

РЕЦЕНЗИЯ

на дисертация за придобиване на
образователната и научна степен “Доктор”
в професионално направление 4.5 Математика

Автор: Христина Йорданова Белчева
Рецензент: проф. дн Надежда Рибарска
4 януари 2026г.

Пиша тази реценция в качеството ми на член на научното жури, съгласно Заповед № РД 38-685/5.11.2025 г. на Ректора на Софийския университет. Представеният дисертационен труд на тема “Приложения на методите на вариационния анализ” (Applications of the Variational Analysis Methods) е с обем от 59 страници и е написан на английски език. Състои от увод, предварителни сведения, три глави, заключение и библиография, включваща 40 заглавия. Представен е автореферат на български език (в обем от 31 страници) и автореферат на английски език (в обем от 30 страници), както и всички други изискуеми по процедурата документи. Приемам за рецензиране всички предоставени материали.

Христина Йорданова Белчева е родена през 1995 година. Завършва Софийската математическа гимназия през 2014г. и веднага започва обучението си във Факултета по математика и информатика на Софийския университет “Св. Климент Охридски”, специалност приложна математика. Дипломира се като бакалавър по приложна математика през юли 2018г. Прави магистратура в магистърска програма “Изчислителна математика и математическо моделиране” и я завършва през 2020 г. От февруари 2022г. Христина Белчева е редовен докторант в докторска програма “Изследване на операциите” на ФМИ, СУ с научен ръководител проф. дн Надя Пейчева Златева. След отчисляването ѝ с право на защита е назначена като първо ниво изследовател във ФМИ, СУ.

Познавам много малко Христина Белчева, най-вече откакто е докторант и член на групата по оптимизация. Общите ми впечатления са, че е открита, коректна и старателна. Чувала съм прекрасни отзиви за нея като асистент.

Дисертационният труд на Христина Йорданова Белчева е в областта на вариационния анализ, съвременна и динамична област от математиката. Важна част от вариационния анализ са вариационните принципи, често позволяващи да се докаже съществуването на решение на дадена оптими-

зационна задача при предположения, по-слаби от традиционните. По-конкретно дисертацията съдържа резултати, развиващи метода на пертурбационните пространства. Този метод е въведен от Deville, Godefroy и Zizler като обща рамка, от която те получават някои от най-често употребяваните вариационни принципи – тези на Ekeland и на Borwein-Preiss. Методът е доразвит от Иванов и Златева, които намират негови нетривиални приложения. Предложената дисертация е следваща стъпка в тази посока.

Секцията “Означения и предварителни сведения” прави много лошо впечатление. Смесени са дефиниции, които би трябвало да са известни на всеки студент от математическа специалност (например дефиницията на норма) с дефиниции, които се появяват само в изследователски статии. Особено е неприятна тотално грешната дефиниция на вътрешна и външна граница на редица от множества в смисъл на Painlevé-Kuratowski, понятие, което е основно за дисертацията. Твърдението в началото на страница 9 (след уравнение (6)) е грешно.

Отправна точка за изследванията в първа глава и втора глава на дисертационния труд са така наречените параметрични вариационни принципи. Грубо казано, ако е дадена фамилия от оптимизационни задачи, зависещи от параметър по непрекъснат (в конкретен смисъл) начин, се строи произволно близо друга фамилия от оптимизационни задачи, които вече са добре поставени и минимумът зависи непрекъснато от параметъра. Възможните приложения са много и съществени. Радостно е, че един от първите резултати от този тип принадлежи на Пандо Георгиев. В първа глава е получен напълно удовлетворителен параметричен вариационен принцип за случая, когато пространството от параметрите е сходяща редица (заедно с границата). Във втора глава е разгледан общият случай (пространството от параметрите е пълно метрично пространство), но там резултатът за непрекъсната зависимост на решенията на смутените задачи от параметъра е получен не за всички стойности на параметъра, а за гъсто G_δ подмножество на пространството от параметрите, съдържащо предварително фиксирано изброимо множество. Намерен е пример, показващ, че в тази общност на постановката не може да се очаква резултат за всички стойности на параметъра. Доказана е Теорема 2.5.4, която е нетривиално приложение на развитите методи към теорията на Стечкин (еднозначност на метричната проекция). Нека да подчертаем, че задачата е атакувана от нов ъгъл, с използването на нови методи.

Един от основните решени проблеми в първите две глави е да се намери достатъчно обща дефиниция на сходимост (непрекъснатост) на фамилия от полунепрекъснати отдолу ограничени отдолу собствени функции такава, че да могат да се получат смислени резултати. Въведени са свойствата равномерна епи-сходимост (в първа глава) и равномерна епи-непрекъснатост (във втора глава), които позволяват да се приложи

пертурбационният метод. Искам да отбележа, че тези свойства не са нови. Да се съсредоточим върху дефиницията на равномерна епи-непрекъснатост ((2.1) и (2.2) от началото на втора глава). Нека да разгледаме многозначното изображение $E : P \rightarrow 2^{X \times R}$, $E(p) := \text{epi}(f_p)$, където разстоянието в $X \times R$ е максимумът от разстоянията между координатите. Тогава (2.1) е еквивалентно на “ E е полунепрекъснато отдолу в стандартен топологичен смисъл (или вътрешно полунепрекъснато в смисъл на Painlevé-Kuratowski) в p за всяко $p \in P$ ”. От друга страна, (2.2) е еквивалентно на “ E е полунепрекъснато отгоре в смисъл на Pompeiu-Hausdorff в p за всяко $p \in P$ ”, свойство, което е по-силно от външна полунепрекъснатост в смисъл на Painlevé-Kuratowski, но по-слабо от полунепрекъснатост отгоре в топологичен смисъл (околностите на образа са епсилон-разширения, а не произволни отворени множества). Непрекъснатост на множеството на решенията при подобни предположения е изучавана от български математици: Асен Дончев, а напоследък Стоян Апостолов и Димитър Георгиев. Редно е било при въвеждане на ново понятие да се изясни по-подробно връзката му с вече съществуващите такива.

Трета глава на дисертацията е посветена на изследване на пространствата на Orlicz чрез конструиране на специфично пертурбационно пространство, адаптирано към структурата на пространството на Orlicz. Тази глава е много технична и полученият вариационен принцип е силен. Методът позволява по нов начин да се погледне на известни резултати в тази теория. Убедена съм, че в бъдеще ще бъдат намерени и други приложения на получените резултати в тази глава.

В заключение искам да подчертая, че дисертационният труд е едно цялостно изследване, което допринася за развитието на метода на пертурбационните пространства. Тази насока на изследвания може и би трябвало да бъде продължена, за да бъде разкрит докрай потенциалът на този метод.

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в три статии – едната в Set-Valued and Variational Analysis (Web of Science Quartile Q2 Mathematics Applied), втората в Optimization (Web of Science Quartile Q1 Mathematics Applied), а третата в Positivity (Web of Science Quartile Q2 Mathematics). Трите статии са съвместни с научния ръководител.

Част от резултатите от дисертацията са докладвани на престижни научни форуми, например 16th International Workshop on Well-Posedness of Optimization Problems and Related Topics, Borovets 2023, International Conference on Optimization: Challenges and Applications, Alicante 2024, 4th International Conference on Variational Analysis and Optimization, Santiago 2025.

Получените резултати в дисертационния труд на Христина Белчева и публикациите, основани на тези резултати, многократно надхвърлят минималните национални изисквания (по чл. 2б, ал. 2 и 3 на ЗРАСРБ) и съответно на допълнителните изисквания на СУ “Св. Климент Охридски” за придобиване на образователна и научна степен “доктор” в професионално направление 4.5 Математика (Изследване на операциите).

Представени са автореферат на български език и автореферат на английски език. Авторефератите отразяват прецизно и изчерпателно резултатите, описани в дисертацията.

Част от забележките ми са отразени в досегашния текст на рецензията. Забелязват се много други неточности (например “липшицова камбановидна функция, която е диференцируема по Фреше **извън началото**” звучи странно, понякога преформулировките, започващи със “с други думи” са доста неточни и др.). Едно чисто естетическо и почиващо на моя вкус пожелание: според мен не е добър тон прекомерното използване на квантори (при това със запетая между всеки два), особено когато са смесени с обикновен текст.

Дисертацията съдържа оригинални резултати. Позоваването на чужди резултати е изчерпателно и коректно. Изложението е достъпно. Дисертационният труд съдържа научни резултати, които са оригинален принос към научната област и които могат да бъдат продължени в бъдещи изследвания.

В заключение, дисертационният труд на Христина Белчева представлява оригинално изследване в областта на вариационния анализ. Получените резултати са публикувани във видими списания. Потвърждавам, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ “Св. Климент Охридски” за придобиване от кандидата на образователната и научна степен “доктор” в професионално направление 4.5 Математика. В частност, кандидатката удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по процедурата научни трудове.

Въз основа на гореизложеното препоръчвам на научното жури да присъди на Христина Йорданова Белчева образователната и научна степен “доктор” в професионално направление 4.5 Математика (Изследване на операциите).

04.01.2026

(проф. дн Н.Рибарска)