

Тулуза,
15ти януари 2017

РЕЦЕНЗИЯ

от проф. д-р Любомир Недялков Гаврилов,
Institut de Mathématiques, Université de Toulouse, France

по дисертационния труд «Алгебрични, аналитични и геометрични изследвания върху някои крайно- и безкрайно-мерни Хамилтонови полета» за придобиване на научната степен «доктор на математическите науки», от доц. д-р Огнян Борисов Христов

1. Общи данни

Дисертантът работи като доцент във Факултета по Математика и Информатика към СУ « КЛ. Охридски », където са извършени и изследванията.

2. Обща характеристика на представените научни трудове

Доц. Христов е представител дисертационен труд от 206 страници, на тема « Алгебрични, аналитични и геометрични изследвания върху някои крайно- и безкрайно-мерни Хамилтонови полета », който отразява неговите научни приноси, публикувани в 12 научни статии, 7 от които са самостоятелни. Резултатите от дисертацията са публикувани през последните 6 години в списания с международна редколегия. Те представляват само част от общата научна дейност на автора (27 статии реферирани в *Mathematical Reviews*, www.ams.org).

Научната област, в която се вписва настоящата дисертация е най-общо казано : интегрируемост на Хамилтонови динамични системи (но също и някои не-хамилтонови). Темата е огромна, от изключително теоретично и приложно значение, с много богата история

и актуална и днес. За това свидетелстват десетките публикувани книги и вероятно хиляди статии.

2.1.

Първата тема, изучавана от доц. Христов се опира на теорията на Рамис-Моралес (1995) и Зиглин (1982), развита активно едва последните двадесет години. Тази теория установява връзка между интегрируемост/неинтегрируемост на крайно-мерна Хамилтонова система, и диференциалната група на Галоа свързана с линеаризация на това уравнение, в околност на подходящо частно решение.

2.2.

Втората тема, изучавана от доц. Христов, е свързана с различни геометрични аспекти на конкретни безкрайномерни Хамилтонови системи (частни диференциални уравнения) : уравненията на Dullin-Gottward-Holm, Holm-Staley, Camassa-Holm, Kupperschmidt.

Тези уравнения се изследват в рамките на теорията на обратно разсейване (inverse scattering theory), която е една от най-важните математически теории на 20ти век. Тази теория позволи изучаването и интегрирането на голям брой уравнения на математическата физика, които имат Хамилтонова структура и могат да се разглеждат като безкрайно-мерен аналог на класическите напълно интегрируеми системи (в смисъл на Лиувил), разглеждани от автора в първата част на настоящия труд.

3. Преценка на приносите

3.1. Неинтегрируемост на крайномерни Хамилтонови системи.

Темата за неинтегрируемост на Хамилтонови системи, например в задачата за трите тела в небесната механика, е разглеждана още от Поанкаре и неговите ученици през 19ти век. Въпроса за явно решаване и изписване на решенията на диференциални уравнения, в частност уравненията на класическата механика, по това време се смята за визключително важен. Установява се, че в случаите, когато това е възможно (и нетривиално), причината е в наличието на скрити групови симетрии. Това постепенно води до концепцията за структура на Поасон, Хамилтова динамична система, интегрируемост в смисъл на Лиувил. Далеч не всички диференциални системи са обаче интегрируеми, вярно е по-скоро обратното. Въпреки това, доказателството, че дадена система не е интегрируема е далеч от очевидно. От динамична гледна точка, следва да се докаже наличието на « хаотично поведение » на определени решения. От алгебрична гледна точка, следва да се докаже несъществуване на достатъчен брой съхраняващи се величини, като например първи интегрални. Трудовете на автора се вписват в тази тематика.

Изучаването на линейни диференциални уравнения в комплексна област пък е друга централна тема на математиката на 20ти век. Модерният подход в тази област е свързан с изучаването на съответната диференциална група на Галоа, в рамките на така наречено съответствие на Риман-Хилберт.

Удивително е, че едва в края на 20ти век бе забелязана връзката между неинтегрируемост на Хамилтонова система и некомутативност на подходяща диференциална група на Галоа (Рамис-Моралез). Това наблюдение се превръща бързо в стройна теория (теория на Зиглин-

Моралес-Рамис-Симо), към чието развитие има принос и доц. Христов. От техническа гледна точка се използват техники от комплексния анализ (въпреки, че изходните задачи са в реална област). Самото понятие за диференциална група на Галоа, е свързано с изучаването на линейно диференциално уравнение, но в комплексна област.

Неинтегрируемост на нормални форми.

Неговите резултати, свързани с неинтегрируемост на нормални форми на Хамилтонови системи с три степени на свобода и прости резонанси от тип $1:1:2$, $1:2:3$, $1:2:4$ са от общ теоретичен интерес, както и с приложно значение (орбитите на спътниците на Юпитер се описват приблизително от Хамилтонова система с $1:2:4$ резонанс, както е известно от края на 19ти век). Това е първокласен научен резултат, публикуван в съответното водещо научно списание по Небесна механика [6]. Авторът отговаря на въпроси, посатвяни по-рано от Дюистермаат и Верхулст.

Уравнения на Пенлеве.

Друга серия от важни теоретични резултати, са изследванията на обобщени уравнения на Пенлеве и тяхната неинтегрируемост. Става дума за специални нелинейни диференциални уравнения, обобщаващи класическите уравнения на Пенлеве. Тези обобщения, за разлика от класическите, не притежават изчерпателна теория и тяхното класифициране тепърва предстои. Въпроса за това, дали класическите уравнения на Пенлеве дефинират нови трансцендентни функции е изучаван още от самия Пенлеве (около 1990), но намира окончателно решение около 1990 (Nishioka and Umemura, Watanabe). Известно е, че уравненията на Пенлеве притежават Хамитонова структура (да напомним, че те са все пак не-автономни уравнения). От тяхната неприводимост не следва автоматично неинтегрируемост (в смисъл на Лиувил). Именно задачата за тяхната неинтегрируемост е изследвана от автора в [8]. Авторът е преодолял са значителни трудности, свързани с изследване на оператори на Стокс и уравнения от висок (шести) порядък.

Стационарни решения на Бозе-Ферми смеси

Стационарните решения на Бозе-Ферми смеси в едномерна оптична решетка са решения на определена Хамилтонова система с рационален пръв интеграл и N степени свобода. Авторът доказва неинтегрируемост на тази система, при определени значения на параметрите, както и формулира подходяща обща хипотеза.

Модели на Грос-Невьо.

Така наречените модели на Грос-Невьо са Хамилтонови системи, свързани с кореновите системи на прости алгебри на Ли. Системите съответстващи на $sl(2)$ и $so(4)$ са интегрируеми. Останалите системи на Грос-Невьо се оказват обаче неинтегрируеми (резултати на Хорозов 1987 и Мачиевски 2005). Доц. Христов си поставя задачата за изследване на тези неинтегрируеми системи в околност на точка на равновесие, с помощта на нормалните форми на Биркхоф-Густавсон от порядък 4. Съответните орязани нормални форми (до порядък 4) са интегрируеми, докато пълната система е неинтегрируема и КАМ-неизродена. Това гарантира в частност наличието на инвариантни торове с ненулева мярка, върху които

орбитите са кавзи-периодични. Така наречената КАМ-теория (която дължим на Колмогоров, Арнолд и Мозер) не е непосредствено свързана с теорията на Зиглин-Моралес-Рамис. Теорията на КАМ обяснява например устойчивостта (за големи интервали от време) на слънчевата система.

Система на Карабут

Забележително е, че теорията на Зиглин-Моралес-Рамис може да се приложи и към нехамилтонови системи, като понятието «интегрируемост» тук изисква по-прецизна дефиниция. Илюстрация на това е изследването на системата на Карабут от механиката на флуидите, като се използва по същество съвсем нов резултат на Ayoul-Zung (2010).

3.2. Интегрируеми безкрайномерни хамилтонови системи

Във втората част на предложения дисертационен труд, авторът изучава различни качествени аспекти на понятието интегрируемост, но този път в контекста на безкрайномерни системи, представени чрез частни диференциални уравнения (ЧДУ): уравненията на Дулин-Готвалд-Холм, Холм-Стали, Камаса-Холм, Дегасперис-Процеси. Изследванията са публикувани в авторитетни международни списания, и свидетелстват за широка научна култура. Резултатите върху локалната добре поставеност на решенията на b -фамилията на Холм-Стали [13] са изключително добре оценени от експертите.

Уравнения на Дулин-Готвалд-Холм (DGH)

Тези уравнения описват разпространение на вълни в плитка вода, като комбинират линейна дисперсия от уравненията на Кортевег-де Фриз (KdV), с нелинейна/нелокална дисперсия на уравненията на Камаса-Холм. DGH позволяват с един порядък по-точна апроксимация на вълните, в сравнение с KdV, запазвайки своята интегрируемост.

Авторът е приложил техники от обратната задача в теорията на разсейването, обобщавайки предишни резултати, доказани за KdV и Камаса-Холм от Константин, Герджиков и Иванов (2006). В резултат са получени съответните променливи действие-ъгъл.

b -фамилия на Холм-Стали

Това е друго частно диференциално уравнение от динамиката на плитките води, което обобщава по различен начин уравненията на Камаса-Холм, а също тези на Дегасперис-Процеси.

Тези уравнения нямат непременно еволюционен характер, затова локалната добре поставеност на техните решения е от изключителна важност. Този въпрос е разгледан и решен успешно в [13]. Както споменах по-горе, този резултат на автора (заедно с Хакаев) е изключително добре оценен от експертите.

уравнения на μ -Камаса-Холм (μ CH)

Тези уравнения описват разпространение на слабо нелинейни вълни в течен кристал под действието на магнитно поле. Става дума за еволюционно интегрируемо уравнение, което притежава известна би-Хамилтонова структура. Основният резултат на автора е изследването на нелокалните симетрии (векторни полета) на μ CH.

Нехолономни пертурбации, геометрична интегрируемост

В последната глава на дисертацията се изучават интегрируеми деформации с помощта на така наречената « конструкция на Купершмид », при която деформираната система е отново би-хамилтонова и интегрируема. Формулира се понятието « геометрична интегрируемост » както и хипотезата, че всяка деформация на Купершмид на геометрически интегрируема система е също геометрически интегрируема. Получени са някои частни резултати, подкрепящи тази хипотеза.

4. Заключение

Представените научни резултати са значим принос в областта на интегрируемите системи и покриват обичайните международни стандарти за получаване на подобна научна степен в други държави.

Препоръчвам на научното жури присъждането на научната степен « доктор на науките » на доц. Огнян Борисов Христов.

Подпис:

Любомир Гаврилов