение  $S: \lambda \rightrightarrows S(\lambda)$ . Предложени са съдържателни примери, като за един клас от линейно пертурбирани

<sup>1</sup> Проксимално регулярни се наричат множествата, чиито индикаторни функции са от класа на проксимално регулярните функции, съдържащ непрекъснатите отдолу функции с квадратична оценка отдолу.

<sup>2</sup> Всяко суперефлексивно, в частност всяко равномерно изпъкнало или равномерно гладко банахово пространство притежава еквивалентна равномерно изпъкнала и равномерно гладка норма със степенни оценки за модулите на изпъкналост и гладкост.

минимизационни задачи в банахово пространство  $X$  със свойството на Радон-Никодим и с параметризиращо пространство  $X^*$  е получена еднозначност и липшицова непрекъснатост на решението около  $0 \in X^*$  при по-слаби ограничения отколкото от известните (Бонанс, Шапиро). Други изследвания на дисертантката в глава 3 са свързани с метрическа регулярност на многозначни изображения. Ще отбележим получения критерий на Обен за метрическа регулярност на изображения  $F: X \rightarrow Y$ ,  $X, Y$  банахови, който дава и характеристика на метрическата регулярност, допълваща резултати, стартирани от Обен и негови съавтори. Сред приложенията ще отбележим полученото необходимо и достатъчно условие за строга регулярност на вариационни неравенства върху многостенни множества, допълващо един критерий на Дончев, Рокафелар. В глава 3 е доказан и „принцип за дълга орбита или празна стойност“, използван за получаване на интересни резултати за фиксирани точки на многозначни изображения, за метрическа регулярност на еднозначни изображения и др.

**Критични бележки.** Нямам забележки по същество. Изложението е гладко и ясно.

**Публикации.** Представените работи, използвани в дисертацията, са 11 (от общо 27), които са публикувани, както следва: в Доклади БАН (4), J. Convex Analysis (2), SIAM J. Optim. (1), PAMS (1), Nonlinear An. Theory Meth. Appl. (1), Math. Oper. Res. (1), TAMS (1). Всички статии са в списание с импакт фактор, като изключим 2, публикувани в Докл. БАН преди списанието да получи импакт фактор. Една от статиите е самостоятелна, 7 са с по един съавтор и 3 - с по двама съавтори. Считаю, че участието на дисертантката в съвместните статии е най-малко равностойно. Указаните от авторката цитирания на тези публикации са общо 157 (от тях -12 в монографии, а 96 - в статии, публикувани в списания с импакт фактор).

**Заклучение.** Както личи от краткото описание на дисертацията на доц. Надя Златева, тя е получила редица нови и интересни резултати в активно разработвани направления на вариационния анализ. Те са плод на оригинални идеи, професионално умение и са получили своето признание от специалистите. Смятам, че дисертацията на доц. Златева удовлетворява всички изисквания, предвидени в ЗРАСР и в съответния Правилник на ФМИ и препоръчвам убедено на уважаемото жури да присвои на доц. Надя Пейчева Златева научната степен доктор на науките по математика.

София, декември 2017

проф. Р. Малеев