Становище

относно дисертационния труд

за получаване на научната степен „Доктор на науките“
в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика
Професионално наравление 4.5 Математика
Научна специалност: 01.01.05 Диференциални уравнения

Автор: доцент доктор Огнян Борисов Христов, доцент във Факултета по математика и информатика към Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Тема: Алгебрични, аналитични и геометрични изследвания върху някои крайно- и безкрайномерни Хамилтонови системи

Изготвил становището: доц. д-р Ангел Живков, ФМИ, СУ „Св. Климент Охридски“

Това становище е представено на основание на заповед РД № 38-688/25.10.2016 на Ректора на СУ.

Представената дисертация е с обем от 206 страници. От тях 13 страници литература – 233 заглавия.

В дисертацията се изследват условия за неинтегруемост на няколко крайномерни или безкрайномерни Хамилтонови системи. Основните резултати са формулирани и доказани в 11 теореми, на които ще се спрем накратко.

Квадратичните части на кубичните хамилтониани

$$\begin{aligned} H_1 &= a\big[p_2(p_1^2-q_1^2)+2p_1q_1q_2\big]+b\big[p_3(p_1p_2-q_1q_2)+q_3(q_1p_2+p_1q_2)\big],\\ H_2 &= a\big[p_2(p_1^2-q_1^2)+2p_1q_1q_2\big]+b\big[p_3(p_2^2-q_2^2)+2p_2q_2q_3\big],\\ H_3 &= q_3\big[a(q_1^2-p_1^2)+b(q_2^2-p_2^2)\big]+2p_3\big[ap_1q_1+bp_2q_2\big], \end{aligned}$$

са със съответни резонанси $1:2:3$, $1:2:4$, $1:1:2$. Параметрите a и b са реални и неотрицателни. За случая $1:1:2$, Дюистерма доказва, че не съществува допълнителен трети аналитичен интеграл, освен в известните случаи. О. Христов усилва този резултат, като доказва несъществуване на допълнителен трети *мероморфен* интеграл в гореспоменатите три случая. Използвана е техника от Диференциалната теория на Галоа.

По-нататък е разгледано уравнение със свойство на Пенлеве́ от 4-ти ред, допускащо Хамилтонова структура с Хамилтониан

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{7-9\varepsilon}{12}q_2^3 + p_1 q_2 - \frac{1+3\varepsilon}{4}p_1 q_1^2 + \frac{3\varepsilon-1}{4}q_2(\lambda z+\alpha) + \left(\gamma + \frac{3\varepsilon-1}{4}\lambda\right) q_1$$

и три степени на свобода. Параметрите λ и α са реални. Доказано е, че ако отношението $\gamma/\lambda = 3k$ или $\gamma/\lambda = 3k-1$ за някое цяло k, то Хамилтоновата система няма допълнителен рационален първи интеграл.

В същата (трета) глава от дисертацията, за двете уравненията на Пенлеве́ от четвърти и шести ред

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}: \quad & w^{(4)} - 10w(ww'' + w'^2) + 6w^5 = zw,\\
\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}: \quad & w^{(6)} - 14w^{(4)}w^2 - 56w^{(3)}w'w + 70w''(w^4 - w'^2) + 140w^3w'^2 - 42w(w'')^2 -\\
& -20w^7 - 10w(ww'' + w'^2) + 6w^5 = zw
\end{aligned}$$

е доказано, че съответните им Хамилтонови системи са неинтегруеми чрез *рационални* първи интеграли. Следван е подходът на Дювал, Митсчи и Рамис; пресметнати са съответни топологични генератори на формалната монодромия, експоненциални торове и матрици на Стокс; групата на Галоа е изоморфна на $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, а това доказва неинтегруемостта.

В Глава 4 е разгледан модел на N_f+1 свързани нелинейни уравнения на Шрьодингер, описващ стационарните решения на Бозе-Ферми смеси в едномерна оптична решетка. След смяна на променливите, задачата се свежда до Хамилтонова система,

$$H = \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} p_j^2 + \omega_0 q_0^2 + \sum_1^{N_f} \omega_j q_j^2 - g_{\mathrm{BF}}\, q_0^2 \sum_1^{N_f} q_j^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{C_0^2}{2q_0^2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} \frac{C_j^2}{q_j^2},$$

където C_j, ω_j и g_{BF} са реални константи. Доказва се, че в случаите

1) $C_0 = 0$, $C_j \neq 0$, $\sum C_j \neq 0$, $2\omega_j = \omega^2, 1 \leq j \leq N_f$;

2) $C_0 \neq 0$, $C_j = 0, 1 \leq j \leq N_f$, $g_{\mathrm{BF}} = n(n+1)/2, n \notin \mathbb{Z}$;

3) $C_0 C_1 \neq 0, N_f = 1$, g_{BF} е достатъчно малко,

Хамилтоновата система е интегруема тогава и само тогава, когато $g_{\mathrm{BF}} = 0$. Този резултат е съвместен с Г. Георгиев.

Следващите резултати са върху модели на Грос-Невьо, т.е. Хамилтонови системи, свързани с кореновите системи на прости алгебри на Ли, или Хамилтониан

$$H = \frac{(y, y)}{2} + \sum_{\alpha} \exp[(\alpha, x)],$$

където $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ са каноничните координати в $\mathbb{R}^{2n}$, $(\cdot, \cdot)$ е Евклидовото скаларно произведение, α е корен на проста алгебра на Ли $\mathfrak{g}$ и сумата е по цялата коренова система. Доказва се, че алгебрите $\mathrm{so}(4), \mathrm{so}(5), \mathrm{sp}(4), \mathrm{sl}(3)$ имат интегруеми и КАМ–неизродени нормални форми на Биркхоф-Густавсон $H_2 + H_4$, докато моделите на Грос-Невьо за алгебрите $\mathrm{so}(6) \sim \mathrm{sl}(4), \mathrm{so}(7), \mathrm{sp}(6)$ имат неинтегруеми нормални форми на Биркхоф-Густавсон.

По-нататък, в глава 6 от дисертацията, е разгледана системата на Карабут

$$\begin{aligned}
\tfrac{dy_1}{dt} &= y_3 y_5 - y_2 y_4, \\
\tfrac{dy_2}{dt} &= y_4 y_1 - y_3 y_5, \\
\tfrac{dy_3}{dt} &= y_5 y_2 - y_4 y_1, \\
\tfrac{dy_4}{dt} &= y_1 y_3 - y_5 y_2, \\
\tfrac{dy_5}{dt} &= y_2 y_4 - y_1 y_3,
\end{aligned}$$

характеризираща солитонни вълни в несвиваем флуид. Доказва се, че тя няма необходимите за интегруемост първи интеграли. От направените разсъждения не става ясно дали изобщо има трети, независим от известните два интеграла.

В глава 8 се доказва, че периодичната задача на Коши за b-фамилията

$$u_t - u_{xxt} + (b+1) u u_x = b u_x u_{xx} + u u_{xxx}, \quad u(0) = u_0, \quad t \geq 0,\, x \in \mathbb{S}$$

не зависи (в определен смисъл) равномерно непрекъснато от началните си данни. Този резултат е съвместен с И. Илиев и С. Хакъев.

В последната глава от дисертацията се изследва така наречената разширена система μ–Камаса–Холм

$$\begin{aligned}
m_t &= -u m_x - 2 m u_x, & m &= \mu(u) - u_{xx}, \\
\gamma_x &= \lambda m - \gamma^2, & \gamma_t &= \left(\frac{u_x}{2} + \frac{\gamma}{2\lambda} - u\gamma \right)_x, \\
\delta_x &= \gamma, & \delta_t &= \frac{u_x}{2} + \frac{\gamma}{2\lambda} - u\gamma, \\
\beta_x &= m e^{2\delta}, & \beta_t &= \left(\frac{\gamma^2}{2\lambda^2} - u m \right) e^{2\delta}
\end{aligned}$$

Тук функциите $u, m, \gamma, \delta, \beta$ зависят от времето t и са периодични с период 1 по пространствената променлива x; $\mu(u) := \int_0^1 u dx$ е усредняването по x; λ е ненулев параметър. Системата описва разпространението на слабо нелинейни вълни в голям течен кристал при външно магнитно поле и вътрешно взаимодействие. За системата са построени експлицитно пет векторни полета, които са нейни нелокални симетрии. Съответната 5-мерна алгебра на Ли е изоморфна на директната сума $sl(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Аналогични резултати са формулирани и за разширен вариант на горната система.

Резултатите в дисертацията са публикувани в 12 статии – 7 самостоятелни, 2 – в съавторство със С. Хакъев, една в съавторство с И. Илиев и С. Хакъев, 2 – в съавторство с Г. Георгиев. Девет от статиите са в списания с Импакт фактор. Впечатления правят публикациите в реномираните списания Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy и Nonlinear Analysis: Real World Applications.

Резултатите на О. Христов са докладвани многократно на конференции или семинари в САЩ, Франция, Холандия, Испания, Полша, Колумбия, както и в България.

Към днешна дата – според Thompson Reuters, има 37 цитирания на гореспоменатите 12 статии, от повече от 40 математици. Измежду тях правят впечатление имената на J. Morales-Ruiz, F. Verhulst, C. Mitschi.

Представения дисертационния труд удовлетворява всички изисквания на ФМИ, СУ, както и моите лични. **Убедено препоръчвам на уважаемото Жури по конкуса да присъди на Огнян Борисов Христов научната степен „Доктор на науките“.**

София, 19 януари 2017 г.

/А. Живков/