Софийски университет
"Св.Климент Охридски"

Факултет по математика и информатика

Клас C^*-алгебри на Тьоплиц

Николай Петров Буюклиев

АВТОРЕФЕРАТ
на дисертация
за придобиване на образователната и научна степен

Доктор в професионално направление 4.5 математика
докторска програма "математически анализ"

Форма на обучение: самостоятелна подготовка

СОФИЯ 2023

1 Актуалност на темата и преглед на основните резултати в областта

1.1 C^*-алгебра на класическите оператори на Тьоплиц

Първият клас оператори на Тьоплиц, който е бил разглеждан, това са операторите, асоциирани с единичната окръжност в комплексната равнина.

Нека с T е означена единичната окръжност. Смятаме, че тя е снабдена с мярка на Хаар μ. Разглеждаме Хилбертовото пространство $L^2(T)$, чиито елементи са квадратично интегруемите функции, дефинирани в T. Функциите $\{e_n(t) = e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ са ортонормиран базис в $L^2(T)$. Дефинираме пространството на Харди $H^2(T)$ като затвореното подпространство, породено от $\{e_n : n \geq 0\}$.
Нека φ е непрекъсната функция, дефинирана върху T. Дефинираме оператор на умножение M_φ в $L^2(T)$ с формулата $M_\varphi(f) = \varphi.f$.
Означаваме с π ортогоналната проекция от $L^2(T)$ върху $H^2(T)$.
Тьоплицовия оператор T_φ действа върху $H^2(T)$ по формулата:

$$T_\varphi = \pi M_\varphi.$$

C^*-алгебрата на Тьоплицовите оператори $\mathcal{T}^1$ се дефинира като C^*-алгебрата, породена от операторите T_φ.
Нека забележим, че $\mathcal{T}^1$ е породена от оператора T_z, който е изометрия. Така се вижда, че $\mathcal{T}^1$ съвпада с алгебрата, породена от една изометрия.
В **[3]** L. Coburn определя нейната структура– в Теорема 1. доказва, че $\mathcal{T}^1$ съдържа $\mathcal{K}$– идеалът на компактните оператори, а в Теорема 2. доказва, че $\mathcal{T}^1/\mathcal{K} \cong C(T)$. По такъв начин той достига до следната точна редица:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{T}^1 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{T}^1/\mathcal{K} \cong C(T) \longrightarrow 0 \tag{0.1}$$

Тази точна редица дава непосредствено следният критерий за Фредхолмовост:
Теорема. (Coburn, **[3]**) Оператор $T \in \mathcal{T}^1$ е Фредхолмов точно когато $\gamma(T) \in C(T)$ не се анулира.

За Фредхолмов оператори $T \in \mathcal{T}^1$ е в сила и следната знаменита индексна теорема:

Теорема (Gohberg– Krein, **[1]**, **[2]**) Нека операторът $T \in \mathcal{T}$ е Фредхолмов. Тогава Фредхолмовият индекс на T е равен на минус индекса относно 0 (winding number) на $\gamma(T)$.

Тези резултати могат да се прехвърлят лесно и за друг клас оператори.
Нека със $\mathbb{Z}$ сме означили множеството на целите числа. Разглеждаме $l^2(\mathbb{Z})$. Функциите $\{e_n(k) = \delta_{nk} : n \in \mathbb{Z}\}$ представляват ортонормиран базис в $l^2(\mathbb{Z})$. Дефинираме подпространсвото на Харди $H^2(\mathbb{Z})$ като затвореното линейно пространство, породено от $\{e_n : n \geq 0\}$. Означаваме с π ортогоналната проекция от $l^2(\mathbb{Z})$ върху $H^2(\mathbb{Z})$.

След това, за всяко $n \in \mathbb{Z}$, дефинираме оператор на транслация $M_n : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$ с формулата $M_n f(k) = f(n+k)$. Накрая можем да дефинираме оператор на Тьоплиц $\widetilde{T_n}$ с формулата:

$$\widetilde{T_n} : H^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbb{Z}) \qquad \widetilde{T_n} = \pi M_n.$$

Трансформацията на Фурие осъществява изоморфизъм между $L^2(T)$ и $l^2(\mathbb{Z})$. При този изоморфизъм на $H^2(T)$ съответства $H^2(\mathbb{Z})$. Нещо повече, тази трансформация сплита операторите T_{x^n} и $\widetilde{T_n}$.
По такъв начин установяваме, че алгебрата, породена от операторите $\widetilde{T_n}$ е изоморфна с $\mathcal{T}^1$.

През последните петдесет години се наблюдава нарастващ интерес към задачата за определяне на структурата на C^*-алгебрите, породени от оператори на Тьоплиц или на Винер-Хопф.Закономерно е изучаването на многомерни обобщения на горните алгебри.

1.2 Дефиниция на C^*-алгебрите на Тьоплиц, изучавани в дисертацията

В тази дисертация се разглеждат C^*-алгебрите на Тьоплиц, които възникват по следния начин:
Нека G е T_2, локално компактна група с неутрален елемент e и фиксирана лява мярка на Хаар λ.
Фиксираме затворена, нормална подполугрупа P на G, която поражда G и съдържа e.
За $f \in C_c(G)$ дефинираме оператор на Винер-Хопф действащ в $L^2(P)$ чрез формулата:

$$W_f\xi(t) = \int_G f(s)\xi(ts)1_P(ts)d\lambda(s), \qquad \xi \in L^2(P)$$

Вижда се, че операторите W_f представляват обобщение на операторите от $\mathcal{T}^1$.
C^*-алгебрата, породена от операторите $\{W_f : f \in C_c(G)\}$ ще означаваме с $\mathcal{B}(G,P)$ или $\mathcal{T}(G,P)$ или просто с $\mathcal{B}$ или $\mathcal{T}$. Тази алгебра се нарича C^*-алгебра на операторите на Винер-Хопф, асоциирани с G и P.
В случаите, когато групата G е дискретна, най- често се използват термините оператор на Тьоплиц и C^*-алгебра на операторите на Тьоплиц, асоциирани с G и P. [1]

[1]По традиция, ако групата G е дискретна, се употребява най-често терминът оператор наТьоплиц. Напротив, ако G не е дискретна, най-често се използва терминът оператор на Винер-Хопф. Тук и двата случая се третират по един и същи начин, затова няма да се прави разлика кой от двата случая се изследва. Фактически двата термина са синоними.

1.3 Програмата, която предлагам

Програмата, която предлагам да се следва при изучаването на този клас алгебри включва следните етапи:

• Конструиране на такъв групоид $\mathcal{G}$, така че изучаваната алгебра $\mathcal{B}$ да е изоморфна на групоидната алгебра $C^*(\mathcal{G})$.

• Определяне на решетката на идеалите на $\mathcal{B}$. Пресмятане на съответните частни. Построяване на композиционен ред на на $\mathcal{B}$. Изясняване типа на на $\mathcal{B}$, дали е postliminal или не.

• В случаите, когато $\mathcal{B}$ е тип I, параметризиране на спектъра на $\mathcal{B}$ и описание на неговата топология.

• Пресмятане на К-теорията на идеалите и частните, а също така и на цялата алгебра $\mathcal{B}$.

• Даване на критерий кога оператор от $\mathcal{B}$ е Фредхолмов.

• Получаване на индексна формула, която пресмята аналитичния индекс на Фредхолмов оператор.

• Получаване на формула, която изразява аналитичния индекс на Фредхолмов оператор в топологични термини.

1.4 Преглед на основните резултати в областта

Тук ще направя обзор на най-успешните автори и резултатите им в обсъжданата област.

Пионерските работи в областта принадлежат на L. Coburn и R. Douglas. Те са групирани в серия статии:**[3]**, **[5]**,**[6]**, **[17]** и **[18]**. По-късно E. Park в **[10]** обсъжда алгебрата на операторите на Тьоплиц за случая когато P е квадрант. Той дава критерий за Фредхолмовост на оператор и доказва индексна теорема, основана на цикличните кохомологии на A. Connes.

Солидни резултати получава и H. Upmeier с помощта на разработеният от него метод на трипотентите. В **[19]**, **[20]** и **[21]** той построява композиционен ред за алгебрите на Харди-Тьоплиц, асоциирани с ограничени симетрични области. Нещо повече, той получава индексна теорема за операторите на Винер-Хопф, асоциирани със симетричен конус.

Принципно различен подход е приложен от Dynin **[7]**. Той използва процедура, базирана на локално представяне на P като произведение, съответно на фиксирана стена. С помощта на този метод (локален принцип) той съумява да конструира композиционен ред за $\mathcal{B}$. За да успее да приложи своя метод, Dynin налага на конуса P условие, което нарича "complete tangibilyty". Класът конуси, с които си служи, включва полиедралните, почти гладките и еднородните конуси.

Подходът, който следвам в дисертацията е разработен от P. Muhly и J. Renault. Повече от 20 години техниката на групоидните алгебри се използва със забележителен успех в много математически области, в частност при изследване на C^*-алгебрите на Тьоплиц и Винер-Хопф.

P. Muhly и J. Renault описват в **[11]** обща процедура за конструиране на локално компактен групоид $\mathcal{G}$, чиято групоидна C^*- алгебра $C^*(\mathcal{G})$ е изоморфна с C^*-алгебрата $\mathcal{B}$. Използвайки представянето на $\mathcal{B}$ като групоидна C^*-алгебра те получават композиционен ред за $\mathcal{B}$ в случаите, когато конусът P е полиедрален или симетричен.Тяхната конструкция се базира на подходяща наредбена компактификация на P.

A. Nica в **[8]** дава друга — унифицирана конструкция за компактификация на P, приложима за всеки заострен и солиден конус в $\mathbb{R}^n$. След някои корекции и допълнения на **[11]**, той също доказва теорема за групоидно представяне на $\mathcal{B}$.

Наскоро A. Aldridge и T. Johansen в **[12]** и **[13]** разглеждат C^*-алгебрата на операторите на Винер-Хопф, асоциирана с изпъкнал конус в $\mathbb{R}^n$. Използвайки групоидни методи те получават композиционен ред за $\mathcal{B}$. Освен това те определят спектъра на $\mathcal{B}$ и в рамките на КК- теорията на Каспаров дават топологично изразяване на индексните изображения в композиционния ред.

2 Съдържание и основни резултати на дисертацията по глави

Дисертацията съдържа 56 страници, 3 от тях представляват списък на използваната литература. Списъкът е съставен от 51 заглавия, 4 от тях са мои статии.

2.1 В глава 1.

В глава 1. е дадена дефиницията на многомерните оператори на Тьоплиц и Винер- Хопф и C^*-алгебрите, породени от тях.
Направен е обзор на основните резултати, получени досега в областта.
Обсъдени са задачите, които възникват при изследване на алгебра от разглеждания клас алгебри и подходи за тяхното решаване.
Представена е програма, която да се следва при изучаване на такава алгебра.

2.2 В глава 2.

В глава 2 са събрани някои предварителни сведения, необходими в следващите глави. Засегнати са следните теми: C^*-алгебри; Групоиди и техните алгебри; Основните примери за групоидни C^*-алгебри; К-теория и циклични кохомологии на C^*-алгебри.

2.3 В глава 3.

В глава 3 е разгледана групоидна C^*-алгебра $\mathcal{T} = C^*(\mathcal{G})$, където $\mathcal{G}$ е групоид на Винер-Хопф, което означава, че $\mathcal{G}$ е редукция на група от трансформации по затворено подмножество X, т. е $\mathcal{G} = (Y \times G)|X$, където Y and $X \subset Y$ са подходящи топологични пространства.
Получен е критерий за това кога оператор $T \in C^*(\mathcal{G})$ е Фредхолмов.
Също така е представен метод за дефиниране на непрекъснато линейно сечения, като се използват контракции в $\mathcal{G}^0$–пространството от единици на $\mathcal{G}$.
Резултатите са приети за печат и ще бъдат публикувани в **[24]**.

В § 3.1 е представен критерий за Фредхолмовост на оператор $T \in C^*(\mathcal{G})$.

Предполагаме, че наредбената компактификация X на P е регулярна. Тогава $U = i(P)$ е отворено и инвариантно подмножество на $X = \mathcal{G}^0$ и затова имаме следната точна редица:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} C^*(\mathcal{G}) \xrightarrow{\gamma} C^*(\mathcal{G})/\mathcal{K} = C^*(\mathcal{G}_{|F}) \longrightarrow 0$$

Непосредсвено следствие от тази точна редица е следния критерий за Фредхолмовост:

Теорема 3.1 Оператор $T \in C^*(\mathcal{G})$ е Фредхолмов тогава и само тогава, когато $\gamma(T)$ е обратим в $C^*(\mathcal{G}_{|F})$.

В § 3.2 е представен метод как да се конструира явно непрекъснато линейно сечение $\psi : C^*_{red}(\mathcal{G}_{|F}) \xrightarrow{\psi} C^*_{red}(\mathcal{G})$ в групоидна алгебра $\mathcal{T} = C^*(\mathcal{G})$, като се използват подходящи контракции в пространството от единици на $\mathcal{G}$.

Нека F е затворено и инвариантно подмножество на $X = \mathcal{G}^0$и нека $\lambda : X \longrightarrow F$ е непрекъсната контракция (т.е. $\lambda(x) = x$, $\forall x \in F$). В такъв случай можем да дефинираме линейно сечение по следния начин:

Теорема 3.2-1 При горните означения изображението $\psi : C^*_{red}(\mathcal{G}_{|F}) \xrightarrow{\psi} C^*_{red}(\mathcal{G})$, зададено с формулата:

$$\psi(b)(x, n) = b(\lambda(x), n) \quad b \in C_c\big(\mathcal{G}_{|F}\big)$$

е непрекъснато сечение.

Има аналог на горната формула и в случая, когато F е обединение на краен брой затворени и инвариантни подмножества на множеството от единици X. Нека предположим, че $F_1, F_2, \dots F_n$ са затворени и инвариантни подмножества на X и $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$.

При $\sigma \subset \{1, 2, \dots, n\}$, дефинираме $rank(\sigma)$ като броят на елементите на σ и означаваме $F_\sigma = \bigcap_{i \in \sigma} F_i$.

Предполагаме, че $\lambda_\sigma : X \longrightarrow F_\sigma$ са непрекъснати контракции, за които $\lambda_{\sigma \cup \tau} = \lambda_\sigma \circ \lambda_\tau$ за всички $\sigma, \tau \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

Теорема 3.2-2 При горните означения изображението ψ, дефинирано с формулата:

$$\psi(b)(x, n) = \sum_{\sigma \subset . \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{rank(\sigma)+1} b(\lambda_\sigma(x), n) \quad b \in C_c\big(\mathcal{G}_{|F}\big)$$

е непрекъснато сечение.

2.4 В глава 4.

В глава 4 е показано как налагането на някои допълнителни изисквания за непрекъснато сечение ψ в групоидна алгебра позволява да се дефинира цикличен 1- коцикъл в нея и да се получи формула, която пресмята аналитичния индекс на Фредхолмов оператор.
Получените резултати ще бъдат публикувани в **[27]**.

За да се изясни контекста в който работя, предварително ще кажа няколко думи за използваните резултати на A.Connes и E. Park.

В **[23]** A.Connes дава връзка между цикличните кохомологии $H^*_\lambda(A)$ на алгебра A и почти мултипликативните изображения ϱ (т. е. изображенията $\varrho : A \longrightarrow L(H)$ за които $\varrho(x.y) - \varrho(.y)\varrho(y)$ е оператор с крайна следа за всички $x, y \in A$).
Когато ϱ е почти мултипликативно изображение, Connes конструира цикличен 1- коцикъл $\tau \in H^1_\lambda$ и доказва, че индексното изображение $K_1(A) \longrightarrow \mathbb{Z}$ се определя с формулата:

$$index(\varrho(U)) = \langle U, \tau \rangle \qquad \forall U \in GL(A).$$

В **[10]**, E. Park изследва C^*- алгебрата $\mathcal{T}^{\alpha,\beta}$, породена от операторите на Тьоплиц в квадранта. Park доказва в **[10]** , Prop. 2.3 , че $\mathcal{T}^{\alpha,\beta}$ съдържа $\mathcal{K}$– идеала на компактните оператори и по такъв начин достига до следната точна редица:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} T^{\alpha,\beta} \xrightarrow{\gamma} T^{\alpha,\beta}/\mathcal{K} \longrightarrow 0$$

След това Park конструира непрекъснато сечение $\rho : T^{\alpha,\beta}/\mathcal{K} \longrightarrow T^{\alpha,\beta}$. Сечението ρ има свойството, че за всички x и y в $T^{\alpha,\beta}/\mathcal{K}$ операторът $\rho(xy) - \rho(x)\rho(y)$ е компактен.
За зла беда, при такава общност, това е най- многото, което може да се каже: не винаги операторът $\rho(xy) - \rho(x)\rho(y)$ е със крайна следа. За да успее да използва горния резултат на Connes, Park заобикаля проблема като ограничава изменението на x и y само до подалгебра $T^{\alpha,\beta}_\infty$, която е навсякъде гъста в $T^{\alpha,\beta}/\mathcal{K}$.

В § 3.2 съм представил метод за конструиране на непрекъснато сечение ψ в групоидна алгебра, като се използват контракции в пространството от единици на $\mathcal{G}$. При опит да използвам ψ и да използвам горния резултат на Connes, за получаване на индексна формула, се натъквам на същата пречка както и E. Park в **[10]**: операторът $\psi(xy) - \psi(x)\psi(y)$ е винаги компактен, но не винаги има крайна следа. Главната цел в тази глава е да се представят такива условия за ψ, които да позволят да се дефинира такава подалгебра $\mathcal{T}^\infty$, навсякъде гъста в $\mathcal{T}/\mathcal{K}$, така че ограничението на ψ до $\mathcal{T}^\infty$ да е почти мултипликативно.

В § 4.1 са изброени допълнителните изисквания, които налагам на сечението ψ.

В § 4.2 дефинирам алгебрите S and $\mathcal{T}^\infty$.

В § 4.3 е доказано, че $\rho = \psi \circ \gamma$ е почти мултипликативно в $\mathcal{T}^\infty$.

Накрая, във финалния § 4.4 доказваме формула за широк клас Фредхолмови оператори, която пресмята техния аналитичен индекс:

Теорема 4.4 Нека $T \in \mathcal{T}$ е Фредхолмов оператор.
Нека $\gamma(T)$ и $\big(\gamma(T)\big)^{-1}$ са в $\mathcal{T}^\infty$.
Тогава Фредхолмовия индекс $ind(T)$ на оператора T се пресмята със следната формула:

$$ind(T) = tr\left[\psi\gamma(T)\psi(\gamma(T)^{-1}) - \psi(\gamma(T)^{-1})\psi\gamma(T)\right]$$

2.5 В глава 5.

Когато е изяснена решетката на идеалите и съответните частни за групоидна алгебра $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P) = C^*(\mathcal{G})$, следващата задача е да се пресметне K-теорията на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)/\mathcal{K}$ и $\mathcal{B}$.
Един възможен подход е да се използва комбинация на точната редица на Майер-Виеторис и стандартния точен шестоъгълник в K-теорията. Това е направено в **[25]** и в § 5, при наложено подходящо геометрично условие.

В глава 5 доказваме, че ако $P \subset R^n$ удовлетворява хубаво геометрично условие (P да бъде "exhaustible"), то $K_*(\mathcal{B}(R^n, P) = (0, 0)$, $K_*(\mathcal{B}(R^n, P)/\mathcal{K}) = (0, \mathbb{Z})$ и индексното изображение е изоморфизъм.
Резултататите са публикувани в **[25]**.
Основните резултати в тази глава са:

- Конструиране на на Фредхолмов оператор с индекс 1.

Това е направено в § 5.2. Този резултат е цитиран и използван в **[14]** и **[15]**.

Ако са извесни K-теорията на идеал J на C^*-алгебрата $\mathcal{B}$ и K-теорията на частното $\mathcal{B}/J$, можем да запишем точният шестоъгълник в K-теорията(виж § 2.4.1.). Но само диаграмно следене не е достатъчно, за да се пресметне K-теорията на $\mathcal{B}$. За тази цел ние необходима допълнителна информация и за изображенията в диаграмата.

Тази бележка показва важността на следната теорема:

Теорема 5.2 Нека P е полиедрален конус в $\mathbb{R}^d$. В $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)$ съществува Фредхолмов оператор с индекс 1.

Следствие.Ако $K_*(\mathcal{B}(R^n, P)/\mathcal{K}) = (0, \mathbb{Z})$, то

(i) $K_*(\mathcal{B}) = (0,0)$;
(ii)индексното изображение на разширението

$$ind : K_1(\mathcal{B}(R^n, P)/\mathcal{K}) \to K_0(\mathcal{K})$$

е изоморфизъм.

• Като се използва индукция по размерността в **[25]** е доказана следната теорема:

Theorem 5.2.(**[25]**. Theorem 3.5) Нека P е "exhaustible"конус в $\mathbb{R}^d$. Тогава:
(i) $K_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P) = (0,0)$.
(ii) $K_*(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)/\mathcal{K}) = (0, \mathbb{Z})$
(iii)Индексното изображение $ind : K_1(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d, P)/\mathcal{K}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K})$ е изоморфизъм.

Дефиницията на "exhaustible"конусите е тромава и неудобна.
A. Aldridge в **[14]** доказва резултат по-силен от Теорема 5.2 в две направления: 1) той не налага условия на конуса P и 2) доказва резултат от KK-теорията, от който Теорема 5.2 е следствие. По такъв начин условието конусът да е "exhaustible"е необходимо само за доказателството и не е съществено.
Ще приведа тук и резултата на Aldridge:

Теорема 5.3 (Aldridge, **[14]** Thm 0.3) Нека P е полиедрален конус.
Тогава $\mathcal{B}$ е KK-свиваема

В заключение, ще отбележа, че при доказването на Теорема 5.3 в **[14]** и **[15]** съществено е използвано съществуването на Фредхолмов оператор с индекс единица.

2.6 В глава 6.

В глава 6 е разгледан интересния неевклидов пример, предоставен от дискретната група на Хайзенберг $H_3(\mathbb{Z})$ и неговата позитивна полугрупа P.
Дискретната тримерна група на Хайзенберг $H_3 = H_3(\mathbb{Z})$ може да се реализира като мултипликативната група на горно триъгълните матрици. Представяме $H_3 = H_3(\mathbb{Z})$ и нейната полугрупа P:

$$H_3 = \left\{ s = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}, \quad P = \{ s \in H_3 : \quad a, b, c \geq 0 \}$$

Ще отбележим, че P е нормална подполугрупа, която поражда H_3, и че $P \cap P^{-1} = \{e\}$.

Разглеждаме C^*-алгебрата на операторите на Тьоплиц, асоциирани с $H_3(\mathbb{Z})$ и P. Тя ще бъде означавана с $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$.

В глава 6 $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$ е представена като групоидна C^*-алгебра.
Това представяне е използвано за да бъде показано, че $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$ не е postliminal и да се построи композиционен ред с явно описани идеали и частни.

Резултатите, включени в тази глава са докладвани на международната конференция IECMSA-2019-Баку и са представени за публикуване в Доклади на БАН.

Главният резултат в тази глава е следната:

Теорема 6.0.3. За $\mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$ съществува редица от двустранни затворени идеали

$$\{0\} \subset I_0 \subset I_1 \subset I_{1d} \subset I_2 \subset I_3 = \mathcal{T}(H_3(\mathbb{Z}))$$

където $I_0 \cong \mathcal{K}$ и $I_3/I_2 \cong C^*(H_3(\mathbb{Z})$.
Освен това $I_2/I_{1d} \cong (C(T^2) \times \mathcal{K})^2$,

2.7 Списък на използваната литература

Списъкът на използваната литература е разположен на 3 страници и включва 51 заглавия. Четири от тях са мои публикации по дисертацията.

3 Декларация за автентичност

Авторът декларира, че дисертацията съдържа автентични резултати, получени от него. Използването на резултати от други учени е придружено със съответно цитиране.

Николай Петров Буюклиев

4 Апробация на дисертацията

Резултатите, включени в дисертацията са докладвани на следните места:

1. Научна сесия на ФМИ 2019, 2020, 2022.

2. Международна научна конференция, посветена на Джон Атанасов и Джон фон Нойман Шумен—2008

3. 21-ва международна конференция по теория на операторите и техните приложения (IWOTA 2010)–Berlin, 2010.

4. Международна Евроазиатска конференция по математически науки и техните приложения (IECMSA-2019), Баку-Азърбайджан, 2019

5 Списък на публикации, свързани с дисертацията

1 Buyukliev, N., K-Theory of the C^*-Algebra of Multivariable Wiener–Hopf Operators Associated with some Polyhedral Cones in $\mathbb{R}^n$, Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 91(1997), no. 1–2, 115–125.

2. Bujukliev, N., The C^*-algebra of Toeplitz operators of the discrete Heisenberg group H_3 submited in C. R. Acad. Bulg. Sci.

3 . Bujukliev,N.,An index formula in a class of groupoid C^*-algebras, to appear in Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.

4. Bujukliev, N. Linear cross-sections and Fredholm operators in a class groupoid C^* algebras, to appear in Ann. Univ.Sofia, Fac. Math. Inf.

6 Благодарности

Най-напред ще благодаря на Надя Б. за всички положени грижи и проявеното търпение.

Искам да изкажа искрената си признателност на доц. О. Христов за всестранната му помощ и подкрепа.

Не мога да подмина помощта на доц. Н. Иванов. Обсъжданията на разнообразни задачи и проблеми ми бяха много полезни, особено при коригирането на моята версия на английския език.

Искам да благодаря на проф. Н. Рибарска, без чиято помощ щях да се удавя в морето от административни пречки.

Изказвам и благодарностите си към всички колеги и приятели за всестранната подкрепа, която получих.

7 Литература

1. M. G. Krein, Integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments, Uspekhi Mat. Nauk, 1958, Volume 13, Issue 5(83), 3–120

2. Gohberg I, Krein M., Fundamental aspects of defect numbers, root numbers and indices of linear operators., Uspehi Mat. Nauk (N.S.). Vol 12, Issue 2(74), pp. 43-118 (1957).

3. L. A. Coburn, The C^*-algebra generated by an isometry, I, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 722-726

4. L. A. Coburn, The C^*-algebra generated by an isometry, II, Trans. Amer. Math. Soc., 137 (1969), 211-217.

5. L. Coburn and R. G. Douglas, On C^*-algebras of operators on a half-space. I, Inst. Hautes Etudes Sei. Publ. Math. 40 (1971), 59-67.

6. L. Coburn, R. G. Douglas, D. Schaeffer and I. Singer, On C^*-algebras of operators on a half-space. II. Index theory, Inst. Hautes Etudes Sei. Publ. Math. 40 (1971), 69-79.

7. A. Dynin, Multivariable Wiener–Hopf operators. I. Representations, Integral Equations Operator Theory 9 (4) (1986) 537–569

8. A. Nica, Some remarks on the groupoid approach to the Wiener-Hopf operators, JOT, **18**, 1987, 163-198.

9. A. Nica, Wiener-Hopf operators on the positive semigroup of a Haisenberg group, Preprint Series in Mathematics, Bukuresti, N62/1988.

10. E. Park, Index theory and Toeplitz algebras on certain cones in Z^2, JOT, 23, 1990, 125-146.

11. P. Muhly, J. Renault, C^*-algebras of multivariable Wiener-Hopf operators, TAMS, 274, 1982, 1-44.

12. Alexander Alldridge, Troels Johansen, An index theorem for Wiener-Hopf operators, Adv. Math. 218 (2008), no. 1, 163–201.

13. Alldridge,A., T.R. Johansen, Spectrum and analytical indices for the C^*-Algebra of Wiener–Hopf operators, J. Func. Anal. 249 (2) (2007) 425–453.

14. Alexander Alldridge, Convex polytopes and the index of Wiener-Hopf operators J. Oper. Theory 65:1(2011), 145–155.

15. Alexander Alldridge, Index Theory for Wiener-Hopf Operators on Convex Cones, in Infinite Dimensional Harmonic Analysis IV, Proceedings of the Fourth German-Japanese Symposium, 1-13, ed. by Joachim Hilgert, The University of Tokyo, Japan, 2007.

16. J. Renault, A groupoid approach to C^*-algebras, Lect. notes in Math., 793, Springer Verlag, New York, 1980.

17. R.G. Douglas, On the C^*-algebra of a one parameter semigroup of izometries, Acta Math., 1972.

18. R.G. Douglas, R. Howe, On the C^*-algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane, Trans. Amer. Math. Soc., **158**, 1971, 203-217.

19. H. Upmeier. Index Theory for Multivariable Wiener-Hopf Operators. J. Reine Angew. Math., 384:57–79, 1988.

20. H. Upmeier, Toeplitz C*-algebras on bounded symmetric domains Ann. of Math. (2), 119 (3) (1984), pp. 549-576

21. Upmeier, H., Toeplitz operators and index theory in several complex variables - Basel, Boston, Berlin Birkhauser, 1996

22. Connes, A.,Noncommutative geometry. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.

23. Connes, A. Non-commutative differential geometry. Publ. Math I.H.E.S. **62** (1985), 257-360.

24. Bujukliev, N. Linear cross-sections and Fredholm operators in a class groupoid C^* algebras, to appear in Ann. Univ.Sofia, Fac. Math. Inf.

25. Buyukliev, N., K-Theory of the C^*-Algebra of Multivariable Wiener–Hopf Operators Associated with some Polyhedral Cones in $\mathbb{R}^n$, Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 91(1997), no. 1–2, 115–125.

26. Bujukliev, N., The C^*-algebra of Toeplitz operators of the discrete Heisenberg group H_3 to appear in C. R. Acad. Bulg. Sci.

27. Bujukliev,N.,An index formula in a class of groupoid C^*-algebras, to appear in Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.

28. Renault, J., S. Sundar. Groupoids associated to Ore semigroup actions, Journal of Operator Theory 73, no. 2 (2015): 491–514.