

# РЕЦЕНЗИЯ

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:  
„Субдиференциален анализ на функции, подобни на изпъкналите  
(Subdifferential analysis of convex-like functions)“  
за придобиване на образователната и научна степен “Доктор”  
в професионално направление 4.5 Математика, докторска  
програма: "Изследване на операциите"

Автор: Матей Боянов Константинов

Рецензент: проф. дн Надежда Рибарска

31 май 2023г.

Пиша тази реценция в качеството ми на член на научното жури, съгласно Заповед № РД-38-113/6.03.2023 г. на Ректора на Софийския университет. Представеният дисертационен труд на тема “Субдиференциален анализ на функции, подобни на изпъкналите” (Subdifferential analysis of convex-like functions) е с обем от 79 страници и е написан на английски език. Състои от увод, три глави, заключение, апендикс и библиография, включваща 55 заглавия. Представен е автореферат на български език и автореферат на английски език (и двата в обем от 28 страници), както и всички други изискуеми по процедурата документи (включително доклад от системата за антиплагиатство). Приемам за рецензиране всички предоставени материали.

Матей Боянов Константинов е роден през 1994 година. Завършва Софийската математическа гимназия през 2013г. и веднага започва обучението си във Факултета по математика и информатика на Софийския университет “Св. Климент Охридски”, специалност математика. Дипломира се като бакалавър по математика през юли 2017г. По време на следването си има награди от Националната студентска олимпиада по математика и от Националната студентска олимпиада по компютърна математика. Прави магистратура в магистърска програма “Оптимизация” и я завършва отлично през 2019 г. с дипломна работа на тема “Изследване на модели за рекламиране” под ръководството на проф. дмн Михаил Кръстанов. От февруари 2020г. Матей Константинов е редовен докторант в докторска програма “Изследване на операциите” на ФМИ, СУ с научен ръководител проф. дн Надя Златева. Отчислен е предсрочно след успешна предзащита пред катедра “Изследване на операциите” на ФМИ, СУ през февруари 2023г. От април 2023г. е назначен като първо ниво изследовател във ФМИ, СУ.

Познавам Матей Константинов от 2018г., когато се яви на изборен курс Увод във функционалния анализ при мен. Смятам, че е много коректен и старателен. Специално искам да отбележа ентузиазираното му отношение към преподавателската дейност. По време на следването си, както и

като магистрант и докторант, той е водил упражнения по Вероятности и статистика, Диференциални уравнения и приложения, Диференциално и интегрално смятане – 1, Диференциално и интегрално смятане – 2, Изследване на операциите, Линеенно оптимиране, Математическо оптимиране. Чувала съм прекрасни отзиви за него като асистент от повечето от лекторите на съответните дисциплини. Също искам да отбележа огромната работа, която свърши по осигуряването на гладкото протичане на дистанционната част на конференцията 15-th International Workshop on Well-Posedness of Optimization Problems and Related Topics, Боровец 2021.

Дисертационният труд на Матей Константинов е в областта на негладкия анализ. Това е съвременна математическа дисциплина, част от така наречения вариационен анализ. Бурното развитие на тази част от математиката се дължи до голяма степен на осъзнаването, че негладките феномени са значително по-разпространени, отколкото се е смятало преди, както и на нуждите на оптимизацията и оптималното управление. По-конкретно дисертацията съдържа резултати относно проксимална регулярност на множества, функции с квадратична оценка отдолу и интегрируемост на субдиференциала на полунепрекъснати отдолу изпъкнали функции.

В първа глава и втора глава на дисертационния труд се изучават функции с квадратична оценка отдолу (primal lower-nice functions) и проксимално регулярни множества (prox-regular sets), като съответният клас от функции и съответният клас от множества са в естествена връзка помежду си. Тези класове са въведени съответно от Poliquin през 1991 г. (в крайномерно пространство) и от Poliquin и Rockafellar през 1996 г. и представляват естествено обобщение на изпъкналите, от една страна, и двукратно гладките, от друга страна, функции и множества. Изградена е богата теория около свойствата на тези класове, включваща регуляризация, интегрируемост, свойства от втори ред и др. В дисертационния труд са намерени характеристики на тези обекти, които не използват нормалната структура. Разбира се, това в някои случаи може да бъде изключително полезно.

Резултатите в първа и втора глава са получени за подмножества на хилбертово пространство и за функции, дефинирани в подмножества на хилбертово пространство. Богатата структура позволява да се правят много разглеждания, които по същество са геометрични. Като пример, грубо казано, едно затворено множество е равномерно проксимално регулярно с константа  $r$ , когато до всяка точка от границата му отвън може да бъде допряно кълбо с радиус  $r$ . Точната дефиниция включва понятието “проксимална нормала”. В първа глава на дисертационния труд е намерена вътрешна характеристика на тези множества (която не използва нормали). За съжаление, характеристиката е известна, но е получена по нов начин – по същество чрез модула на изпъкналост на хилбертово пространство.

Втора глава е централната за тази дисертация. Въведен е нов клас

от функции – равномерно епиграфични отдолу – който е малко по-широк от класа на функциите с квадратична оценка отдолу (утвърдено и широко изучавано понятие). Установена е характеристика на подмножествата на декартовото произведение на хилбертовото пространство и реалната права, които са епиграфични на функции от посочения клас. Една забележка: в доказателството на теорема 2.2.1 заключението е получено за точки от множеството, близо до  $(x, f(x))$ , а не такива, които са близо до  $(x, \alpha)$ . Предполагам, че това е лесно поправимо. След това с помощта на метод, близък до използвания в първа глава, е намерена характеристика (с точност до умножение на константа с  $\sqrt{2}$ ) на такива епиграфични, която не използва нормали. Като следствие се получава основният резултат – Теорема 2.4.1 – характеристика на равномерно епиграфичните отдолу функции. Смятам, че разликата в константата не е съществена. Като цяло доказателствата са изключително технически, а резултатът е интересен.

Трета глава на дисертацията е посветена на ново доказателство на класическия резултат на Moreau-Rockafellar за интегрируемост на субдиференциала на полунепрекъснати отдолу изпъкнали функции, дефинирани в банахово пространство (под това се разбира, че условието субдиференциалът на  $g$  да съдържа субдиференциала на  $f$  влече, че  $f$  и  $g$  се различават с константа). Гради се върху доказателство, предложено от Милен Иванов и Надя Златева, но с друга конструкция на апроксимиращите редици.

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в три статии – две в *Journal of Convex Analysis* (списанието има импакт фактор) и една в *Journal of Applied Analysis* (списанието има импакт ранг). Трите статии са съвместни с научния ръководител.

Част от резултатите от дисертацията са докладвани на престижни научни форуми: 10-th International Conference on Numerical Methods and Applications August 22 – 26 August, 2022, Borovets (Bulgaria) и 15-th International Workshop on Well-Posedness of Optimization Problems and Related Topics June 28 – July 2, 2021, Borovets (Bulgaria). Матей Константинов е взел участие и в 14-th International Workshop on Well-Posedness of Optimization Problems and Related Topics August 20-24, 2018, Borovets (Bulgaria) и в 46 – тото Зимно Училище по Абстрактен Анализ, Януари 2018, Свратка (Чехия).

Получените резултати в дисертационния труд на Матей Константинов и публикациите, основани на тези резултати, многократно надхвърлят минималните национални изисквания (по чл. 26, ал. 2 и 3 на ЗРАСРБ) и съответно на допълнителните изисквания на СУ “Св. Климент Охридски” за придобиване на образователна и научна степен “доктор” в професионално направление 4.5 Математика (Изследване на операциите).

Представени са автореферат на български език и автореферат на английски език, с обем от 28 страници и 55 заглавия цитирана литература. Авторефератите отразяват прецизно и изчерпателно резултатите, описани в дисертацията.

Забележката ми е, че дори при повърхностно четене се забелязват доста грешки в езика, както и дребни лесно отстраними неточности. Също би било добре да се представи и пълен текст на статията, публикувана в Journal of Applied Analysis.

Дисертацията съдържа оригинални резултати. Позоваването на чужди резултати е изчерпателно и коректно. Изложението е достъпно. Дисертационният труд съдържа научни резултати, които са оригинален принос към научната област и които могат да бъдат продължени в бъдещи изследвания.

В заключение, дисертационният труд на Матей Константинов представлява оригинално изследване в областта на субдиференциалното смятане. Получените резултати са публикувани във видими списания. Потвърждавам, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ "Св. Климент Охридски" за придобиване от кандидата на образователната и научна степен "доктор" в професионално направление 4.5 Математика. В частност, кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по процедурата научни трудове.

**Въз основа на гореизложеното препоръчвам на научното жури да присъди на Матей Боянов Константинов образователната и научна степен "доктор" в професионално направление 4.5 Математика, докторска програма "Изследване на операциите".**

31.05.2023

(проф. дн Н.Рибарска)