Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Едновременно приближение с операторите на Бернщайн

Борислав Радков Драганов

Автореферат
на
Дисертация за присъждане на научна степен
доктор на науките в професионално направление 4.5 Математика

София • 2023

Декларация за оригиналност

Авторът декларира, че дисертацията съдържа автентични резултати, получени от него. Използването на резултатите от други учени е придружено със съответно цитиране.

Борислав Радков Драганов

С. Н. Бернщайн въвежда през 1912 г. апроксимационен оператор, който сега носи неговото име, за да даде просто доказателство на известната теорема на Вайерщрас, гласяща, че всяка непрекъсната функция върху краен затворен интервал може да се приближи равномерно чрез алгебрични полиноми [7].

Операторите, или както още се наричат, полиномите на Бернщайн се дефинират за $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ и $n \in \mathbb{N}_+$ чрез

$$B_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x), \quad p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1}$$

Имаме

$$\lim_{n\to\infty} B_n f(x) = f(x) \quad \text{равномерно върху} \quad [0,1],$$

тоест

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n f - f\| = 0, \quad f \in C[0,1],$$

където с $\| \circ \|$ сме означили нормата, дефинирана чрез (съществения) супремум върху интервала $[0,1]$.

Ясно е още, че

$$\|B_n f\| \le \|f\|, \quad f \in C[0,1],\ n \in \mathbb{N}_+.$$

Така $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ представлява силен апроксимационен процес върху пространството $C[0,1]$ (вж. [10, Definition 12.0.1]).

Множество оценки на супремум нормата на грешката $B_n f(x) - f(x)$ са вече установени. Някои от най-ранните са формулирани посредством т.нар. модули на гладкост (или непрекъснатост). Например, Поповичиу [49] (или вж. [44, Theorem 1.6.1]) показва, че

$$\|B_n f - f\| \le \frac{5}{4}\, \omega_1(f, n^{-1/2}).$$

Тук $\omega_1(f,t)$ е модулът на непрекъснатост на f, дефинран чрез

$$\omega_1(f,t) := \sup_{|x-y|\le t} |f(x) - f(y)|. \tag{2}$$

Тъй като $B_n f$ интерполира f в краищата на интервала, можем да очакваме, че той приближава функцията по-добре близо до тях. Това се оказва наистина така. Следната оценка е в сила за $f \in AC^1_{loc}(0,1)$, такава, че $\varphi^2 f'' \in L_\infty[0,1]$, където $\varphi(x) := \sqrt{x(1-x)}$ (вж. напр. [14, гл. 10, § 7] или [17, гл. 9])

$$\|B_n f - f\| \le \frac{c}{n}\,\|\varphi^2 f''\|, \quad n \in \mathbb{N}_+. \tag{3}$$

Тук и нататък с c означаваме абсолютни константи.

Тази оценка може да се обобщи за всеки $f \in C[0,1]$ и $n \in \mathbb{N}_+$ във вида

$$\|B_n f - f\| \le c\,\omega_\varphi^2(f, n^{-1/2}), \tag{4}$$

където $\omega_\varphi^2(f,t)$ е модулът на гладкост на Дитциан и Тотик от втори ред с променлива стъпка, подчинена на теглото $\varphi(x)$, в супремум нормата върху $[0,1]$. Той се дефинира чрез

$$\begin{aligned}\omega_\varphi^2(f,t) &\\ := \sup_{0<h\le t}\ \sup_{x\pm h\varphi(x)\in[0,1]} &|f(x+h\varphi(x)) - 2f(x) + f(x-h\varphi(x))|, \quad t>0.\end{aligned} \tag{5}$$

Адел и Сангюеса [4] доказават, че (4) е в сила с $c = 4$. Гавреа, Гонска, Палтаня и Тачев [29] подобряват константата до $c = 3$, а след това Палтаня [48, стр. 96] – до $c = 5/2$ (или вж. [9, p. 183]).

Оказва се, че (3) и (4) не мога да се подобрят. Обратната оценка на (4) е също вярна (вж. [41] и [53])

$$\|B_n f - f\| \ge c\,\omega_\varphi^2(f, n^{-1/2}), \quad n \ge n_0, \tag{6}$$

където $n_0 \in \mathbb{N}_+$ не зависи от f. По-рано Дитциан и Иванов [16, Theorem 8.1] доказват силно обратно неравенство със сумата на нормите на грешката при две стойности на реда на оператора.

Последното неравенство горе влече, че $B_n f$ не може да приближава f в супремум нормата върху $[0,1]$ с по-добър порядък от $1/n$, освен ако $B_n f$ съвпада f, т.е. f е алгебричен полином от степен, ненадвишаваща 1. Това явление е известно като насищане на апроксимационния процес (вж. [10, Definition 12.0.2] или [14, p. 336]). Така редицата от апроксимационни оператори $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ се насища, като порядъкът на насищане е n^{-1}. Този факт за първи път е отбелязан от Вороновская [54] (или вж. напр. [14, гл. 10, Theorem 3.1]). Тя доказва, че ако $f \in C^2[0,1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} n(B_n f(x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2}\, f''(x) \tag{7}$$

равномерно върху $[0,1]$.

Полиномите на Бернщайн притежават и друго свойство. Както установяват Колодовски [13], Вигерт [55] и Лоренц [43] (вж. напр. [14, гл. 10, Theorem 2.1] или [9, стр. 232]), те приближават не само функцията, но също и производните ѝ. По-точно, имаме

$$\lim_{n\to\infty} (B_n f)^{(s)}(x) = f^{(s)}(x) \quad \text{равномерно върху} \quad [0,1], \tag{8}$$

стига $f \in C^s[0,1]$. Това свойство се нарича едновременно приближение.

Основният предмет на настоящата дисертация са оценки на скоростта на това приближение. Доказваме прави и съответни силни обратни оценки на грешката. Обратните неравенства показват, че правите са точни и не могат да се подобрят. Оценките на грешката се установяват в нормата, породена от съществения супремум върху $[0,1]$ с тегла на Якоби, включително и случаят без тегло. Прилагаме тези резултати, за да характеризираме скоростта на приближение на итерирани булеви суми на B_n и две модификации на B_n, които представляват алгебрични полиноми с цели коефициенти. Накрая изследваме скоростта на сходимост в теоремата на Вороновская (7).

Едновременно приближение с тегло посредством полиномите на Бернщайн

Резултатът на Вороновская (7) показва, че диференциалният оператор, който описва скоростта на приближение на B_n (с точност до мултипликативна константа) е $Df(x) := \varphi^2(x) f''(x)$, където $\varphi(x) := \sqrt{x(1-x)}$. Количествена оценка на порядъка на приближение следва от (4)-(6):

$$\|B_n f - f\| \sim \omega_\varphi^2(f, n^{-1/2}), \quad n \ge n_0, \tag{9}$$

където $n_0 \in \mathbb{N}_+$ не зависи от $f \in C[0,1]$. Казваме, че $\Phi(f,t)$ и $\Psi(f,t)$ са еквивалентни и пишем $\Phi(f,t) \sim \Psi(f,t)$, ако съществува положителна константа c, такава, че $c^{-1}\Phi(f,t) \le \Psi(f,t) \le c\,\Phi(f,t)$ за всеки f и t, които разглеждаме.

Както посочихме по-рано в (8), производните на полиномите на Бернщайн на гладка функция приближават съответните производни на функцията. Лопез-Морено, Мартинез-Морено и Муньоз-Делгадо [42] и Флоатер [28] обобщават (7), като показват за $f \in C^{s+2}[0,1]$, че имаме

$$\lim_{n\to\infty} n\left((B_n f(x))^{(s)} - f^{(s)}(x)\right) = \frac{1}{2}(Df(x))^{(s)} \tag{10}$$

равномерно върху $[0,1]$. Следователно диференциалният оператор, който описва едновременното приближение чрез B_n е $(d/dx)^s D$. Резултати относно порядъка на сходимост в (10) са установени в [31, 32, 34].

Първият количествен резултат по отношение на едновременното приближение чрез B_n е установен от Поповичиу [50] (или вж. [9, стр. 232]). Той гласи:

$$\|(B_n f)^{(s)} - f^{(s)}\| \le \frac{3+2\sqrt{s}}{2}\,\omega_1\left(f^{(s)}, \frac{1}{\sqrt{n-s}}\right) + \frac{s(s-1)}{2n}\,\|f^{(s)}\|, \quad n > s.$$

Оттогава са доказани многобройни подобрения на тази оценка (вж. [9, част 4.6]).

Доколкото ми е известно, всички резултати, установени досега, с изключение на един (вж. Бележка 3.6 по-долу) използват класическите модули на гладкост от първи и втори ред с фиксирана стъпка. Оценките на грешката, които доказваме, използват модулите на гладкост на Дитциан и Тотик и отчитат факта, че приближението се подобрява близо до краищата на интервала. Освен това разглеждаме приближение в по-общи пространства с тегло. В допълнение доказваме съответни силни обратни оценки на грешката, които показват, че правите са точни. Поточкова оценка на грешката отгоре, която показва, че приближението се подобрява близо до краищата на интервала, е установена от Жианг [38] (или вж. [9, p. 237]). Тя касае само първата производна:

$$|(B_n f(x))' - f'(x)| \le \frac{13}{4}\,\omega_2\left(f', \frac{2\varphi(x)}{\sqrt{n-1}}\right) + \omega_1(f', n^{-1}).$$

Разглеждаме едновременно приближение чрез B_n с тегла на Якоби:

$$w(x) := w(\gamma_0,\gamma_1;x) := x^{\gamma_0}(1-x)^{\gamma_1}, \quad x \in [0,1], \tag{11}$$

където $\gamma_0, \gamma_1 \ge 0$.

В характеризацията на скоростта на приближение използваме K-функционала

$$K_s^D(f,t)_w := \inf_{g\in C^{s+2}[0,1]} \left\{\|w(f-g^{(s)})\| + t\|w(Dg)^{(s)}\|\right\}.$$

Доказваме следната права оценка на грешката за едновременното приближение с полиномите на Бернщайн в нормата, породена от съществения супремум с тегло w.

Теорема 3.3. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$ и $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в (11), като $0 \le \gamma_0, \gamma_1 < s$. Тогава за всяка функция $f \in C[0,1]$, такава, че $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ е в сила неравенството*

$$\|w(B_n f - f)^{(s)}\| \le c\, K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w.$$

Стойността на константата c не зависи от f и n.

Тази оценка може да се опрости. K-функционалът $K_s^D(f,t)_w$ се характеризира чрез по-прости. Нека

$$K_m(f,t)_w := \inf_{g \in AC_{loc}^{m-1}(0,1)} \left\{ \|w(f-g)\| + t\|wg^{(m)}\| \right\}$$

и

$$K_{m,\varphi}(f,t)_w := \inf_{g \in AC_{loc}^{m-1}(0,1)} \left\{ \|w(f-g)\| + t\|w\varphi^m g^{(m)}\| \right\}, \tag{12}$$

където $\varphi(x) := \sqrt{x(1-x)}$. В случая без тегло, $w = 1$, полагаме

$$K_m(f,t) := K_m(f,t)_1$$

и

$$K_{m,\varphi}(f,t) := K_{m,\varphi}(f,t)_1.$$

Както се показва в Теореми 4.4 и 4.5, ако $0 < \gamma_0, \gamma_1 < s$, то за всеки $wf \in L_\infty[0,1]$ и $0 < t \le 1$ са в сила съотношенията:

$$K_s^D(f,t)_w \sim \begin{cases} K_{2,\varphi}(f,t)_w + K_1(f,t)_w, & s = 1, \\ K_{2,\varphi}(f,t)_w + t\,\|wf\|, & s \ge 2, \end{cases} \tag{13}$$

а в случая $w = 1$ имаме:

$$K_s^D(f,t)_1 \sim \begin{cases} K_{2,\varphi}(f,t) + K_1(f,t), & s = 1, \\ K_{2,\varphi}(f,t) + K_1(f,t) + t\,\|f\|, & s \ge 2, \end{cases} \tag{14}$$

за всеки $f \in C[0,1]$ и $0 < t \leq 1$. Характеризацията на $K_s^D(f,t)_w$, в случаите когато един от степенните показатели γ е 0, а другият е положителен, представлява комбинация от (13) и (14). Твърдението в (13) при $s = 1$ всъщност е в сила за всеки $0 \leq \gamma_0, \gamma_1 < 1$.

Всеки от K-функционалите $K_1(f,t)_w$ и $K_{2,\varphi}(f,t^2)_w$ е еквивалентен на модул на гладкост. Модулите на гладкост са функционални характеристики, които са свързани с функциите по-непосредствено, отколкото K-функционалите, и са еквивалентни на тях. Вече срещнахме два такива модула – (2) и (5). За да разширим тяхната дефиниция, въвеждаме т.нар. крайни разлики.

Крайната разлика на $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ със стъпка напред $h > 0$ от ред $m \in \mathbb{N}_+$ се дефинира чрез

$$\overrightarrow{\Delta}_h^m f(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} f(x + (m-i)h), & x \in [0, 1 - mh], \\ 0, & x \in (1 - mh, 1]. \end{cases}$$

Подобно, крайните разлики със стъпка назад – чрез

$$\overleftarrow{\Delta}_h^m f(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} f(x - ih), & x \in [mh, 1], \\ 0, & x \in [0, mh). \end{cases}$$

Също ще използваме и симетричните крайни разлики, които се дефинират върху интервала $[0,1]$ чрез

$$\bar{\Delta}_h^m f(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} f\left(x + \left(\frac{m}{2} - i\right) h\right), & x \in \left[\frac{mh}{2}, 1 - \frac{mh}{2}\right], \\ 0, & \text{в противен случай}. \end{cases}$$

Класическият модул на гладкост на $f \in L_\infty[0,1]$ от ред m без тегло с фиксирана стъпка се дефинира за $t > 0$ чрез

$$\omega_m(f,t) := \sup_{0<h\leq t} \|\overrightarrow{\Delta}_h^m f\|.$$

Формата с тегло $\omega_m(f,t)_w$ се дефинира чрез

$$\omega_m(f,t)_w := \sup_{0<h\leq t} \|w \overrightarrow{\Delta}_h^m f\|_{[0,3/4]} + \sup_{0<h\leq t} \|w \overleftarrow{\Delta}_h^m f\|_{[1/4,1]}.$$

Горе $\|\circ\|_J$ обозначава нормата, породена от съществения супремум върху $J \subset \mathbb{R}$.

В случая $w = 1$ по-скоро използваме $\omega_m(f, t)$, т.е. полагаме

$$\omega_m(f,t)_1 := \omega_m(f,t).$$

Едно обобщение на класическите модули на гладкост, което е еквивалентно на K-функционалите $K_{m,\varphi}(f, t^m)$, се въвежда от Дитциан и Тотик [17, (2.1.2)]. В случая без тегло, $w = 1$, то се дефинира чрез

$$\omega_\varphi^m(f,t) := \sup_{0<h\le t} \|\bar{\Delta}_{h\varphi}^m f\|.$$

Формата на този модул на гладкост в пространства с тегло е по-сложна (вж. [17, Appendix B]):

$$\begin{aligned} \omega_\varphi^m(f,t)_w := \sup_{0<h\le t} \|w\bar{\Delta}_{h\varphi}^m f\|_{[m^2t^2,1-m^2t^2]} &+ \sup_{0<h\le m^2t^2} \|w\overrightarrow{\Delta}_h^m f\|_{[0,12m^2t^2]} \\ &+ \sup_{0<h\le m^2t^2} \|w\overleftarrow{\Delta}_h^m f\|_{[1-12m^2t^2,1]}, \end{aligned} \tag{15}$$

където $0 < t \le 1/(m\sqrt{2})$ за $\gamma_0, \gamma_1 > 0$.

Полагаме

$$\omega_\varphi^m(f,t)_1 := \omega_\varphi^m(f,t).$$

В сила са следните връзки между модулите на гладкост и K-функционалите (вж. [40], [17, гл. 2 и 6] или [14, гл. 6]):

$$K_m(f,t^m)_w \sim \omega_m(f,t)_w, \quad 0 < t \le 1, \tag{16}$$

и

$$K_{m,\varphi}(f,t^m)_w \sim \omega_\varphi^m(f,t)_w, \quad 0 < t \le t_0, \tag{17}$$

с някакво $t_0 > 0$, което не зависи от f.

Благодарение на тези съотношения Теорема 3.3 влече следните оценки на грешката от тип на Джексън.

Теорема 3.5. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$ и $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в* (11). *Тогава за всяка функция $f \in C[0,1]$, такава, че $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$,* *и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ са в сила неравенствата:*

$$\|w(B_nf-f)^{(s)}\| \leq c \begin{cases} \omega_\varphi^2(f',n^{-1/2})_w + \omega_1(f',n^{-1})_w, & s=1,\ 0 \leq \gamma_0,\gamma_1 < 1, \\ \omega_\varphi^2(f^{(s)},n^{-1/2}) + \omega_1(f^{(s)},n^{-1}) + \dfrac{1}{n}\,\|f^{(s)}\|, & s \geq 2,\ \gamma_0=\gamma_1=0, \\ \omega_\varphi^2(f^{(s)},n^{-1/2})_w + \dfrac{1}{n}\,\|wf^{(s)}\|, & s\geq 2,\ 0<\gamma_0,\gamma_1<s. \end{cases}$$

Стойността на константата c не зависи от f и n.

Въпреки че еквалентността между $K_{2,\varphi}(F,t^2)$ и $\omega_\varphi^2(F,t)$ е установена за достатъчно малки положителни t, правите неравенства горе са доказани за всяко $n \in \mathbb{N}_+$. В допълнение показваме, че областта от стойности на γ_0 и γ_1, в която се доказват твърденията на Теореми 3.3 и 3.5 не може да се разшири, без да се наложат специфични ограничения върху функциите.

Бележка 3.6. Жианг и Кси [39] (или [9, Theorem 4.57]) доказват поточкова оценка на грешката, която влече тази в Теорема 3.5 при $s \geq 2,\ \gamma_0 = \gamma_1 = 0$.

Правите оценки на грешката, формулирани по-горе, са точни – в сила са следните силни обратни неравенства.

Теорема 3.8. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$ и $w := w(\gamma_0,\gamma_1)$ е дефинирано в (11), като $0 \leq \gamma_0,\gamma_1 < s$. Тогава съществува $R \in \mathbb{N}_+$, такова, че за всяка функция $f \in C[0,1]$ с $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$ и всеки $k,n \in \mathbb{N}_+$ с $k \geq Rn$ е в сила неравенството*

$$K_s^D(f^{(s)},n^{-1})_w \leq c\,\frac{k}{n}\left(\|w(B_nf-f)^{(s)}\| + \|w(B_kf-f)^{(s)}\|\right).$$

В частност,

$$K_s^D(f^{(s)},n^{-1})_w \leq c\,\left(\|w(B_nf-f)^{(s)}\| + \|w(B_{Rn}f-f)^{(s)}\|\right).$$

Стойността на константата c не зависи от f, n и k.

Формулирахме Теореми 3.3, 3.5 и 3.8 при минимални изисквания върху f. Да отбележим все пак, че имаме апроксимация тогава и само тогава, когато $\lim_{t\to 0}\omega_\varphi^2(f^{(s)},t)_w = 0$ и, в допълнение ако $s=1$, $0 \leq \gamma_0,\gamma_1 < 1$

или $s \geq 2$, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ – $\lim_{t\to 0} \omega_1(f^{(s)}, t)_w = 0$. В случая $w = 1$ имаме $\lim_{t\to 0} \omega_1(g, t) = 0$ тогава и само тогава, когато $g \in C[0, 1]$ (считаме две функции за идентични, ако те съвпадат п.н. относно лебеговата мярка). Аналогично имаме $\lim_{t\to 0} \omega_\varphi^2(g, t) = 0$ тогава и само тогава, когато $g \in C[0, 1]$ (вж. [17, p. 37]). Ако $\gamma_0 > 0$, то трябва $g(x)$ да е непрекъсната върху $(0, 1)$ и $\lim_{x\to 0} x^{\gamma_0} g(x) = 0$; ако $\gamma_1 > 0$, то трябва $\lim_{x\to 1}(1 - x)^{\gamma_1} g(x) = 0$ (вж. напр. [27, p. 94]).

За да докажем Теорема 3.3, използваме един стандартен метод, който се основава на ограниченост и неравенство от тип на Джексън за апроксимационния оператор (вж. напр. [16, Theorem 3.4]), а за да докажем Теорема 3.8, прилагаме метода, разработен от Дитциан и Иванов [16, Theorem 3.2], който е изключително ефективен в такъв род задачи. Той също се основава на няколко неравенства, които касаят ограничеността на оператора и скоростта му на приближение за гладки функции в няколко различни отношения. Ще формулираме тези неравенства накратко. Навсякъде в тях c означава константа, чиято стойност не зависи от f и n.

Първата основна оценка е относно ограничеността на $(B_n f)^{(s)}$ в L_∞-нормата с тегло.

Твърдение 3.14. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$ и $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в (11), като $0 \leq \gamma_0, \gamma_1 < s$. Тогава за всяка функция $f \in C[0, 1]$, такава, че $f \in AC_{loc}^{s-1}(0, 1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0, 1]$, и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ е в сила неравенството*

$$\|w(B_n f)^{(s)}\| \leq c\, \|wf^{(s)}\|.$$

Следват неравенства от тип на Джексън и на Вороновская.

Твърдение 3.17. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$ и $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в (11). Полагаме $s' := \max\{2, s\}$. Ако $0 < \gamma_0, \gamma_1 \leq s$, то за всяка функция $f \in C[0, 1]$, такава, че $f \in AC_{loc}^{s+1}(0, 1)$ и $wf^{(s')}, w\varphi^2 f^{(s+2)} \in L_\infty[0, 1]$, и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ е в сила неравенството*

$$\|w(B_n f - f)^{(s)}\| \leq \frac{c}{n} \left(\|wf^{(s')}\| + \|w\varphi^2 f^{(s+2)}\| \right).$$

Ако $\gamma_0\gamma_1 = 0$ и все така $0 \leq \gamma_0, \gamma_1 < s$, то

$$\|w(B_n f - f)^{(s)}\| \leq \frac{c}{n} \left(\|wf^{(s')}\| + \|wf^{(s+1)}\| + \|w\varphi^2 f^{(s+2)}\| \right),$$

стига също $wf^{(s+1)} \in L_\infty[0, 1]$.

Твърдение 3.20. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$ и $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в (11). Полагаме $s'' := \max\{3, s\}$. Ако $0 < \gamma_0, \gamma_1 \le s+1$, то за всяка функция $f \in C[0,1]$, такава, че $f \in AC_{loc}^{s+3}(0,1)$ и $wf^{(s'')}, w\varphi^4 f^{(s+4)} \in L_\infty[0,1]$, и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ е в сила неравенството*

$$\left\| w\left(B_n f - f - \frac{1}{2n}\, Df\right)^{(s)} \right\| \le \frac{c}{n^2}\left(\|wf^{(s'')}\| + \|w\varphi^4 f^{(s+4)}\| \right).$$

Ако $\gamma_0\gamma_1 = 0$ и все така $0 \le \gamma_0, \gamma_1 \le s+1$, то

$$\left\| w\left(B_n f - f - \frac{1}{2n}\, Df\right)^{(s)} \right\| \le \frac{c}{n^2}\left(\|wf^{(s'')}\| + \|wf^{(s+2)}\| + \|w\varphi^4 f^{(s+4)}\| \right)$$

стига още $wf^{(s+2)} \in L_\infty[0,1]$.

Освен това използваме и следните неравенства от тип на Бернщайн.

Твърдение 3.23. *Нека $\ell, s \in \mathbb{N}_+$ и $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в (11), като $0 \le \gamma_0, \gamma_1 < s$. Тогава за всяка функция $f \in C[0,1]$, такава, че $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ са в сила неравенствата:*

(а) $\|w\varphi^{2\ell}(B_n f)^{(2\ell+s)}\| \le c\, n^\ell \|wf^{(s)}\|$;

(б) $\|w(B_n f)^{(\ell+s)}\| \le c\, n^\ell \|wf^{(s)}\|$.

За да установим Теореми 3.3 и 3.8, извеждаме от горните неравенства следните в термините на диференциалния оператор D (да припомним, че $Df(x) := x(1-x)f''(x)$):

(а) $\|w(B_n f - f)^{(s)}\| \le \dfrac{c}{n}\, \|w(Df)^{(s)}\|, \quad f \in C^{s+2}[0,1]$;

(б) $\left\| w\left(B_n f - f - \dfrac{1}{2n}\, Df\right)^{(s)} \right\| \le \dfrac{c}{n^2}\, \|w(D^2 f)^{(s)}\|, \quad f \in C^{s+4}[0,1]$;

(в) $\|w(DB_n f)^{(s)}\| \le cn\|wf^{(s)}\|, \quad f \in C[0,1],\ f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$, $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$;

(г) $\|w(D^2 B_n f)^{(s)}\| \le c\, n\, \|w(Df)^{(s)}\|, \quad f \in C^{s+2}[0,1]$.

Все така предполагаме, че $0 \leq \gamma_0, \gamma_1 < s$ за $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$, дефинирано в (11). Тогава Теореми 3.3 и 3.8 следват от [16, Theorems 3.2, 3.4].

Установяваме и следното подобрение на обратното неравенство в Теорема 3.8 за производни от по-нисък ред и при допълнително стесняване на областта от стойности на степенните покзатели на теглото, но все така включващи случая $w = 1$.

Теорема 3.26. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$, като $s \leq 6$, и нека $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в (11), като $\gamma_0, \gamma_1 \in [0, s/2]$. Тогава съществува $n_0 \in \mathbb{N}_+$, такова, че за всяка функция $f \in C[0,1]$ с $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ с $n \geq n_0$ е в сила неравенството*

$$K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w \leq c\,\|w(B_n f - f)^{(s)}\|.$$

За да докажем това обратно нeравество, отново прилагаме метода, разработен от Дитциан и Иванов [16], като установяваме уточнения на Твърдения 3.14 и 3.23, които показват, че повишаването на броя на итерации на B_n изглажда образа на функцията. По-точно, доказваме, че ако $1 \leq s \leq 6$, $m \geq 2$ и $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в (11) с $\gamma_0, \gamma_1 \in [0, s/2]$, то за всеки $f \in C^{s+2}[0,1]$ и $n \in \mathbb{N}_+$ с $n \geq m+s+2$ е в сила неравенството

$$\|w(D^2 B_n^m f)^{(s)}\| \leq c' \sqrt{\frac{\log m}{m}}\, n \|w(Df)^{(s)}\|,$$

където константата c' не зависи от f, n и m.

Теорема 3.26 е в сила и за $s = 0$ (вж. [41, 53]). Твърдението ѝ при $s = 1$ и $w = 1$ е установено вече в [36].

От Теореми 3.3 и 3.26 следва, че супремум нормата с тегло на грешката на едновременното приближение чрез оператора на Бернщайн е еквивалентна на K-функциоала $K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w$. В сила е следната характеризация на скоростта на едновременното приближение с тегло за оператора на Бернщайн.

Теорема 3.30. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$, като $s \leq 6$, и нека $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в (11), като $\gamma_0, \gamma_1 \in [0, s/2]$. Тогава съществува $n_0 \in \mathbb{N}_+$, такова, че за всяка функция $f \in C[0,1]$ с $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ с $n \geq n_0$ е в сила съотношението*

$$\|w(B_n f - f)^{(s)}\| \sim K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w.$$

Аналогично Теореми 3.5 и 3.30 заедно с (13)-(14) влекат

Теорема 3.31. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$, като $s \le 6$, и $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в (11). Тогава съществува $n_0 \in \mathbb{N}_+$, такова, че за всяка функция $f \in C[0,1]$ с $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ с $n \ge n_0$ са в сила съотношенията:*

$$\|w(B_n f - f)'\| \sim \omega_\varphi^2(f', n^{-1/2})_w + \omega_1(f', n^{-1})_w, \quad s = 1,\ 0 \le \gamma_0, \gamma_1 \le 1/2,$$

$$\|(B_n f - f)^{(s)}\| \sim \omega_\varphi^2(f^{(s)}, n^{-1/2}) + \omega_1(f^{(s)}, n^{-1}) + n^{-1}\|f^{(s)}\|,$$
$$2 \le s \le 6,\ \gamma_0 = \gamma_1 = 0,$$

$$\|w(B_n f - f)^{(s)}\| \sim \omega_\varphi^2(f^{(s)}, n^{-1/2})_w + n^{-1}\|wf^{(s)}\|,$$
$$2 \le s \le 6,\ 0 < \gamma_0, \gamma_1 \le s/2.$$

За сравнение характеризацията в случая $s = 0$ има вида (вж. (9))

$$\|B_n f - f\| \sim \omega_\varphi^2(f, n^{-1/2}).$$

Резултати относно едновременното приближение чрез оператора на Бернщайн могат лесно да се прехвърлят към оператора на Канторович. Операторите или полиномите на Канторович се дефинират за $f \in L[0,1]$ и $x \in [0,1]$ чрез

$$K_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} (n+1) \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)\, dt\, p_{n,k}(x),\ p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Те се свързват с полиномите на Бернщайн посредством

$$K_n f(x) = (B_{n+1} F(x))', \quad F(x) := \int_0^x f(t)\, dt. \tag{18}$$

По-общо полагаме за $f \in L[0,1]$ и $m \in \mathbb{N}_+$ (вж. [3])

$$K_n^{\langle m \rangle} f(x) := (B_{n+m} F_m(x))^{(m)}, \tag{19}$$

където

$$F_m(x) := \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x (x-t)^{m-1} f(t)\, dt.$$

Операторът $K_n^{\langle m \rangle}$ се нарича обобщен оператор на Канторович от ред m. Той или негови аналози се изучават в [11, 12, 31, 32, 34, 37].

Всички изложени по-горе резултати за B_n могат да бъдат прехвърлени към $K_n^{\langle m\rangle}$. В частност, в сила е следната характеризация на едновременното приближение чрез $K_n^{\langle m\rangle}$.

Теорема 3.41 *Нека $m \in \mathbb{N}_+$, $s \in \mathbb{N}_0$ и $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано чрез (11), като $0 \le \gamma_0, \gamma_1 < s + m$. Тогава за всяка функция $f \in L_\infty[0,1]$, такава, че $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ е в сила неравенството*

$$\|w(K_n^{\langle m\rangle} f - f)^{(s)}\| \le c\, K_{s+m}^D(f^{(s)}, n^{-1})_w.$$

Обратно, съществува $R \in \mathbb{N}_+$, такова, че за всяка функция $f \in L_\infty[0,1]$ с $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, и всеки $\ell, n \in \mathbb{N}_+$ с $\ell \ge Rn$ е в сила неравенството

$$K_{s+m}^D(f^{(s)}, n^{-1})_w \le c \left(\frac{\ell}{n}\right)^r \left(\|w(K_n^{\langle m\rangle} f - f)^{(s)}\| + \|w(K_\ell^{\langle m\rangle} f - f)^{(s)}\|\right).$$

В частност,

$$K_{s+m}^D(f^{(s)}, n^{-r})_w \le c \left(\|w(K_n^{\langle m\rangle} f - f)^{(s)}\| + \|w(K_{Rn}^{\langle m\rangle} f - f)^{(s)}\|\right).$$

Стойността на константата c не зависи от f, n и ℓ.

Във формулировката на последната теорема предположението $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ се пренебрегва при $s = 0$.

Благодарение на Теорема 3.30 получаваме следната характеризация на скоростта на приближение чрез оператора на Канторович.

Теорема 3.44. *Нека $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в (11), като $\gamma_0, \gamma_1 \in [0, 1/2]$. Тогава съществува $n_0 \in \mathbb{N}_+$, такова, че за всяка функция $f \in L[0,1]$ с $wf \in L_\infty[0,1]$ и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ с $n \ge n_0$ е в сила съотношението*

$$\|w(K_n f - f)\| \sim K_1^D(f, n^{-1})_w.$$

Правата оценка на грешката на оператора на Канторович в случая $w = 1$ и $s = 0$ е установена от Беренс и Ксю [6, Theorem 6]. Там се доказва и слабо обратно неравенство. Съответното силно обратно неравенство и характерзацията на K-функционала чрез модула на гладкост на Дитциан и Тотик са доказани от Гонска и Жу [36]. Махе [46] доказва право неравенство за грешката на оператора на Канторович и слабо обратно неравенство в случая $w = \varphi^{2\ell}$ и $s = 2\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_+$. Всички споменати резултати са установени в $L_p[0,1]$, $1 \le p \le \infty$.

Едновременно приближение с тегло посредством итерирани булеви суми на операторите на Бернщайн

Един начин да се повиши скоростта на приближение на оператора на Бернщайн B_n е да се образуват неговите итерирани булеви суми $\mathcal{B}_{r,n} : C[0,1] \to C[0,1]$, дефинирани чрез

$$\mathcal{B}_{r,n} := I - (I - B_n)^r,$$

където I е идентитетът и $r \in \mathbb{N}_+$. В [47] се показва, че порядъкът им на насищане е n^{-r}.

Важна и елегантна характеризация на грешката на $\mathcal{B}_{r,n}$ е дадена от Гонска и Жу [35]. Те установяват следната оценка на грешката отгоре

$$\|\mathcal{B}_{r,n} f - f\| \le c \left(\omega_\varphi^{2r}(f, n^{-1/2}) + \frac{1}{n^r} \|f\| \right), \quad f \in C[0,1], \ n \in \mathbb{N}_+. \tag{20}$$

В същата публикация се доказва и обратно неравенство от тип на Стечкин. Това позволява да се определи тривиланият клас на оператора, както и да се характеризира грешката в термините на O голямо.

Тъй като B_n възпроизвежда алгебричните полиноми от степен, ненадвишаваща 1, като заместим в (20) f с $f - p_1$, където p_1 е полиномът от първа степен на най-добро приближение на f в равномерната норма върху $[0,1]$, непосредствено достигаме до оценката

$$\|\mathcal{B}_{r,n} f - f\| \le c \left(\omega_\varphi^{2r}(f, n^{-1/2}) + \frac{1}{n^r} E_1(f) \right), \quad f \in C[0,1], \ n \in \mathbb{N}_+, \tag{21}$$

където $E_1(f)$ обозначава най-доброто приближение на f с полиноми от първа степен в равномерната норма върху $[0,1]$.

Динг и Као [15] характеризират грешката на обобщението на $\mathcal{B}_{r,n}$ за функции на няколко променливи върху стандартния симплекс. В едномерния случай правото неравенство, което доказват, приема вида

$$\|\mathcal{B}_{r,n} f - f\| \le c\, K_{r,0}^D(f, n^{-r}), \quad f \in C[0,1], \ n \in \mathbb{N}_+, \tag{22}$$

където

$$K_{r,0}^D(f,t) := \inf_{g \in C^{2r}[0,1]} \{\|f - g\| + t\|D^r g\|\}.$$

Да припомним, $Dg := \varphi^2 g''$ и $\varphi(x) := \sqrt{x(1-x)}$.

Те също доказват силно обратно неравенство от тип D според терминологията, въведена в [16], т.е.

$$K_{r,0}^D(f, n^{-r}) \leq c \max_{k \geq n} \|\mathcal{B}_{r,k} f - f\|, \quad f \in C[0,1],\ n \in \mathbb{N}_+.$$

Все пак, както показваме,

$$K_{r,0}^D(f,t) \sim K_{2r,\varphi}(f,t) + tE_1(f), \quad 0 < t \leq 1.$$

Като вземем предвид (17), виждаме, че функционалните характеристики в дясната страна на (21) и (22) са еквивалентни.

Също така установяваме, че

$$K_{r,0}^D(f, n^{-r}) \sim \omega_\varphi^{2r}(f, n^{-1/2}) + \omega_\varphi^2(f, n^{-r/2}), \quad f \in C[0,1],\ n \geq r^2.$$

Когато приложим това съотношение в (22), достигаме до правата оценка

$$\|\mathcal{B}_{r,n} f - f\| \leq c \left(\omega_\varphi^{2r}(f, n^{-1/2}) + \omega_\varphi^2(f, n^{-r/2})\right), \quad f \in C[0,1],\ n \geq r^2.$$

Показваме, че резултати относно едновременното приближение с B_n лесно влекат (20). В допълнение доказваме следното силно обратно неравенство. То подобрява получените по-рано.

Теорема 4.2. *Нека $r \in \mathbb{N}_+$. Тогава съществува $R \in \mathbb{N}_+$, такова, че за всеки $f \in C[0,1]$ и $k, n \in \mathbb{N}_+$ с $k \geq Rn$ е в сила неравенството*

$$K_{r,0}^D(f, n^{-r}) \leq c \left(\frac{k}{n}\right)^r \left(\|\mathcal{B}_{r,n} f - f\| + \|\mathcal{B}_{r,k} f - f\|\right).$$

В частност,

$$K_{r,0}^D(f, n^{-r}) \leq c \left(\|\mathcal{B}_{r,n} f - f\| + \|\mathcal{B}_{r,Rn} f - f\|\right).$$

Стойността на константата c не зависи от f, n и k.

За да докажем тази теорема, прилагаме [16, Theorem 3.2]. За тази цел установяваме следните неравенства от тип на Вороновская и на Бернщайн:

(a) $$\left\|\mathcal{B}_{r,n} g - g - \frac{(-1)^{r-1}}{(2n)^r} D^r g\right\| \leq \frac{c}{n^{r+1}} \|D^{r+1} g\|, \quad g \in C^{2r+2}[0,1];$$

(б) $\|D^r\mathcal{B}_{r,n}f\| \le c\,n^r\|f\|, \quad f\in C[0,1]$;

(в) $\|D^{r+1}\mathcal{B}_{r,n}g\| \le c\,n\|D^r g\|, \quad g\in C^{2r}[0,1]$.

Характеризираме грешката на едновременното приближение чрез $\mathcal{B}_{r,n}$ с тегло посредством K-функционала

$$K^D_{r,s}(f,t)_w := \inf_{g\in C^{2r+s}[0,1]}\left\{\|w(f-g^{(s)})\| + t\|w(D^r g)^{(s)}\|\right\}.$$

Установяваме следната оценка отгоре за този апроксимационен процес.

Теорема 4.3. *Нека $r,s\in\mathbb{N}_+$ и $w:=w(\gamma_0,\gamma_1)$ е дефинирано в (11), като $0\le\gamma_0,\gamma_1<s$. Тогава за всяка функция $f\in C[0,1]$, такава, че $f\in AC^{s-1}_{loc}(0,1)$ и $wf^{(s)}\in L_\infty[0,1]$, и всяко $n\in\mathbb{N}_+$ е в сила неравенството*

$$\|w(\mathcal{B}_{r,n}f-f)^{(s)}\| \le c\,K^D_{r,s}(f^{(s)},n^{-r})_w.$$

Тази оценка може да се опрости. Характеризираме сложния K-функционал $K^D_{r,s}(f,t)_w$ чрез по-простите $K_{2r,\varphi}(f,t)_w$ и $K_m(f,t)_w$.

Теорема 4.4. *Нека $r,s\in\mathbb{N}_+$ и $w:=w(\gamma_0,\gamma_1)$ е дефинирано чрез (11), като $0<\gamma_0,\gamma_1<s$. Тогава за всеки $wf\in L_\infty[0,1]$ и $0<t\le 1$ са в сила съотношенията*

$$K^D_{r,s}(f,t)_w \sim \begin{cases} K_{2r,\varphi}(f,t)_w + K_1(f,t)_w, & s=1,\\[2ex] K_{2r,\varphi}(f,t)_w + t\,\|wf\|, & s\ge 2.\end{cases}$$

Аналога на този резултат при $w=1$ има различен вид.

Теорема 4.5. *Нека $r,s\in\mathbb{N}_+$. Тогава за всеки $f\in C[0,1]$ и $0<t\le 1$ са в сила съотношенията*

$$K^D_{r,s}(f,t)_1 \sim \begin{cases} K_{2r,\varphi}(f,t) + K_r(f,t) + K_1(f,t), & s=1,\\[2ex] K_{2r,\varphi}(f,t) + K_r(f,t) + t\,\|f\|, & s\ge 2.\end{cases}$$

По-нататък посредством (16) и (17) получаваме следните оценки от тип на Джексън.

Теорема 4.7. *Нека $r, s \in \mathbb{N}_+$ и $w = w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано в* (11), *като* $0 < \gamma_0, \gamma_1 < s$. *Тогава за всяка функция $f \in C[0,1]$, такава, че $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, и всяко $n \in \mathbb{N}_+$ са в сила неравенствата:*

$$\|w(\mathcal{B}_{r,n}f - f)^{(s)}\| \le c \begin{cases} \omega_\varphi^{2r}(f', n^{-1/2})_w + \omega_1(f', n^{-r})_w, & s = 1, \\[2ex] \omega_\varphi^{2r}(f^{(s)}, n^{-1/2})_w + \dfrac{1}{n^r}\,\|wf^{(s)}\|, & s \ge 2. \end{cases}$$

Теорема 4.8. *Нека $r, s \in \mathbb{N}_+$. Тогава за всеки $f \in C^s[0,1]$ и $n \in \mathbb{N}_+$ са в сила неравенствата:*

$$\|(\mathcal{B}_{r,n}f - f)^{(s)}\| \le c \begin{cases} \omega_\varphi^{2r}(f', n^{-1/2}) + \omega_r(f', n^{-1}) + \omega_1(f', n^{-r}), & s = 1, \\[2ex] \omega_\varphi^{2r}(f^{(s)}, n^{-1/2}) + \omega_r(f^{(s)}, n^{-1}) + \dfrac{1}{n^r}\,\|f^{(s)}\|, & s \ge 2. \end{cases}$$

Тези оценки отгоре са точни. Установяваме следното силно обратно неравенство, което съответства на правото в Теорема 4.3.

Теорема 4.10. *Нека $r, s \in \mathbb{N}_+$ и $w := w(\gamma_0, \gamma_1)$ е дефинирано чрез* (11), *като $0 \le \gamma_0, \gamma_1 < s$. Тогава съществува $R \in \mathbb{N}_+$, такова, че за всяка функция $f \in C[0,1]$ с $f \in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, и всеки $k, n \in \mathbb{N}_+$ с $k \ge Rn$ е в сила неравенството*

$$K_{r,s}(f^{(s)}, n^{-r})_w \le c \left(\frac{k}{n}\right)^r \left(\|w(\mathcal{B}_{r,n}f - f)^{(s)}\| + \|w(\mathcal{B}_{r,k}f - f)^{(s)}\|\right).$$

В частност,

$$K_{r,s}(f^{(s)}, n^{-r})_w \le c \left(\|w(\mathcal{B}_{r,n}f - f)^{(s)}\| + \|w(\mathcal{B}_{r,Rn}f - f)^{(s)}\|\right).$$

Стойността на константата c не зависи от f, n и k.

Доказателството на Теореми 4.3 и 4.10 се основава на обобщението на Твърдения 3.14, 3.17, 3.20 и 3.23 до $\mathcal{B}_{r,n}$. Така установяваме:

(а) $\|w(\mathcal{B}_{r,n}f - f)^{(s)}\| \le \dfrac{c}{n^r}\,\|w(D^r f)^{(s)}\|, \quad f \in C^{2r+s}[0,1];$

(б) $\left\|w\left(\mathcal{B}_{r,n}f - f - \dfrac{(-1)^{r-1}}{(2n)^r}\,D^r f\right)^{(s)}\right\| \le \dfrac{c}{n^{r+1}}\,\|w(D^{r+1}f)^{(s)}\|,$
$f \in C^{2r+s+2}[0,1];$

(в) $\|w(D^r\mathcal{B}_{r,n}f)^{(s)}\| \le c\,n^r\|wf^{(s)}\|, \quad f\in C[0,1],\ f\in AC_{loc}^{s-1}(0,1),$
$wf^{(s)}\in L_\infty[0,1]$;

(г) $\|w(D^{r+1}\mathcal{B}_{r,n}f)^{(s)}\| \le c\,n\,\|w(D^rf)^{(s)}\|, \quad f\in C^{2r+s}[0,1].$

Все така предполагаме, че $0\le\gamma_0,\gamma_1<s$ за $w:=w(\gamma_0,\gamma_1)$, дефинирано в (11). Тогава Теореми 4.3 и 4.10 следват от [16, Theorems 3.2, 3.4].

Аналогично на едновременното приближение чрез оператора на Канторович от Теореми 4.3 и 4.10 полуаваме следния резултат относно итерираните булеви суми на $K_n^{\langle m\rangle}$ от (19)

$$\mathcal{K}_{r,n}^{\langle m\rangle} := I-(I-K_n^{\langle m\rangle})^r.$$

Теорема 4.25 *Нека $m,r\in\mathbb{N}_+$, $s\in\mathbb{N}_0$ и $w:=w(\gamma_0,\gamma_1)$ е дефинирано в (11), като $0\le\gamma_0,\gamma_1<s+m$. Тогава за всяка функция $f\in L_\infty[0,1]$, такава, че $f\in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)}\in L_\infty[0,1]$, и всяко $n\in\mathbb{N}_+$ е в сила неравенството*

$$\|w(\mathcal{K}_{r,n}^{\langle m\rangle}f-f)^{(s)}\| \le c\,K_{r,s+m}^{D}(f^{(s)},n^{-r})_w.$$

Обратно, съществува $R\in\mathbb{N}_+$, такова, че за всяка функция $f\in L[0,1]$ с $f\in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ и $wf^{(s)}\in L_\infty[0,1]$, и всеки $\ell,n\in\mathbb{N}_+$ с $\ell\ge Rn$ е в сила неравенството

$$K_{r,s+m}^{D}(f^{(s)},n^{-r})_w \le c\left(\frac{k}{n}\right)^r\left(\|w(\mathcal{K}_{r,n}^{\langle m\rangle}f-f)^{(s)}\|+\|w(\mathcal{K}_{r,\ell}^{\langle m\rangle}f-f)^{(s)}\|\right).$$

В частност,

$$K_{r,s+m}^{D}(f^{(s)},n^{-r})_w \le c\left(\|w(\mathcal{K}_{r,n}^{\langle m\rangle}f-f)^{(s)}\|+\|w(\mathcal{K}_{r,Rn}^{\langle m\rangle}f-f)^{(s)}\|\right).$$

Стойността на константата c не зависи от f, n и ℓ.

Тук предположението $f\in AC_{loc}^{s-1}(0,1)$ отпада при $s=0$.

Едновременно приближение с полиноми на Бернщайн с цели коефициенти

Бернщайн [1] поставя задачата да се определи до каква степен изискването коефициентите на алгебричните полиноми да са цели числа влияе на порядъка на най-доброто приближение с алгебрични полиноми в равномерната норма. Канторович [2] (или напр. [45, гл. 2, Theorem 4.1]) решава тази задача, като прави следната модификация на B_n

$$\widetilde{B}_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \right] x^k (1-x)^{n-k}.$$

Тук $[\alpha]$ означава най-голямото цяло число, което е по-малко или равно на реалното число α. Л. Канторович показва, че, ако $f \in C[0,1]$ е такава, че $f(0), f(1) \in \mathbb{Z}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{B}_n(f) - f\| = 0.$$

Ясно е, че условията $f(0), f(1) \in \mathbb{Z}$ са още и необходими, за да имаме съответно $\lim_{n\to\infty} \widetilde{B}_n(f)(0) = f(0)$ и $\lim_{n\to\infty} \widetilde{B}_n(f)(1) = f(1)$.

Като следваме Л. Канторович и приложим (4), получаваме оценка отгоре на грешката на $\widetilde{B}_n$ за $f \in C[0,1]$, такава, че $f(0), f(1) \in \mathbb{Z}$. При $x \in [0,1]$ и $n \in \mathbb{N}_+$ имаме

$$|\widetilde{B}_n(f)(x) - f(x)| \le c\,\omega_\varphi^2(f, n^{-1/2}) + \frac{1}{n}. \tag{23}$$

Показваме, че едновременното приближение чрез $\widetilde{B}_n(f)$ удовлетворява подобна оценка. Преди да я формулираме, нека отбележим, че друга целочислена модификация на $B_n f$ притежава дори по-добри свойства в това отношение. В нея вместо долна цяла част $[\alpha]$ използваме най-близкото цяло число $\langle\alpha\rangle$ до реалното число α. По-точно, ако $\alpha \in \mathbb{R}$ не е средно-аритметичното на две последователни цели числа, полагаме $\langle\alpha\rangle$ да бъде цялото число, което реализира $\min_{m\in\mathbb{Z}} |\alpha - m|$. Когато α е точно по средата между две последователни цели числа, можем да дефинираме $\langle\alpha\rangle$ като кое да е от тях дори без да следваме определено правило. Резултатите, които доказваме, са валидни независимо от нашия избор в този случай.

Означаваме тази целочислена модифилация на полиномите на Бернщайн чрез $\widehat{B}_n(f)$—полагаме

$$\widehat{B}_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \left\langle f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \right\rangle x^k (1-x)^{n-k}$$

за $f \in C[0,1]$ и $x \in [0,1]$.

Подобно на (23) имаме

$$\|\widehat{B}_n(f)-f\| \le c\,\omega_\varphi^2(f,n^{-1/2})+\frac{1}{2n} \tag{24}$$

за всяка функция $f\in C[0,1]$, такава, че $f(0),f(1)\in\mathbb{Z}$, и всяко $n\in\mathbb{N}_+$.

Като комбинираме (23) и (24) с (9), достигаме до характеризациите:

$$\begin{aligned} c^{-1}\left(\omega_\varphi^2(f,n^{-1/2})+\frac{1}{n}\right) &\le \|\widetilde{B}_n(f)-f\|+\frac{1}{n}\\ &\le c\left(\omega_\varphi^2(f,n^{-1/2})+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} c^{-1}\left(\omega_\varphi^2(f,n^{-1/2})+\frac{1}{n}\right) &\le \|\widehat{B}_n(f)-f\|+\frac{1}{n}\\ &\le c\left(\omega_\varphi^2(f,n^{-1/2})+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

в сила за всяка функция $f\in C[0,1]$, такава, че $f(0),f(1)\in\mathbb{Z}$ и всяко $n\ge n_0$, където n_0 не зависи от f.

Следователно, ако $0<\alpha\le 1$, то

$$\|\widetilde{B}_n(f)-f\|=O(n^{-\alpha}) \quad\Longleftrightarrow\quad \omega_\varphi^2(f,h)=O(h^{2\alpha}) \tag{25}$$

и

$$\|\widehat{B}_n(f)-f\|=O(n^{-\alpha}) \quad\Longleftrightarrow\quad \omega_\varphi^2(f,h)=O(h^{2\alpha}), \tag{26}$$

стига $f(0),f(1)\in\mathbb{Z}$; предполагаме $f\in C[0,1]$.

Освен това доказваме, че апроксимационните процеси, генерирани от $\widetilde{B}_n$ и $\widehat{B}_n$, в равномерната норма върху $[0,1]$ се насищат с порядък на насищане $1/n$ и ако $\|\widetilde{B}_n(f)-f\|=o(1/n)$ или $\|\widehat{B}_n(f)-f\|=o(1/n)$, то подобно на операторите на Бернщайн имаме $\widetilde{B}_n(f)=\widehat{B}_n(f)=f$ и f е полином от вида $px+q$, където $p,q\in\mathbb{Z}$. Както следва от (25)-(26), техният клас на насищане се състои от функциите $f\in AC[0,1]$, за които $f(0),f(1)\in\mathbb{Z}$, $f'\in AC_{loc}(0,1)$ и $\varphi^2f''\in L_\infty[0,1]$.

Нека изрично отбележим, че за всяко фиксирано $n\ge 2$ операторът $\widetilde{B}_n : C[0,1]\to C[0,1]$ не е ограничен в смисъл, че *не* съществува константа M, такава, че

$$\|\widetilde{B}_nf\|\le M\,\|f\| \quad \forall\, f\in C[0,1].$$

Затова не може да изпуснем величината $1/n$ отдясно на оценката (23), или да я заместим с $c\|f\|\,n^{-1}$. Този оператор не е и непрекъснат. От друга страна, $\widehat{B}_n$ е ограничен, без да е непрекъснат. И двата оператора не са линейни. За да наблегнем на това, пишем $\widetilde{B}_n(f)$ и $\widehat{B}_n(f)$, а не $\widetilde{B}_n f$ и $\widehat{B}_n f$.

Установяваме, че целочислените форми на полиномите на Бернщайн $\widetilde{B}_n$ и $\widehat{B}_n$ притежават свойството на едновременното приближение и доказваме оценка отгоре на грешката.

Теорема 5.1. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$. Нека $f \in C^s[0,1]$ е такава, че*

$$f(0), f(1), f'(0), f'(1) \in \mathbb{Z} \text{ и } f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0,\ i = 2, \dots, s.$$

Нека още съществува $n_0 \in \mathbb{N}_+$, $n_0 \geq s$, такова, че

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{n}\right) &\geq f(0) + \frac{k}{n}\, f'(0), \quad k = 1, \dots, s,\ n \geq n_0, \\ f\left(\frac{k}{n}\right) &\geq f(1) - \left(1 - \frac{k}{n}\right) f'(1), \quad k = n-s, \dots, n-1,\ n \geq n_0. \end{aligned}$$

Тогава за $n \geq n_0$ са в сила неравенствата

$$\begin{aligned} &\|(\widetilde{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\| \\ &\qquad \leq c \begin{cases} \omega_\varphi^2(f', n^{-1/2}) + \omega_1(f', n^{-1}) + \dfrac{1}{n}, & s = 1, \\ \omega_\varphi^2(f^{(s)}, n^{-1/2}) + \omega_1(f^{(s)}, n^{-1}) + \dfrac{1}{n}\,\|f^{(s)}\| + \dfrac{1}{n}, & s \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Стойността на константата c не зависи от f и n.

Бележка 5.3. Аналогичен резултат е в сила за целочислената форма на полиномите на Бернщайн, които се дефинират с горна цяла част вместо долна. Тогава предполагаме, че са в сила обратните неравенства относно $f(k/n)$, т.е.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{n}\right) &\leq f(0) + \frac{k}{n}\, f'(0), \quad k = 1, \dots, s,\ n \geq n_0, \\ f\left(\frac{k}{n}\right) &\leq f(1) - \left(1 - \frac{k}{n}\right) f'(1), \quad k = n-s, \dots, n-1,\ n \geq n_0. \end{aligned}$$

Установяваме оценка на грешката на приближение за $\widehat{B}_n$ при *по-слаби* предположения.

Теорема 5.4. *Нека* $s \in \mathbb{N}_+$. *Нека* $f \in C^s[0,1]$ *е такава, че*

$$f(0), f(1), f'(0), f'(1) \in \mathbb{Z} \text{ и } f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0, \; i = 2, \ldots, s.$$

Тогава

$$\|(\widehat{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\| \le c \begin{cases} \omega_\varphi^2(f', n^{-1/2}) + \omega_1(f', n^{-1}) + \dfrac{1}{n}, & s = 1, \\ \omega_\varphi^2(f^{(s)}, n^{-1/2}) + \omega_1(f^{(s)}, n^{-1}) + \dfrac{1}{n}\,\|f^{(s)}\| + \dfrac{1}{n}, & s \ge 2. \end{cases}$$

Стойността на константата c не зависи от f и n.

В допълнение доказваме, че предположенията, направени в Теореми 5.1 и 5.4 са необходими, за да имаме равномерно едновременно приближение. По отношение на разликата между предположенията за производните при $s = 1$ и $s \ge 2$, ще отбележим, че $\widetilde{B}_n$ и $\widehat{B}_n$ възпроизвеждат полиномите от вида $p\,x + q$, където $p, q \in \mathbb{Z}$, затова не е изненадващо, че липсват ограничения върху стойностите на функцията и нейните първи производни в краищата на интервала, освен че трябва да са целочислени. Изискването производните от ред 2 и нагоре да приемат стойност 0 в краищата на интервала е твърде неочаквано. В технически аспект то е свързано с факта, че $\left(\frac{k}{n}\right)^s \binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$ за всеки k and n тогава и само тогава, когато $s = 0$ или $s = 1$.

Установяваме още следните слаби обратни съотношения, които допълват правите оценки в Теореми 5.1 и 5.4.

Теорема 5.5. *Нека* $s \in \mathbb{N}_+$ *и* $0 < \alpha < 1$. *Нека* $f \in C^s[0,1]$, $f(0), f(1) \in \mathbb{Z}$ *и*

$$\|(\widetilde{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\| = O(n^{-\alpha}) \quad \text{or} \quad \|(\widehat{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\| = O(n^{-\alpha}).$$

Тогава

$$\omega_\varphi^2(f^{(s)}, h) = O(h^{2\alpha}) \quad \text{and} \quad \omega_1(f^{(s)}, h) = O(h^\alpha).$$

Доказателството се обляга на приложение на лемата на Беренс-Лоренц [5] (или вж. напр. [14, гл. 10, Lemma 5.2])

Като комбинираме тази теорема с Теореми 5.1 и 5.4, получаваме следните две съотношения на еквивалентност в термините на O голямо.

Следствие 5.6. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$ и $0 < \alpha < 1$. Нека $f \in C^s[0,1]$ е такава, че $f(0), f(1), f'(0), f'(1) \in \mathbb{Z}$ и $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0$, $i = 2, \dots, s$. Нека още съществува $n_0 \in \mathbb{N}_+$, $n_0 \geq s$, такова, че*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{n}\right) &\geq f(0) + \frac{k}{n} f'(0), \quad k = 1, \dots, s, \ n \geq n_0, \\ f\left(\frac{k}{n}\right) &\geq f(1) - \left(1 - \frac{k}{n}\right) f'(1), \quad k = n-s, \dots, n-1, \ n \geq n_0. \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} &\|(\widetilde{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\| = O(n^{-\alpha}) \\ &\qquad\qquad \iff \quad \omega_\varphi^2(f^{(s)}, h) = O(h^{2\alpha}) \quad \text{и} \quad \omega_1(f^{(s)}, h) = O(h^\alpha). \end{aligned}$$

Следствие 5.7. *Нека $s \in \mathbb{N}_+$ и $0 < \alpha < 1$. Нека $f \in C^s[0,1]$ е такава, че $f(0), f(1), f'(0), f'(1) \in \mathbb{Z}$ и $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0$, $i = 2, \dots, s$. Тогава*

$$\begin{aligned} &\|(\widehat{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\| = O(n^{-\alpha}) \\ &\qquad\qquad \iff \quad \omega_\varphi^2(f^{(s)}, h) = O(h^{2\alpha}) \quad \text{и} \quad \omega_1(f^{(s)}, h) = O(h^\alpha). \end{aligned}$$

Доказателството на изложените в тази част резултати се основава на следната връзка между $(B_n f)^{(s)}$ и $(\widetilde{B}_n(f))^{(s)}$

$$\|(B_n f)^{(s)} - (\widetilde{B}_n(f))^{(s)}\| \leq c\left(\omega_1(f^{(s)}, n^{-1}) + \frac{1}{n}\right)$$

и подобна между $(B_n f)^{(s)}$ и $(\widehat{B}_n(f))^{(s)}$ съответно при направените предположения в Теореми 5.1 и 5.4.

Като следваме връзката между полиномите на Бернщайн и Канторович, формулирана в (18), дефинираме

$$\widehat{K}_n(f)(x) := \left(\widehat{B}_{n+1}(F)(x)\right)', \quad F(x) := \int_0^x f(t)\, dt,$$

където $f \in L[0,1]$ и $x \in [0,1]$.

Тогава имаме

$$\widehat{K}_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \Bigg((k+1) \left\langle \int_0^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt \binom{n+1}{k+1} \right\rangle - (n-k+1) \left\langle \int_0^{\frac{k}{n+1}} f(t)\,dt \binom{n+1}{k} \right\rangle \Bigg) x^k(1-x)^{n-k}.$$

Сега Теорема 5.4 влече следната оценка отгоре на грешката при едновременното приближение чрез $\widehat{K}_n$.

Теорема 5.17 *Нека $s \in \mathbb{N}_0$. Нека $f \in C^s[0,1]$ е такава, че*

$$\int_0^1 f(t)\,dt \in \mathbb{Z}, \quad f(0), f(1) \in \mathbb{Z},$$
$$f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0,\ i = 1, \dots, s.$$

Тогава

$$\|(\widehat{K}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\| \le c \begin{cases} \omega_\varphi^2(f, n^{-1/2}) + \omega_1(f, n^{-1}) + \dfrac{1}{n}, & s = 0, \\ \omega_\varphi^2(f^{(s)}, n^{-1/2}) + \omega_1(f^{(s)}, n^{-1}) + \dfrac{1}{n}\,\|f^{(s)}\| + \dfrac{1}{n}, & s \ge 1. \end{cases}$$

Стойността на константата c не зависи от f и n.

Единственото преимущество на $\widehat{K}_n$ пред $\widehat{B}_n$ би могло да се състои в това, че този оператор се дефинира чрез интеграли, а не стойности на f, което може да се окаже полезно, ако интегралите са по-достъпни от стойностите на функцията.

Прави и обратни оценки на Вороновская за оператора на Бернщайн

Оценяваме скоростта на приближение в теоремата на Вороновская [54], която гласи, че ако $f \in C^2[0,1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} n(B_n f(x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2}\, f''(x)$$

равномерно върху $[0,1]$.

Въвеждаме линейния опертатор

$$D_n f(x) := n(B_n f(x) - f(x)).$$

Ще го наричаме оператор на Вороновская.

Разглеждаме го върху пространствата от тип на Соболев

$$W_\infty^m(\varphi)[0,1] := \{f \in C[0,1] : f \in AC_{loc}^{m-1}(0,1), \varphi^m f^{(m)} \in L_\infty[0,1]\},$$

където, да припомним, $\varphi(x) := \sqrt{x(1-x)}$. Имаме включването

$$W_\infty^{m+1}(\varphi)[0,1] \subset W_\infty^m(\varphi)[0,1].$$

За $f \in W_\infty^2(\varphi)[0,1]$ полагаме $\mathcal{D}f(x) := \frac{\varphi^2(x)}{2} f''(x)$.

Известно е, че (вж. [16, Lemma 8.3])

$$\left\| B_n f - f - \frac{1}{2n}\,\varphi^2 f'' \right\| \le \frac{c}{n^{3/2}} \|\varphi^3 f^{(3)}\|, \quad f \in W_\infty^3(\varphi)[0,1],$$

което може да се представи във вида

$$\|D_n f - \mathcal{D}f\| \le \frac{c}{n^{1/2}} \|\varphi^3 f^{(3)}\|, \quad f \in W_\infty^3(\varphi)[0,1].$$

Като предположим по-голяма гладкост на функцията, показваме, че

$$\left\| B_n f - f - \frac{1}{2n}\,\varphi^2 f'' \right\| \le \frac{c}{n^2} \left(\|\varphi^2 f^{(3)}\| + \|\varphi^4 f^{(4)}\| \right), \quad f \in W_\infty^4(\varphi)[0,1],$$

тоест,

$$\|D_n f - \mathcal{D}f\| \le \frac{c}{n} \left(\|\varphi^2 f^{(3)}\| + \|\varphi^4 f^{(4)}\| \right).$$

Това слабо подобрява оценката

$$\left\| B_n f - f - \frac{1}{2n}\,\varphi^2 f'' \right\| \le \frac{c}{n^2} \left(\|f^{(3)}\| + \|f^{(4)}\| \right), \quad f \in C^4[0,1],$$

установена в [33].

Във формулировката на основните ни резултати по отношение на скоростта на сходимост на D_n използваме K-функционалите $K_{2,\varphi}(F,t)_w$, дефиниран в (12), и

$$\widetilde{K}(F,t) := \inf_{g \in W_\infty^4(\varphi)[0,1]} \left\{ \|F - \mathcal{D}g\| + t \left(\|\varphi^2 g^{(3)}\| + \|\varphi^4 g^{(4)}\| \right) \right\}.$$

Установяваме следната характеризация на скоростта на приближение на $\mathcal{D}f$ чрез $D_n f$.

Теорема 6.1. *За всеки $f \in W^2_\infty(\varphi)[0,1]$ и $n \in \mathbb{N}_+$ е в сила неравенството*

$$\|D_n f - \mathcal{D}f\| \le c\,\widetilde{K}(\mathcal{D}f, n^{-1}) \le c\left(K_{2,\varphi}(f'', n^{-1})_{\varphi^2} + \frac{1}{n}\,\|\varphi^2 f''\|\right). \tag{27}$$

Обратно, за всеки $f \in W^2_\infty(\varphi)[0,1]$ и $k, n \in \mathbb{N}_+$ е в сила неравенството

$$K_{2,\varphi}(f'', n^{-1})_{\varphi^2} \le 2\,\|D_k f - \mathcal{D}f\| + c\frac{k}{n}\,K_{2,\varphi}(f'', k^{-1})_{\varphi^2} + \frac{c}{n}\,\|\varphi^2 f''\|. \tag{28}$$

Стойността на константата c не зависи от f, n и k.

Оценките горе може да се предствят във вида:

$$\begin{aligned}\left\|B_n f - f - \frac{1}{2n}\,\varphi^2 f''\right\| &\le \frac{c}{n}\,\widetilde{K}(\mathcal{D}f, n^{-1})\\ &\le \frac{c}{n}\,K_{2,\varphi}(f'', n^{-1})_{\varphi^2} + \frac{c}{n^2}\,\|\varphi^2 f''\|\end{aligned} \tag{29}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{c}{k}\,K_{2,\varphi}(f'', n^{-1})_{\varphi^2} \le 2\,&\left\|B_k f - f - \frac{1}{2k}\,\varphi^2 f''\right\|\\ &+ \frac{c}{n}\,K_{2,\varphi}(f'', k^{-1})_{\varphi^2} + \frac{c}{nk}\,\|\varphi^2 f''\|.\end{aligned} \tag{30}$$

Можем да наречем (27) и (29) *прави неравенства на Вороновская*, а (28) и (30) *слаби обратни неравенства на Вороновская*.

Подобни прави поточкови оценки са установени в [30, Theorem 3.2] и [52, Theorem 2]. Предположенията върху функциите в тези изследвания са по-рестриктивни, но първото от тях е много общо, а и двете дават абсолютната константа в явен вид.

Извеждаме следната характеризация с помощта на Теорема 6.1.

Следствие 6.3. *Нека $f \in W^2_\infty(\varphi)[0,1]$ и $0 < \alpha < 1$. Тогава*

$$\|D_n f - \mathcal{D}f\| = O(n^{-\alpha}) \quad \Longleftrightarrow \quad K_{2,\varphi}(f'', t)_{\varphi^2} = O(t^\alpha).$$

Бернщайн [8] доказва, че ако $f \in C^{2r}[0,1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} n^r\left(B_n f(x) - f(x) - \sum_{i=1}^{2r} B_n\left((\circ - x)^i\right)(x)\,\frac{f^{(i)}(x)}{i!}\right) = 0$$

равномерно върху $[0,1]$ (вж. още [51]). Количествена оценка на тази сходимост за положителни линейни оператори върху $C[0,1]$ е доказана от Гонска [30].

Като положим $r=2$ горе, получаваме за $f \in C^4[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} n(D_n f(x) - \mathcal{D}f(x)) = D'f(x) \tag{31}$$

равномерно върху $[0,1]$, където

$$D'f(x) := \frac{(1-2x)\varphi^2(x)}{3!}\, f^{(3)}(x) + \frac{3\,\varphi^4(x)}{4!}\, f^{(4)}(x).$$

Това показва, че апроксимационният процес, породен от оператора D_n, се насища, порядъкът на насищане е n^{-1} и тривиалният клас е множеството от алгебрични полиноми от степен, ненадвишаваща 2.

Установяваме следната количествена оценка на сходимостта в (31).

Теорема 6.4. *За всеки $f \in W^4_\infty(\varphi)[0,1]$ и $n \in \mathbb{N}_+$ е в сила неравенството*

$$\left\| D_n f - \mathcal{D}f - \frac{1}{n}\, D'f \right\| \le \frac{c}{n}\, K_{2,\varphi^2}(f^{(4)}, n^{-1})_{\varphi^4} + \frac{c}{n^2}\, \|\varphi^4 f^{(4)}\|.$$

Стойността на константата c не зависи от f и n.

Вместо of $K_{2,\varphi}(F,t)_{\varphi^r}$ можем да използваме модула на гладкост на Дитциан и Тотик с тегло $\omega^2_\varphi(F,t)_{\varphi^r}$, дефиниран в (15) (вж, също (17)). Всъщност, т.нар. главна част на този модул позволява да формулираме характеризацията в Следствие 6.3 по по-прост начин.

Следствие 6.5. *Нека $f \in W^2_\infty(\varphi)[0,1]$ и $0 < \alpha < 1$. Тогава*

$$\|D_n f - \mathcal{D}f\| = O(n^{-\alpha}) \quad \Longleftrightarrow \quad \|\varphi^2 \bar{\Delta}^2_{h\varphi} f''\|_{[2h^2, 1-2h^2]} = O(h^{2\alpha}).$$

Неравенства за влагане

За да установим резултатите относно едновременното приближение чрез операторите на Бернщайн, неговите итерирани булеви суми и оператора на Вороновская, често използваме неравенства между нормите на прозводните на функциите, както и между тези норми и нормите на стойностите на диференциалния оператор, който е свързан с приближението посредством итерираните булеви суми на оператора на Бернщайн, $(d/dx)^s D^r$, и в частност, чрез самия оператор на Бренщайн.

Когато разглеждаме едновременното приближение с тегло посредством итерираните булеви суми на B_n, не установяваме неравенствата, от които се нуждаем, директно в термините на диференциалния оператор $(d/dx)^s D^r$, защото той е доста сложен. Вместо това установяваме неравенства посредством нормите на компонентите, в които той се развива. Те са от вида $q\varphi^{2i}g^{(j)}$, където q е алгебричен полином, който може да се пренебрегне, и $i,j \in \mathbb{N}_0$. След това, като използваме определени неравенства за влагане, се връщаме до $(D^r g)^{(s)}$. Това ни позволява не само да заобиколим техническите трудности в работата с $(d/dx)^s D^r$, но също и да установим паралелно и двете характеризации на $\|w(\mathcal{B}_{r,n}f - f)^{(s)}\|$: по-естесвената посредством $K^D_{r,s}(f,t)_w$ и по-полезната посредством $K_{2r,\varphi}(f,t)_w$ и $K_m(f,t)_w$.

Всъщност прилагането на подходящи неравенства за влагане е типично за такива проблеми в теория на апроксимациите; вж. напр. [6, Lemmas 2, 3 and 4], [17, стр. 135], [35, Lemma 2] и [36, стр. 127-128].

Както е добре известно (напр. [14, гл. 2, Theorem 5.6]),

$$\|f^{(j)}\|_J \le c\left(\|f\|_J + \|f^{(m)}\|_J\right), \quad j = 0,\dots,m,$$

където $f \in W^m_\infty(J)$, а J е интервал върху реалната права. Стойността на константата c не зависи от f.

Освен това неравенство установяваме и използваме още няколко. Те са поместени в твърденията по-долу.

Твърдение 2.1. *Нека $j,m \in \mathbb{N}_0$, като $j < m$. Нека $w_\mu := w(\gamma_{\mu,0},\gamma_{\mu,1})$ е дефинирано в (11), като $\gamma_{\mu,0},\gamma_{\mu,1} > 0$ за $\mu = 1,2$ и нека $\gamma_{2,\nu} \le \gamma_{1,\nu} + m - j$ за $\nu = 0,1$. Нека още $g \in AC^{m-1}_{loc}(0,1)$ е такава, че $w_2 g^{(m)} \in L_\infty[0,1]$. Тогава*

$$\|w_1 g^{(j)}\| \le c\left(\|g\|_{[1/4,3/4]} + \|w_2 g^{(m)}\|\right).$$

Стойността на константата c не зависи от g.

Твърдение 2.6 *Нека $r,s \in \mathbb{N}_+$ и $w := w(\gamma_0,\gamma_1)$ е дефинирано в (11), като $0 \le \gamma_0,\gamma_1 < s$. Да положим $j_s := 1$ ако $s = 1$, и $j_s := 0$ в противен случай. Тогава за всяка функция $g \in AC^{2r+s-1}[0,1]$ са в сила неравенствата:*

$$\|wg^{(j+s)}\| \le c\,\|w(D^r g)^{(s)}\|, \quad j = j_s,\dots,r,$$

и

$$\|w\varphi^{2r}g^{(2r+s)}\| \le c\,\|w(D^r g)^{(s)}\|.$$

Стойността на константата c не зависи от g.

Организация на съдържанието на дисертацията

Глава 1 съдържа дефинициите и основните свойства на стандартните K-функционали и модули на гладкост, които се използват в разглеждания тип задачи.

В глава 2 установяваме неравенства между норми с тегло, породени от съществения супремум, на производни на функциите, както и между тях и нормите на стойностите на диференциалния оператор, който е свързан с приближението посредством итерираните булеви суми на оператора на Бернщайн, в частност, със самия оператор на Бернщайн. Резултатите, представени в тази глава, са публикувани в [19, 20, 26].

В глава 3 установяваме прави и съответни силни обратни оценки на грешката при едновременното приближение с оператора на Бернщайн в нормата с тегло, породена от съществения супремум. Резултатите, представени в тази глава, са публикувани в [20, 21].

В глава 4 обобщаваме повечето от резултатите от предходната глава за итерираните булеви суми на оператора на Бернщайн. Материалът, представен в тази глава, е публикуван в [18, 19, 20, 24, 25].

В глава 5 установяваме прави и слаби обратни оценки на грешката за едновременното приближение чрез две модификации на полиномите на Бернщайн, които представляват алгебрични полиноми с цели коефициенти. Резултатите в тази глава са публикувани в [22, 23].

В глава 6 характеризираме скоростта на сходимост в теоремата на Вороновская. Резултатите, представени в тази глава, са публикувани в [26], написана съвместно с И. Гаджев.

Благодарности

Особено съм благодарен на проф. дмн Камен Иванов, проф. Дани Левиатан, Кирил Делев и анонимните рецензенти за съветите за подобрение и корекциите в ръкописите на статиите, чието съдържание съставлява настоящата дисертация. Задължен съм на проф. Ганчо Тачев за това, че ми предостави някои статии, свързани с представените тук резултати. Изключително силно ценя подкрепата и съветите, които съм получавал от проф. К. Иванов още от самото начало на работата ми като математик досега. Също така много важна роля за мен играе и подкрепата на

проф. дмн Гено Николов, проф. дн Надежда Рибарска, доц. д-р Иван Гаджев, доц. д-р Първан Първанов и доц. д-р Румен Улучев (по азбучен ред).

Литература

[1] С. Н. Бернштейн, Несколько замечаний о полиномы наилучшего приближения с целыми коэффициентами, *Доклады Академии наук СССР* **16** (1930), 411–415.

[2] Л. В. Канторович, Несколько замечаний о приближении к функциям посредством полиномов с целыми коэффициентами, *Известия Академии наук СССР, VII серия, отделение математических и естественных наук* **9** (1931), 1163–1168.

[3] Бл. Сендов, В. А. Попов, Сходимост на производните на линейни положителни оператори, *Известия на математическия институт, БАН* **11** (1970), 107–115.

[4] J. A. Adell, G. Sangüesa, Upper constant in direct inequalities for Bernstein-type operators, *J. Approx. Theory* **109** (2001), 229–241.

[5] H. Berens, G. G. Lorentz, Inverse theorems for Bernstein polynomials, *Indiana Univ. Math. J.* **21** (1972), 693–708.

[6] H. Berens, Y. Xu, On Bernstein-Durrmeyer polynomials with Jacobi weights, In: "Approximation Theory and Functional Analysis" (C. K. Chui, Ed.), 1991, 25–46.

[7] S. N. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstrass, fondeé sur le calcul des probabilités, *Commun. Soc. Math. Kharkow* (2), **13** (1912-13), 1–2.

[8] S. N. Bernstein, Complément à l'article de E. Voronovskaya "Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein", *Dokl. Acad. Nauk SSSR A* **4** (1932), 86–92.

[9] J. Bustamante, Bernstein Operators and Their Properties, Birkhäuser, Cham, 2017.

[10] P.L. Butzer, R.J. Nessel, Fourier Analysis and Approximation, Birkhäser Verlag, Basel, 1971.

[11] J. de la Cal, A. M. Valle, A generalization of Bernstein-Kantorovič operators, *J. Math. Anal. Appl.* **252** (2000), 750–766.

[12] J.-D. Cao, On Sikkema-Kantorovič polynomials of order k, *Approx. Theory Appl.* **5** (1989), 99–109.

[13] I. Chlodowsky, Erster Mathematikerkongress der USSR, Charkow, 1930.

[14] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[15] C. Ding, F. Cao, K-functionals and multivariate Bernstein polynomials, *J. Approx. Theory* **155** (2008), 125–135.

[16] Z. Ditzian, K. G. Ivanov, Strong converse inequalities, *J. Anal. Math.* **61** (1993), 61–111.

[17] Z. Ditzian, V. Totik, Moduli of Smoothness, Springer-Verlag, New York, 1987.

[18] B. R. Draganov, Upper estimates of the approximation rate of combinations of iterates of the Bernstein operator, *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* **101** (2013), 95–104.

[19] B. R. Draganov, On simultaneous approximation by iterated Boolean sums of Bernstein operators, *Results Math.* **66** (2014), 21–41.

[20] B. R. Draganov, Strong estimates of the weighted simultaneous approximation by the Bernstein and Kantorovich operators and their iterated Boolean sums, J. *Approx. Theory* **200** (2015), 92–135.

[21] B. R. Draganov, An exact strong converse inequality for the weighted simultaneous approximation by the Bernstein operator, In: "Constructive Theory of Functions, Sozopol 2016" (K. Ivanov, G. Nikolov, R. Uluchev, Eds.), pp. 75–97, Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2018.

[22] B. R. Draganov, Simultaneous approximation by Bernstein polynomials with integer coefficients, *J. Approx. Theory* **237** (2019), 1–16.

[23] B. R. Draganov, Converse estimates for the simultaneous approximation by Bernstein polynomials with integer coefficients, In: "Constructive Theory of Functions, Sozopol 2019" (B. Draganov, K. Ivanov, G. Nikolov, R. Uluchev, Eds.), pp. 39–51, Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2020.

[24] B. R. Draganov, Corrigendum to "Strong estimates of the weighted simultaneous approximation by the Bernstein and Kantorovich operators and their iterated Boolean sums" [J. Approx. Theory 200 (2015) 92–135], *J. Approx. Theory* **252** (2020), 105321.

[25] B. R. Draganov, A strong converse inequality for the iterated Boolean sums of the Bernstein operator, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* **67** (2022), 591–598.

[26] B. R. Draganov, I. Gadjev, Direct and converse Voronovskaya estimates for the Bernstein operator, *Results Math.* **73**:11 (2018).

[27] B. R. Draganov, K. G. Ivanov, Characterizations of weighted K-functionals and their application, In: "Constructive Theory of Functions, Varna 2005" (B. Bojanov, Ed.), pp. 88-97, Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2006.

[28] M. S. Floater, On the convergence of derivatives of Bernstein approximation, *J. Approx. Theory* **134** (2005), 130–135.

[29] I. Gavrea, H. H. Gonska, R. Păltănea, G. Tachev, General estimates for the Ditzian-Totik modulus, *East J. Approx.* **2** (2003), 175–194.

[30] H. H. Gonska, On the degree of approximation in Voronovskaja's theorem, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* **52** (2007), 3, 103–115.

[31] H. Gonska, M. Heilmann, I. Raşa, Asymptotic behaviour of differentiated Bernstein polynomials revisited, *Gen. Math.* **18** (2010), 45–53.

[32] H. Gonska, M. Heilmann, I. Raşa, Kantorovich operators of order k, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **32** (2011), 717–738.

[33] H. H. Gonska, I. Raşa, The limiting semigroup of the Bernstein iterates: degree of convergence, *Acta Math. Hung.* **111** (2006), 119–130.

[34] H. Gonska, I. Raşa, Asymptotic behaviour of differentiated Bernstein polynomials, *Mat. Vesnik* **61** (2009), 53–60.

[35] H. Gonska, X.-l. Zhou, Approximation theorems for the iterated Boolean sums of Bernstein operators, *J. Comput. Appl. Math.* **53** (1994), 21–31.

[36] H. Gonska, X.-l. Zhou, The strong converse inequality for Bernstein-Kantorovich operators, *Comput. Math. Appl.* **30** (1995), 103–128.

[37] M. Heilmann, I. Raşa, k-th order Kantorovich type modification of the operators U_n^ρ, *J. Appl. Funct. Anal.* **9** (2014), 320–334.

[38] G. Jiang, On Bernstein operators and its compositions, *J. Zhaoqing Univ.* **26**(5) (2005), 5-7 (in Chinese).

[39] H. B. Jiang, L. S. Xie, Simultaneous approximation by Bernstein operators, *Pure Appl. Math.* (Xi'an) **4**:22 (2006), 471–476 (in Chinese).

[40] H. Johnen, Inequalities connected with moduli of smoothness, *Mat. Vesnik* **3** (1972), 289–305.

[41] H.-B. Knoop, X.-L. Zhou, The lower estimate for linear positive operators (II), *Results Math.* **25** (1994), 315–330.

[42] A. J. López-Moreno, J. Martínez-Moreno, F. J. Muñoz-Delgado, Asymptotic expression of derivatives of Bernstein type operators, *Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. II* **68** (2002), 615–624.

[43] G. G. Lorentz, Zur theorie der polynome von S. Bernstein, *Mat. Sb (N.S.)* **2** (1937), 543–556.

[44] G. G. Lorentz, Bernstein Polynomials, Chelsea Publishing Company, New York, Second Edition, 1986.

[45] G. G. Lorentz, M. v.Golitschek, Y. Makovoz, Constructive Approximation, Advanced Problems, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[46] D. H. Mache, Equivalence theorem on weighted simultaneous L_p-approximation by the method of Kantorovič operators, *J. Approx. Theory* **78** (1994), 321–350.

[47] C. Micchelli, The saturation class and iterates of the Bernstein polynomials, *J. Approx. Theory* **8** (1973), 1–18.

[48] R. Păltănea, Approximation Theory Using Positive Linear Operators, Birkhäuser, Boston, 2004.

[49] T. Popoviciu, Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur, *Mathematica (Cluj)* **10** (1935), 49–54.

[50] T. Popoviciu, Despre cea mai ba aproximare a functiilor continue prin polinoame, Monografii matematice, Sec. Mat. A Univ. Din Cluj, fasc. III, 1937.

[51] G. T. Tachev, The complete asymptotic expansion for Bernstein operators, *J. Math. Anal. Appl.* **385** (2012), 1179–1183.

[52] G. Tachev, New estimates in Voronovskaja's theorem, *Numer. Algorithms* **59** (2012), 119–129.

[53] V. Totik, Approximation by Bernstein polynomials, *Amer. J. Math.* **116** (1994), 995–1018.

[54] E. Voronovskaya, Détermnation de la forme asymptotice l'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **4** (1932), 79–85.

[55] S. Wigert, Sur l'approximation par polynômes des fonctions continues, *Ark. Math. Astr. Fys.* **22 B** (1932), 1–4.