

Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Физически факултет
Катедра Теоретична физика



**Критични явления и квантова
метрология със силно корелирани
квантово-оптични системи**

**Автореферат на дисертация за
получаване научната степен "Доктор
на науките"**

**Професионално направление
4.1 "Физически науки"**

доц. д-р Петър Александров Иванов

Съдържание

1	Увод	6
2	Физика на йони в капан на Паул	10
2.1	Принцип на работа на капана на Паул	10
2.2	Равновесни Положения	13
2.2.1	Хармонично приближение	15
2.2.2	Едномерен йонен кристал	15
2.2.3	Трептения по z	16
2.2.4	Напречни трептения	17
2.3	Локални фонони	18
2.4	Взаимодействие с Лазерно Поле	20
2.5	Приближение на Ламб-Дике	23
2.6	Заклучение	25
3	Квантов фазов преход в модела на Джейнс-Къминг	26
3.1	Физическа реализация на модела на Джейнс-Къмингс-Хъбард с йони в капан на Паул	27
3.2	Аналитични приближения към фазовата диаграма на модела на Джейнс-Къмингс-Хъбард	30
3.2.1	Ефективен модел при силно свързване	33
3.2.2	Фермионно приближение	33
3.3	Обменен магнетизъм. Взаимодействие на Джейнс-Къмингс-Хъбард между V -системи	35
3.3.1	Спин-1/2 анизотропен XXZ модел на Хайзенберг	37
3.3.2	Модел на Хайзенберг за спин $s = 1$	37
3.4	Заклучение	38
4	Квантов Магнитен Структурен Фазов Преход в модела на Ян-Телер; Физична Реализация с йони в линейна уловка на Паул	40
4.1	Колективен модел на Ян-Телер-Дике	40
4.2	Нормална Фаза	42
4.3	Свърх-Радиантна Фаза	43
4.4	Квантово симулиране на кооперативен ефект на Ян-Телер в едномерен йонен кристал	44
4.4.1	Приближение на средното поле	46

4.5	Гаусови флуктуации	47
4.6	Заклучение	49
5	Квантов магнетизъм в смесени спинови системи. Реализация със смесен йонен кристал.	50
5.1	Магнитен градиент в z -посока	50
5.2	Модел на Изинг	52
5.3	Заклучение	54
6	Вмъкване на адиабатен магнитен поток и създаване на топологични Лафлин състояния на Ридбергови поларитони	55
6.1	Структура на фотонния резонатор	55
6.2	Адиабатен пренос на поток без взаимодействие	57
6.3	Заклучение	58
7	Въведение в квантовата информационна геометрия	59
7.1	Чисти състояния. Квантов геометричен тензор.	59
7.2	Смесени състояния. Разстояние на Бюрес.	61
7.2.1	Разстояние между две термални разпределения	62
7.3	Квантова Метрология	63
7.4	Квантова Метрология на Унитарна Пертурбация	65
7.5	Хайзенбергова граница на прецизност	66
7.6	Заклучение	67
8	Адиабатна квантова метрология със силно корелирани квантови системи	68
8.1	Мотивация	68
8.2	Модел на Дике	69
8.2.1	Квантов Фазов Преход в Модела на Дике	69
8.3	Ниско-енергетичен спектър	70
8.3.1	Разделяне на времевата скала за подготовка и измерване	73
8.4	Физична реализация с йони в капан на Паул	75
8.5	Приложение за измерване на слаби сили	75
8.6	Заклучение	78
9	Измерване на слаби сили с йон и система от йони в капан на Паул	80

9.1	Мотивация	80
9.2	Модел на Джейнс-Къминг	80
9.3	Система от N йона като квантов сензор на слаби сили.	85
9.4	Физическа реализация с йони в капан на Паул.	86
9.5	Измерване на осцилиращи сили с голяма честотна разлика спрямо модата на център на масите	87
9.6	Заклучение	90
10	Квантова метрология със системи показващи дисипативен фазов преход	91
10.1	Мотивация	91
10.2	Мултипараметрична Квантова Метрология	92
10.3	Едновременно измерване на два самоспрегнати параметри, характеризиращи отместване във фазовото пространство	95
10.4	Заклучение	100
11	Квантов Термометър	101
11.1	Мотивация	101
11.2	Принцип на работа на квантовия термометър	102
11.3	Реализация на квантов термометър с йони в капан на Паул	104
11.4	Протокол за температурно измерване	105
11.5	Адиабатен Преход	106
11.6	Заклучение	109
12	Квантов Хаос в Квантов Модел на Раби	110
12.1	Мотивация	110
12.2	Квантов Модел на Раби	111
12.3	Мярка за квантов хаос	112
12.4	Преход към равновесие	114
12.5	Заклучение	115
13	Научни Приноси	116
14	Публикации, използвани в дисертацията	127

И Виделината свети в тъмнината, и
тъмнината Я не обзе.

С Благодарности към

Баща ми

Семейството ми

Роза Димитрова (леля Розка)

1 Увод

Изучаването на квантови системи, които проявяват квантов фазов преход е от голям интерес за съвременната физиката. Такива модели обикновено са неинтегруеми и аналитично описание е възможно само в термодинамична граница. Квантовият фазов преход е свързан с затваряне на енергетичния процеп между основната енергия и първата възбудена енергия в точката на преход. Обикновено квантовият фазов преход се описва с параметър на подреждане, който се изменя неаналитично в точката на преход. Наблюдението на квантов фазов преход изисква ниски температури и контрол на параметрите характеризиращи системата. Такива условия се срещат в квантово оптични системи, където ниска температура близка до абсолютната нула се постига чрез използване на лазерно охлаждане, а контрола върху параметрите се осъществява чрез прилагането на лазерни полета.

Идеята на квантовия симулатор тук може да бъде приложена, а именно математическото сходство между даден модел и симулирания в контролирана квантово оптична система. Такава система, която може да бъде използвана за квантови симулации е лазерно охладени йони в капан на Паул. Вътрешните състояния на йона формират ефективна спин система, а външните степени на свобода се описват от колективни моди. Лазерни полета създават връзка между спиновете и трептенията на йонния кристал, което позволява симулирането и изучаването на различни спинови и спин-бозонни модели, които могат да проявяват квантов фазов преход. Също така прочитането на информацията кодирана в спиновите и вибрационните състояния може да се осъществи с голяма прецизност с помощта на Рамзи спектроскопия.

Уводната Глава 2 е посветена на основните понятия на йони в капан на Паул. Главите 3, 4, 5, и 6 са посветени на изучаването на критични явления в квантово оптични системи. Предложено е симулирането и изучаването на фазовата диаграма на модела на Джейнс-Къминг-Хъбард с йонен кристал, който описва квантов фазов преход на поларитони между фазата на Мот изолатор и свръх-флуидна фаза. В глава 4 са предложени модели, в които може да се наблюдава магнитен структурен преход и формирането на спин-фононен кондензат. Те се основават на симетричната връзка на Ян-Телер между локалните напречни фонони и спиновите състояния на йоните в капан на Паул. Глава 5 е посветена на спин магнетизъм в линеен йонен кристал. Глава 6 изучава създаването

на изкуствено магнитно поле за фотони в непланарен резонатор. Енергетичният спектър на фотоните в резонатора се описва с нива на Ландау. Взаимодействието на фотоните и Ридбергови атоми води до формирането на поларитонно възбуждане, което може да се разглежда като квази-частица. Силното Ридбергово дипол-дипол взаимодействие създава взаимодействие между поларитоните и по този начин и между фотоните в резонатора. Показано е, че наличието на магнитно поле и силно взаимодействие на отблъскване между фотоните може да създаде фотонен аналог на Лафлин състоянията в полу целочисления квантов ефект на Хол.

Наличието на квантов фазов преход води до рязка промяна на основното състояние на системата около точката на преход. От гледна точка на информационната геометрия това означава, че разстоянието между две близки квантови състояния разделени от критична точка може да бъде голямо. Информационната геометрия изучава геометрията на квантовите състояния, които зависят от даден параметър или набор от параметри. Инфинитизимално малкото изменение на параметрите води до различимост между квантовите състояния, което позволява да дефинираме диференциално малко разстояние между тях. В най-общия случай метричният тензор в информационното пространство описва Риманова геометрия. В точката на фазов преход метричният тензор дивергира, което може да се използва като сигнал за критичност в квантови системи. Различимостта на квантовите състояния и метричният тензор са тясно свързани с квантовата метрология, която изучава прецизността при определянето на неизвестен параметър чрез използването на квантова система. Наистина, колкото повече квантово състояние е чувствително към изменението на даден параметър, толкова по-точно той може да бъде определен. Следователно, метричният тензор и прецизността при измерване са тясно свързани. Като мярка за чувствителност в квантовата метрология се използва квантовата Фишер информация. Статистическата неопределеност при измерването на даден параметър е обратно пропорционална на Фишер информацията. Следователно колкото по-голяма Фишер информация имаме толкова по-точно сме определили неизвестния параметър. Може да се покаже, че квантовата Фишер информация е пропорционална на метричният тензор. Тази тясна връзка показва, че свръх-прецизна квантова метрология може да се постигне в системи показващи квантов фазов преход.

Глава 7 въвежда основните понятия като разстояние и метричен тен-

зор в параметричното пространство на състоянията. Също така е показана връзката между метричния тензор и квантовата Фишер информация. В глава 8 е предложена квантова метрология в модела на Дике, който описва квантов фазов преход от втори род между нормална и свръхрадиантна фази. Показано е, че системата е чувствителна към параметри нарушаващи симетрията на модела. Такива параметри могат да бъдат например честотната разлика между лазерната честота и честотата на атомен преход или слаби електрични сили. Наличието на квантов фазов преход води до увеличаване на сигнала, така че неизвестния параметър може да бъде определен с Хайзенбергова прецизност. Моделът на Дике може да бъде реализиран с йони в капан на Паул, където колективните степени на свобода се формират от вътрешните йонни състояния, а бозонната степен на свобода от вибрационната мода. В глава 9 е предложен квантов сензор на слаби сили с един йон или система от йони в капан на Паул. Показано е, че сили от порядък 10^{-24}N могат да бъдат измерени чрез наблюдение на времевите осцилации на спиновите състояния на йона. В глава 10 е предложена квантова метрология със системи показващи дисипативен фазов преход. Такива фазови преходи могат да бъдат наблюдавани в отворени квантови системи. Балансът между кохерентната и дисипативната динамика води до формирането на неравновесно състояние с матрица на плътност, която може да проявява неаналитично поведение в точката на преход. Забележително, около точката на преход дисипативната система е чувствителна към пертурбации нарушаващи симетриата ѝ. Това позволява да определим двата параметъра характеризиращи оператора на отместване с голяма точност.

Глава 11 е посветена на оптималното измерване на ниски температури в линеен йонен кристал. След Доплеровото лазерно охлаждане, вибрационното състояние на йоните в капана на Паул е термално с температура от порядък на $100\ \mu\text{K}$. Прилагането на лазерно поле свързва трептенията на кристала с колективните спин състояния на йоните, така че информацията за температурата може да бъде прехвърлена върху атомните заселености. Температурата се определя оптимално чрез проактивни спин измервания.

Глава 12 свързва наличието на квантов фазов преход с квантовия хаос. Въпреки, че квантовата механика е линейна теория, квантови системи могат да проявяват квантов хаос. Наличието на квантов хаос може да се дефинира чрез статистическото разпределение на енергетичната разлика на нивата или чрез експоненциалното нарастване на неедно-

ременната корелационна функция. Квантовият модел на Раби описва взаимодействието между фотон и спин и може да прояви квантов фазов преход в ефективна термодинамична граница. Показано е, че в свръхрадиантната фаза система проявява квантов хаос и може да достигне до състояние на равновесие, в което спиновите времеви осцилации намаляват.

2 Физика на йони в капан на Паул

2.1 Принцип на работа на капана на Паул

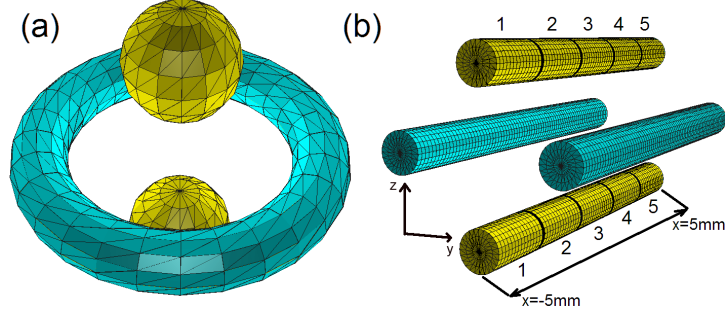
Потенциален минимум в тримерното пространство не може да бъде създаден с прилагането само на електростатични полета (Закон на Гаус). Две техники съществуват, които позволяват устойчиво улавяне на заредени частици. Уловката на Пенинг използва силно магнитно поле и електростатично поле, което води до създаването на тримерен хармоничен минимум, където заредената частица осцилира в равнина перпендикулярна на магнитното поле. Тази система позволява измерването на различни фундаментални константи с голяма прецизност. Понеже, йонът осцилира бързо, уловката на Пенинг не е подходяща за целите на квантовата информатика. Друга възможна система е линейната уловка (капан) на Паул, която се състои от четири електрода в квадруполна подредба [1]. Тази система заменя прилагането на магнитно поле с бързо осцилиращо радио-честотно променливо електрично поле (rf) и константно (dc) електрично поле, което води до създаване на стабилен хармоничен потенциален минимум. В тази глава ще разгледаме уравненията на движение на заредена частица в капан на Паул, където електричният потенциал има следния вид, виж Фиг. 1

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & \frac{U_{dc}}{2}(\alpha_{dc}x^2 + \beta_{dc}y^2 + \gamma_{dc}z^2) \\ & + \frac{U_{rf}}{2} \cos(\omega_{rf}t)(\alpha_{rf}x^2 + \beta_{rf}y^2 + \gamma_{rf}z^2), \end{aligned} \quad (1)$$

където U_{rf} и U_{dc} са радио-честотното и съответно постоянното напрежение приложени на електродите. Уравнението на Лаплас $\nabla^2\Phi(x, y, z) = 0$ налага ограничение на геометричните коефициенти, а именно $\alpha_{dc} + \beta_{dc} + \gamma_{dc} = 0$ и $\alpha_{rf} + \beta_{rf} + \gamma_{rf} = 0$. Възможно решение е $-\alpha_{dc} = \beta_{dc} + \gamma_{dc}$, $\alpha_{rf} = 0$, $\beta_{rf} = -\gamma_{rf}$ което е изпълнено за уловка на Паул с статично dc поле приложени по оста x и динамично улавяне по равнината $y - z$.

Движението на заредената частица с маса m и заряд e се описва от уравнение на Нютон $m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$, където силата е $\vec{F}(x, y, z) = -e\vec{\nabla}\Phi(x, y, z)$. Използвайки изразът за потенциала (2), класическите уравнения на движение се трансформират в уравнение на Матьо

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + (a_u - 2q_u \cos(2\tau))u(\tau) = 0, \quad u = y, z, \quad (2)$$



Фигура 1: Геометрия на електродите, които създават стабилен потенциален минимум.

където $2\tau = \omega_{\text{rf}}t$. За линейна уловка на Паул, коефициентите a_u и q_u в равнината $y - z$ имат следния вид [2]:

$$q_y = \frac{2|e|U_{\text{rf}}\beta_{\text{rf}}}{m\omega_{\text{rf}}^2}, \quad a_y = -\frac{4|e|U_{\text{dc}}\beta_{\text{dc}}}{m\omega_{\text{rf}}^2}, \quad (3)$$

$$q_z = -\frac{2|e|U_{\text{rf}}\gamma_{\text{rf}}}{m\omega_{\text{rf}}^2}, \quad a_z = \frac{4|e|U_{\text{dc}}\gamma_{\text{dc}}}{m\omega_{\text{rf}}^2}. \quad (4)$$

Общото решение на уравнението на Матю може да се запише в следния вид:

$$u(t) = Ae^{i\omega_u t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{2n} e^{in\omega_{\text{rf}} t} + Be^{-i\omega_u t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{2n} e^{-in\omega_{\text{rf}} t}, \quad (5)$$

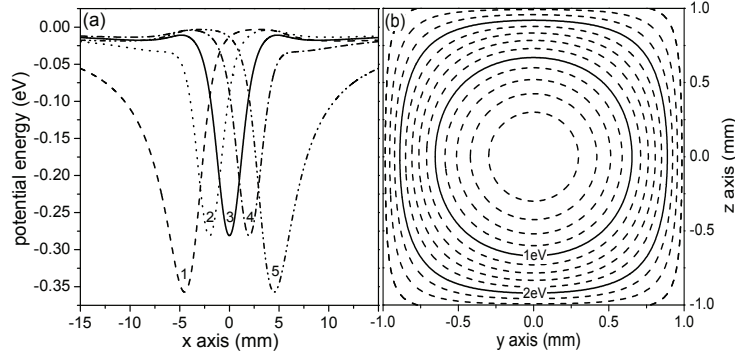
където $\omega_u = \beta_u \frac{\omega_{\text{rf}}}{2}$. Важно свойство на общото решение е, че коефициентите β_u и C_{2n} са функции само на a_u и q_u и не зависят от началните условия.

Замествайки (5) в (2) и приравнявайки изразите пред A и B получаваме

$$-\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{2n} e^{2ni\tau} (2n + \beta_u) + \{a_u - 2q_u \cos(2\tau)\} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{2n} e^{2ni\tau} = 0 \quad (6)$$

Приравнявайки коефициентите пред $e^{2ni\tau}$ за всяко n получаваме следната рекурентна връзка

$$C_{2n+2} - D_{2n} C_{2n} + C_{2n-2} = 0, \quad D_{2n} = \frac{(a_u - (2n + \beta_u)^2)}{q_u}. \quad (7)$$



Фигура 2: а) Хармоничният потенциал по оста x . б) Еквипотенциални линии в радиалната равнина y - z .

От тук следва, че

$$C_{2n} = \frac{C_{2n+2}}{D_{2n} - \frac{1}{D_{2n-2} - \frac{1}{D_{2n-4} - \frac{1}{\dots}}}}, \quad (8)$$

както и

$$C_{2n} = \frac{C_{2n-2}}{D_{2n} - \frac{1}{D_{2n+2} - \frac{1}{D_{2n+4} - \frac{1}{\dots}}}}. \quad (9)$$

За $n = 0$ от ур. (7) получаваме

$$C_2 - \frac{(a_u - \beta_u^2)}{q_u} C_0 + C_{-2} = 0. \quad (10)$$

Накрая, използвайки рекурентите връзки (8) и (9) получаваме

$$\beta_u^2 = a_u - q_u \left(\frac{1}{D_2 - \frac{1}{D_4 - \frac{1}{\dots}}} + \frac{1}{D_{-2} - \frac{1}{D_{-4} - \frac{1}{\dots}}} \right). \quad (11)$$

Стабилни решения се получават за $0 < \beta_u < 1$, така че в най-ниско приближение за ур. (11) имаме

$$\beta_u^2 \approx a_u - q_u \left(\frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_{-2}} \right) \approx a_u + \frac{q_u^2}{2}, \quad (12)$$

което дава $\beta_u = \sqrt{a_u + \frac{q_u^2}{2}}$, което е валидно за $q_u, a_u \ll 1$. За траекторията на заредената частица получаваме

$$u(t) = A \{ e^{i\beta_u \frac{\omega_{rf} t}{2}} (C_0 + C_2 e^{i\omega_{rf} t} + C_{-2} e^{-i\omega_{rf} t}) \} \quad (13)$$

$$+e^{-i\beta_u \frac{\omega_{\text{rf}} t}{2}} (C_0 + C_2 e^{-i\omega_{\text{rf}} t} + C_{-2} e^{i\omega_{\text{rf}} t})\}. \quad (14)$$

Отчитайки връзката $C_0 = C_{-2} D_{-2} = C_2 D_2$ както и $D_2 = \{a_u - (\beta_u - 2)^2\}/q_u \approx -\frac{4}{q_u} = D_{-2}$ в най-ниско приближение за движението на заредената частица в уловка на Паул имаме

$$u(t) = 2AC_0 \cos\left(\beta_u \frac{\omega_{\text{rf}} t}{2}\right) \left(1 - \frac{q_u}{2} \cos(\omega_{\text{rf}} t)\right). \quad (15)$$

Решението показва, че заредената частица извършва хармонично движение с честота $\omega_u = \beta_u \omega_{\text{rf}}/2$, което е модулирано с малка осцилираща компонента наречена микродвижение с rf честота. Статичния потенциал по аксиалното направление x създава хармонично движение с честота $\omega_x = \sqrt{|q|U_{\text{dc}}\alpha_{\text{dc}}/m}$. Потенциалът в радиално направление може да се апроксимира като ефективен хармоничен потенциал $\Phi_{\text{eff}}(x, y) = |q|\|\nabla\Phi(x, y)\|^2/4m\omega_{\text{rf}}^2$, виж Фиг.2.

2.2 Равновесни Положения

Нека да разгледаме система от N йона със заряд e и маса m в линейна уловка на Паул с честоти ω_α , където $\alpha = x, y, z$. Потенциалната енергия на системата се състои от хармоничен потенциал и взаимно Кулоново отблъскване

$$V = \frac{m}{2} \sum_\alpha \sum_{j=1}^N \omega_\alpha^2 r_{\alpha,j}^2 + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq k}^N \left(\sum_\alpha (r_{\alpha,j} - r_{\alpha,k})^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

където с $\vec{r}_j = (r_{x,j}, r_{y,j}, r_{z,j})$ бележим радиус вектора на йон j . Равновесните положения на йоните се определят от условието за баланс между Кулоновото отблъскване и хармоничната сила, което се изразява чрез

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r_{\alpha,j}} \right)_0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (17)$$

където индекса 0 означава, че частната производна на потенциала (16) е пресметната в равновесното положение $r_{\alpha,j}^0$ на йон j . Уравнение (17) е условие за минимум на потенциалната енергия (16), което определя равновесните положения на йоните. Частната производна на потенциала V може да се запише като

$$\frac{\partial V}{\partial r_{\alpha,j}} = m\omega_\alpha^2 \left(r_{\alpha,j} - \frac{l^3 \omega_z^2}{\omega_\alpha^2} \sum_{p \neq j}^N \frac{(r_{jp})_\alpha}{|r_{jp}|^3} \right). \quad (18)$$

Тук сме въвели обозначенията $(r_{j,p})_\alpha = r_{\alpha,j} - r_{\alpha,p}$ и съответно $|r_{jp}| = (\sum_\alpha (r_{\alpha,j} - r_{\alpha,p})^2)^{\frac{1}{2}}$. Параметърът $l = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m \omega_z^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ има размерност на метър и характеризира средното разстояние между йоните. За стандартни експериментални параметри средното разстояние между йоните е приблизително $10 \mu\text{m}$, докато размера на вълновата функция на йона в основно вибрационно състояние е от порядък 10nm . Следователно в добро приближение може да се пренебрегне припокриването на вълновите функции на два съседни йона, така че квантовата статистика (Бозе и Ферми) не играе съществена роля в линейната уловка на Паул. Условието (17) представлява система от N алгебрични уравнения за равновесните положения, за която е нужно числено решаване. В зависимост от отношенията на честотите на уловката, йоните могат да кристализират в линейна, двумерна или тримерна структура. В случая когато аксиалната честота ω_z е много по-малка от честотите в радиално направление $\omega_z \ll \omega_{x,y}$ йоните се подреждат в едномерен кристал, така че $r_{\alpha,j}^0 = (0, 0, lu_j)$, където u_j са безразмерни равновесни положения. Отчитайки, че в този случай $(r_{jp}^0)_\alpha = l\delta_{\alpha,z}(u_j - u_p)$ и $|r_{jp}^0| = l|u_j - u_p|$, условието (17) е [3, 4]

$$u_j - \sum_{n=1}^{j-1} \frac{1}{(u_j - u_n)^2} + \sum_{n=j+1}^N \frac{1}{(u_j - u_n)^2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Когато йоните заемат равновесните си положения, йонният кристал може да трепти колективно в $3N$ вибрационни моди, което е вследствие на малките отклонения (флуктуации) около $r_{\alpha,j}^0$. При ниски температури тези флуктуации имат чисто квантов произход. Нека да разгледаме осцилациите на йоните около равновесните положения, $\hat{r}_{\alpha,j} = r_{\alpha,j}^0 + \delta\hat{r}_{\alpha,j}$, където $\delta\hat{r}_{\alpha,j}$ са малки отклонения около $r_{\alpha,j}^0$. Хамилтонианът на системата описващ йонните трептения е

$$\hat{H} = \sum_\alpha \sum_j^N \frac{\hat{p}_{\alpha,j}^2}{2m} + \frac{m}{2} \sum_\alpha \sum_j^N (r_{\alpha,j}^0 + \delta\hat{r}_{\alpha,j})^2 \quad (20)$$

$$+ \frac{e^2}{2} \sum_{j \neq k}^N \left(\sum_\alpha (r_{\alpha,j}^0 + \delta\hat{r}_{\alpha,j} - r_{\alpha,k}^0 - \delta\hat{r}_{\alpha,k})^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

2.2.1 Хармонично приближение

В случая на малки трептения е удобно да разложим потенциалът (17) в ред на Тейлър около $r_{\alpha,j}^0$, което дава

$$\hat{V} = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j}^N \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r_{\alpha,i} \partial r_{\beta,j}} \right)_0 \delta \hat{r}_{\alpha,i} \delta \hat{r}_{\beta,j} + O(\delta r_{\alpha,i}^3), \quad (22)$$

където V_0 е константен член в развитието. Пресмятайки втората производна на V получаваме за хамилтониана следния израз

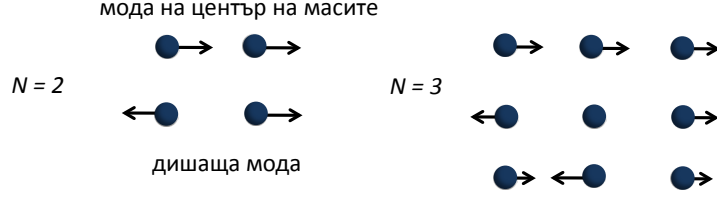
$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{p}_{\alpha,j}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_{\alpha}^2 \delta \hat{r}_{\alpha,j}^2 \right) + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{p \neq j}^N \frac{Q_{jp}^{\alpha,\beta}}{|r_{jp}^0|^5} \right) \delta \hat{r}_{\alpha,j} \delta \hat{r}_{\beta,p} \\ & - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i \neq j}^N \frac{Q_{ij}^{\alpha,\beta}}{|r_{ij}^0|^5} \delta \hat{r}_{\alpha,i} \delta \hat{r}_{\beta,j}, \end{aligned} \quad (24)$$

където $Q_{i,j}^{\alpha,\beta} = 3(r_{i,j}^0)_{\alpha}(r_{i,j}^0)_{\beta} - \delta_{\alpha,\beta}|r_{i,j}^0|^2$. Първият член в скобите в (24) описва свободните трептения на йоните в трите направления $\alpha = x, y, z$. Ефектът от Кулоновото взаимодействие се дава от останалите два члена в (24). В хармонично приближение, хамилтонианът (24) е квадратичен по отклоненията $\delta \hat{r}_{\alpha,j}$. Понеже Кулоновото взаимодействие свързва трептенията, то система от N йона в хармонично приближение може да се разгледа като система от N свързани осцилатори. Такава система може да трепти колективно в $3N$ различни моди. Колективните честоти зависят от формата на йонния кристал, дали е едномерен, двумерен или тримерен, тоест от условието за равновесните положения. Удобно е да разгледаме всеки случай поотделно, като процедурата за намиране на колективните трептения е обща и за трите случая.

2.2.2 Едномерен йонен кристал

Когато честотите на уловката в радиално напречно направление са много по-големи от честотата в аксиално направление $\omega_{x,y} \gg \omega_z$ условието за равновесие води до едномерна структура по оста на капана. В този режим флуктуациите около равновесните положения се декоплират, тоест трептенията във всяко едно направление стават независими. Това води до опростяване на хамилтониана (24), който може да се запише по следния начин:

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z. \quad (25)$$



Фигура 3: Колективни трептения в аксиално направление на система от два и три йона.

Всеки един от членовете в (25) описва колективните трептения в съответната посока.

2.2.3 Трептения по z

Нека да разгледаме първо трептенията по оста на линейната уловка. Хамилтонианът може да се запише като

$$\hat{H}_z = \sum_{j=1}^N \frac{\hat{p}_{z,j}^2}{2m} + \frac{m\omega_z^2}{2} \sum_{i,j=1}^N B_{i,j}^z \delta \hat{r}_{z,i} \delta \hat{r}_{z,j}. \quad (26)$$

Тук $B_{i,j}^z$ е $(N \times N)$ матрица със следния вид

$$B_{i,j}^z = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{p \neq j}^N \frac{1}{|u_p - u_j|^3}, & (i = j), \\ -\frac{2}{|u_i - u_j|^3}, & (i \neq j), \end{cases} \quad (27)$$

Хамилтонианът (26) описва система от N свързани хармонични осцилатора, с константа на връзката пропорционална на $-2/|u_i - u_j|^3$. Колективните честоти на трептения по оста z се намират като диагонализираме матрицата $B_{i,j}^z$, тоест като решим задачата за собствени вектори и собствени стойности

$$\sum_{i=1}^N B_{i,j}^z b_i^{(p)} = \gamma_{z,p} b_j^{(p)}. \quad (28)$$

Собствените вектори са ортонормирани $\sum_{j=1}^N b_j^{(n)} b_j^{(m)} = \delta_{n,m}$ и изпълняват условието за пълнота, $\sum_{p=1}^N b_i^{(p)} b_j^{(p)} = \delta_{i,j}$. Колективните моди на йонните трептения се дефинират чрез $\hat{Q}_p(t) = \sum_{j=1}^N b_j^{(p)} \delta \hat{r}_{z,j}(t)$. Каноничният

импулс, спрегнат на \hat{Q}_p е $\hat{P}_p(t) = m \frac{d\hat{Q}_p(t)}{dt}$. Хамилтонианът описващ трептенията на йонния кристал по оста z е

$$\hat{H}_z = \sum_{p=1}^N \frac{\hat{P}_p^2}{2m} + \frac{m}{2} \sum_{p=1}^N \omega_p^2 \hat{Q}_p^2, \quad (29)$$

където $\omega_p = \omega_z \sqrt{\gamma_p}$ са колективните честоти. На фигура 3 са показани трептенията на линеен кристал от два и три йона. Най-ниската мода е център на масите, в която йоните трептят колективно с една и съща по големина амплитуда равна на $1/\sqrt{N}$ и честотата равна на честотата на уловката, $\omega_{c.m.} = \omega_z$, която не зависи от броя йони в капана. Следващата по енергия мода е дишащата мода с честота $\omega_b = \sqrt{3}\omega_z$, в която амплитудите на трептене за кристал от два йона са отново равни, но противоположни по посока. Отново и за тази мода важи свойството, че съответната честота не зависи от броя йони.

Каноничното квантуване на \hat{Q}_p и \hat{P}_p , води до $[\hat{Q}_p, \hat{P}_k] = i\hbar\delta_{pk}$. Удобно е да се въведат оператори на раждане \hat{a}_p^\dagger и унищожение \hat{a}_p на квант енергия в p -тата вибрационна мода. Използвайки стандартните връзки

$$\hat{Q}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_k}}(\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k), \hat{P}_k = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_k}{2}}(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k), \quad (30)$$

получаваме за хамилтониана \hat{H}_z следния израз:

$$\hat{H}_z = \hbar \sum_{k=1}^N \omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (31)$$

2.2.4 Напречни трептения

Аналогично на предния случай, хамилтонианът описващ напречните трептения около равновесните положения има следния вид

$$\hat{H}_\perp = \hat{H}_x + \hat{H}_y, \quad (32)$$

$$\hat{H}_{\alpha'} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_{\alpha',i}^2}{2m} + \frac{m\omega_{\alpha'}^2}{2} \sum_{i,j=1}^N B_{i,j}^{\alpha'} \delta \hat{r}_{\alpha',i} \delta \hat{r}_{\alpha',j}, \quad (33)$$

където $\alpha' = x, y$. Матрицата $B_{i,j}^{\alpha'}$ има следния вид

$$B_{i,j}^{\alpha'} = \begin{cases} 1 - \frac{\omega_z}{\omega_{\alpha'}} \sum_{p \neq j}^N \frac{1}{|u_p - u_j|^3}, & (i = j), \\ \frac{\omega_z}{\omega_{\alpha'}} \frac{1}{|u_i - u_j|^3}, & (i \neq j), \end{cases} \quad (34)$$

Нека представим малките отклонения $\delta\hat{r}_{\alpha',j}$ и съответните канонични импулси $\hat{p}_{\alpha',j}$ използвайки оператори на раждане и унищожение на колективно трептене в p -тата мода:

$$\delta\hat{r}_{\alpha',j} = \sum_{p=1}^N \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_{p,\alpha'}}} b_j^{(p)\alpha'} (\hat{a}_p^\dagger + \hat{a}_p), \quad \hat{p}_{\alpha',j} = i \sum_{p=1}^N \sqrt{\frac{\hbar m \omega_{p,\alpha'}}{2}} b_j^{(p)\alpha'} (\hat{a}_p^\dagger - \hat{a}_p). \quad (35)$$

Тук $\vec{b}^{(p)\alpha'}$ ($p = 1, 2, \dots, N$) са собствените вектори на матрицата $B_{i,j}^{\alpha'}$, тоест $B_{i,j}^{\alpha'} b_j^{(p)\alpha'} = \mu_{p,\alpha'} b_i^{(p)\alpha'}$, където $\mu_{p,\alpha'}$ са съответните собствени стойности. Колективните честоти на трептения са съответно $\omega_{p,\alpha'} = \omega_{\alpha'} \sqrt{\mu_{p,\alpha'}}$. Замествайки (35) в (33) получаваме

$$\hat{H}_\perp = \hbar \sum_{p=1}^N \omega_{p,x} \left(\hat{a}_{p,x}^\dagger \hat{a}_{p,x} + \frac{1}{2} \right) + \hbar \sum_{p=1}^N \omega_{p,y} \left(\hat{a}_{p,y}^\dagger \hat{a}_{p,y} + \frac{1}{2} \right). \quad (36)$$

2.3 Локални фонони

До тук разгледахме колективните трептения на система от N йона, която може да трепти в $3N$ различни моди. Намирането на честотите на трептения се свежда до диагонализиране на матрицата, елементите на която е съставена от връзките между йоните вследствие на хармоничната сила и кулоновото отблъскване. Тук ще разгледаме подход за описания на йонните трептения, като ще акцентираме върху индивидуалното осцилиране. Нека запишем Кулоновият потенциал

$$\hat{V} = \sum_{i>j=1}^N \frac{Q^2}{\sqrt{(\hat{x}_i - \hat{x}_j)^2 + (\hat{y}_i - \hat{y}_j)^2 + (\hat{z}_i - \hat{z}_j)^2}}, \quad (37)$$

където $Q^2 = e^2/4\pi\epsilon_0$. Както вече отбелязахме в хармонично приближение движенията на йоните във всяко пространствено направление са независими. Нека разгледаме Кулоновата потенциала енергия на трептенията в радиално x направление в хармонично приближение

$$\hat{V} = -\frac{1}{2} \sum_{i>j=1}^N \frac{Q^2}{|z_i^0 - z_j^0|^3} (\delta\hat{r}_{x,i} - \delta\hat{r}_{x,j})^2, \quad (38)$$

така че хамилтониана на системата е

$$\hat{H}_x = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_{x,i}^2}{2m} + \frac{m\omega_x^2}{2} \sum_{i=1}^N \delta\hat{r}_{x,i}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i>j=1}^N \frac{Q^2}{|z_i^0 - z_j^0|^3} (\delta\hat{r}_{x,i} - \delta\hat{r}_{x,j})^2. \quad (39)$$

Нека запишем малките отклонения от равновесните положения и импулсите чрез оператори на раждане и унищожения на локален квант на трептение (локален фонон)

$$\delta\hat{r}_{x,j} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_x}}(\hat{c}_{x,j}^\dagger + \hat{c}_{x,i}), \quad \hat{p}_{x,j} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_x}{2}}(\hat{c}_{x,j}^\dagger - \hat{c}_{x,i}). \quad (40)$$

Отчитайки комутационните съотношения $[\delta\hat{r}_{x,j}, \hat{p}_{x,j'}] = i\hbar\delta_{j,j'}$ и $[\hat{c}_{x,j}, \hat{c}_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'}$, за хамилтониана получаваме [5, 6]

$$\hat{H}_x = \sum_{i=1}^N (\omega_x + \delta\omega_i) \hat{c}_{x,i}^\dagger \hat{c}_{x,i} + \sum_{i>j=1}^N t_{i,j} (\hat{c}_{x,i}^\dagger \hat{c}_{x,j} + \hat{c}_{x,i} \hat{c}_{x,j}^\dagger), \quad (41)$$

където

$$\omega_{x,i} = -\frac{1}{2} \sum_{j \neq i=1}^N \frac{Q^2}{m\omega_x |z_i^0 - z_j^0|^3}, \quad t_{i,j} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{m\omega_x |z_i^0 - z_j^0|^3}. \quad (42)$$

В изразът (41) сме пренебрегнали членове от вида $\hat{c}_{x,j}^{\dagger 2}$ и $\hat{c}_{x,j}^2$, което е валидно в приближение на въртящата се вълна. Наистина, ако направим унитарна трансформация $|\psi\rangle = U^{-1}|\tilde{\psi}\rangle$, където $U = e^{i\omega_x \sum_{j=1}^N \hat{c}_{x,j}^\dagger c_{x,j}}$ уравнението на Шрьодингер за вълновия вектор $|\psi\rangle$ се трансформира в уравнение за $|\tilde{\psi}\rangle$, така че $i\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}\rangle = \{UH_xU^{-1} - iU^{-1}U\}|\tilde{\psi}\rangle$. Лесно може да се покаже, че трансформацията дава $\hat{c}_{x,j}^{\dagger 2}e^{2i\omega_x t}$ и $\hat{c}_{x,j}^2e^{-2i\omega_x t}$. Честотата на улавяне е от порядък $\omega_x = 2\pi \times 5$ МНз, което означава че тези членове са бързо осцилиращи и техният принос може да се пренебрегне ако е изпълнено условието $\omega_x \gg t_{i,j}$.

Нека сега да интерпретираме хамилтониан (41). Първият член описва индивидуалните йонни трептения с честоти $\omega_x + \omega_{x,i}$, където честота на улавяне е модифицирана с $\omega_{x,i}$. Този ефект е по-слаб за йоните в края на едномерния кристал и по-силен в центъра. Вторият член описва тунелиране на фонон от позиция i към позиция j с амплитуда $t_{i,j}$, което е вследствие на Кулоновото взаимодействие между йоните.

За числено симулиране с голям брой йони $N \gg 1$ е удобно да приемем равно разстояние между йоните, $|z_i - z_{i+d}| = ld$. Тогава получаваме

$$\omega_i = -\frac{\omega_z^2}{\omega_x} \zeta(3), \quad t_d = \frac{\omega_z^2}{2\omega_x d^3}, \quad (43)$$

където $\zeta(x)$ е ζ -функция на Риман.

Накрая ще разгледаме връзката между колективните и локалните оператори на раждане и унищожение. Използвайки връзките (35) и (40) получаваме

$$\hat{a}_{p,x}^\dagger = \sum_{j=1}^N b_j^{(p)x} (\hat{c}_{x,j}^\dagger \cosh(\theta_p) - \hat{c}_{x,j} \sinh(\theta_p)), \quad (44)$$

което показва че връзката се дава чрез трансформация на Боголюбов. Тук $\theta_p = -\frac{1}{4} \ln(\gamma_p)$, с $\gamma_p = 1 + \frac{\omega_x^2}{2\omega_p^2} (1 - \mu_{p,x})$, където $\mu_{p,x}$ е p -тата собствената стойност на $B_{i,j}^x$.

2.4 Взаимодействие с Лазерно Поле

Нека сега разгледаме йон с две метастабилни вътрешни електронни състояния, които ще бележим с $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$, съответни енергии E_\uparrow , E_\downarrow , и честота на преход $\omega_0 = (E_\uparrow - E_\downarrow)/\hbar$. Хамилтонианът описващ вътрешните степени на свобода има вида

$$\hat{H}_{\text{spin}} = E_\uparrow |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + E_\downarrow |\downarrow\rangle \langle\downarrow| = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \frac{E_\uparrow + E_\downarrow}{2} \hat{1}, \quad (45)$$

където $\sigma_z = |\uparrow\rangle \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle \langle\downarrow|$ е матрицата на Паули, а $\hat{1} = |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow|$ е единичния оператор. Вторият член комутира с всеки друг оператор и по този начин не играе роля.

Освен вътрешни степени на свобода, йона има и външни вследствие на неговото динамично улавяне. Свободният хамилтониан тогава има вида

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar \sum_{\alpha=x,y,z} \omega_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha. \quad (46)$$

Нека разгледаме ситуацията, където кохерентно монохроматично лазерно поле разпространяващо се по оста на капана е приложено на йона. Ако предположим, че вътрешните състояния на йона са свързани с електричната компонентна на лазерното поле, тогава хамилитониана на взаимодействие има вида

$$\hat{V} = -\hat{\mu} \cdot \vec{E}(z, t). \quad (47)$$

Тук $\hat{\mu}$ оператора на електричния диполен момент на йона, $\vec{E}(z, t) = E_0 \vec{e} \cos(kz - \omega_L t + \phi)$ е електричната компонента на лазерното поле, където \vec{e} е вектор на поляризацията, k е вълновия вектор, ω_L е лазерната

фаза, ϕ лазерната фаза. Хамилтонианът на взаимодействието приема вида

$$\hat{V} = -q(\mu_{\uparrow\downarrow}\sigma_+ + \mu_{\downarrow\uparrow}\sigma_-) \cdot \frac{E_0\vec{\epsilon}}{2} \left(e^{i\{\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) - \omega_L t + \phi\}} + \text{h.c.} \right), \quad (48)$$

където $\mu_{\uparrow\downarrow} = \langle \uparrow | \hat{\mu} | \downarrow \rangle$, $\mu_{\downarrow\uparrow} = \langle \downarrow | \hat{\mu} | \uparrow \rangle$ са матричните елементи на диполния момент между съответните състояния и $\sigma_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$, $\sigma_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$. В израза (48) сме представили координатата на йони като $\hat{z} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_z}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ и сме въвели параметър на Ламб-Дике $\eta = k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_z}}$. Пълният хамилтониан е

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}. \quad (49)$$

Удобно е да се премине в представяне на взаимодействието с унитарна трансформация $\hat{U} = e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}}$. От уравнението на Шрьодингер $i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$ получваме $i\frac{d}{dt}|\psi_{\text{int}}\rangle = \hat{H}_{\text{int}}|\psi_{\text{int}}\rangle$, където $|\psi\rangle = \hat{U}|\psi_{\text{int}}\rangle$ и хамилтониана на взаимодействието е

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hat{U}^\dagger \hat{V} \hat{U}. \quad (50)$$

Пренебрегвайки бързо осцилиращите членове от вида $\omega_L + \omega_0$ спрямо бавно осцилиращи членове от вида $\omega_L - \omega_0$ получаваме

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\Omega\sigma_+ e^{i\{\eta(\hat{a}^\dagger e^{i\omega_z t} + \hat{a}e^{-i\omega_z t}) - \delta t + \phi\}} + \text{h.c.}, \quad (51)$$

където $\delta = \omega_L - \omega_0$ е честотната разлика между честотата на лазерното поле и честотата на атомния преход. Параметърът характеризиращ силата на връзката между лазерното поле и атома е честотата на Раби Ω . Хилбертовото пространство на системата се състои съответно от двете вътрешни състояния на йона, както и от вибрационните му състояния,

$$|\psi_{\text{int}}\rangle = \sum_{m=\uparrow,\downarrow} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} |m, n\rangle, \quad (52)$$

където $c_{m,n}$ са вероятностните амплитуди. Уравнение (52) показва, че в най-общия случай състоянието на системата е сплетено, тоест не може да се представи както произведение на вътрешните и вибрационни състояния $|\psi_{\text{int}}\rangle \neq |\psi_{\text{at}}\rangle|\psi_{\text{vib}}\rangle$. Замествайки в уравнението на Шрьодингер, получаваме следната система диференциални уравнения

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_{m',n'}(t) = \sum_{m=\uparrow,\downarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \langle m', n' | \hat{H}_{\text{int}} | m, n \rangle c_{m,n}(t). \quad (53)$$

Ние ще разглеждаме резонансните случаи, при които честотната разлика е $\delta = \omega_z k + \Delta$, където $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $|\Delta| \ll \omega_z$. Използвайки равенството $e^{\alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a}} = e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{\alpha^* \hat{a}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$, получаваме за хамилтониана [7, 8, 9]

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar \Omega \sigma_+ e^{-\frac{\eta^2}{2}} \sum_{p,r=0}^{\infty} (i\eta)^{p+r} \frac{(\hat{a}^\dagger)^p (\hat{a})^r}{p! r!} e^{i\omega_z(p-r-k)t} e^{-i\Delta t} + \text{H.c.} \quad (54)$$

Три различни прехода ще различаваме в зависимост от k . За $k = 0$, честотната разлика е настроена близо до честотата на атомния преход. В този случаи преходите от основно към възбудено ниво се осъществяват без промяна на вибрационното състояние, $|\downarrow\rangle |n\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle |n\rangle$. Такъв преход ще наричаме основен. За $k = -1, -2, -3, \dots$ преход от основно към възбудено атомно ниво е възможен само чрез поглъщане на фонон, $|\downarrow\rangle |n\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle |n - |k|\rangle$. Такъв преход за дадено k ще наричаме k -тия червен преход. За $k = 1, 2, 3, \dots$ атомен преход от основно към възбудено ниво е възможен само чрез раждане на фонон, тоест $|\downarrow\rangle |n\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle |n + k\rangle$. Такъв преход за дадено k ще наричаме k -тия син преход.

Нека разгледаме сега хамилтониана за трите различни случаи. За тази цел да разгледаме матричния елемент на оператора

$$D_{n',n} = \langle n' | e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} | n \rangle, \quad (55)$$

като приемем че $n' > n$. Развивайки операторите в ред на Тейлър получаваме [12]

$$D_{n',n} = \sum_{m'=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha)^{m'} (-\alpha^*)^m \langle n' | \frac{(a^\dagger)^{m'} (a)^m}{m'! m!} | n \rangle \quad (56)$$

$$= \sum_{m'=0}^{n'} \sum_{m=0}^n \delta_{n'-m', n-m} \frac{(\alpha)^{m'}}{m'!} \frac{(-\alpha^*)^m}{m!} \sqrt{\frac{n!}{(n'-m')!}} \sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}} \quad (57)$$

$$= \alpha^{n'-n} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m |\alpha|^{2m}}{m! (n'-n+m)! (n-m)!} \sqrt{n'! n!} \quad (58)$$

$$= \alpha^{n'-n} \sqrt{\frac{n!}{n'!}} L_n^{n'-n}(|\alpha|^2), \quad (59)$$

където сме въвели обобщения полином на Лагер

$$L_n^m(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+m/n-k}{k} \frac{x^k}{k!}. \quad (60)$$

Аналогично за случая $n' < n$ получаваме

$$D_{n',n} = \alpha^{n-n'} \sqrt{\frac{n'!}{n!}} L_{n'}^{n-n'}(|\alpha|^2), \quad (61)$$

където $\alpha = i\eta e^{i\omega z t}$ така че матричният елемент между две Фок състояния придобива вида

$$D_{n',n} = (i\eta)^{|n'-n|} e^{i\omega(n'-n)t} \sqrt{\frac{n_{<}!}{n_{>}!}} L_{n_{<}}^{|n'-n|}(\eta^2), \quad (62)$$

където $n_{<} = \min(n', n)$ и $n_{>} = \max(n', n)$.

2.5 Приближение на Ламб-Дике

Важен случай от голям експериментален интерес е когато амплитудата на движения на йона в посока на лазерното поле е много по-малка от $\lambda/2\pi$, което съответства на условието $\langle \psi_{\text{motion}} | k^2 \delta \hat{z}^2 | \psi_{\text{motion}} \rangle^{1/2} \ll 1$. В случая на Фок състояние Ламб-Дике критерия се свежда до условието $\eta \sqrt{2n+1} \ll 1$. Ако това условие е изпълнено тогава може да пресметнем Раби честотата в най-ниското приближение по η , което дава

$$\Omega_{n',n} = \Omega \eta^{|n'-n|} \sqrt{n_{>}! / n_{<}!} (|n' - n|)^{-1}. \quad (63)$$

За първият червен преход, за основния и за първия син преход съответно получаваме

$$\Omega_{n-1,n} = \Omega \eta \sqrt{n}, \quad \Omega_{n,n} = \Omega, \quad \Omega_{n+1,n} = \Omega \eta \sqrt{n+1}. \quad (64)$$

За хамилтонианът на основния преход в приближение на Ламб-Дике получаваме ($\Delta = 0$)

$$\hat{H}_c = \hbar \Omega (\sigma^+ e^{i\phi} + \sigma^- e^{-i\phi}). \quad (65)$$

Резултатът показва, че ако лазерното поле действа непрекъснато, то системата осцилира кохерентно между двете вътрешни нива с честота на Раби Ω , без промяна на вибрационното число.

За първият червен преход $k = -1$ получаваме

$$\hat{H}_r = \hbar \eta \Omega (\hat{a} \sigma^+ e^{i\phi + \frac{\pi}{2}} + \hat{a}^\dagger \sigma^- e^{-i\phi - \frac{\pi}{2}}). \quad (66)$$

Това е хамилтонианът на модела на Джейнс-Къминг, който описва взаимодействието между вътрешните състояния на атома и квантувана мода на трептене, като силата на връзката между нивата $|\downarrow, n\rangle$ и $|\uparrow, n\rangle$ се характеризира с честота на Раби $\Omega_{n-1, n}$. Тази връзката зависи от вибрационното число n . От това следва, че ако системата е приготвена в началния момент в състояние $|\psi(0)\rangle = |\downarrow, 0\rangle$ то честотата на Раби е нула и системата остава в това състояние независимо от приложеното лазерно поле. Като резултат от това взаимодействие вътрешните състояния $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ се заплитат с вибрационните състояния. Такава динамика, която води до заплитане на две подсистеми е в основата на всички операции в квантовата информатика.

Аналогично за първият син преход $k = 1$ получаваме

$$\hat{H}_b = \hbar\eta\Omega(\hat{a}^\dagger\sigma^+e^{i\phi+\frac{\pi}{2}} + \hat{a}\sigma^-e^{-i\phi-\frac{\pi}{2}}), \quad (67)$$

като честота на Раби е $\Omega_{n+1, n}$. Това е хамилтонианът на модела на анти-Джейнс-Къминг. Тук дори системата да е приготвена в $|\psi(0)\rangle = |\downarrow, 0\rangle$ лазерното поле ще индуцира преход, понеже $\Omega_{1,0} \neq 0$. Това са така наречените вакуумни Раби осцилации.

Накрая, ще разгледаме бихроматичното взаимодействие, което се използва често при експерименталното реализиране на сплетени състояния и квантови гейтове с йони. То е комбинация от червено и синьо отместени лазерни полета с точно определени честотни разлики приложени едновременно на йона. Нека приемем за простота, че Раби честотите на двете полета са равни. За хамилтонианът получаваме

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\Omega\sigma_+e^{i\{\eta(\hat{a}^\dagger e^{i\omega_z t} + \hat{a}e^{-i\omega_z t}) - \delta_r t + \phi_r\}} + \hbar\Omega\sigma_+e^{i\{\eta(\hat{a}^\dagger e^{i\omega_z t} + \hat{a}e^{-i\omega_z t}) - \delta_b t + \phi_b\}} + \text{h.c.}, \quad (68)$$

където $\delta_r = \omega_{L,r} - \omega_0 = -\omega_z + \delta$ и $\delta_b = \omega_{L,b} - \omega_0 = \omega_z - \delta$ ($|\delta| \ll \omega_z$) са съответните честотни разлики на двете полета. В приближение на Ламб-Дике ($\eta \ll 1$) може да развием в ред експонентите и да запазим само водещите членове, което дава

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar\Omega\sigma_+\{1 + i\eta(\hat{a}^\dagger e^{i\omega_z t} + \hat{a}e^{-i\omega_z t})\}e^{i(\omega_z - \delta)t + i\phi_r} \quad (69)$$

$$+ \hbar\Omega\sigma_+\{1 + i\eta(\hat{a}^\dagger e^{i\omega_z t} + \hat{a}e^{-i\omega_z t})\}e^{-i(\omega_z - \delta)t + i\phi_b} + \text{h.c.} \quad (70)$$

В приближение на бързо осцилиращата вълна, което е изпълнено ако $\Omega \ll \omega_z$ както и $\eta\Omega \ll \omega_z$, хамилтонианът придобива вида

$$\hat{H}_{\text{int}} = i\hbar g(\sigma_+e^{i\phi_s} - \sigma_-e^{-i\phi_s})(\hat{a}^\dagger e^{i\delta t + i\phi_m} + \hat{a}e^{-i\delta t - i\phi_m}), \quad (71)$$

където сме пренебрегнали членове от вида $\Omega\sigma_+e^{i\omega_z t} + \text{h.c.}$, $\Omega\sigma_+\hat{a}^\dagger e^{i2\omega_z t} + \text{h.c.}$. Връзката между фононите и вътрешните (ефективни спин) състояния на йона е $g = \eta\Omega$. Хамилтонианът (71) води до сплитане на вътрешните и вибрационните степени на свобода на йоните, което е в основата на създаването на квантови гейтове [10] и състояние на котката на Шрьодингер [11].

2.6 Заключение

В тази уводна глава бяха разгледани основни понятия на йони в капан на Паул. Беше показано, че квадруполна конфигурация от електроди с приложени dc електрично поле и бързо осцилиращо rf електрично поле води до стабилен хармоничен минимум за заредената частица. Бяха разгледани равновесните положения на система от йони и съответните вибрационни моди. Също така беше разгледано взаимодействието на йон с лазерно поле. В зависимост от честотата на лазерното поле, преходите между атомните нива могат да се осъществяват със или без промяна на вибрационното квантово число.

3 Квантов фазов преход в модела на Джейнс-Къминг

В тази глава ще представим система за симулиране на квантов фазов преход на колективни вътрешни кубитни и фононни състояния с линеен кристал от йони в уловка на Паул. Лазерно-йонното взаимодействие създава енергитичен процеп в спектъра на възбуждане, което предизвиква ефективно отблъскване между фононите и взаимодействие на Джейнс-Къмингс-Хъбард. Тази система показва характеристики, еквивалентни на фазовите преходи на поларитони в свързани резонатори. Уловените йони позволяват лесно настройване на честотата на тунелиране чрез промяна на аксиалната честота на капана и отблъскването между фононите чрез лазерно честотно настройване и интензивност. Ще предложим експериментален протокол за измерване на всички наблюдаеми на системата, което позволява да се изучава квантовите фазови преходи между поларитони дори с малък брой йони.

Освен това ще обсъдим аналитични приближения към фазовата диаграма на основното състояние на хомогенния хамилтониан на Джейнс-Къмингс-Хъбард с близко действащо тунелиране. Ще изведем приблизителни аналитични изрази за границите между фазите, Мот изолатор, и свръхфлуидна фаза, като също така ще получим явни изрази за критичната стойност на амплитудата на тунелиране в различните схеми.

Накрая ще обсъждам квантово симулиране на модели на Хайзенберг със спинове $s = 1/2$ и $s = 1$ с линеен кристал от уловени йони. Ще покажем, че лазерно-йонното взаимодействие индуцира взаимодействие на Джейнс-Къмингс-Хъбард между атомните нива в V система и два типа фонони. В режим на силно свързване колективните атомни и фононни възбуждания се локализируют във възлите на едномерната система и образуват ефективна спинова система с различна дължина. Ще покажем, че квантово-механичното свръх-обменно взаимодействие, причинено от процесите на виртуално тунелиране на фонони, създава Хайзенбергово взаимодействие между отделните спинове. Уловените йони позволяват контрол на свръх-обменните взаимодействия чрез регулиране на честотите на улавяне, интензивността на лазера и честотната разлика.

3.1 Физическа реализация на модела на Джейнс-Къмингс-Хъбард с йони в капан на Паул

Нека разглеждаме верига от N йони, в линеен капан на Паул по оста z с честоти на улавяне ω_q $q = x, y, z$, където радиалните честоти на улавяне са много по-големи от аксиална честота на улавяне $\omega_{x,y} \gg z$, така че йоните са подредени в линейна конфигурация и заемат равновесни положения z_i^0 по оста z . Развивайки потенциалната енергия в ред на Тейлър около равновесното положение и пренебрегвайки членове от вида x^3, y^3, zx^2, zy^2 и от по-висок ред, хамилтонианът в радиалната посока x е [3]

$$\hat{H}_x = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^N \hat{p}_k^2 + \frac{M\omega_x^2}{2} \sum_{k=1}^N \hat{x}_k^2 - \frac{M\omega_z^2}{2} \sum_{k>m}^N \frac{(\hat{x}_k - \hat{x}_m)^2}{|u_k - u_m|^3}. \quad (72)$$

Тук \hat{p}_k е операторът на импулса, M е масата на йони, а \hat{x}_k е операторът на позицията на k -тия йон. Ако \hat{x}_k и \hat{p}_k се изразят чрез операторите на раждане \hat{a}_k^\dagger и унищожаване \hat{a}_k на локален фонон, така че $\hat{x}_k = \sqrt{\hbar/2M\omega_x}(\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k)$ и $\hat{p}_k = i\sqrt{\hbar M\omega_x/2}(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k)$, хамилтониан (72) може да се запише като

$$\hat{H}_x = \hbar \sum_{k=1}^N (\omega_x + \omega_k) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hbar \sum_{k>m}^N t_{km} (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_m + \hat{a}_k \hat{a}_m^\dagger). \quad (73)$$

Изразът показва, че честотата на фононите зависи от позицията

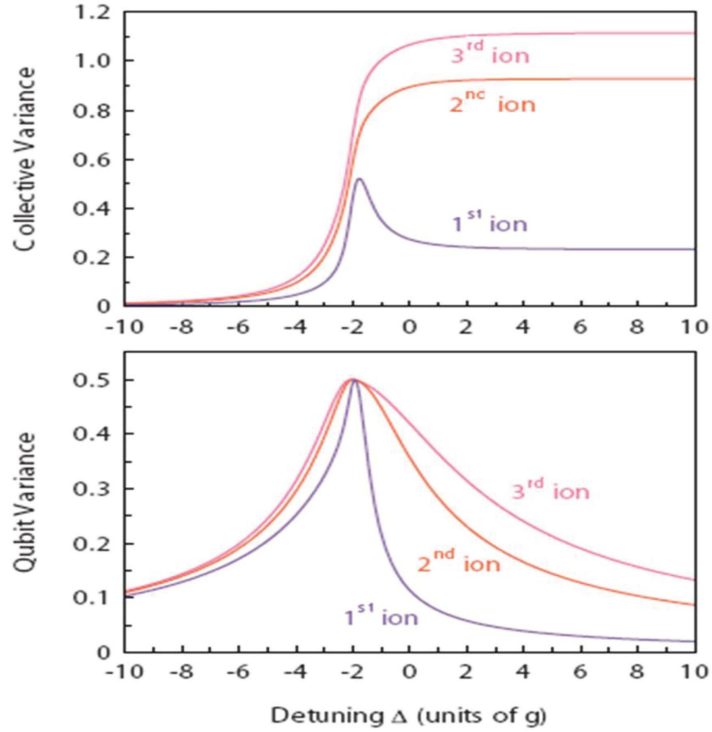
$$\omega_k = -\frac{\alpha\omega_z}{2} \sum_{s \neq k}^N \frac{1}{|u_k - u_s|^3}, \quad (74)$$

където $\alpha = \omega_z/\omega_x$ ($\alpha \ll 1$) и съответно фононите могат да тунелират между различни възли, с нелокална амплитуда на тунелиране

$$t_{km} = \frac{\alpha\omega_z}{2} \frac{1}{|u_k - u_m|^3}, \quad (75)$$

получени от кулоновото взаимодействие.

Ще покажем, че лазер-йонното взаимодействие предизвиква ефективно отблъскване между локалните фонони. Това взаимодействие осигурява фазовия преход от фононна свръхфлуидна фаза към композитна поларитонна свръхфлуидна и Мот изолатор фази на фононни и кубитни възбуждания. Нека разгледаме йонни кубити с честота на преход ω_0 ,



Фигура 4: Общо (вариация на кубит+фонон) DN_k (отгоре) и вариация на кубит $DN_{a,k}$ ($k = 1, 2, 3$) (отдолу) за верига от пет йона с пет възбуждания като функция на лазерната честотна разлика Δ за фиксирано тунелиране $t = 0.3g$.

които взаимодействат в радиалната посока с лазерно поле, адресиращо цялата йонна верига с честота ω_L . Хамилтонианът на системата след приближение на оптичната въртяща се вълна е [8]

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hbar\Omega \left(\sum_{k=1}^N \sigma_k^+ e^{i\eta(\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k) - i\delta t} + \text{H.c.} \right). \quad (76)$$

Тук $\sigma_k^+ = |e_k\rangle\langle g_k|$ и $\sigma_k^- = |g_k\rangle\langle e_k|$ са спиновите оператори, $|e_k\rangle$ и $|g_k\rangle$ са състоянията на кубита на k -тия йон, Ω е Раби честота, $\delta = \omega_L - \omega_0$ е честотната разлика, а $\eta = |\vec{k}|x_0$ е параметъра на Ламб-Дике, където \vec{k} е векторът на лазерната вълна и $x_0 = \sqrt{\hbar/2M\omega_x}$. Хамилтонианът, след като се трансформира в картина на взаимодействие чрез унитарната

трансформация $\hat{U} = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}$, с $\hat{H}_0 = -\hbar\omega_x \sum_{k=1}^N \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hbar\Delta \sum_{k=1}^N |e_k\rangle\langle e_k|$, в границата на Ламб-Дике и след приближение на бързо осцилиращата вълна е

$$H_I = \hbar \sum_{k=1}^N \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hbar\Delta \sum_{k=1}^N |e_k\rangle\langle e_k| + \hbar g \sum_{k=1}^N (\sigma_k^+ \hat{a}_k + \sigma_k^- \hat{a}_k^\dagger) \quad (77)$$

$$+ \hbar \sum_{k>m} t_{km} (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_m + \hat{a}_k \hat{a}_m^\dagger). \quad (78)$$

Първите три члена в уравнение (78) описват модела на Джейнс-Къминг. Първите два члена съответстват на енергиите на локалните фонони и кюбита, докато третият описва тяхното взаимодействие. Четвъртият член в уравнение (78) описва нелокалното тунелиране на фонони между различните възли на решетката и позволява сравнението на системата с модела на Хъбард. Хамилтонианът (78) комутира с оператора на пълния брой възбуждане $\hat{N} = \sum_{k=1}^N \hat{N}_k$, следователно общият брой възбуждания се запазва. Тук $\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + |e_k\rangle\langle e_k|$ е операторът на брой кюбитни и фононни възбуждания в k -тия възел.

Ще опишем квантовия фазов преход между състоянията Мот изолатор (МИ) и свръхфлуидна (СвФ) фази чрез дисперсията $DN_k = (\langle \hat{N}_k^2 \rangle - \langle \hat{N}_k \rangle^2)^{1/2}$ по отношение на основното състояние на хамилтониан (78) за фиксиран брой възбуждания. Ако взаимодействието между фононите доминира в сравнение с амплитудата на тунелиране, вълновата функция на основното състояние ще е произведение на локални кюбитни и фононни състояния за всеки възел с фиксиран брой възбуждания. Следователно в (МИ) фаза дисперсията DN_k за всяко k е нула. Когато тунелирацията член доминира спрямо взаимодействието, тогава основното състояние се състои от суперпозиция на кюбитни и фононни състояния с делокализирани възбуждания по цялата верига. В това състояние дисперсията DN_k на всеки възел е различна от нула.

Фигура 4 (отгоре) показва дисперсията DN_k ($k = 1, 2, 3$) за верига от пет йона с пет колективни възбуждания в сравнение с лазерната честотна разлика Δ за фиксирана честота на тунелиране $t = \alpha\omega_z/2$, изчислена чрез точна диагонализация на хамилтониан (78). За достатъчно голяма отрицателна Δ съществува енергетичен процеп, който предотвратява поглъщането на допълнителни фонони. Следователно системата е във (МИ) фаза, където кюбитните и фононните възбуждения са локализирани. Когато честотната разлика Δ се увеличи, енергетичният процеп намалява и системата прави фазов преход към (СвФ) фаза.

Фигура 4 (отдолу) показва дисперсията на възбужданията на кубита $DN_{a,k}$, където $\hat{N}_{a,k} = |e_k\rangle\langle e_k|$. Това ни позволява да разграничим следните фази: в района на голяма отрицателна честотна разлика Δ колективните и кубитните дисперсии са малки, което показва, че системата е във фазата на кубитен (МИ). Увеличавайки честотната разлика, колективната дисперсия остава малка, но кубитната дисперсия се увеличава, което показва, че системата наистина е в колективна фаза на (МИ). Приближавайки $\Delta = 0$ системата прави фазови преходи в колективните кубитни и фононни фази на (СвФ), тъй като сега колективната и кубитната дисперсия са големи. И накрая, за достатъчно големи положителни честотни разлики дисперсията на кубита намалява, но колективната вариация остава голяма, което показва, че системата е във фононна (СвФ) фаза.

3.2 Аналитични приближения към фазовата диаграма на модела на Джейнс-Къмингс-Хъбард

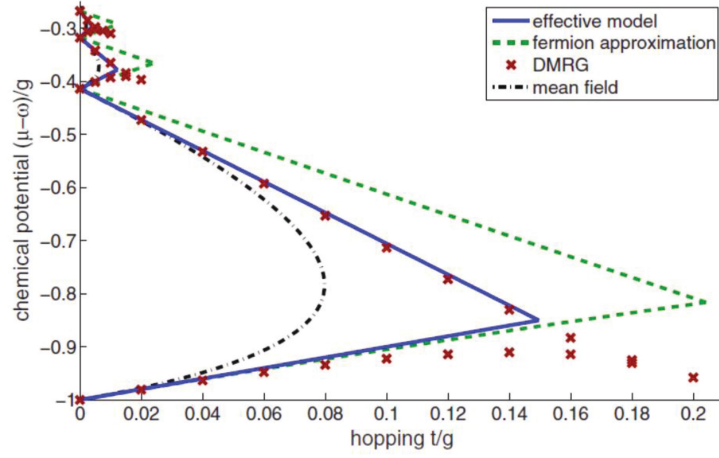
Голямо разнообразие от аналитични и числени методи са приложени към модела Джейнс-Къминг-Хъбард (ДКХ) и свързаните с него модели, осигурявайки резултати за фазовата диаграма и други величини на основното състояние [13, 14, 15]. В този раздел ние ще покажем, че в границата на силно взаимодействие могат да се намерят прости приближени аналитични решения на ДКХ модела, ако има трансляционна инвариантност, т.е. за безкрайна хомогенна система или периодични гранични условия. Тези решения осигуряват добро аналитично приближение към пълната фазова диаграма на основното състояние.

Първо, накратко ще разгледаме основните характеристики на модела на ДКХ, дефиниран с хамилтониана

$$\hat{H} = \omega \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \Delta \sum_j \sigma_j^+ \sigma_j^- + g \sum_j (\sigma_j^+ \hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger \sigma_j^-) \quad (79)$$

$$+ \sum_d t_d \sum_j (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+d} + \hat{a}_{j+d}^\dagger \hat{a}_j). \quad (80)$$

В граница на нулево тунелиране $t_d = 0$, полученият модел на Джейнс-Къминг (ДК) може лесно да бъде диагонализиран. Тъй като общият брой възбуждания на всеки възел j е константа на движение, локалният ДК хамилтониан има блочна структура и лесно може да се диагонализира. В рамките на всяко подпространство с определен брой възбуждения,



Фигура 5: Сравнение на фазовата диаграма на основното състояние на 1D ДКХ модела, получена чрез DMRG, както и резултатите от приближение на средното поле (пунктирна линия) с резултатите получени от нашите подходи (плътна линия: ефективен хамилтониан със силно свързване; пунктирна линия: фермионно приближение) за $\Delta = \omega = 1$ и $g = 1$. Като се има предвид простотата на двата подхода, съгласието с данните от DMRG е доста добро, докато прогнозите за средното поле са доста лоши, както се очаква за 1D системи. Критичните амплитуди на тунелиране, изчислени от данните на DMRG, се съгласуват изненадващо добре с тези, прогнозирани в приближението на фермиона, въпреки че формата на областта на Мот е различна.

собствените състояния могат да бъдат намерени. Ние имаме

$$|\pm, n\rangle = \frac{[\chi_n \mp (\omega - \Delta)] |\uparrow, n-1\rangle \pm 2g\sqrt{n} |\downarrow, n\rangle}{\sqrt{2}\sqrt{\chi_n^2 \mp (\omega - \Delta)\chi_n}} \quad (81)$$

$$= \alpha_n^\pm |\uparrow, n-1\rangle \pm \beta_n^\pm |\downarrow, n\rangle, \quad (82)$$

където $\chi_n = \sqrt{(\Delta - \omega)^2 + 4ng^2}$ и $n > 0$, собствените енергии са

$$E_n^\pm = n\omega + \frac{\Delta - \omega}{2} \pm \frac{1}{2}\chi_n. \quad (83)$$

За $n = 0$ основното състояние е неизродено и се дава от $|-, 0\rangle = |\downarrow, 0\rangle$ с $E_0 = 0$. Тук състоянието $|\uparrow, n-1\rangle$ описва атомно възбуждане заедно с

$n-1$ бозонни възбуждания; $|\downarrow, n\rangle$ е състояние с атом в основно състояние и n бозонни възбуждания. В границата на силно взаимодействие $g \gg |\Delta - \omega|$, енергетичната разлика $\Delta E_n = E_n^+ - E_n^- = \chi_n \sim 2g\sqrt{n}$ е голяма в сравнение с всеки друг енергетичен мащаб в системата и по този начин възбудените състояния $|+, n\rangle$ не допринасят за основното състояние.

За да изчислим границите на фазите на Мот изолатор, ще следваме обичайния подход. Тъй като общият брой възбуждания в системата комутира с пълния ДКХ хамилтониан, достатъчно е системата да се третира за фиксиран брой възбуждания. Границата на n -та област на (МИ) може да бъде определена чрез изчисляване на общата енергия $E(N)$ за $N = nL - 1$, $N = nL$ и $N = nL + 1$ възбуждания в система с L възли. Химичният потенциал се дава чрез

$$\mu_n^\pm = \pm\{E(nL \pm 1) - E(nL)\}, \quad (84)$$

където знакът плюс принадлежи към горната граница на областта на (МИ), а знакът минус към долната. За $t_d = 0$, μ_n^\pm може да се изчисли лесно.

Като се започне с енергията за $N = nL$ възбуждания, като n е цяло число, може да се види, че поради нелинейната зависимост на енергията E_n^- спрямо n , възбуденията ще се разпределят еднакво по цялата решетка. Следователно основното състояние се определя от $\vec{n} = \{n, n, \dots, n\}$. Сега, когато добавяме (премахваме) единично възбуждане от цялата система, основното състояние се дава от $\{n \pm 1, n, \dots, n\}$. С това енергиите при $t_d = 0$ могат да бъдат записани като

$$E(nL-1) = (L-1)E_n^- + E_{n-1}^-, \quad E(nL) = LE_n^-, \quad E(nL+1) = (L-1)E_n^- + E_{n+1}^-, \quad (85)$$

и съответните химични потенциали са

$$\mu_n^+ = E_{n+1}^- - E_n^- = \omega - \frac{\chi_{n+1}}{2} + (1 + \delta_{n0})\frac{\chi_n}{2} + \delta_{n0}\frac{\Delta - \omega}{2}, \quad (86)$$

и

$$\mu_n^- = E_n^- - E_{n-1}^- = \omega - \frac{\chi_n}{2} + (1 + \delta_{n1})\frac{\chi_{n-1}}{2} + \delta_{n1}\frac{\Delta - \omega}{2}, \quad (87)$$

По този начин, за цял брой възбуждания, системата показва частица-дупка енергетична разлика. За $t_d \neq 0$ условието $\mu_{n+1}^- = \mu_n^+$ определя критичната стойност на амплитудата на тунелиране, която определя прехода между двете квантови фази.

3.2.1 Ефективен модел при силно свързване

Ще изведем ефективни хамилтониани в границата на силно свързване за определянето на μ_n^\pm на n -та (МИ) област, позволяващи да се пресметне енергетичната разлика между частици-дупки в първи порядък по амплитудата на тунелиране t_d . Когато се търси енергията на основното състояние в случай на $N = nL$, следва че в първо приближение имаме $|-, n\rangle$ и в първи порядък енергията се дава от $E(nL) = LE_n^-$. При добавяне на възбуждане Хилбертово пространство се увеличава; сега (локално) трябва да се вземат предвид двете състояния $|-, n\rangle$ и $|-, n+1\rangle$. Така, че в тази граница системата може да бъде разбрана като система, състояща се от ефективни частици за спин-1/2. Ще дефинираме състоянията $|\uparrow\rangle$ със състоянието $|-, n+1\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ с $|-, n\rangle$. Ефективният хамилтониан описващ системата е

$$\tilde{H} = (L-1)E_n^- + E_{n+1}^- + B_n^- D_{n+1}^- + B_n^- D_{n+1}^- \sum_d t_d \sum_j (\tilde{\sigma}_{j+d}^+ \tilde{\sigma}_j^- + \tilde{\sigma}_{j+d}^- \tilde{\sigma}_j^+). \quad (88)$$

Аналогично, за да определим енергията за дупка в n -та област на (МИ), следваме същия подход. Сега състоянието $|\downarrow\rangle$ е свързано с $|-, n-1\rangle$ и $|\uparrow\rangle$ с $|-, n\rangle$. Ефективният хамилтониан се записва като

$$\tilde{H} = E_{n-1}^- \sum_j \tilde{\sigma}_j^- \tilde{\sigma}_j^+ + E_n^- \sum_j \tilde{\sigma}_j^+ \tilde{\sigma}_j^- + B_{n-1}^- D_n^- \sum_d \sum_j (\tilde{\sigma}_{j+d}^+ \tilde{\sigma}_j^- + \tilde{\sigma}_j^+ \tilde{\sigma}_{j+d}^-). \quad (89)$$

Следвайки стандартния начин за диагонализиране може да се покаже, че химичните потенциали се дават с изразите

$$\mu_n^+ = E_{n+1}^- - E_n^- + 2B_n^- D_{n+1}^- \sum_d t_d \cos\left(\frac{2\pi k' d}{L}\right), \quad (90)$$

$$\mu_n^- = E_n^- - E_{n-1}^- - 2B_{n-1}^- D_n^- \sum_d t_d \cos\left(\frac{2\pi k'' d}{L}\right), \quad (91)$$

от където може да се определи критичната амплитуда на тунелиране.

3.2.2 Фермионно приближение

Когато се погледне хамилтонианът на модела на ДКХ, може да се види, че всички членове са квадратични. По принцип тези модели са подходящи за точно решение чрез преобразуване на Фурие. Проблемът в този

случай обаче е, че комутационните съотношения на спиновите оператори σ_j^\pm не са толкова прости като тези на бозони или фермиони. Това ограничава приложимостта на преобразуването на Фурие, тъй като операторите в импулсното пространство няма да се подчиняват на същата комутационна връзка, както в реалното пространство. Обичайната стъпка от предходната трансформация на Джордан-Вигнер, превръщаща спиновите оператори в подходящи фермионни оператори, не е приложима в този случай, тъй като частта на взаимодействие е линейна по спин операторите. По този начин и двете трансформации не могат да бъдат извършени точно без да се увеличи описателната сложност на проблема. Независимо от това, хамилтонианът може да бъде диагонализиран чрез преобразуване на Фурие по приблизителен начин.

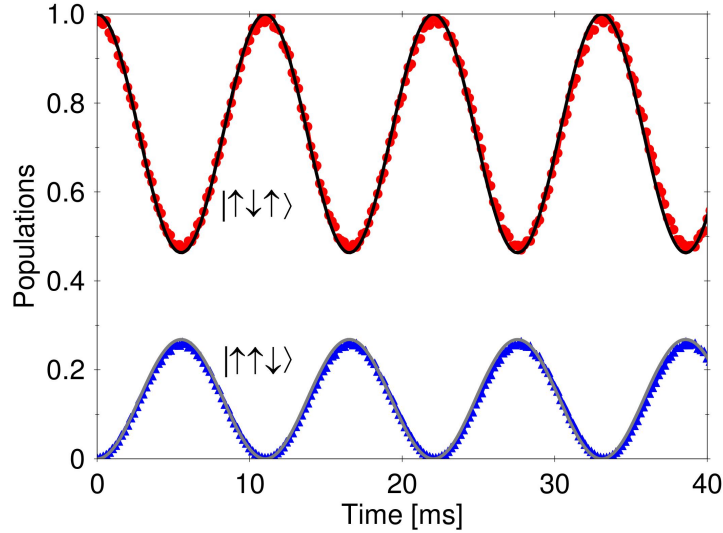
Химичните потенциали се дават с

$$\mu_n^+ = E_{k'}^{n+1} - E_{k'}^n, \quad \mu_n^- = E_k^n - E_k^{n-1}, \quad (92)$$

където

$$E_k^n = (1 - \delta_{n0}) \left(n\omega_k + \frac{\Delta - \omega_k}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta - \omega_k)^2 + 4ng^2} \right). \quad (93)$$

Сега ще сравним нашите аналитични резултати с различни числени изчисления. Фигура (5) показва както аналитични приближения, така и числени данни от DMRG [16] и изчисленията на приближение на средното поле [17], където модифицираната амплитуда на тунелиране в хамилтониана на средното поле се дава като $\tilde{J} = t$. От фигурата може да се види, че ефективният модел дава много по-добро съгласие с числените данни за DMRG, особено наклоните на областите се съгласуват перфектно при малки амплитуди на тунелиране. Фермионното приближение дава по-голям размер на областта на Мот. По-специално, докато долните граници са доста добре възпроизведени, горните граници имат грешен наклон. Изненадващо, че критичните амплитуди на тунелиране изглежда да се съгласуват по-добре с данните от DMRG, отколкото резултатите, получени от ефективните хамилтониани със силно свързване. Въпреки, че фермионното приближение е количествено по-лошо от ефективните хамилтониани със силно свързване, то осигурява просто приближено решение на модела на ДКХ отвъд франиците на средното поле, което има предимството да дава затворена форма на основното състояние.



Фигура 6: Обменно взаимодействие в система от три йона.

3.3 Обменен магнетизъм. Взаимодействие на Джейнс-Къмингс-Хъбард между V-системи

Основната идея е да представим модела на ДКХ във V-тип система (ДКХв) чрез ефективен спинов модел на Хайзенберг. Моделът на ДКХв може физично да се реализира в система от йони в уловка на Паул. Ансамбълът от бозони в модела ДКХв е представен от радиалните локални фонони, докато динамиката на тунелиране на фонони се появява естествено поради Кулоновото взаимодействие. Когато динамиката на тунелиране на фонони е потисната, виртуалните процеси от втори ред могат да предизвикат ефективен Хайзенбергов обмен между локализираните поларитонни възбуждания в различни възли на решетката. Характерът на поларитонните квазичастици може да се трансформира в атомни или фононни възбуждания чрез контролиране на интензивността на лазера и честотната разлика. Ще покажем, че в силно свързания режим (фаза на Мот изолатор) могат да се реализират спиновите модели на Хайзенберг с $s = \frac{1}{2}$ и $s = 1$.

Хамилтонианът на ДКХв има следния вид

$$\hat{H}_{\text{JCHv}} = \hat{H}_{\text{JC}} + \hat{H}_{\text{b}}, \quad (94)$$

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \sum_j \left[\sum_{\beta} \Delta_{\beta,j} \hat{a}_{\beta,j}^{\dagger} \hat{a}_{\beta,j} + \omega_0 (|e_{1,j}\rangle \langle e_{1,j}| + |e_{2,j}\rangle \langle e_{2,j}|) \right] \quad (95)$$

$$+ g_x (\hat{a}_{x,j} |e_{1,j}\rangle \langle g_j| + \text{H.c.}) + g_y (\hat{a}_{y,j} |e_{2,j}\rangle \langle g_j| + \text{H.c.}) \Big], \quad (96)$$

където

$$\hat{H}_{\text{b}} = \sum_{j>k} t_{j,k}^{\beta} (\hat{a}_{\beta,j}^{\dagger} \hat{a}_{\beta,k} + \hat{a}_{\beta,j} \hat{a}_{\beta,k}^{\dagger}). \quad (97)$$

Подобно на модела на ДК за спин 1/2, ДКХв модела е неинтегруем в общия случай. Конкретната граница, която изучаваме в настоящата глава, е режима на силно свързване $g_{\beta} \gg t_{i,j}^{\beta}$, който ни позволява да диагонализираме \hat{H}_{JC} в (96) и след това да третираме \hat{H}_{b} като пертурбация. Тъй като оператора на броя възбуждания \hat{N}_j във всеки възел j е интеграл на движение, Хилбертовото пространство се разлага на подпространства с добре определен брой възбуждания. За нулеви възбуждания основното състояние на \hat{H}_{JC} е неизродено и се дава от $|g, 0_x, 0_y\rangle$ с $E_0 = 0$. Тук състоянието $|l, n_x, n_y\rangle$ ($l = g, e_1, e_2$) описва йон в състояние $|l\rangle$ заедно с локални фонони с n_x и n_y кванти на възбуждане. В случая на едно възбуждане във всеки възел на едномерната решетка енергетичния спектър се дава чрез

$$E_{\pm,\beta} = \Delta + \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + g_{\beta}^2}, \quad (98)$$

и съответните собствени вектори

$$|\uparrow\rangle = |-\rangle_x = \cos \theta_x |g, 1_x, 0_y\rangle - \sin \theta_x |e_1, 0_x, 0_y\rangle, \quad (99)$$

$$|\downarrow\rangle = |-\rangle_y = \cos \theta_y |g, 0_x, 1_y\rangle - \sin \theta_y |e_2, 0_x, 0_y\rangle. \quad (100)$$

В режимът на силно свързване енергетичната разлика $E_{+,\beta} - E_{-,\beta}$ е голяма в сравнение с всяка друга енергетична скала в системата; следователно двете състояния с енергия (100) могат да се третират като $s = \frac{1}{2}$ ефективна спинова система. Собствените състояния (100) описват поларитонно възбуждане в системата, причинено от силното спин-фононно взаимодействие.

Сега нека да изследваме ефектът на крайните амплитуди на тунелиране $t_{i,j}^{\beta}$. Спектър на \hat{H}_{JC} показва енергетичен процеп частица-дупка, което предполага, че съществува енергетична разлика U между състоянията с n възбуждания на възел и състоянията с $n + 1$ възбуждания в един възел и $n - 1$ в друг. В случая на енергетична разлика много по-голяма от амплитудата на тунелиране $t_{i,j}^{\beta}$ ($U \gg t_{i,j}^{\beta}$), поларитонните

възбуждания са силно локализирани в всеки възел на решетката, така че системата е във фаза на Мот изолатор. Състояния, съдържащи $n + 1$ или $n - 1$ възбуждания, могат да бъдат достигнати като виртуални междинни състояния в процесите на тунелиране от втори ред. Такива процеси от втори ред създават спин-спин взаимодействие между ефективните спиновни системи на различни възли от решетката и могат да бъдат описани с помощта на израза

$$(\hat{H}_{\text{eff}})_{r_j r'_k, d_j d'_k} = (\hat{H}_{\text{JC}})_{r_j r'_k, d_j d'_k} + \frac{1}{2} \sum_{\chi} \langle r_j, r'_k | \hat{H}_{\text{b}} | \chi \rangle \langle \chi | \hat{H}_{\text{b}} | d_j, d'_k \rangle \quad (101)$$

$$\left(\frac{1}{E_{r_j r'_k} - E_{\chi}} + \frac{1}{E_{d_j d'_k} - E_{\chi}} \right). \quad (102)$$

3.3.1 Спин-1/2 анизотропен XXZ модел на Хайзенберг

Процесът на тунелиране от втори порядък до състояние с две възбуждания в единия възел и нула в другия създават ефективно взаимодействие между спин-1/2 системите. Чрез пресмятане на матричните елементи в уравнение (102) може да се покаже, че получената динамика се описана от анизотропния XXZ Хайзенбергов хамилтониан в присъствието на външно магнитно поле

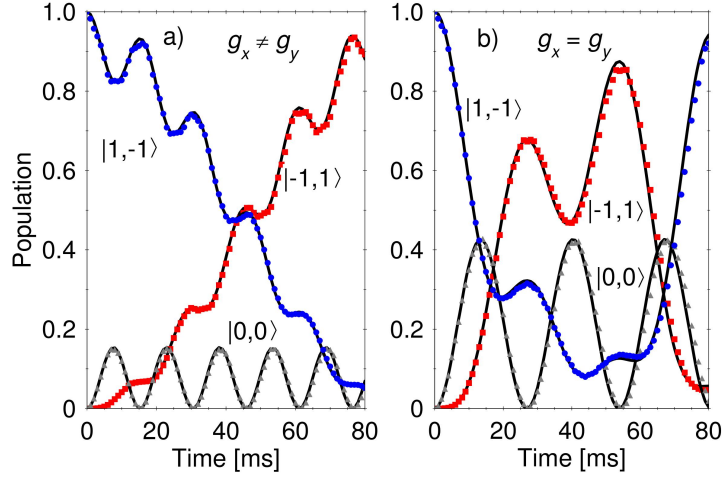
$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{j < k} K_{j,k}^{xy} (\sigma_j^x \sigma_k^x + \sigma_j^y \sigma_k^y) + \sum_{j < k} K_{j,k}^z \sigma_j^z \sigma_k^z + \sum_j H_j \sigma_j^z, \quad (103)$$

където $\sigma_j^x = (|\uparrow_j\rangle \langle \downarrow_j| + \text{H.c.})$, $\sigma_j^y = -i(|\uparrow_j\rangle \langle \downarrow_j| - \text{H.c.})$ and $\sigma_j^z = |\uparrow_j\rangle \langle \uparrow_j| - |\downarrow_j\rangle \langle \downarrow_j|$.

На фиг. 6 е показано числено сравнение между ДКХв хамилтониана (96) и хамилтониана на ефективния спинов модел (103) за линеен йон кристал с три йона. Обменното спиново взаимодействие причинява осцилиране между първоначалното състояние $|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$ и състоянията $|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$ според спиновия модел (103). Очевидно ефективният модел съвпада с точната динамика много добре.

3.3.2 Модел на Хайзенберг за спин $s = 1$

Обобщение на взаимодействащите спиновни модели с по-голям спин може да се получи, като се разгледа случаят на две поларитонни възбуждания на всеки възел от едномерната решетка. В режимът на силно свързване



Фигура 7: Обменно взаимодействие в система от три йона.

процесите на тунелиране от втори ред към състоянията с три възбуждания в единия възел и едно възбуждане в другия създават спин-спин взаимодействие между спин $s = 1$ системи. Това позволява да представим оригиналния хамилтониан (96) чрез ефективен спин $s = 1$ модел с хамилтониан

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_j [D_j (\hat{S}_j^z)^2 + B_j \hat{S}_j^z] + \sum_{j < k} J_{j,k}^{xy} (\hat{S}_j^x \hat{S}_k^x + \hat{S}_j^y \hat{S}_k^y) + \sum_{j < k} J_{j,k}^z \hat{S}_j^z \hat{S}_k^z \quad (104)$$

$$+ \sum_{j < k} W_{j,k} [\hat{S}_j^z (\hat{S}_k^z)^2 + (\hat{S}_j^z)^2 \hat{S}_k^z] + \sum_{j < k} V_{j,k} (\hat{S}_j^z \hat{S}_k^z)^2 \quad (105)$$

$$+ \sum_{j < k} [v_{j,k}^{(1)} (\hat{S}_j^z \hat{S}_j^+ \hat{S}_k^- \hat{S}_k^z + \text{H.c.}) + v_{j,k}^{(-1)} (\hat{S}_j^z \hat{S}_j^- \hat{S}_k^+ \hat{S}_k^z + \text{H.c.})]. \quad (106)$$

На фиг. 7 е сравнена валидността на пертурбативния подход, като сравняваме ефективния хамилтониан (106) с ДКХв хамилтониана (96) в система от два йона. За различни спин-бозонни връзки, фиг. 7 (а), показва вероятностите за намиране на системата в състоянията $|1, -1\rangle$, $|0, 0\rangle$, и $|-1, 1\rangle$.

3.4 Заключение

В тази глава беше разгледан квантовият модел на Джейнс-Къминг-Хъбард, който описва поларитонни възбуждания в едномерна решетка. Физич-

ната реализация на модела е предложена в система от йони в капан на Паул. Показано е, че модела описва квантов фазов преход от фаза на Мот изолатор към свръх-флуидна фаза. Критичната амплитуда на тунелирана е аналитично определена с помощта на ефективни модели и е сравнена с числено интегриране на модела. Също така е дискутирана реализация на модела в V система от атомни нива. Показано е, че в фаза на Мот изолатор виртуални процеси на фононно тунелиране индуцират Хайзенбергово спин-спин взаимодействие.

4 Квантов Магнитен Структурен Фазов Преход в модела на Ян-Телер; Физична Реализация с йони в линейна уловка на Паул

В тази глава ще изследваме колективния и кооперативния квантов магнитен структурен фазов преход на симетричния $E \otimes e$ модел на Ян-Телер в система от йони в капан на Паул. Ще покажем, че при подходящи експериментални условия ансамбъл от спинове може да взаимодейства само с единичен вибрационен квант във всяка радиална посока с $U(1)$ симетрични параметри. Полученият модел е точно решим в термодинамична граница и може да бъде решен чрез числена диагонализация за краен брой йони.

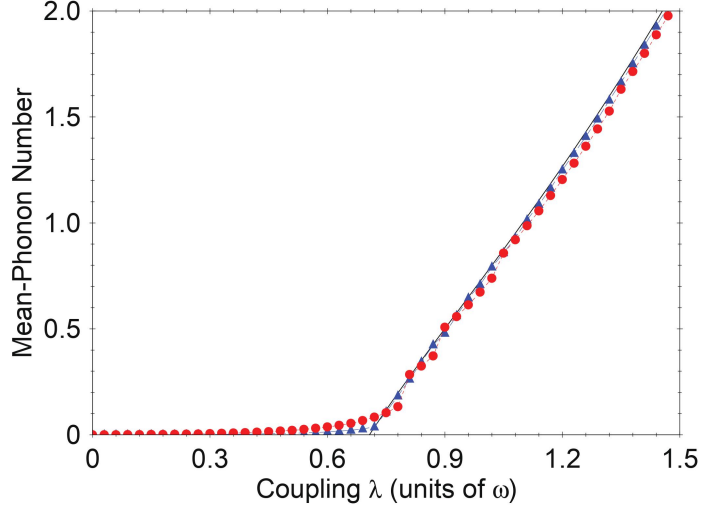
Ще разширим дискусията, като се фокусираме върху кооперативният модел на Ян-Телер, състоящ се от ансамбъл от ефективни спинове, които взаимодействат с набор от вибрационни кванти. Ще покажем, че системата търпи квантов магнитен структурен фазов преход, който води до пренареждане на равновесните положения на йоните и образуване на спин-фононен квазикондензат в мезоскопични йонни вериги. Освен това ще дискутираме аналитични приближения към фазовата диаграма на основното състояние и колективните ниско-енергетични възбуждания на кооперативния модел на Ян-Телер.

4.1 Колективен модел на Ян-Телер-Дике

Нека разгледаме взаимодействието на йони в капан на Паул с колективните вибрационни трептения. Тези взаимодействия могат да бъдат създадени или чрез лазерни полета, или чрез градиенти на магнитно поле. Тук ще се фокусираме върху последната техника, тъй като тя естествено създава симетрични параметри на спин-фононно взаимодействие в равнината x - y , и също така избягва нежелани ефекти като членове от по-висок порядък в развитието по параметъра на Ламб-Дике.

Нека предположим, че йонният кристал взаимодейства с осцилиращ магнитен квадрупол с хамилтониан на взаимодействието

$$\hat{H}_1 = - \sum_{i=1}^N \hat{\vec{\mu}}_i \cdot \vec{B}(t; \delta r_{x,i}, \delta r_{y,i}), \quad (107)$$



Фигура 8: Среден брой фонони $(\langle \hat{n}_x \rangle + \langle \hat{n}_y \rangle)/j$ като функция на спин-фононната връзка λ . Числените резултати за 10 (червени кръгове) и 20 (сини триъгълници) йона са сравнени с аналитичния резултат (плътна линия). За $\lambda \leq \lambda_c$ фазата се характеризира с нулеви фононни възбуждания. Пренареждане на йонните равновесни позиции за $\lambda > \lambda_c$ е придружено със създаване на макроскопичен брой радиални фонони.

където $\hat{\mu}_i = \mu_x \sigma_i^x + \mu_y \sigma_i^y$ е магнитния диполен момент на i -тия йон. Също така магнитното поле се дава с $\vec{B}(t; x, y) = Bf(t)(\vec{e}_x x - \vec{e}_y y)$, където $f(t) = (\cos \nu_b t + \cos \nu_r t)$. Честотите ги избираме $\nu_{b,r} = (\tilde{\omega}_0 - \omega_0) \pm (\omega_{c.m.} - \omega)$, което позволява да се осъществи червен и син преход между колективните спинови състояния и колективната център на масите мода. Хамилтонианът в представяне на взаимодействието се дава чрез

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{JTD}} = & \omega(\hat{n}_x + \hat{n}_y) + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\lambda}{\sqrt{4j}} (\hat{J}_+ + \hat{J}_-) (\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x) \\ & + i \frac{\lambda}{\sqrt{4j}} (\hat{J}_+ - \hat{J}_-) (\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y), \end{aligned} \quad (108)$$

където $\hat{J}_+ = \sum_{i=1}^N \sigma_i^+$ ($\hat{J}_+^\dagger = \hat{J}_-$) и $\hat{J}_z = 1/2 \sum_{i=1}^N \sigma_i^z$ са колективните спинови оператори с големина на спина $j = N/2$. Колективният модел на Ян-Телер-Дике описан с хамилтониан (108) в общия случай е неинтегрируем. Границата в която ще изследваме модела е $j \rightarrow \infty$ (термодинамична граница), която позволява аналитично описание на основното състояние.

4.2 Нормална Фаза

За да изследваме критичното поведение на модела е удобно да представим колективните спинови оператори посредством трансформацията на Холщейн-Примакоф $\hat{J}_+ = \hat{b}^\dagger \sqrt{2j - \hat{b}^\dagger \hat{b}}$, $\hat{J}_- = \sqrt{2j - \hat{b}^\dagger \hat{b}} \hat{b}$, и $\hat{J}_z = \hat{b}^\dagger \hat{b} - j$. Тогава хамилтонианът придобива следния вид:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{JTD}} = & \omega(\hat{n}_x + \hat{n}_y) + \omega_0(\hat{b}^\dagger \hat{b} - j) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \{ \hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \\ & + \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \hat{b} \} (\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x) + i \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \{ \hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \\ & - \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \hat{b} \} (\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y), \end{aligned} \quad (109)$$

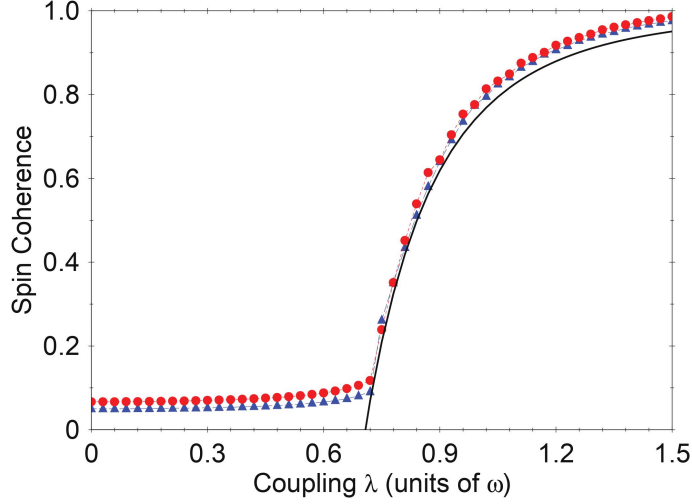
Нека развием в ред на Тейлър квадратните корени в хамилтониана (109) и приемем, че $\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle / j \ll 1$ (това условие ще бъде числено проверено), което дава

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{JTD}}^{(1)} = & \omega(\hat{n}_x + \hat{n}_y) + \omega_0 \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) (\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x) \\ & + i \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (\hat{b}^\dagger - \hat{b}) (\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y) + E_G^{(1)}, \end{aligned} \quad (110)$$

Хамилтонианът (110) е квадратичен по операторите на раждане и унищожение и следователно може да бъде точно диагонализиран. Понеже (110) описва взаимодействие на три бозона, следва че ще имаме три колективни моди, които се дават от матрицата

$$\mathcal{B}'_{il} = \begin{bmatrix} \omega^2 & -\lambda \sqrt{\frac{\omega_0 \omega}{m_+}} & \lambda \sqrt{\frac{\omega_0 \omega}{m_-}} \\ -\lambda \sqrt{\frac{\omega_0 \omega}{m_+}} & \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2m_+} & \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\sqrt{m_+ m_-}} \\ \lambda \sqrt{\frac{\omega_0 \omega}{m_-}} & \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\sqrt{m_+ m_-}} & \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2m_-} \end{bmatrix}. \quad (111)$$

Честотите на колективните моди са собствените стойности ε'_p ($p = 1, 2, 3$) на матрицата \mathcal{B}'_{il} , които са положителни за $\lambda \leq \sqrt{\omega_0 \omega / 2}$. Последното условие позволява да определим критичната стойност на параметъра на взаимодействие, $\lambda_c = \sqrt{\omega_0 \omega / 2}$. В нормална фаза средните стойности на



Фигура 9: Резултатът получен от приближение на средното поле за $(\langle \hat{J}_x^2 \rangle + \langle \hat{J}_y^2 \rangle)/j^2$ като функция на спин-фононната връзка λ . Числените резултати за 30 (червени кръгове) и 40 (сини триъгълници) йони се сравняват с аналитичния резултат (плътна линия). Наблюдава се създаване на макроскопична спин-кохерентност за $\lambda > \lambda_c$, който е аналог на свръх-радиантната фаза в модела на Дике.

операторите \hat{a}_α и \hat{b} не зависят от броя на атомите и растат с приближаването на λ до λ_c . По този начин за средната стойност $\langle b^\dagger b \rangle$ в термодинамична граница получаваме $\langle b^\dagger b \rangle/j \rightarrow 0$, за $\lambda < \lambda_c$. В тази граница нормалната фаза се характеризира с нулева плътност на фононни възбуждания $\langle \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \rangle/j = 0$ и колективен спин, ориентиран по оста z , $\langle \hat{J}_z \rangle/j = -1$.

4.3 Свръх-Радиантна Фаза

За да се определи поведението на системата за $\lambda > \lambda_c$, ние следваме общата процедура, въведена от Емари и Брандес в [18] за квантовия модел на Дике. Всяка бозонна мода е отместена $\hat{a}_x^\dagger \rightarrow \hat{a}_x^\dagger + \sqrt{\alpha_x^*}$, $\hat{a}_y^\dagger \rightarrow \hat{a}_y^\dagger + \sqrt{\alpha_y^*}$, and $\hat{b}^\dagger \rightarrow \hat{b}^\dagger - \sqrt{\gamma^*}$, където α_x , α_y , и γ са комплексни параметри от порядък j . Използвайки трансформацията на Холщайн-Примакоф получаваме

$$\hat{H}_{\text{JTD}}^{(2)} = \omega(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \sqrt{\alpha_x^*} \hat{a}_x + \sqrt{\alpha_x} \hat{a}_x^\dagger + |\alpha_x|) + \omega(\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y$$

$$\begin{aligned}
& +\sqrt{\alpha_y^*}\hat{a}_y + \sqrt{\alpha_y}\hat{a}_y^\dagger + |\alpha_y|) + \omega_0(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \sqrt{\gamma^*}\hat{b} \\
& -\sqrt{\gamma}\hat{b}^\dagger + |\gamma| - j) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{2j}}(\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x + \sqrt{\alpha_x^*} \\
& +\sqrt{\alpha_x})\{\hat{b}^\dagger\sqrt{\hat{\xi}} + \sqrt{\hat{\xi}}\hat{b} - \sqrt{\hat{\xi}}(\sqrt{\gamma^*} + \sqrt{\gamma})\} \\
& +i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{2j}}(\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y + \sqrt{\alpha_y^*} + \sqrt{\alpha_y})\{\hat{b}^\dagger\sqrt{\hat{\xi}} \\
& -\sqrt{\hat{\xi}}\hat{b} - \sqrt{\hat{\xi}}(\sqrt{\gamma^*} - \sqrt{\gamma})\}. \tag{112}
\end{aligned}$$

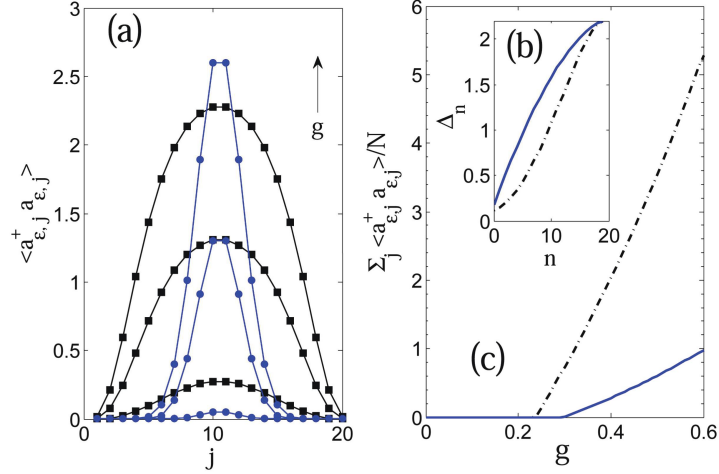
Параметрите $\alpha_{x,y}$ и γ се определят от условието всички линейни членове по операторите на раждане и унищожение в (112) да се нулират. Това води до алгебрична система, от която определяме неизвестните параметри. Получаваме

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha_x} &= \frac{\lambda}{\omega}\sqrt{j(1-s^2)}\cos\phi, \quad \sqrt{\alpha_y} = \frac{\lambda}{\omega}\sqrt{j(1-s^2)}\sin\phi, \\
\sqrt{|\gamma|} &= \sqrt{j(1-s)}, \tag{113}
\end{aligned}$$

където $s = \lambda_c^2/\lambda^2$. Може да се покаже, че спектъра на хамилтониана (112) в термодинамична граница е положително дефиниран за $\lambda > \lambda_c$. Свърх-радиантната фаза се характеризира с ненулева плътност на бозонните възбуждания $\langle \hat{n}_x \rangle / j = (\lambda^2/\omega^2)(1-s^2)\cos^2\phi$ и $\langle \hat{n}_y \rangle / j = (\lambda^2/\omega^2)(1-s^2)\sin^2\phi$, виж Фиг. 8. Колективното отместване на център на масите мода означава, пренареждане на йонните равновесни положения в радиалната x - y равнина. Новите радиални равновесни положения са $x_{i0} = q_0\sqrt{2\alpha_x/j}$ и $y_{i0} = q_0\sqrt{2\alpha_y/j}$. Структурният фазов преход е съпроводен и с нова спинова феромагнитна подредба, $\langle \hat{J}_x^2 \rangle / j^2 = (1-s^2)\cos^2\phi$, $\langle \hat{J}_y^2 \rangle / j^2 = (1-s^2)\sin^2\phi$, виж Фиг. 9.

4.4 Квантово симулиране на кооперативен ефект на Ян-Телер в едномерен йонен кристал

В този параграф ще дискутираме магнитния структурен фазов преход в кооперативния модел на Ян-Телер, който описва $E \otimes e$ симетрично взаимодействие на ансамбъл от спин-1/2 частици с ансамбъл от вибрационни моди. Ще покажем, че кооперативния модел на Ян-Телер описва магнети-



Фигура 10: Резултати получени от приближение на средното поле с $N = 20$ йона. Параметрите са $\omega_z = 1$, $\Delta = 2.2$. а) Локален брой фонони като функция на позицията на възела. Черни квадратчета: хомогенна верига с $g = 0, 25, 0.45$, и 0.5 , $t_{j,j+1} = 0, 5$. Сини кръгове: Кулонова верига с $g = 0, 4, 0, 45, 0, 5$ и мащабирано разстояние, така че в центъра $t_{10,11}^{\text{coul}} = 0, 5$. В (б) и (в) показваме резултати за Кулонова (непрекъсната линия) и хомогенна вериги (пунктирна линия). (б) Вибрационни енергии на радиалните колективни моди. в) среден брой фонони като функция от g . Точката на фазовия преход при $g \sim 0,25$ и $0,3$ е видима съответно за кулоновата и хомогенната верига.

тен структурен фазов преход съпроводен с образуване на спин-фононен свръх-флуид.

Нека разгледаме верига от N спин-1/2 частици с нива $|0\rangle_j$, $|1\rangle_j$ на всеки възел j , които взаимодействат с два вида бозони с оператори $a_{\beta,j}$ ($\beta = x, y$). Хамилтонианът на системата е

$$H_{\text{сЈГ}} = H_s + H_b + H_c, \quad (114)$$

където $H_s(\omega_z) = (\omega_z/2) \sum_j \sigma_j^z$, и

$$H_b(\{\Delta_j\}, \{t_{j,l}\}) = \sum_{\beta,j} \Delta_j a_{\beta,j}^\dagger a_{\beta,j} + \sum_{\beta,j>l} t_{j,l} (a_{\beta,j}^\dagger a_{\beta,l} + \text{H.c.}), \quad (115)$$

където Δ_j е енергията на бозона във възел j и $t_{j,l}$ са матричните елементи на амплитудата на тунелиране. Последният член в (114) описва $E \otimes e$

спин-бозон взаимодействие

$$H_c(g) = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_j \{ \sigma_j^x (a_{x,j} + a_{x,j}^\dagger) + \sigma_j^y (a_{y,j} + a_{y,j}^\dagger) \}, \quad (116)$$

който може да се запише посредством операторите $a_{r,j}^\dagger = (a_{x,j}^\dagger + ia_{y,j}^\dagger)/\sqrt{2}$, $a_{l,j}^\dagger = (a_{x,j}^\dagger - ia_{y,j}^\dagger)/\sqrt{2}$, като

$$H_c(g) = g \sum_j \sigma_j^+ (a_{r,j} + a_{l,j}^\dagger) + \text{H.c.} \quad (117)$$

Моделът е U(1) симетричен спрямо въртения x - y равнината генерирани от оператора $C = \sum_j (a_{r,j}^\dagger a_{r,j} - a_{l,j}^\dagger a_{l,j} + \sigma_j^z/2)$.

4.4.1 Приближение на средното поле

За да опишем фазовата диаграма на кооперативния модел на Ян-Телер е удобно да използваме приближение на средното поле, което се състои в пробна вълнова функция за основното състояние с неизвестни параметри, които определяме от условието за минимална енергия. Пробната вълнова функция се записва като

$$|\Psi_{\text{MF}}\rangle = \prod_j |\theta_j, \phi_j\rangle \otimes e^{\sum_{\epsilon,n} (\alpha_{\epsilon,n} a_{\epsilon,n}^\dagger - \alpha_{\epsilon,n}^* a_{\epsilon,n})} |0\rangle_l |0\rangle_r, \quad (118)$$

където $|\theta_j, \phi_j\rangle = \cos(\theta_j/2)|0\rangle_j + e^{-i\phi_j} \sin(\theta_j/2)|1\rangle_j$ е спин-кохерентно състояние, и $|0\rangle_\epsilon$ е вакуумното състояние за всяка бозонна мода. Чрез минимизирането на енергията $E = \langle \Psi_{\text{MF}} | H | \Psi_{\text{MF}} \rangle$ ние получаваме система от свързани алгебрични уравнения за вариационните параметри θ_j , ϕ_j , и $\alpha_{\epsilon,n}$,

$$\alpha_{\epsilon,n} = -\frac{g}{2\Delta_n} \sum_j b_{n,j} \sin \theta_j, \quad \omega_z \tan \theta_j = -\sum_l J_{j,l} \sin \theta_l, \quad J_{j,l} = 2 \sum_n \Re \frac{g^2}{\Delta_n} b_{n,j}^* b_{n,l}. \quad (119)$$

За да оценим фазовата диаграма получена от средното поле, нека разгледаме периодични гранични условия, където $b_{n,j} = \exp(-i2\pi nj/N)/\sqrt{N}$, и $J_{j,l} > 0$. Последното условие е изпълнено, ако вибрационните енергии $\Delta_n > 0$ и имат минимум за център на масата мода, $n = 0$. За този случай намираме хомогенно решение $\theta_j = \theta$, със стойност $\cos \theta = g_c^2/g^2$ ако

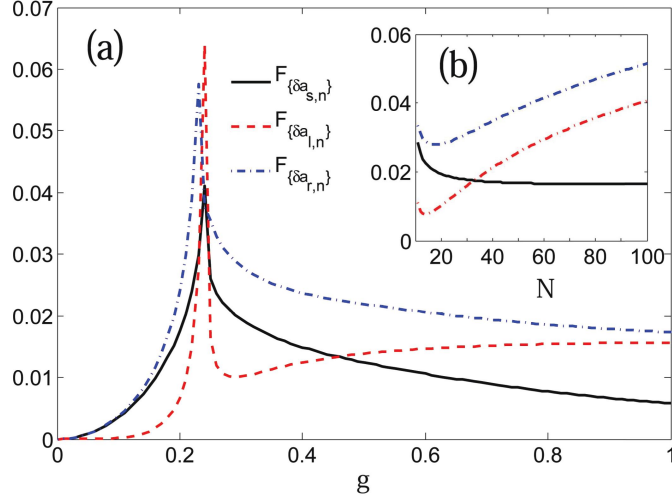
($g > g_c$), и $\cos \theta = 1$, ако ($g < g_c$), където критичния параметър на свързване е $g_c^2 = \Delta_0 \omega_z / 2$. Критичната амплитуда е $\alpha_{\epsilon,0} = -(g\sqrt{N}/2\Delta_0) \sin \theta$, показваща кондензация в режим $n = 0$ за $g > g_c$. Кондензацията за $g > g_c$ предполага феромагнитно подреждане на спиновете в равнината xz заедно с колективно отместване на координатата на центъра на масата, което означава магнитен структурен фазов преход.

За да предскажем фазите на модела в едномерен йонен кристал, трябва да отчетем краевите ефекти. Ние ще разгледаме: (i) (нехомогенен случай). Разстоянието между йоните в хармоничен линейен капан, $d_j = r_j^0 - r_{j-1}^0$, се увеличава от центъра към краищата на веригата. В резултат и $t_{j,k}^{\text{coul}}$ и $\omega_{t,j}$ зависят от позицията. (ii) (хомогенен случай). Този случай съответства на равно разстояние между йони. Фиг. 10 показва резултатите за случаи (i) и (ii), с $N = 20$ йони. Спин-фононната кондензация се появява първо в центъра на веригата, нещо, което може да се използва за експериментално откриване на кондензацията. Този ефект е по-силен в случая на Кулонова верига от йони поради нехомогенността в локалните честоти на улавяне.

4.5 Гаусови флуктуации

Квантовите флуктуации разрушават подредбата (спиновата ориентация и фононния кондензат) в термодинамичната граница на едномерни квантови системи, където непрекъснатата симетрия е спонтанно нарушена. Теорията на средното поле дава обаче добро приближение в диапазон от мезоскопични размери на дължината на кристала, следователно в най-походящия режим на параметри.

За да определим квантовите флуктуации използваме гаусово приближение около решението получено от приближението на средното поле. Нека първо определим операторите по отношение на бозоновите степени на свобода, $\delta a_{\epsilon,n} = a_{\epsilon,n} - \alpha_{\epsilon,n}$. Спиновите флуктуации се определят използвайки приближението на Холщайн-Примакоф около феромагнитната подредба. За тази цел дефинираме оператора $U_{\theta,j}|\theta_j, 0\rangle_j = |0, 0\rangle_j$, който трансформира спин кохерентното състояние до спиново състояние насочено по оста $-z$ $\sigma_j^z = \cos \theta_j \bar{\sigma}_j^z + \sin \theta_j \bar{\sigma}_j^x$, $\sigma_j^x = \cos \theta_j \bar{\sigma}_j^x - \sin \theta_j \bar{\sigma}_j^z$, където $\bar{\sigma}_j^{z,x} = U_{\theta,j} \sigma_j^{z,x} U_{\theta,j}^\dagger$. След тази трансформация може да използваме приближението на Холщайн-Примакоф $\bar{\sigma}_j^+ \approx \delta a_{s,j}^\dagger$, $\bar{\sigma}_j^- \approx \delta a_{s,j}$, $\bar{\sigma}_j^z = 2\delta a_{s,j}^\dagger \delta a_{s,j} - 1$, което е валидно за $\langle \delta a_{s,j}^\dagger \delta a_{s,j} \rangle \ll 1$. За хамилтониана описващ квантовите



Фигура 11: Квантови гаусови флуктуации $F_{\delta a_{\gamma,n}}$.

флуктуации получаваме

$$H_G = \sum_{n,\epsilon} \Delta_n \delta a_{\epsilon,n}^\dagger \delta a_{\epsilon,n} + \sum_j \omega_j \delta a_{s,j}^\dagger \delta a_{s,j} \quad (120)$$

$$+ \frac{g}{2} \sum_{j,n} b_{n,j} \cos \theta_j (\delta a_{s,j} + \delta a_{s,j}^\dagger) (\delta a_{l,n} + \delta a_{l,n}^\dagger + \delta a_{r,n} + \delta a_{r,n}^\dagger) \quad (121)$$

$$+ \frac{g}{2} \sum_{j,n} b_{n,j} (\delta a_{s,j} - \delta a_{s,j}^\dagger) (\delta a_{l,n} - \delta a_{l,n}^\dagger - (\delta a_{r,n} - \delta a_{r,n}^\dagger)), \quad (122)$$

където $\omega_j = \omega_z / \cos \theta_j$. Хамилтонианът може да се диагонализира посредством трансформацията

$$\delta a_{\gamma,n} = \sum_{m=1,\dots,3N} (U_{n,m}^\gamma c_m + V_{n,m}^\gamma c_m^\dagger) \quad (\gamma = s, l, r), \quad (123)$$

така че получаваме $H_G = \sum_m \omega_m c_m^\dagger c_m$.

За да изчислим квантовите флуктуации, дефинираме вакуума като $|\Omega\rangle$, с условието $c_m |\Omega\rangle = 0$. Също така дефинираме квантовите флуктуации като използваме израза

$$F_{\{\delta a_{\gamma,n}\}} = \frac{1}{N} \sum_n \langle \Omega | \delta a_{\gamma,n}^\dagger \delta a_{\gamma,n} | \Omega \rangle, \quad (124)$$

където $F_{\{\delta a_{r,n}\}}$ (r -фонон), $F_{\{\delta a_{l,n}\}}$ (l -фонон) и $F_{\{\delta a_{s,n}\}}$ (спинова вълна). На фиг. 11(а) е показано квантовите флуктуации като функция на g . В граница на $g \gg g_c$ квантовите флуктуации намаляват, в съгласие с интуицията, че съответства на класическата граница. За система с мезоскопичен брой уловени йони ($N \approx 20$) $F_{\{a_{\gamma=s,r,l,n}\}} \ll 1$ е изпълнено, в съответствие с валидността на хамилтониан (122). На фиг. 11(б) показваме растенето на квантовите флуктуации като функция на N .

4.6 Заключение

В тази глава беше предложено квантово симулиране на колективния и кооперативния модел на Ян-Телер с йони в капан на Паул. Моделът на Ян-Телер описва $U(1)$ симетрично взаимодействие между спин-1/2 частици и бозони. В първата част беше разгледан колективният модел на Ян-Телер, в който ансамбъл от спинове взаимодейства с една вибрационна мода. Показано е, че модела е точно решим в термодинамична граница като описва квантов фазов преход между нормална и свръх-радиантна фаза. За краен брой спинове аналитичните решения за параметрите на подреждане са сравнени с численото диагонализиране на модела.

Във втората част беше дискутиран кооперативният модел на Ян-Телер, в който ансамбъл от N спина взаимодейства с ансамбъл от N бозона. Показано е, че модела описва магнитен структурен фазов преход, в който равновесните положения на частиците се пренареждат в зигзагообразна конфигурация, а спиновте образуват анти-ферромагнитна подредба. Показано е, че основното състояние съответства на спин-бозонен квазикондензат.

5 Квантов магнетизъм в смесени спинови системи. Реализация със смесен йонен кристал.

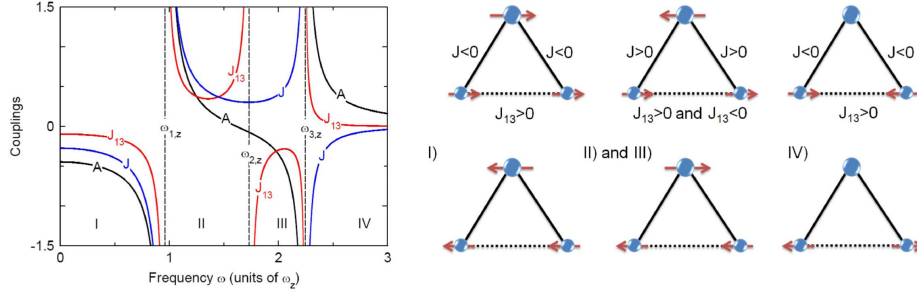
В тази глава е предложено изучаването на фрустрирани спинови системи, които могат да бъдат реализирани с линейни кристали от студени йони, извън често обсъждания случай на спин $s = \frac{1}{2}$. Спин-спин взаимодействието между йоните може да се създаде чрез прилагане на осцилиращи магнитни полета със силни градиенти. Освен това, колективните вибрационни моди в кристала със смесен йон могат да се използват за подобряване и промяна на големината на спин-спин взаимодействието и дори за превключване от феро- към антиферромагнитен характер. Ще разгледаме поведението на ефективните спин-спин връзки в йонни кристали на спин- $\frac{1}{2}$ йони, и съответно с йони с висок магнитен момент със спин $S = 3$. Ще анализираме фазовата диаграма на основното състояние, която включва различни магнитни (феро, анти-феро, и фери) подредби. В най-простия нетривиален пример е линеен кристал $\{ \text{Ca}^+, \text{Mn}^+, \text{Ca}^+ \}$ със спинове $\{ \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{2} \}$, в който подробно ще анализираме спиновите ориентации на основното състояние.

5.1 Магнитен градиент в z -посока

Нека предположим, че йонния кристал взаимодейства колективно с осцилиращо магнитно градиентно поле с честота ω , приложена по посока z , $\vec{B} = \vec{e}_z z B_z \cos \omega t$. Хамилтонианът в представяне на взаимодействието е

$$\begin{aligned} \hat{H}_I^z = & -\hbar \sum_{n=1}^N \left(\sum_{j=1}^{N-K} \frac{\Omega_{j,n}^z}{2} \sigma_j^z + \sum_{k=1}^K \Omega_{k,n}^z S_k^z \right) \left(\hat{a}_{n,z}^\dagger e^{i(\omega + \omega_{n,z})t} + \hat{a}_{n,z} e^{-i(\omega + \omega_{n,z})t} \right) \\ & -\hbar \sum_{n=1}^N \left(\sum_{j=1}^{N-K} \frac{\Omega_{j,n}^z}{2} \sigma_j^z + \sum_{k=1}^K \Omega_{k,n}^z S_k^z \right) \left(\hat{a}_{n,z}^\dagger e^{-i(\omega - \omega_{n,z})t} + \hat{a}_{n,z} e^{i(\omega - \omega_{n,z})t} \right) \end{aligned} \quad (125)$$

Следователно, осцилиращото магнитно градиентно поле индуцира връзка между вътрешните състояния на йоните и външните (вибрационни) състояния на йонния кристал. Двата члена в хамилтониан (125) описват променливо във времето спин-зависимо отместване с честоти $(\omega + \omega_{n,z})$



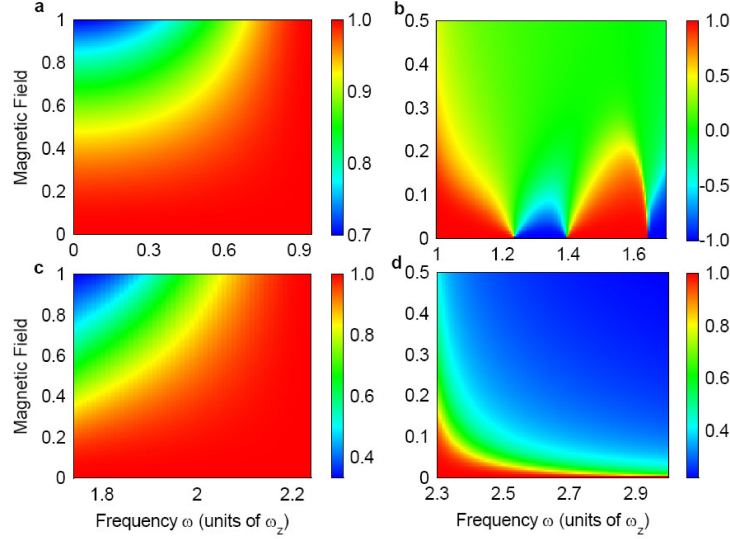
Фигура 12: Спин-спин взаимодействие между най-близкият съсед $J_{12} = J_{23} = J$, както и следващият най-близък съсед J_{13} и спин анизотропия A като функция на ω за йонен кристал, състоящ се от два спина- $\frac{1}{2}$ и един спин-3, поставен в центъра.

и $(\omega - \omega_{n,z})$. Ако честотата ω не е резонансна с никоя вибрационна мода и условието $|\omega_{n,z} - \omega| \gg \Omega_{j,n}^z$ е изпълнено за всяко n , тогава можем да извършим усредняване по времето на бързо осцилиращите членове в (125). Следователно стигаме до следния усреднен по време ефективен хамилтониан

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff}^z = & \hbar \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j>j'}}^{N-K} J_{j,j'}^{(1,z)} \sigma_j^z \sigma_{j'}^z + \hbar \sum_{\substack{k,k'=1 \\ k>k'}}^K J_{k,k'}^{(2,z)} S_k^z S_{k'}^z \\ & + \hbar \sum_{j,k=1}^N J_{j,k}^{(3,z)} \sigma_j^z S_k^z + \hbar \sum_{k=1}^K A_k^z (S_k^z)^2. \end{aligned} \quad (126)$$

Резултатът показва, че нерезонансния осцилиращ магнитен градиент създава ефективно спин-спин взаимодействие между идентични и различни йони в кристала. Първите два члена в (126) описват спин-спин взаимодействие между спин- $\frac{1}{2}$ йони и спин-3 йони. Третият член в (126) описва спин-спин взаимодействие между различните видове йони. Изненадващо, адиабатното елиминирание на вибрационните моди поражда анизотропен член A_j^z , който характеризира нелинейното Зееманово отместване на 3-те магнитните поднива.

На фиг. 12 е показано спин-спин параметрите и анизотропията за верига от два спина- $\frac{1}{2}$ и един спин-3 като функция на честотата ω . За разлика от постоянния градиент на магнитното поле, приложен по оста на улавяне z , където спин взаимодействието може да бъде само фе-



Фигура 13: Фазова диаграма на модела на Изинг с три спина като функция на честотата ω и магнитното поле.

ромагнитно, сега, когато ω се променя, големината и знакът на спин параметрите се променят, което позволява създаването на ферромагнитни, антиферромагнитно или фрустрирано взаимодействие между йоните. Основното състояние на хамилтониан (126) силно зависи от знака на анизотропията A_k^z . Всъщност, при достатъчно голяма положителна анизотропия ($A_k^z \gg 0$), йоните със спин 3 имат магнитно квантово число $m = 0$ за основното състояние, докато в обратната граница ($|A_k^z| \gg 0$) проекцията на основното състояние на спин-3 е $m = \pm 3$

5.2 Модел на Изинг

Моделът на Изинг се описва с хамилтониан

$$H_{TI} = H_{eff}^z - \hbar B_x^0 \left\{ \sum_{j=1}^{N-K} \frac{\sigma_j^x}{2} + \sum_{k=1}^K S_k^x \right\}. \quad (127)$$

Последният член в (127) може да се реализира чрез прилагане на радио честотно магнитно поле $\vec{B}_0 = \vec{e}_x B_0 \cos \tilde{\omega} t$. Ако предположим резонансно условие $\tilde{\omega} = \omega_0$, тогава получаваме ефективно магнитно поле $B_x^0 = \gamma B_0 / 2\hbar$.

Най-простият нетривиален случай е да се разгледаме йонна верига с два спина- $\frac{1}{2}$ и един спин-3, поставен в центъра. При прилагане на осцилиращото градиентно поле, получените спин параметри са показани на фиг. (12) като функция на честотата ω . Можем да разграничим четири различни области, в които спин-спин взаимодействията са феромагнитни, антиферомагнитни или фрустрирани. Наличието на анизотропия A променя съществено фазовата диаграма на основното състояние в сравнение със случая на спин- $\frac{1}{2}$ йонна верига.

В област I), виж фиг. (13), всички взаимодействия са феромагнитни ($J, J_{13} < 0$) и полученото основно състояние на хамилтониана е суперпозиция на две феромагнитни състояния $|\uparrow\uparrow\rangle|3\rangle$ и $|\downarrow\downarrow\rangle|-3\rangle$. Тъй като анизотропията е отрицателна ($A < 0$), енергията на основното състояние е минимизирана за спин-3 състояние с магнитно квантово число $m = \pm 3$. Феромагнитната заселеност $P_{fm,3} = P_{\uparrow\uparrow 3} + P_{\downarrow\downarrow -3}$ в зависимост от ефективното магнитно поле и честотата ω е показана на фиг. (13) а. В областта II) спиновите взаимодействия са антиферомагнитни ($J, J_{13} > 0$). Това е случаят на феримагнетизъм, при който спиновете от двата типа взаимодействат чрез антиферомагнитно свързване (виж фиг. (13) б). Феримагнитното взаимодействие обаче е фрустрирано поради наличието на антиферомагнитно свързване на най-близкия съсед $J_{13} > 0$, което нарушава феримагнитната подредба и има тенденция да подреди двата спина- $\frac{1}{2}$ в антиферомагнитно състояние. Освен това феримагнитното взаимодействие също е фрустрирано поради силната положителна анизотропия $A > 0$, която се опитва да проектира състоянието на спин-3 $|m\rangle$ в квантово число $m = 0$. В началото на регион II) $A > 0$ е голямо, но феримагнитната конфигурация все още е енергийно благоприятна, така че основното състояние на хамилтониан (127) като $B_x^0 \rightarrow 0$ е суперпозиция на две феримагнитни състояния $|\psi\rangle_{f,1} = (|\uparrow\uparrow\rangle|3\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle|-3\rangle)\sqrt{2}$, където $S = 3$ и $s = \frac{1}{2}$ са подредени анти-паралелно помежду си. Чрез увеличаване на ω анизотропия A намалява, което позволява квантовото число m да се увеличи и полученото основно състояние е $|\psi\rangle_{f,2} = (|\uparrow\uparrow\rangle|2\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle|-2\rangle)\sqrt{2}$. За $A/J = 2/3$, което се случва при $\omega \approx 1.24\omega_z$ основното състояние за $B_x^0 = 0$ е заплетена суперпозиция от четири феримагнитни състояния $|\uparrow\uparrow\rangle|-1\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle|1\rangle, |\uparrow\uparrow\rangle|-2\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle|2\rangle$. Чрез намаляване на A феримагнитното състояние $|\psi\rangle_{f,2}$ прави преход към състояние $|\psi\rangle_{f,3} = (|\uparrow\uparrow\rangle|-3\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle|3\rangle)\sqrt{2}$. В точката на преход $\omega = 1.4\omega_z$ и $A/J = 0.4$ полученото основно състояние за $B_x^0 = 0$ е сплетена суперпозиция от четири феримагнитни състояния, $|\uparrow\uparrow\rangle|-2\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle|2\rangle,$

$|\uparrow\uparrow\rangle|-3\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle|3\rangle$. За достатъчно големи положителни J_{13} феримагнитното подреждане е нарушена и двата спин- $\frac{1}{2}$ йона са подредени в антиферромагнитно състояние. Следователно, феримагнитната конфигурация е нарушена и основното състояние е $|\psi_{a,3}\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)(|3\rangle + |-3\rangle)/2$. В точката на преход $\omega \approx 1.65\omega_z$ основното състояние на хамилтониана (127) е сплетена суперпозиция от шест състояния: две феримагнитни състояния $|\uparrow\uparrow\rangle|-3\rangle$ и $|\downarrow\downarrow\rangle|3\rangle$ и четири антиферромагнитни състояния $|\uparrow\downarrow\rangle|3\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle|-3\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle|3\rangle$, и $|\downarrow\uparrow\rangle|-3\rangle$. В област III) спиновото взаимодействие между най-близките съседи е антиферромагнитно ($J > 0$), така че феримагнитната конфигурация е благоприятна. За разлика от региона II), не съществува фрустриране, тъй като $J_{13} < 0$ и $A < 0$. В целия регион основното състояние е феримагнитно $|\psi_{f,3}\rangle$.

5.3 Заключение

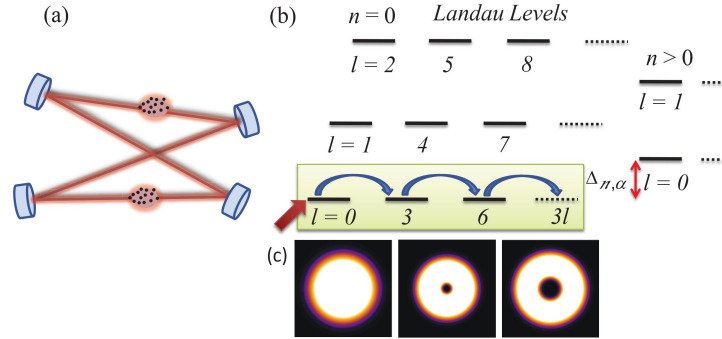
В тази глава беше разгледаден модел на смесен йонен кристал, състоящ се от спинове с различна големина. Външно осцилиращо магнитно поле с ненулев градиент индуцира взаимодействие между отделните спинове и колективните вибрационни моди на йонния кристал. Когато честотата на магнитното поле не е в резонанс с никоя честота на трептене, тогава може да се осредни ефекта от фононите, така че получения хамилтониан описва ефективно спиново взаимодействие между различни по големина спинове. Чрез прилагане на допълнително магнитно поле е показано, че получения модел се описва от хамилтониана на Изинг. Фазовата диаграма на модела е изследвана за система от три спина.

6 Вмъкване на адиабатен магнитен поток и създаване на топологични Лафлин състояния на Ридбергови поларитони

В тази глава предлагаме схема за адиабатно прехвърляне на кванти на магнитен поток кратни на $3\hbar$ едновременно към всички фотони в непланарен резонатор. Преносът на потока се постига с помощта на външни лазерни полета с орбитален ъглов момент и почти резонансна плътна атомна среда като посредник. Освен това, свързването на фотоните в резонатора към Ридбергови състояния в конфигурация, поддържаща електромагнитна индуцирана прозрачност, могат да бъдат подготвени квантови състояния на Хол. За тази цел се използва протокол, състоящ се от последователност от вмъкване на магнитен поток и последващи еднофотонни вмъквания. Ще обсъдим конкретно създаването на $\nu = 1/2$ бозонното състояние на Лафлин, където първо повтаряме вмъкването на поток два пъти, създавайки двойно възбуждане на квази дупка. След това дупката се запълва отново с помощта на кохерентно напмпване и Ридбергово блокиране.

6.1 Структура на фотонния резонатор

Изкуствено магнитно поле във фотонен резонатор на Ref. [19] се създава чрез използване на сходството между силата на Лоренц действаща на заредена частица в магнитно поле и силата на Кориолис. Да разгледаме пръстеновидния резонатор, както е показано на фиг. 14(a), който ограничава фотонния газ в двуизмерна равнина и води до създаване на ефективна маса. Огледалната кривина модифицира масата и създава допълнителен хармоничен потенциал в двуизмерната равнина. Използването на непланарна геометрия води до завъртане на изображението на профила на напречния режим в едно кръгово завъртане. Това е еквивалентно на действието на ефективно магнитно поле, насочено в посоката на разпространение, плюс противосвързващ центробежен потенциал [20]. За достатъчно силно въртене центробежния потенциал може да компенсира хармоничното ограничаване, което води до появата на нива на Ландау. Увеличаването на ефективното въртене в крайна сметка води до друга конфигурация с голямо израждане, която е стабилна, съдържаща състояния на ъглови моменти, които се различават с кратни на $3\hbar$

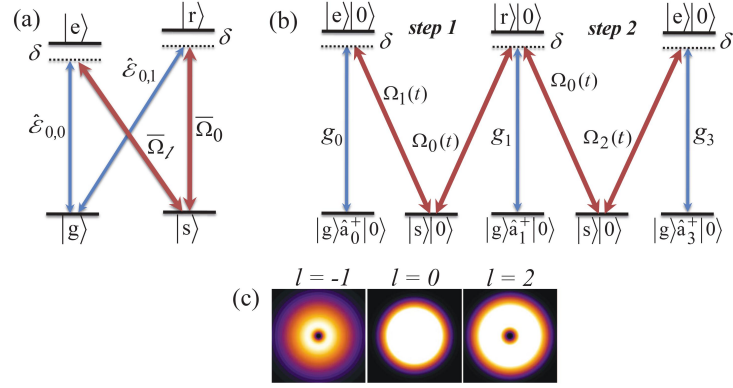


Фигура 14: (a) Непланарен резонатор, състоящ се от четири огледала, създаващи изкуствено магнитно поле за фотоните в резонатора. Два облака от атоми се използват за вмъкване на адиабатен магнитен поток и създаване на фотонни Лафлин състояния. (b) Структура на фотонните нива на Ландау, обозначени с орбитално ъглово квантово число l и радиално квантово число n . Тук $\Delta_{n,\alpha}$ е честотата на мода (n, α) . Зеленото поле показва най-ниското ниво на Ландау. Първоначално фотоните се приготвят в мода на резонатора с $n = l = 0$ (червена стрелка). След това вмъкването на адиабатен поток прехвърля орбиталния ъглов момент от класическо лазерно поле към фотоните на резонатора, увеличавайки общия ъглов момент (синя стрелка). (c) Графикът на плътността на първите три мода на резонатора в най-ниското ниво на Ландау с ъглов момент отляво надясно $l = 0$, $l = 3$ и $l = 6$.

- *фотоничните нива на Ландау*. Съответният спектър е илюстриран на фиг. 14(b). Сега, в рамките на всяко фотонно ниво на Ландау с честота $\Delta_{n,\alpha}$, обозначена с радиалното квантово число n и фиксирана стойност $\alpha = 0, 1, 2$, ъгловият импулс на фотона $\ell\hbar = (3m + \alpha)\hbar$ се увеличавакратно на $3\hbar$. Съответният хамилтониан е

$$H_0 = \hbar \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{n,\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,3m+\alpha}^\dagger a_{n,3m+\alpha}. \quad (128)$$

Тук $a_{n,l}^\dagger$ и $a_{n,l}$ са операторите за раждане и унищожаване на фотон в пространствена мода $f_{n,l}(r, \phi)$, описано от собствените мода на Лагер-



Фигура 15: (а) Структура на атомните нива се състои от две метастабилни нива $|g\rangle$, $|s\rangle$ и две възбудени нива $|e\rangle$ и $|r\rangle$. (б) Системата, първоначално подготвена в състояние с $l = 0$. В първия етап на протокола модите на резонатора $l = 0$ и $l = 1$ индуцират преходите $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, $|g\rangle \leftrightarrow |r\rangle$ с параметър на свързване g_0 и g_1 , докато лазерните полета $\Omega_1(t)$, $\Omega_0(t)$ свързват преходите $|e\rangle \leftrightarrow |s\rangle$, $|s\rangle \leftrightarrow |r\rangle$. (в) Графики за плътността на класическите полета. Приемаме, че Раби честотата Ω_0 има гаусова форма с $l = 0$. Другите две класически лазерни полета носят орбитален ъглов момент и по този начин имат нулев интензитет в центъра.

Гаус (LG)

$$f_{n,l}(r, \phi) = \sqrt{\frac{2^{|l|+1}n!}{\pi(|l|+n)!w_0^2}} x^{|l|} e^{il\phi} e^{-x^2} L_n^{|l|}(2x^2). \quad (129)$$

6.2 Адиабатен пренос на поток без взаимодействие

Лазерно поле с орбитален ъглов момент се използва успешно за предаване на ъглов момент към атомна среда [21]. Тук прехвърляме орбитален ъглов момент от външно лазерно поле към фотоните в резонатора, използвайки атомна среда като посредник. Ние разглеждаме атоми с четири съответни състояния, както е показано на фиг. 15(а). Атомните състояния са свързани чрез полета на резонатора и външни кохерентни лазерни полета, носещи орбитален ъглов момент l и с Раби честоти $\bar{\Omega}_l$.

В първата стъпка (i) две класически лазерни полета, $\bar{\Omega}_1(r, \phi, t)$ и $\bar{\Omega}_0(r, t)$, които носят общ орбитален ъглов момент от $1\hbar$ се прилагат към

атомната система. В резултат на това се създава набор от тъмни състояния в подпространството на състояния с $n = 0$, които по същество са суперпозиция между операторите на полето в резонатора a_{3m} и a_{3m+1} , виж Фиг. 15(b). Чрез използване на променящи се във времето лазерни полета в СТИРАП контраинтуитивен импулсен ред, фотоните се абсорбират от мода a_{3m} и се създават последователно в мода a_{3m+1} . В тази стъпка орбитален ъглов момент от $1\hbar$ се прехвърля паралелно към всеки фотон на резонатора.

Във втората стъпка (ii) класически лазерни полета $\bar{\Omega}_0(r, t)$ и $\bar{\Omega}_2(r, \phi, t)$ с общ орбитален ъглов момент от $2\hbar$ са използвани. Това води до образуването на нов набор от тъмни състояния, сега включващи фотонни моди a_{3m+1} и a_{3m+3} , виж Фиг. 15(б). В тази стъпка адиабатното следване на тъмното състояние прехвърля орбитален ъглов момент от $2\hbar$ към всеки фотон на резонатора. Чрез последователно повтаряне на процесите може да се увеличи ъгловият момент на всички заети моди на резонатора в най-ниското ниво на Ландау паралелно с кратни на $3\hbar$.

6.3 Заключение

В тази глава е предложен метод за прехвърляне на орбитален ъглов момент от класическо лазерно поле към фотоните в резонатор с непланарна геометрия. Такава геометрия създава ефективно магнитно поле за фотоните в резонатора с квантувани нива на Ландау. Прехвърлянето на орбитален момент се осъществява чрез атомна среда, която играе ролята на посредник. Показано е, че при определена атомна конфигурация се създават тъмни състояния, които са квантова суперпозиция от фотони в различни моди и атомни възбуждания. Накрая, техниката на стимулиран адиабатен преход се използва за да се прехвърли орбиталния момент от лазерното поле към фотоните от най-ниското ниво на Ландау.

7 Въведение в квантовата информационна геометрия

7.1 Чисти състояния. Квантов геометричен тензор.

Целта на тази глава е да въведе основните понятия на квантовата информационна геометрия и нейната връзка с квантовата метрология. За да се дефинира геометрия между квантови състояния, трябва да се въведе концепцията за разстояние като мярка за различимост. Нека дефинираме параметър характеризиращ колко две квантови състояния се различават спрямо инфинитезимално малко изменение на параметрите, както следва

$$F(\lambda, \lambda + d\lambda) = |\langle \Psi_0(\lambda) | \Psi_0(\lambda + d\lambda) \rangle|. \quad (130)$$

Приемаме, че $|\Psi_0(\lambda)\rangle$ зависи от параметъра λ и с $d\lambda$ означаваме диференциално малко изменение на λ . Развивайки скаларното произведение в ред на Тейлър, получаваме

$$\langle \Psi_0(\lambda) | \Psi_0(\lambda + d\lambda) \rangle = 1 + \langle \Psi_0 | \partial_\lambda \Psi_0 \rangle d\lambda + \frac{1}{2} \langle \Psi_0 | \partial_\lambda^2 \Psi_0 \rangle d\lambda^2 + O(d\lambda^3). \quad (131)$$

Следователно за $F(\lambda, \lambda + d\lambda)$ получаваме

$$F(\lambda, \lambda + d\lambda) = \left\{ 1 + (\langle \Psi_0 | \partial_\lambda \Psi_0 \rangle \langle \partial_\lambda \Psi_0 | \Psi_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle \Psi_0 | \partial_\lambda^2 \Psi_0 \rangle \right. \quad (132)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \langle \partial_\lambda^2 \Psi_0 | \Psi_0 \rangle) d\lambda^2 + O(d\lambda^3) \right\}^{1/2}. \quad (133)$$

Можем да опростим последните два израза в (133), използвайки отношението $\langle \partial_\lambda^2 \Psi_0 | \Psi_0 \rangle + \langle \Psi_0 | \partial_\lambda^2 \Psi_0 \rangle = -2 \langle \partial_\lambda \Psi_0 | \partial_\lambda \Psi_0 \rangle$. Следователно разстоянието между две безкрайно близки квантови състояния се дава с

$$ds^2 = 1 - F(\lambda, \lambda + d\lambda)^2 = (\langle \partial_\lambda \Psi_0 | \partial_\lambda \Psi_0 \rangle - \langle \partial_\lambda \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \langle \Psi_0 | \partial_\lambda \Psi_0 \rangle) d\lambda^2. \quad (134)$$

Забележително, изразът $g(\lambda) = \langle \partial_\lambda \Psi_0 | \partial_\lambda \Psi_0 \rangle - \langle \partial_\lambda \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \langle \Psi_0 | \partial_\lambda \Psi_0 \rangle$ има смисъл на метричен тензор, който характеризира разстоянието между двете състояния. Както може да се очаква, метричният тензор е инвариантен спрямо произволна λ -зависима $U(1)$ калибровачна трансформация на вълновите функции. Всъщност, тъй като глобалната фаза на вълновата функция не е наблюдаема, метричният тензор и следователно разстоянието трябва да бъде калибровачно инвариантно.

Въпреки, че тук разгледахме само еднопараметрична зависимост на вектора на състоянието, можем да обобщим резултатът за метричния тензор за многопараметричен случай. Наистина, да предположим, че векторът на състоянието зависи от набор от параметри $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Тогава естествена мярка за разстоянието между вълновите функции, разделени с безкрайно малко $d\vec{\lambda}$, е

$$ds^2 = 1 - F(\vec{\lambda}, \vec{\lambda} + d\vec{\lambda})^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} d\lambda_\mu d\lambda_\nu. \quad (135)$$

Метричният тензор е $g_{\mu\nu} = \Re[\mathcal{G}_{\mu\nu}]$, където

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu \Psi_0 | \partial_\nu \Psi_0 \rangle - \langle \partial_\mu \Psi_0 | \Psi_0 \rangle \langle \Psi_0 | \partial_\nu \Psi_0 \rangle \quad (136)$$

е квантовия геометричен тензор.

Нека сега приемем, че векторът на състоянието $|\Psi_0(\lambda)\rangle$ е основното състояние на хамилтониан $\hat{H}(\lambda)$ със спектрално уравнение $\hat{H}(\lambda)|\Psi_n(\lambda)\rangle = E_n(\lambda)|\Psi_n(\lambda)\rangle$. Тогава лесно може да се покаже, че

$$\langle \Psi_n | \partial_\lambda \Psi_0 \rangle = \frac{\langle \Psi_n | \partial_\lambda \hat{H} | \Psi_0 \rangle}{E_0 - E_n}, \quad n \neq 0. \quad (137)$$

Използвайки спектралното разложение $\sum_{n=0} |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n| = \hat{1}$ получаваме

$$F^2 = 1 - \langle \partial_\lambda \Psi_0 | (\hat{1} - |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|) | \partial_\lambda \Psi_0 \rangle d\lambda^2 = 1 - \sum_{n \neq 0} \langle \partial_\lambda \Psi_0 | \Psi_n \rangle \langle \Psi_n | \partial_\lambda \Psi_0 \rangle d\lambda^2. \quad (138)$$

За мулти-параметричния квантов геометричен тензор получаваме

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \sum_{n \neq 0} \frac{\langle \Psi_0(\lambda) | \partial_\mu \hat{H} | \Psi_n(\lambda) \rangle \langle \Psi_n(\lambda) | \partial_\nu \hat{H} | \Psi_0(\lambda) \rangle}{(E_n(\lambda) - E_0(\lambda))^2}. \quad (139)$$

Този израз показва, че в критичната точка λ_c , където енергетичната разлика $\Delta_n = E_n(\lambda_c) - E_0(\lambda_c)$ изчезва, квантовия геометричен тензор може да покаже сингулярно поведение. Квантовите модели, при които енергетичната разлика на основното състояние и първото възбудено ниво се затваря в някаква критична точка в термодинамичната граница, могат да показват квантов фазов преход. По този начин сингулярността на квантовия геометричен тензор може да се използва като сигнал за критичност.

Освен това, както ще покажем по-нататък, метричният тензор е свързан с квантовата информация на Фишер, която дава максимална прецизност на оценката на параметъра λ . Тъй като по-голяма квантова информация на Фишер, означава по-добра оценка, използването на квантови системи, които показват критично поведение, може значително да подобри прецизността на оценката. Всъщност, оценката на параметъра, който движи квантовия фазов преход, може да бъде драстично подобрена в квантовата критична точка, където енергетичната разлика изчезва.

7.2 Смесени състояния. Разстояние на Бюрес.

Нека обобщим определението за разстояние за смесени състояния. Да предположим, че имаме две квантови състояния, които се описват от матрици на плътност $\hat{\rho}_A$ и $\hat{\rho}_B$. Мярка за различимост на Улман между две квантови статистически разпределения се определя от

$$\mathcal{F}(\hat{\rho}_A, \hat{\rho}_B) = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_A} \hat{\rho}_B \sqrt{\hat{\rho}_A}}. \quad (140)$$

Тогава разстоянието на Бюрес между две безкрайно близки матрици на плътност $\hat{\rho}_A = \hat{\rho}$ и $\hat{\rho}_B = \hat{\rho} + \delta\hat{\rho}$ се дава от

$$ds_B^2 = 2(1 - \mathcal{F}(\hat{\rho}_A, \hat{\rho}_B)). \quad (141)$$

За да получим израз за разстоянието на Бюрес, ние развиваме в ред мярката на Улман до $\delta\hat{\rho}^2$. Получаваме [22]

$$\sqrt{\hat{\rho}^2 + \sqrt{\hat{\rho}} \delta\hat{\rho} \sqrt{\hat{\rho}}} = \hat{\rho} + \hat{\mathcal{X}} + \hat{\mathcal{Y}} + O(\delta\hat{\rho}^3), \quad (142)$$

където предполагаме, че $\hat{\mathcal{X}} \sim \delta\hat{\rho}$ and $\hat{\mathcal{Y}} \sim \delta\hat{\rho}^2$. Следователно получаваме следните условия

$$\sqrt{\hat{\rho}} \delta\hat{\rho} \sqrt{\hat{\rho}} = \hat{\rho} \hat{\mathcal{X}} + \hat{\mathcal{X}} \hat{\rho}, \quad \hat{\rho} \hat{\mathcal{Y}} + \hat{\mathcal{Y}} \hat{\rho} = -\hat{\mathcal{X}}^2. \quad (143)$$

Нека отбележим, че тъй като $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ имаме $\text{Tr} \delta\hat{\rho} = 0$ и следователно $\text{Tr} \hat{\mathcal{X}} = 0$.

Спектралното разложение на матрицата на плътност е $\hat{\rho} = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$, където p_n са собствените стойности ($\sum_n p_n = 1$) и $|\psi_n\rangle$ са съответните собствени вектори. Използвайки това получаваме

$$\hat{\mathcal{X}}_{nm} = \frac{\sqrt{p_n p_m}}{p_n + p_m} \langle \psi_n | \delta\hat{\rho} | \psi_m \rangle, \quad \hat{\mathcal{Y}}_{nm} = -\frac{\hat{\mathcal{X}}_{nm}^2}{p_n + p_m}. \quad (144)$$

Следователно, разстоянието на Бюрес може да се запише като

$$ds_B^2 = \frac{1}{2} \sum_{nm} \frac{\langle \psi_m | \delta \hat{\rho} | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \delta \hat{\rho} | \psi_m \rangle}{p_n + p_m}. \quad (145)$$

Нека сега предположим, че матрицата на плътност зависи от набор от параметри $\vec{\lambda}$, като $\hat{\rho}(\vec{\lambda}) = \sum_n p_n(\vec{\lambda}) |\psi_n(\vec{\lambda})\rangle \langle \psi_n(\vec{\lambda})|$. Тогава за вариацията получаваме

$$\delta \hat{\rho}(\vec{\lambda}) = \sum_n \{ dp_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + p_n (|d\psi_n\rangle \langle \psi_n| + |\psi_n\rangle \langle d\psi_n|) \}. \quad (146)$$

Също така имаме $\langle d\psi_n | \psi_m \rangle = -\langle \psi_n | d\psi_m \rangle$, така че за матричния елемент получаваме

$$\langle \psi_n | d\hat{\rho} | \psi_m \rangle = dp_n \delta_{nm} + \langle \psi_n | d\psi_m \rangle (p_m - p_n). \quad (147)$$

Следователно за инфинитизималното разстояние на Бюрес получаваме

$$ds_B^2 = \frac{1}{4} \sum_n \frac{dp_n^2}{p_n} + \frac{1}{2} \sum_{n,m} |\langle \psi_n | d\psi_m \rangle|^2 \frac{(p_n - p_m)^2}{p_n + p_m}. \quad (148)$$

Окончателно имаме

$$ds_B^2 = \sum_{ab} g_{ab} d\lambda_a d\lambda_b, \quad (149)$$

където метричния тензор е

$$g_{ab} = \frac{1}{4} \sum_n \frac{1}{p_n} (\partial_a p_n) (\partial_b p_n) + \frac{1}{2} \Re \left\{ \sum_{n,m} \frac{(p_n - p_m)^2}{p_n + p_m} \langle \psi_m | \partial_a \psi_n \rangle \langle \partial_b \psi_n | \psi_m \rangle \right\}. \quad (150)$$

7.2.1 Разстояние между две термални разпределения

Като пример нека разгледаме хармоничен осцилатор в топлинно равновесие с матрица на плътност

$$\hat{\rho}(T) = \sum_m p_m(T) |\psi_m\rangle \langle \psi_m|, \quad (151)$$

където статистическата вероятност системата да се намира в m -то състояние е

$$p_m(T) = \frac{\bar{n}^m}{(1 + \bar{n})^{m+1}}, \quad \bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\Omega}{k_B T}} - 1}. \quad (152)$$

В този случай състоянията не зависят от температурата, така че за метричния тензор получаваме

$$g_T = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} \left(\frac{\partial p_n}{\partial T} \right)^2 = \frac{\hbar^2 \Omega^2}{16 k_B^2 T^4} \operatorname{csch}^2 \left(\frac{\hbar \Omega}{2 k_B T} \right). \quad (153)$$

Резултатът показва, че в граница $T \rightarrow 0$ метричния тензор клони към нула, което означава че състояния с ниска температура не могат да бъдат различени.

7.3 Квантова Метрология

Класическата Фишер информация, която определя количеството информация за параметъра λ , която може да придобием от измерване на дадено събитие с вероятност $p(x|\lambda)$ е

$$F_{\text{CL}}(\lambda) = \int dx \frac{1}{p(x|\lambda)} \left(\frac{\partial p(x|\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2. \quad (154)$$

Статистическата неопределеност при измерване на λ се дава от класическото неравенство на Крамер-Рао

$$V(\lambda) \geq \frac{1}{F_{\text{CL}}(\lambda)}, \quad (155)$$

където $V(\lambda)$ е средната квадратична грешка при оценяване на λ .

Съобразно правилата на Бор от квантовата механика, вероятността $p(x|\lambda)$ може да се запише като $p(x|\lambda) = \operatorname{Tr}(\hat{\Pi}_x \hat{\rho}_\lambda)$, където $\hat{\Pi}_x$ е проектор с условието $\int dx \hat{\Pi}_x = \hat{\mathbf{1}}$ и $\hat{\rho}_\lambda$ е матрицата на плътност, която зависи от параметъра, който искаме да оценим.

Нека въведем оператора на симетричната логаритмична производна $\hat{\mathcal{L}}_\lambda$ дефиниран чрез операторното уравнение

$$2\partial_\lambda \hat{\rho}_\lambda = \hat{\mathcal{L}}_\lambda \hat{\rho}_\lambda + \hat{\rho}_\lambda \hat{\mathcal{L}}_\lambda. \quad (156)$$

Следователно, ние имаме $\partial_\lambda p(x|\lambda) = \operatorname{Tr}(\hat{\Pi}_x \partial_\lambda \hat{\rho}_\lambda) = \Re(\operatorname{Tr} \hat{\Pi}_x \hat{\rho}_\lambda \hat{\mathcal{L}}_\lambda)$, така че за класическата Фишер информация получаваме

$$F_{\text{CL}}(\lambda) = \int dx \frac{\Re(\operatorname{Tr} \hat{\Pi}_x \hat{\rho}_\lambda \hat{\mathcal{L}}_\lambda)^2}{\operatorname{Tr}(\hat{\Pi}_x \hat{\rho}_\lambda)}. \quad (157)$$

Понеже $F_{\text{CL}}(\lambda)$ зависи от измервателния базис, естествен въпрос е може ли да максимизираме $F_{\text{CL}}(\lambda)$ спрямо всички квантови измервания? Такава горна граница съществува и може да се получи от следните неравенства [23]:

$$F_{\text{CL}}(\lambda) = \int dx \frac{\Re(\text{Tr} \hat{\Pi}_x \hat{\rho}_\lambda \hat{\mathcal{L}}_\lambda)^2}{\text{Tr}(\hat{\Pi}_x \hat{\rho}_\lambda)} \leq \int dx \left| \frac{\text{Tr}(\hat{\Pi}_x \hat{\rho}_\lambda \hat{\mathcal{L}}_\lambda)}{\sqrt{\text{Tr}(\hat{\Pi}_x \hat{\rho}_\lambda)}} \right|^2 \quad (158)$$

$$= \int dx \left| \text{Tr} \left(\frac{\sqrt{\hat{\rho}_\lambda} \sqrt{\hat{\Pi}_x}}{\sqrt{\text{Tr}(\hat{\Pi}_x \hat{\rho}_\lambda)}} \sqrt{\hat{\Pi}_x} \hat{\mathcal{L}}_\lambda \sqrt{\hat{\rho}_\lambda} \right) \right|^2 \quad (159)$$

$$\leq \int dx \text{Tr} \left(\sqrt{\hat{\Pi}_x} \hat{\mathcal{L}}_\lambda \sqrt{\hat{\rho}_\lambda} \sqrt{\hat{\rho}_\lambda} \hat{\mathcal{L}}_\lambda \sqrt{\hat{\Pi}_x} \right) = \text{Tr}(\hat{\rho}_\lambda \hat{\mathcal{L}}_\lambda^2), \quad (160)$$

където сме използвали неравенството на Шварц $|\text{Tr}(A^\dagger B)|^2 \leq \text{Tr}(A^\dagger A) \text{Tr}(B^\dagger B)$. Резултатът показва, че класическата Фишер информация е ограничена отгоре от квантовата Фишер информация, която се дава от

$$F_{\text{Q}}(\lambda) = \text{Tr}(\hat{\rho}_\lambda \hat{\mathcal{L}}_\lambda^2), \quad (161)$$

и $F_{\text{CL}}(\lambda) \leq F_{\text{Q}}(\lambda)$. Следователно, фундаменталната граница на прецизност, която не зависи от измервателния базис се дава от квантовото неравенство на Крамер-Рао

$$V(\lambda) \geq \frac{1}{F_{\text{Q}}(\lambda)}. \quad (162)$$

Из между всички измервателни базиси съществува оптимален базис, в който класическата Фишер информация е равна на квантовата Фишер информация.

Възможно е да намерим експлицитно този базис. Нека дефинираме оператора [23]

$$\hat{O}_\lambda = \hat{1} + \frac{\hat{\mathcal{L}}_\lambda}{F_{\text{Q}}(\lambda)}. \quad (163)$$

Следователно, ние имаме $\langle \hat{O}_\lambda \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_\lambda \hat{O}_\lambda) = \lambda$ и $\langle \hat{O}_\lambda^2 \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_\lambda \hat{O}_\lambda^2) = \lambda^2 + \frac{1}{F_{\text{Q}}^2(\lambda)}$. Точността при определяне на параметъра от измерения сигнал $\langle \hat{O}_\lambda \rangle$ тогава е

$$\delta\lambda^2 = \frac{\langle \hat{O}_\lambda^2 \rangle}{\partial_\lambda \langle \hat{O}_\lambda \rangle} = \frac{1}{F_{\text{Q}}(\lambda)}. \quad (164)$$

Резултатът показва, че оптималния базис е съставен от собствените вектори на оператора $\hat{\mathcal{L}}_\lambda$.

Операторното уравнение за $\hat{\mathcal{L}}_\lambda$ може да се реши както следва:

$$\hat{\mathcal{L}}_\lambda = 2 \int_0^\infty du e^{-\hat{\rho}_\lambda u} \partial_\lambda \hat{\rho}_\lambda e^{-\hat{\rho}_\lambda u}. \quad (165)$$

Следователно, квантовата Фишер информация може да се запише като

$$F_Q(\lambda) = 2 \int_0^\infty du \text{Tr}(\partial_\lambda \hat{\rho}_\lambda e^{-\hat{\rho}_\lambda u} \partial_\lambda \hat{\rho}_\lambda e^{-\hat{\rho}_\lambda u}). \quad (166)$$

Нека разложим матрицата на плътност в собствения базис, $\hat{\rho}_\lambda = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$. Използвайки това, интегрирането може да се извърши

$$F_Q(\lambda) = 2 \sum_{n,m} \frac{\langle\psi_m|\partial_\lambda \hat{\rho}_\lambda|\psi_n\rangle}{p_n + p_m} \text{Tr}(\partial_\lambda \hat{\rho}_\lambda |\psi_m\rangle\langle\psi_n|) = 2 \sum_{n,m} \frac{|\langle\psi_m|\partial_\lambda \hat{\rho}_\lambda|\psi_n\rangle|^2}{p_n + p_m}. \quad (167)$$

Окончателно получаваме

$$F_Q(\lambda) = \sum_n \frac{(\partial_\lambda p_n)^2}{p_n} + 2 \sum_{nm} \frac{(p_n - p_m)^2}{p_n + p_m} \langle\psi_m|\partial_\lambda \psi_n\rangle\langle\partial_\lambda \psi_n|\psi_m\rangle. \quad (168)$$

Забележително, този резултат показва връзка между квантовата Фишер информация и метричния тензор, а именно

$$F_Q(\lambda) = 4g_{\lambda\lambda}. \quad (169)$$

Следователно, максималното количество информация за параметъра λ , което може да бъде получено чрез извършване на оптимално измерване, е тясно свързано с мярката за различимост на две безкрайно близки квантови състояния. Това осигурява фундаментална връзка между квантова метрология и квантова информационна геометрия!

7.4 Квантова Метрология на Унитарна Пертурбация

Нека сега разгледаме примера за измерване амплитудата λ на унитарна трансформация $\hat{U}_\lambda = e^{-i\lambda\hat{G}}$ с \hat{G} ермитов оператор, която действа на начално състояние с матрица на плътност $\hat{\rho}_0 = \sum_n p_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$. След действието на \hat{U}_λ получаваме $\hat{\rho}_\lambda = \hat{U}_\lambda \hat{\rho}_0 \hat{U}_\lambda^\dagger$ така че

$$\partial_\lambda \hat{\rho}_\lambda = i\hat{U}_\lambda [\hat{\rho}_0, \hat{G}] \hat{U}_\lambda^\dagger. \quad (170)$$

Използвайки това, за оператора на симетричната логаритмична производна получаваме

$$\hat{\mathcal{L}}_\lambda = \hat{U}_\lambda \hat{\mathcal{L}}_0 \hat{U}_\lambda^\dagger, \quad \hat{\mathcal{L}}_0 = 2i \sum_{nm} \langle \varphi_m | \hat{G} | \varphi_n \rangle \frac{p_m - p_n}{p_n + p_m} | \varphi_m \rangle \langle \varphi_n |. \quad (171)$$

Следователно, квантовата Фишер информация е

$$F_Q(\lambda) = \text{Tr}(\hat{\rho}_\lambda \hat{\mathcal{L}}_\lambda^2) = \text{Tr}(\hat{U}_\lambda \hat{\rho}_0 \hat{U}_\lambda^\dagger \hat{U}_\lambda \hat{\mathcal{L}}_0 \hat{U}_\lambda^\dagger \hat{U}_\lambda \hat{\mathcal{L}}_0 \hat{U}_\lambda^\dagger) = \text{Tr}(\hat{\rho}_0 \hat{\mathcal{L}}_0^2). \quad (172)$$

Също така имаме

$$\hat{\mathcal{L}}_0 = -4 \sum_{m,k,p} A_{mk} A_{kp} | \varphi_m \rangle \langle \varphi_p |, \quad (173)$$

където

$$A_{mn} = \langle \varphi_m | \hat{G} | \varphi_n \rangle \frac{p_m - p_n}{p_m + p_n}. \quad (174)$$

Окончателно за квантовата Фишер информация получаваме

$$F_Q(\lambda) = 2 \sum_{s,k} \frac{(p_s - p_k)^2}{p_s + p_k} | \langle \varphi_s | \hat{G} | \varphi_k \rangle |^2, \quad (175)$$

и съответно за начално чисто състояние

$$F_Q(\lambda) = \langle \varphi | \hat{G}^2 | \varphi \rangle - \langle \varphi | \hat{G} | \varphi \rangle^2. \quad (176)$$

Понеже, по-голяма Фишер информация означава по-точно определяне на параметъра, естествен въпрос е да максимизираме $F_Q(\lambda)$ спрямо началното състояние $|\varphi\rangle$.

Както ще видим по-долу, максималната прецизност, постижима при оценката на параметъра, може да подобри класическата граница, ако системата първоначално е подготвена в максимално заплетено N -частично състояние.

7.5 Хайзенбергова граница на прецизност

Нека предположим, че генератора на унитарна трансформация е $\hat{G} = \hat{S}_z$, където $\hat{S}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sigma_k^\alpha$ ($\alpha = x, y, z$) са колективните спин оператори и σ_k^α е матрицата на Паули, която описва спина на k -та частица. Предполагаме, че системата е подготвена в сплетено състояние

$$|\varphi_{\text{GHZ}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1 \uparrow_2 \dots \uparrow_N\rangle + |\downarrow_1 \downarrow_2 \dots \downarrow_N\rangle), \quad (177)$$

Лесно може да се покаже, че

$$F_Q(\lambda) = N^2, \quad (178)$$

така че прецизността на параметричното измерване се подобрява квадратично с броя частици. Такава граница се нарича Хайзенбергова граница на прецизност.

7.6 Заключение

В тази глава бяха въведени основни понятия в информационната геометрия и връзката ѝ с квантовата метрология. Основно понятие е метричният тензор, който характеризира разстоянието между две безкрайно близки квантови състояния. В квантови модели показващи квантов фазов преход енергетичната разлика между основното и първото възбудено ниво се нулира в точката на преход, което води до дивергиране на метричния тензор. Показано е, че метричният тензор е пропорционален на квантовата Фишер информация, която характеризира статистическата неопределеност при измерване на даден параметър.

8 Адиабатна квантова метрология със силно корелирани квантови системи

В тази глава ще покажем, че квазиадиабатната еволюция на система, описвана чрез хамилтониана на Дике, може да бъде описана в термините на квантов многочастичен метрологичен протокол. Този ефект разчита на чувствителността на основното състояние към малко смущение, нарушаващо симетрията при квантовия фазов преход, което води до колапс на вълновата функция в едно от двете възможни основни състояния. Мащабирането на свойствата на крайното състояние с броя атоми и с интензивността на полето може да се интерпретира от гледна точка на времето на прецесия на ефективен квантов метрологичен протокол. Ще покажем, че нашите идеи могат да бъдат тествани със спин-фононни взаимодействия в йонен капан на Паул. Нашата работа дава възможност за класификация на квантовите фазови преходи по отношение на способността на многочастични квантовите системи за оценка на параметрите.

8.1 Мотивация

В тази глава представяме предложение за използване на спонтанното нарушаване на симетрия на дискретна Z_2 симетрия за реализиране на квантов метрологичен протокол със система, описана от Дике хамилтониан [24, 25]. Последният е най-простият модел показващ квантов фазов преход и забележително може да бъде приложен в различни експериментални системи в атомната физика, от уловени йони [49] до ултрастудени атоми [27, 28]. Нашата схема разчита на адиабатна еволюция, която пренася системата през квантов фазов преход, при който Z_2 се нарушава спонтанно. Ще покажем, че системата е много чувствителна към наличието на поле, което нарушава симетрията на модела, така, че самоиндуцира многочастичен протокол за Рамзи спектроскопия, който може да бъде анализиран в края на адиабатния процес. В рамките на адиабатното приближение ще покажем, че мултиплетът на основното състояние на модела на Дике може да бъде апроксимиран до ефективна система от две нива. Това позволява да получим аналитичен резултат за измервания сигнал като функция от броя атомите N .

8.2 Модел на Дике

Моделът на Дике описва ансамбъл от N спин-1/2 частици, свързани към един бозонна мода. Хамилтонианът на системата с ($\hbar = 1$ от сега нататък) е

$$\begin{aligned} H &= H_D + H_\delta, \\ H_D &= \omega a^\dagger a + \Omega_x J_x + \frac{2g}{\sqrt{N}}(a^\dagger + a)J_z, \\ H_\delta &= \delta J_z, \end{aligned} \tag{179}$$

където H_D е хамилтониана на Дике, а H_δ е малка пертурбация, която нарушава симетрията. Колективният спин оператор се дефинира като $J_\beta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^\beta$.

Хамилтонианът на Дике е най-простият многочастичен модел с дискретна Z_2 симетрия. Операторът за четността се дефиниран като

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_s \otimes \Pi_b, \\ \Pi_s &= \sigma_1^x \otimes \dots \otimes \sigma_N^x, \quad \Pi_b = (-1)^{a^\dagger a}, \end{aligned} \tag{180}$$

така че $\Pi H_D \Pi = H_D$.

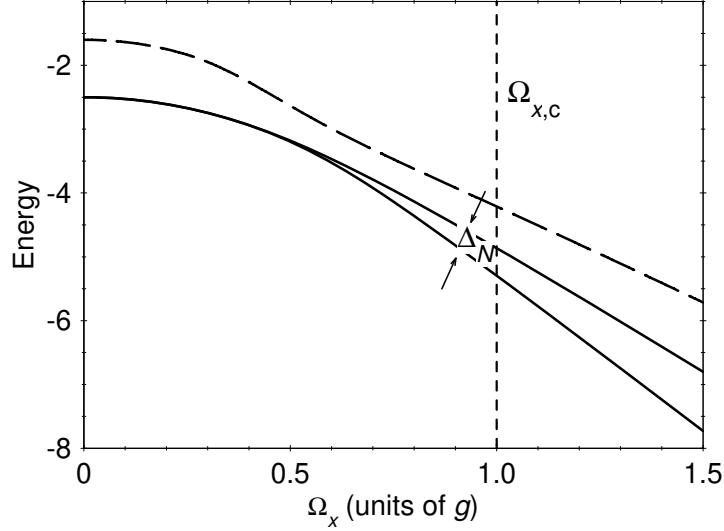
8.2.1 Квантов Фазов Преход в Модела на Дике

В границата $N \rightarrow \infty$ приближението на средното поле става точно [29, 30]. В този случай теорията на средното поле предсказва квантов фазов преход в критичната точка $\Omega_{x,c} = 4g^2/\omega$. Последната разделя нормалната фаза ($\Omega_x \gg \Omega_{x,c}$) с $\langle J_z \rangle, \langle a \rangle = 0$, от свръх-радиантната фаза, ($\Omega_x \ll \Omega_{x,c}$) с $\langle J_z \rangle, \langle a \rangle \neq 0$.

Понеже $\Pi a \Pi = -a$, $\Pi J_z \Pi = -J_z$, решението на средното поле нарушава симетрията на четност. Този ефект може да се разбере по следния начин. Нека $|\Psi_\delta\rangle$ е основното състояние на хамилтониана (179) с крайна пертурбация δ . В свръх-радиантната фаза ($\Omega_x < \Omega_{x,c}$) се прилага следната граница,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Psi_\delta | a | \Psi_\delta \rangle \neq 0, \tag{181}$$

което означава, че в термодинамичната граница безкрайно малка пертурбация, нарушава симетрия на четност.



Фигура 16: Ниският енергетичен спектър (в единици g) на модел на Дике за $\omega = 4g$ и $N = 10$ атоми като функция на Ω_x . Двете най-ниско лежащи състояния са разделени чрез енергетичен процеп Δ_N . В свръх-радиантната фаза $\Omega_x < \Omega_{x,c}$, енергетичната разлика Δ_N може да бъде изчислена аналитично чрез теорията на пертурбациите от N -ти порядък. Пунктираната линия е третото възбудено ниво.

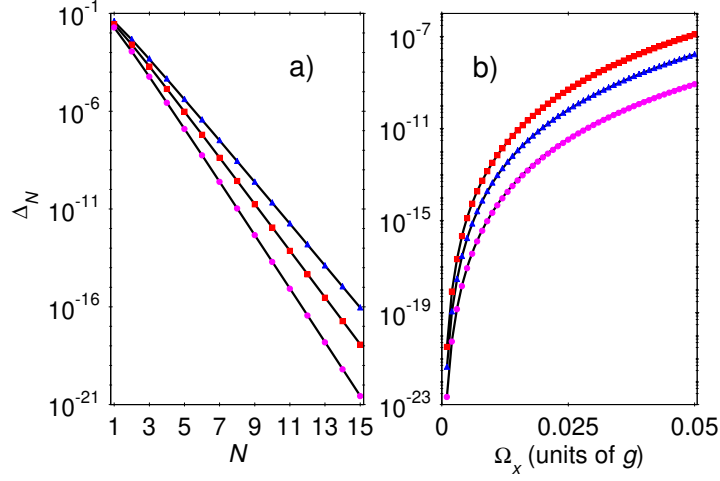
8.3 Ниско-енергетичен спектър

Нека първо разгледаме границата $\Omega_x \rightarrow \infty$, или алтернативно $g = 0$. Ако приемем, че $\Omega_x > 0$, най-ниското енергийно състояние е напълно поляризирано спин-състояние в посока x ,

$$|\Psi_{gs,-}^{[g=0]}\rangle = \bigotimes_k |-\rangle_{x,k} |0\rangle_b. \quad (182)$$

Следващото най-близко ниво е или състояние, което описва спинова вълна $|\Psi_{gs,+}^{[g=0]}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k |-\rangle_{x,1} \dots |+\rangle_{x,k} \dots |-\rangle_{x,N} |0\rangle_b$ ($\Omega_x < \omega$) или възбуждане на хармоничния осцилатор $|\Psi_{gs,+}^{[g=0]}\rangle = \bigotimes_k |-\rangle_{x,k} |1\rangle_b$ ($\omega < \Omega_x$).

Нека сега разгледаме свръх-радиантната фаза с $\Omega_x = 0$. Енергетичния спектър на H_D е съставен от Фок състояния на хармоничния осцилатор отместени с амплитуда пропорционална на $m = -N/2, \dots, N/2$,



Фигура 17: а) Энергетичния процеп $\Delta_N(g, \omega, \Omega_x)$ на хамилтониана на Дикс като функция от броя атоми N с $\omega = 6g$ за различни Ω_x . Числените резултати за $\Omega_x = 0.02g$ (кръгове), $\Omega_x = 0.03g$ (квадрат), $\Omega_x = 0.04g$ (триъгълник) се сравняват с аналитичното решение (184) (плътни линии). б) Числен резултат за $\Delta_N(g, \omega, \Omega_x)$ като функция на Ω_x за $N = 8$ атоми и $\omega = 4g$ (черни кръгове), $\omega = 6g$ (сини триъгълници), $\omega = 8g$ (червени квадратчета) в сравнение с (184) (плътни линии). Стойностите за Δ_N са дадени в единици g .

$|\Phi_{n,m}\rangle = D\left(-\frac{2g}{\omega\sqrt{N}}m\right) \left|\frac{N}{2}, m\right\rangle|n\rangle_b$. Основното ниво е двукратно изродено

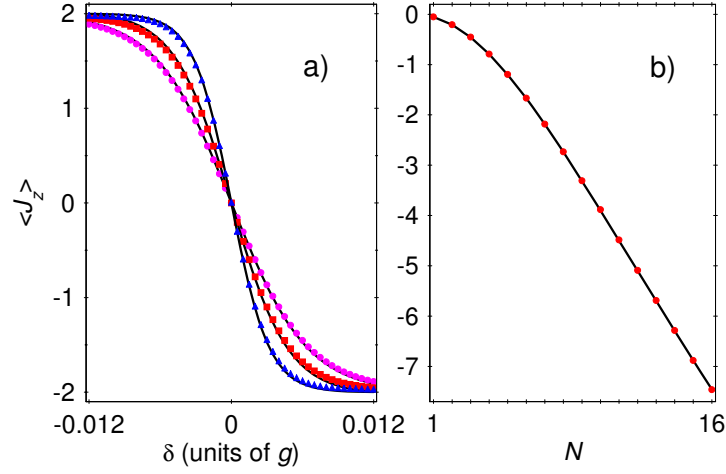
$$|\Psi_{gs,\pm}^{[\Omega_x=0]}\rangle = D\left(\mp\sqrt{N}g/\omega\right) \left|\frac{N}{2}, \pm\frac{N}{2}\right\rangle|0\rangle_b. \quad (183)$$

Нека разгледаме ефектът от Ω_x . В този случай Ω_x сменя израждането на нивата, което води до енергетична разлика $\Delta_N(g, \omega, \Omega_x)$, виж фиг. 16. По теория на пертурбацията може да се покаже, че

$$\Delta_N(g, \omega, \Omega_x) = 2e^{-2\left(\frac{g}{\omega}\right)^2} \frac{N^{N+1}}{2^N N!} \Omega_x \left(\frac{\Omega_x}{\Omega_{x,c}}\right)^{N-1}. \quad (184)$$

На фиг. 17 сравняваме аналитичния резултат с числената симулация.

Най-важната характеристика на свръх-радиантната фаза е следователно изчезването на енергетичния процеп в термодинамичната граница. В система с краен размер $\Delta_N(g, \omega, \Omega_x)$ монотонно намалява, когато намаляваме Ω_x от стойността $\Omega_{x,c}$. Монотонното поведение на $\Delta_N(g, \omega, \Omega_x)$



Фигура 18: а) Средната стойност на J_z като функция на δ за $\omega = 3g$, $\Omega_x(0) = 9g$ и $N = 4$ за различни γ . Сравнено е численото решение на време-зависимото уравнение на Шрьодингер с хамилтониана (179) за $\gamma = 0.02g$ (триъгълник), $\gamma = 0.03g$ (квадрат) и $\gamma = 0.04g$ (кръг) с решението на задачата за две състояния (188) (плътни линии). б) Сигналят като функция на N , за $\gamma = 0.03g$, $\omega = 10g$ и $\delta = 2.0 \times 10^{-3}g$. Червените кръгове представляват числения резултат, докато плътната крива е аналитичното решение, (189).

по отношение на напречното поле е валидно по цялата фазова диаграма, а не само в свръх-радиантната фаза. Това е показано на фиг. 16, където представяме еволюцията на нискоенергетичния спектър на H_D .

В рамките на свръх-радиантната фаза можем по този начин да проектираме хамилтониана $H = H_D + H_\delta$ в мултиплета на основното състояние, за да получим ефективния хамилтониан,

$$H_{\text{eff}} = \frac{\Delta_N(g, \omega, \Omega_x)}{2} \sigma^x + \frac{N\delta}{2} \sigma^z. \quad (185)$$

Този ефект е в основата на нашия протокол за квантова метрология. Той показва, че може да се усили измерения сигнал поради спонтанното нарушаване на симетрията, което ще използваме за измерване на параметъра δ .

8.3.1 Разделяне на времевата скала за подготовка и измерване

Нашата схема разчита на адиабатната еволюция на системата чрез прилагане на време-зависимо напречно поле $\Omega_x(t)$. Предполагаме, че системата може да бъде подготвена в линейна суперпозиция на ниско енергетичните състояния по време на началния етап на подготовка (i), който впоследствие еволюира квазиадиабатно във свръх-радиантната фаза, където се извършва измерването на параметъра δ (ii):

(i) *Подготвителен етап.* Нека разгледаме експоненциално намаляване на $\Omega_x(t) = \Omega_x(0)e^{-t/\tau_{\text{ev}}^{(1)}}$ с условието $\Omega_x(0) \gg \Omega_{x,c}$, така че системата в началния момент е подготвена в основното състояние в нормалната фаза, а именно $|\Psi(0)\rangle = |\Psi_{\text{gs},-}^{[g=0]}\rangle$. След това системата еволюира от $t = 0$ до $t = t_i$. Напречното поле варира до $\Omega_x(t_i) = \Omega_{x,i}$, с условието $\Omega_{x,i} \ll \Omega_{x,c}$ така че системата еволюира в силно свързаната фаза. (ii) *Квантова Метрологична Фаза.* След като системата премине в силно свързаната фаза, можем да използваме приближението на системата на две нива. Това е частта от протокола, където се извършва измерването на δ и ние изискваме квантовата еволюция да бъде чувствителна към $N\delta$. По този начин, за $t > t_i$, може да се избере втора времева скала за еволюцията на системата, дадена от $\tau_{\text{ev}}^{(2)}$, така че

$$\Delta_N(t) = \Delta_N(g, \omega, \Omega_x(t)) = \Delta_i e^{-\gamma(t-t_i)}. \quad (186)$$

В приближение на система от две нива, вълновия вектор може да се запише като

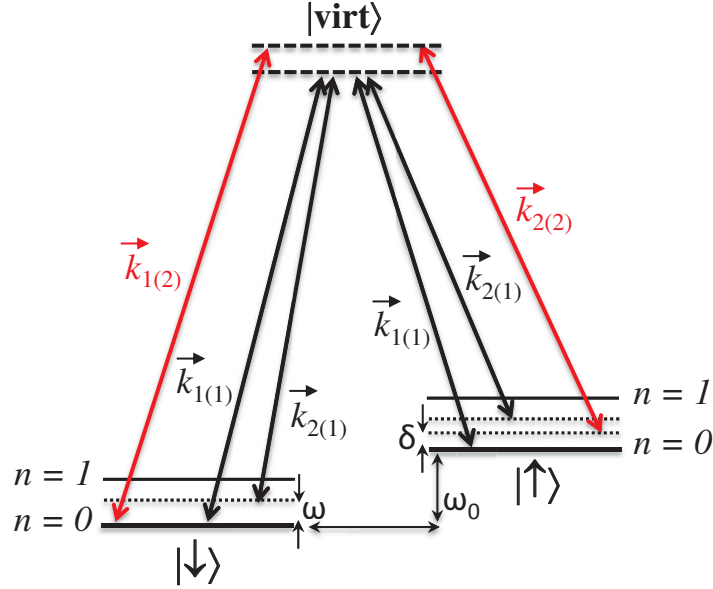
$$|\Psi(t)\rangle = c_+(t)|\Psi_{\text{gs},+}^{[\Omega_x=0]}\rangle + c_-(t)|\Psi_{\text{gs},-}^{[\Omega_x=0]}\rangle, \quad (187)$$

В граница $x e^{-\gamma t_m} \ll 1$, където $x = (\Delta_i/2\gamma)$ ние получаваме

$$|c_+(t_f)|^2 = \frac{1}{2} + i \frac{\pi}{4} \frac{x}{\cosh(\frac{\pi N \delta}{2\gamma})} \{J_\nu(x)J_{-\nu}(x) - J_{\nu-1}(x)J_{1-\nu}(x)\}, \quad (188)$$

където $J_\nu(x)$ е функция на Бесел от първи род с $\nu = 1/2 - iN\delta/2\gamma$. За $x \gg 1$ ние може да използваме асимптотичното поведение $J_\nu(x) \sim \sqrt{2/\pi x} \{\cos(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(x^{-1})\}$, което за z компонентата на колективния оператор на спина дава

$$\langle J_z(t_f) \rangle = N \left(|c_+(t_f)|^2 - \frac{1}{2} \right) \approx -\frac{N}{2} \tanh\left(\frac{\pi N \delta}{2\gamma}\right) + O(x^{-1}). \quad (189)$$



Фигура 19: Реализацията на Дике модела с йони в капан на Паул. Линейният йонен кристал е адресиран с два Раманови лазерни полета с разлика във вълновите вектори $\Delta \vec{k}_1 = \vec{k}_{1(1)} - \vec{k}_{2(1)}$, насочена по напречната x посока. Тези лазерни полета създават връзка между колективния оператор на спина и вибрационната мода на център на масите. Освен това, йонната верига взаимодейства с двойка лазерни полета с разлика на вълновите вектори $\Delta \vec{k}_2 = \vec{k}_{1(2)} - \vec{k}_{2(2)} = 0$ (без зависимост от движение), които индуцират дву-фотонен стимулиран Раманов преход между $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ с честотна разлика δ (параметърът, който искаме да измерим).

Резултатът представлява измерения сигнал при $t_f \gg \gamma^{-1}$, като функция на δ . За $\delta = 0$ крайното състояние е равна суперпозиция на състоянията (183), което дава $\langle J_z \rangle = 0$. За $\delta \neq 0$, симетрията на четността на H_D е нарушена и следователно крайните амплитуди на вероятността $c_{\pm}(t_f)$ са различни, което ни позволява директно да оценим δ чрез измерване на колективната спинова заселеност.

Средно квадратичното отклонение на сигнала е

$$\langle \Delta^2 J_z \rangle^{1/2} = \frac{N}{2 \cosh\left(\frac{\pi N \delta}{2\gamma}\right)}, \quad (190)$$

така че неопределеността при определянето на δ е

$$\bar{\delta} = \frac{\langle \Delta^2 J_z \rangle^{1/2}}{|\partial \langle J_z \rangle / \partial \delta|} = \frac{2\gamma}{\pi N} \cosh \left(\frac{\pi N \delta}{2\gamma} \right), \quad (191)$$

На Фиг. 18a сравняваме аналитичния резултат за $\langle J_z \rangle$ получено от модела на Демков с точното числено решение на време зависимото уравнение на Шрьодингер с хамилтониан (179). Виждаме, че в квазиadiaбатната област сигналът е добре апроксимиран с уравнение (189), докато в пълната адиабатична граница сигналът клони към стъпаловидна функция. На Фиг. 18b сме сравнили (189) с числения точен резултат за различни N .

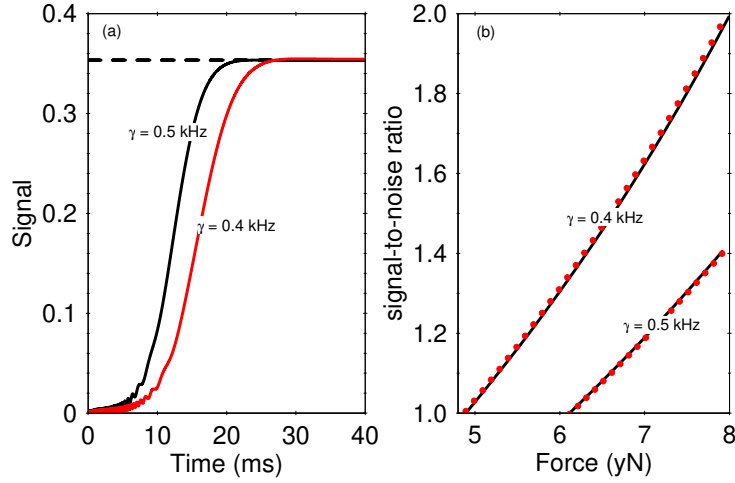
8.4 Физична реализация с йони в капан на Паул

Линеен кристал от йони в капан на Паул е идеална система за реализация на нашия протокол за квантова метрология. Например, протоколът може да се приложи за измерване на честотната разлика на честотата на лазера и атомната честота на прехода между две нива. На Фиг. 19 е показана конфигурацията от лазерни полета, които свързват вътрешните колективни трептения на линейния йонен кристал с вътрешните атомни състояния. Предполагаме, че всеки йон има основно $|\downarrow\rangle$ и стабилно възбудено ниво $|\uparrow\rangle$ с честота на прехода ω_0 . Двойка лазерни полета създават връзка между трептенията на кристала и спиновите състояния. Допълнителна двойка полета индуцират преходи между спиновите състояния с честотна разлика δ , параметърът който искаме да измерим.

8.5 Приложение за измерване на слаби сили

Използването на нано-механични осцилатори като детектори на изключително слаби сили привлича значителен експериментален интерес [31]. Такива системи позволяват измерване на сили с чувствителност под 10^{-18} N, което е от голямо значение за широк спектър от приложения.

В тази глава ще разгледаме квантов сензор, който използва модела на Раби като система, която е чувствителна към изключително слаби сили. Квантовият модел на Раби се състои от една бозонна мода и ефективна спин система, които взаимодействат чрез диполярна свързка. В основата на квантовия метрологичен протокол е ефектът от нарушаване на



Фигура 20: а) Времовата еволюция на средната стойност σ_x за различни сили и γ (плътната линия). Пунктирната линия е асимптотичното решение. б) Отношението сигнал към шум като функция на F_d .

симетрията на четност в модела на Раби, поради наличието на външно смущение, което може да се използва по ефективен начин за откриване на класически осцилиращи сили. Нашата схема разчита на адиабатната еволюция на основното състояние на Раби модела в състояние на котка на Шрьодингер, където съответната информация за силата се съдържа в амплитуди на вероятността. Следователно, определянето на силата се извършва просто чрез измерване на спиновите заселености.

Хамилтонианът, който описва квантовия модел на Раби е

$$\hat{H}_R = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\Omega_y(t)}{2}\sigma_y + \hbar g\sigma_x(\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (192)$$

Квантовият Раби модел притежава дискретна симетрия, която се дава чрез трансформацията на четност $\hat{a} \rightarrow -\hat{a}$, $\sigma_y \rightarrow \sigma_y$ и $\sigma_x \rightarrow -\sigma_x$. Предполагаме, че малка пертурбация е приложена, която нарушава симетрията. В случая на слаби сили, пертурбацията има вида

$$\hat{H}_{\text{pert}} = \frac{z_0 F_d}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (193)$$

така че пълния хамилтониан е $\hat{H} = \hat{H}_R + \hat{H}_{\text{pert}}$.

Предполагаме, че в началния момент системата е подготвена в основното състояние на непетурбирания хамилтониан \hat{H}_R . В граница $\Omega_y(0) \gg$

g , имаме $|\psi_g(0)\rangle = |-\rangle_y |0\rangle$, където $|-\rangle_y = (|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ и $|n\rangle$ is Фок състояние с число на запълване n . След това, адиабатно намалява $\Omega_y(t)$, така че системата еволюира в състояние на котката на Шрьодингер

$$|\psi_g(t)\rangle = c_+(t)|\psi_+\rangle + c_-(t)|\psi_-\rangle, \quad (194)$$

където информацията на външната сила се съдържа в амплитудите $c_{\pm}(t)$ и съответно $|\psi_+\rangle = |+\rangle_x |\alpha\rangle$ и $|\psi_-\rangle = |-\rangle_x |-\alpha\rangle$. В приближение на система с две нива, получаваме следната система от уравнения:

$$i\dot{c}_+(t) = -\frac{z_0 F_d g}{\hbar\omega} c_+(t) + \frac{\Delta_{\text{gap}}(t)}{2} c_-(t), \quad (195)$$

$$i\dot{c}_-(t) = \frac{z_0 F_d g}{\hbar\omega} c_-(t) + \frac{\Delta_{\text{gap}}(t)}{2} c_+(t), \quad (196)$$

която може да се сведе до диференциално уравнение от втори ред за всяка от променливите

$$z^2 \frac{d^2 c_{\pm}}{dz^2} + \left\{ z^2 + \left(\frac{z_0 F_d g}{\hbar\gamma\omega} \right)^2 \mp i \frac{z_0 F_d g}{\hbar\gamma\omega} \right\} c_{\pm} = 0, \quad (197)$$

където сме въвели $z = x e^{-\gamma t}$ и $x = \Delta_i/2\gamma$. За асимптотичното решение получаваме

$$|c_+(t_f)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{\pi g z_0 F_d}{\hbar\gamma\omega} \right) \quad (198)$$

и $|c_-(t_f)|^2 = 1 - |c_+(t_f)|^2$. За средната стойност на ориентацията на спина получаваме

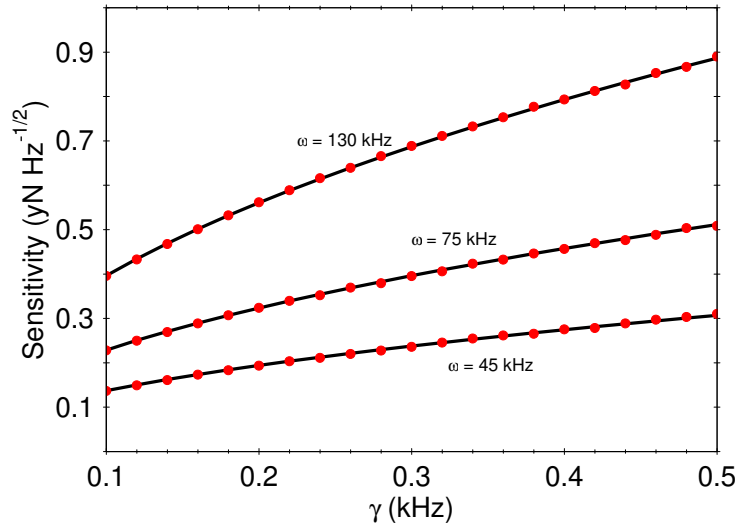
$$\langle \sigma_x(t_f) \rangle = 2|c_+(t_f)|^2 - 1, \quad (199)$$

$$\langle \Delta^2 \sigma(t_f) \rangle = 4|c_+(t_f)|^2 |c_-(t_f)|^2. \quad (200)$$

Сравнение на числения резултат за сигнала с аналитичната формула е показано на Фиг. 20, където много добро съвпадение се наблюдава.

Като мярка за чувствителност използваме отношението сигнал към шум $\text{SNR} = \langle \sigma_x(t_f) \rangle / \langle \Delta^2 \sigma_x(t_f) \rangle^{1/2}$. Минималната сила, която може да бъде измерена се определя от условието $\text{SNR} = 1$, което дава

$$F_d^{\text{min}} = \frac{\hbar\gamma\omega}{\pi g z_0} \sinh^{-1}(1). \quad (201)$$



Фигура 21: $\eta_{\text{force}}\sqrt{T}$ като функция на γ за различни стойности на ω .

Нека сравним този резултат с минималната сила, която може да бъде измерена със сензор състоящ се от хармоничен осцилатор. В този случай имаме $F_{\text{HO}}^{\text{min}} = 2\hbar/z_0 t$ [36]. Нашият метод позволява да подобрим тази граница чрез отношението g/ω . Например, нека $g = 44$ kHz, $\omega = 30$ kHz, $\gamma = 0.2$ kHz и $t_f = 48$ ms получаваме $F_d^{\text{min}} \approx 0.92 F_{\text{HO}}^{\text{min}}$. Стандартната квантова граница, която следва от съотношението на неопределеност между време-енергия дава минимална сила $F_{\text{HO}}^{\text{min}}$ [33, 34]. Тази фундаментална граница може да се постигне като намалим още отношението g/ω . Това отношение обаче не може да се намалява безкрайно много, защото малко ω означава че времето за преход става по дълго, което води до ограничение на предложението метод.

Нека определим като определение за чувствителност минималната разлика, която може да бъде определена за пълно експериментално време от 1 s, $\eta_{\text{force}} = F_d^{\text{min}}/\sqrt{\nu}$. На Фиг. 21 е показано $\eta_{\text{force}}\sqrt{T}$ като функция на γ . Оценено е чувствителност от порядък 0.16 yN/ $\sqrt{\text{Hz}}$, което може да бъде постигнато с време на взаимодействие $t_f = 100$ ms.

8.6 Заключение

В тази глава беше предложено използването на системи, които показват квантов фазов преход като метод за измерване на малки парамет-

ри. Важно свойство е увеличаването на квантовата Фишер информация около точката на квантов фазов преход, което подобрява точността на параметричното измерване.

Нашият метод се основава на адиабатен преход между две квантови фази при наличието на малка пертурбация, която нарушава симетрията на модела. Като пример е разгледан Дике модела, който показва квантов фазов преход от втори род. Наличието на малка пертурбация води до формиране на състояние на котка на Шрьодингер с различни вероятностни амплитуди. Определянето на параметъра се осъществява чрез измерване на ориентацията на колективния спин на системата. Показано е, че точността при определянето на параметъра се дава от границата на Хайзенберг. Квантовият фазов преход може да се реализира в система от йони в капан на Паул. Неизвестният параметър може например да бъде честотата на преход на ефективния спин формиран от електронните нива на всеки йон.

Също така е показано, че адиабатния преход в квантовия модел на Раби може да бъде използван за измерване на слаби сили от порядък 10^{-24}N . Важно преимущество е подобряването на точността чрез отношението g/ω . Методът също така може да бъде приложен и за измерване на градиентни полета.

9 Измерване на слаби сили с йон и система от йони в капан на Паул

В тази глава ще бъдат въведени квантови сензори за измерване на много слаби сили с един йон или система от йони в капан на Паул. Те използват свързването на спина и движение на йона, предизвикано от взаимодействието с външно лазерно поле, за да прехвърлят съответната информация за силата към степента на свобода на спина. Следователно, измерването на силата се извършва чрез наблюдение на времевите осцилации на спиновите състояния на йона. Ще покажем, че предложените техники могат да се използват за отчитане на аксиалните и напречните компоненти на силата с чувствителност в диапазона $\mu\text{N}/\sqrt{\text{Hz}}$, т.е. в $\text{xN}/\sqrt{\text{Hz}}$ (ксенонютон, 10^{-27}).

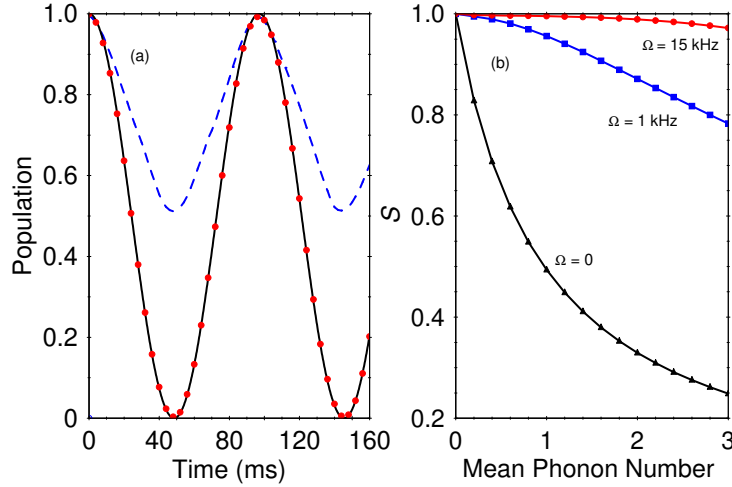
9.1 Мотивация

Водеща квантова платформа с приложение във високопрецизни сензори е системата от лазерно охладени уловени йони, която позволява отличен контрол върху вътрешните и външните степени на свобода. Чувствителност към сила от порядък на $170 \mu\text{N Hz}^{-1/2}$ (10^{-24} N) беше измерена наскоро с ансамбъл от йони в капан на Пенинг [35]. Освен това измерването на сила с чувствителност в диапазона от $1 \mu\text{N Hz}^{-1/2}$ е възможно за експерименти с един йон въз основа на измерване на амплитудата на отместване на йона от равновесното му положение [36].

В тази глава ние предлагаме базирани на йони сензорни схеми за измерване на много бързо променящи се сили, при които съответната информация за силата се проектира в спиновите степени на свобода на единичния уловен йон или система от йони. Използването на схеми за динамично декуплиране, протоколите за измерване на сили стават стабилни срещу дефазирание на спиновите състояния, причинени от флуктуации на магнитното поле.

9.2 Модел на Джейнс-Къминг

В нашият модел разглеждаме един йон с две състояния с честота на преход ω_0 , в линеен капан на Паул с честота на аксиално улавяне ω_z . Малкото аксиално трептене на йона се описва с вибрационния хамилто-



Фигура 22: а) Еволюция във времето на вероятността да се намери системата в спин състояние $|\uparrow\rangle$ за Джейнс-Къминг системата. Сравняваме вероятностите, получени от оригиналния хамилтониан (204) (точки) и ефективния хамилтониан (205) (плътни линии). Приемаме първоначално топлинно разпределение със средно фононно число $\bar{n} = 1.2$. Параметрите са $g = 4$ kHz, $\omega = 170$ kHz, $\Delta = g^2/2\omega$, $z_{ax} = 14.5$ nm, $F = 20$ уN и $\Omega = 10$ kHz. За същото първоначално състояние, но при липса на декуплиращо поле ($\Omega = 0$), сигналът губи контраст (синя пунктирна линия). б) Контраст на Раби осцилациите, дефиниран като $S = P_{\uparrow}(t_2) - P_{\uparrow}(t_1)$ с $t_1 = \pi/2\Omega_F$ и $t_2 = \pi/\Omega_F$ с $\Omega_F = 60$ kHz като функция на средното фононно число \bar{n} .

ниан $\hat{H}_{ax} = \hbar\omega_z\hat{a}^\dagger\hat{a}$, където \hat{a}^\dagger (\hat{a}) ражда (унищожава) фононно възбуждане. Предполагаме, че йонът взаимодейства с лазерно поле с честота $\omega_L = \omega_0 - \omega_z + \delta$, настроено близо до резонанса на червения преход с честотна разлика δ . Хамилтонианът в представяне на взаимодействието в границата на Ламб-Дике и приближението на въртящата се вълна е

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\Delta\sigma_z + \hbar g(\sigma^-\hat{a}^\dagger + \sigma^+\hat{a}), \quad (202)$$

с $\delta = \Delta - \omega$, където Δ е ефективната честота на спина, а ω е ефективната фононна честота. Тук $\sigma_{x,y,z}$ са матриците на Паули, σ^\pm са съответните повдигащи и понижаващи оператори за ефективната спин система, а g определя силата на спин-фонон взаимодействието.

Външната променлива във времето сила с честота $\omega_d = \omega_z - \omega$, $F(t) =$

$F \cos(\omega_d t)$, причинява допълнителна амплитудата на движение на йонния осцилатор по аксиалната посока, както се описва от израза

$$\hat{H}_F = \frac{z_{\text{ax}} F}{2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (203)$$

където F е параметърът, който искаме да оценим. Произходът на осцилиращата сила може да бъде много слабо електрическо поле, оптична диполна сила, спин-зависими сили, създадени в градиент на магнитно поле или градиент на Щарково отместване. Пълният хамилтониан на системата става

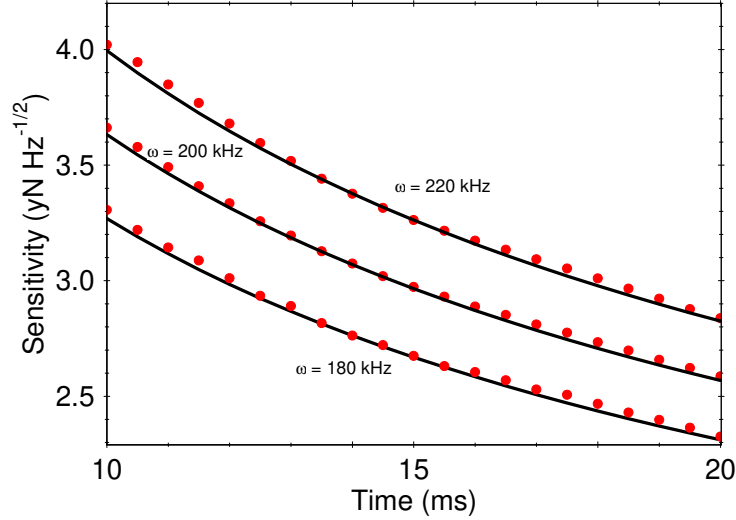
$$\hat{H}_T = \hat{H}_{\text{JC}} + \hat{H}_F. \quad (204)$$

Нека разглеждаме режим на слабо свързване $g \ll \omega$, при който фоновата степен на свобода може да бъде елиминирана от динамиката. Това може да се извърши чрез прилагане на канонична трансформация $\hat{U} = e^{\hat{S}}$ към \hat{H}_T (204), така че $\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{JC}} = e^{-\hat{S}} \hat{H}_T e^{\hat{S}}$ с $\hat{S} = (g/\omega)(\sigma^+ \hat{a} - \sigma^- \hat{a}^\dagger) + (\Omega_F/g)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$. Запазвайки само членове от порядък g/ω , стигаме до следния ефективен хамилтониан,

$$\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{JC}} = \hbar \tilde{\Delta} \sigma_z - \hbar \Omega_F \sigma_x - \hat{H}'_{\text{JC}}, \quad \hat{H}'_{\text{JC}} = \frac{\hbar g^2}{\omega} \sigma_z \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (205)$$

Този резултат показва, че спин-фононното взаимодействие измества ефективната честота на спина с $\tilde{\Delta} = \Delta - g^2/2\omega$, докато ефектът от външната сила е да индуцира преходи между спиновите състояния. Честотата на прехода се определя количествено чрез честотата на Раби $\Omega_F = gz_{\text{ax}} F/2\hbar\omega$, която е пропорционална на приложената сила F . Следователно оценката на силата може да се извърши чрез наблюдение на кохерентната еволюция на спиновите заселености.

Последният член \hat{H}'_{JC} описва остатъчното спин-фононно взаимодействие. Този член влияе върху оценката на силата, тъй като може да бъде източник на спин дефазиране [37]. Наистина, факторът σ_z в \hat{H}'_{JC} индуцира преходи между собствените състояния $|\pm\rangle$ на оператора σ_x в зависимост от вибрационното състояние на осцилатора. Докато осцилаторът е подготвен първоначално в некохерентно вибрационно състояние при крайна температура, това би довело до произволна компонента в енергията на спина. Както ще видим по-долу, чрез използване на динамично декуплиране ефектът от дефазирането на спина може да бъде намален.



Фигура 23: Чувствителността на измерването на силата спрямо времето t за различни стойности на ω . Приемаме първоначално топлинно вибрационно състояние със средно фононно число $\bar{n} = 1$. Плътните линии представляват аналитичния резултат, даден от уравнение (208), докато точките са точното числено решение с хамилтониан (204), включително декупиращото поле. Останалите параметри са $g = 4$ kHz и $\Omega = 7$ kHz.

Квантово метрологичната схема започва с подготовка на системата в състояние $\hat{\rho}(0) = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \hat{\rho}_{\text{osc}}$, където $\hat{\rho}_{\text{osc}}$ обозначава началния оператор на плътност на осцилатора. Еволюцията на системата се задава от унитарния пропагатор $\hat{U}_{\text{JC}}(t, 0) = e^{-i\hat{H}'_{\text{JC}}t/\hbar}$. Ако приемем за момента, че $\hat{\rho}_{\text{osc}} = |0\rangle\langle 0|$, където $|n\rangle$ е състоянието на Фок на хармоничния осцилатор с n фонони възбуждения, вероятността за да намерим системата в състояние $|\uparrow\rangle$ е $P_{\uparrow}(t) = \cos^2(\Omega_F t)$, където за простота приемаме $\Delta = g^2/2\omega$, следователно $\hat{\Delta} = 0$. В този случай ефектът на \hat{H}'_{JC} автоматично изчезва, така че сигналът показва косинусово поведение според ефективния хамилтониан (205). Първоначалното топлинно разпределение на фононите обаче би въвело дефазирание на спиновите осцилации, причинени от топлинни флуктуации. Кохерентността на спина може да бъде увеличена, например, чрез прилагане на последователност от бързи импулси, които обръщат спиновите състояния и осредняват остатъчното спин-фононно взаимодействие до нула по време на оценката на силата [38].

От друга страна, тъй като съответната информация за силата е ко-

дирана в σ_x прилагането на допълнително поле $\hat{H}_d = \hbar\Omega\sigma_x$ [39, 40], така че $\hat{H}_T \rightarrow \hat{H}_T + \hat{H}_d$, няма да повлияе на измерването на силата, а по-скоро ще потисне ефекта на остатъчното спин-фононно взаимодействие. Действително, преминавайки в картина на взаимодействието по отношение на \hat{H}_d , остатъчното спин-фононно взаимодействие става

$$\hat{H}'_{JC}(t) = \frac{\hbar g^2}{\omega} (e^{2i\Omega t}|+\rangle\langle -| + e^{-2i\Omega t}|-\rangle\langle +|)\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (206)$$

Последният резултат показва, че преходите извън резонанса между състояния $|\pm\rangle$, предизвикани от \hat{H}'_{JC} , се потискат, ако $g^2/2\omega \ll \Omega$. Чрез разделяне на импулсните поредици от $t = 0$ до $t/2$ с хамилтониан $\hat{H}_T + \hat{H}_d$ и след това от $t/2$ до t с хамилтониан $\hat{H}_T - \hat{H}_d$, спиновите състояния са защитени от термично дефазирание и сигналът зависи само от честотата на Раби Ω_F в последния момент t . Също така, ефектът от флуктуациите на магнитното поле на спиновите състояния се описва с допълнителен член σ_z в уравнение (205), следователно силното допълнително поле, използвано тук, потиска дефазирането на спина, причинено от флуктуации на магнитното поле, както беше експериментално демонстрирано [41, 42].

На Фиг. (22)(а) е показано еволюцията във времето на вероятността $P_\uparrow(t)$ за първоначално топлинно вибрационно състояние. Прилагането на декупиращото поле по време на измерване на силата води до намаляване на дефазирането на спина и следователно до защита на контраста на Раби осцилациите, вижте Фиг. (22)(b).

Чувствителността, ограничена от "standard quantum shot-noise limit" на Ω_F е

$$\delta\Omega_F = \frac{\Delta P_\uparrow(t)}{\frac{\partial P_\uparrow(t)}{\partial \Omega_F} \sqrt{\nu}}, \quad (207)$$

където $\Delta P_\uparrow(t)$ означава дисперсията на сигнала, а $\nu = T/\tau$ е числото на повторение. Тук T е общото експериментално време, а времето τ включва времето на еволюция, както и времето за подготовка и измерване. Тъй като нашата техника разчита на измерване на спин състоянието, така че времената за подготовка и измерване са много по-малки от другата времева скала, приемаме $\tau \approx t$. От уравнение (207) откриваме, че чувствителността, която характеризира минималната разлика в силата, която може да бъде определена в рамките на общо експериментално време от 1 s, е

$$F_{\min}\sqrt{T} = \frac{\hbar\omega}{gz_{\text{ax}}\sqrt{t}}. \quad (208)$$

На фиг. 23 показваме чувствителността на оценката на силата спрямо времето t за различни честоти ω , приемайки първоначално топлинно вибрационно състояние. За време на еволюция от 20 ms може да се постигне чувствителност към сила от $2 \text{ yN Hz}^{-1/2}$.

Нека сега да оценим ефекта от нагряване на движението на йона вследствие температурни флуктуации на електродите на капана на Паул, което ограничава оценката на силата. Наистина, нагряването на йонното движение причинява затихване на сигнала, което води до [8]

$$P_{\uparrow}(t) = \frac{1}{2}[1 + e^{-\gamma t} \cos(2\Omega_F t)], \quad (209)$$

където γ е степента на декохерентност. Приемаме, че $\gamma \sim \langle \dot{n}_{\text{ax}} \rangle$ където $\langle \dot{n}_{\text{ax}} \rangle$ означава скоростта на нагряване на аксиалния йон. По този начин оптималната чувствителност към силата е [43]

$$F_{\text{min}} \sqrt{T} = \frac{\hbar \omega}{g z_{\text{ax}}} \sqrt{2 \langle \dot{n}_{\text{ax}} \rangle} e. \quad (210)$$

Използвайки параметрите на Фиг. 23 с $\omega = 180 \text{ kHz}$ и приемайки $\langle \dot{n}_{\text{ax}} \rangle = 0.01 \text{ ms}^{-1}$ оценяваме чувствителността към сила от $2,4 \text{ yN Hz}^{-1/2}$. За криогенен йонен капан със скорост на нагряване в диапазона $\langle \dot{n}_{\text{ax}} \rangle = 1 \text{ s}^{-1}$ и време на еволюция $t = 500 \text{ ms}$, чувствителността към сила ще бъде $0.8 \text{ yN Hz}^{-1/2}$.

9.3 Система от N йона като квантов сензор на слаби сили.

Нека да разгледаме модел, който се състои от N йона с две нива взаимодействия с две бозонни моди. Хамилтонианът на системата е

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{JT}} + \hat{H}_F, \quad (211)$$

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_b + \hat{H}_s = \hbar \delta_x \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hbar \delta_y \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + \hbar \Delta \hat{J}_z, \quad (212)$$

$$\hat{H}_{\text{JT}} = \frac{2\hbar g_x}{\sqrt{N}} \hat{J}_x (\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x) + \frac{2\hbar g_y}{\sqrt{N}} \hat{J}_y (\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y), \quad (213)$$

$$\hat{H}_F = \sqrt{N} F_x (\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x) + \sqrt{N} F_y (\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y). \quad (214)$$

Тук \hat{H}_0 съдържа свободния бозонен член, където a_α^\dagger , a_α ($\alpha = x, y$) са оператори на раждане и унищожаване, съответстващи на осцилатор с честота ω_α . Членът \hat{H}_s описва взаимодействието между колективния спин и

приложеното магнитно поле с честота Δ . Вторият член в (214) е взаимодействието между колективните спин оператори и двете моди с параметър на връзката g_α , където $\hat{J}_\beta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sigma_k^\beta$ ($\beta = x, y, z$) са колективните спинови оператори с σ_k^β е операторът на Паули за спин k . Последният член в (214) описва действието на силата, която действа на двете бозонни мода със сила F_α (параметрите, които искаме да определим).

9.4 Физическа реализация с йони в капан на Паул.

Нека линейният йонен кристал е едновременно адресиран от бихроматични лазерни полета в Раманова конфигурация по двете напречни ортогонални x и y посоки с лазерни честоти, $\omega_{r,\alpha} = \omega_0 - \Delta - (\omega_{1,\alpha} - \delta_\alpha)$ и $\omega_{b,\alpha} = \omega_0 - \Delta + (\omega_{1,\alpha} - \delta_\alpha)$, които предизвикват преход между състоянията на кубита чрез допълнително възбудено състояние. Тук δ_x и δ_y са честотните разлики към вибрационните моди на центъра на масата по двете напречни посоки, така че $\omega_{1,x} = \omega_x$ и $\omega_{1,y} = \omega_y$, докато Δ е честотната разлика спрямо ω_0 (честотата на атомния преход). Хамилтонианът, описващ лазерно-йонното взаимодействие, след приближение на оптична въртяща се вълна, се дава от [10]

$$\hat{H}_I = \hbar\Omega_x \sum_{k=1}^N \{ \sigma_k^+ e^{ik_x \delta \hat{r}_{x,j} - i\phi_x} (e^{-i\omega_{r,x}t} + e^{-i\omega_{b,x}t}) + \text{h.c.} \} \quad (215)$$

$$+ \hbar\Omega_y \sum_{k=1}^N \{ \sigma_k^+ e^{ik_y \delta \hat{r}_{y,j} - i\phi_y} (e^{-i\omega_{r,y}t} + e^{-i\omega_{b,y}t}) \quad (216)$$

$$+ \text{h.c.} \}. \quad (217)$$

След приближение на Ламб-Дике, получаваме

$$\hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{JT}} = \hat{U}_R^\dagger (\hat{H}_{\text{free}} + \hat{H}_I) \hat{U}_R - i\hbar \hat{U}_R^\dagger \partial_t \hat{U}_R, \quad (218)$$

Последният израз, който нарушава симетрията в (214) представлява действието на външната сила, която измества вибрационната амплитуда на напречните вибрационни моди на центъра на масата. Действително, действието на силата се описва с $\hat{H}_F(t) = \sum_\alpha \sum_{k=1}^N F_{d,\alpha}(t) \delta \hat{r}_{\alpha,k}$, където приемаме $F_{d,\alpha}(t) = f_{d,\alpha} \cos[(\omega_\alpha - \delta_\alpha)t]$, като $f_{d,\alpha}$ е амплитудата на силата. По-долу ще представим сензорни протоколи, които са в състояние да открият амплитудата на силата $f_{d,\alpha}$ чрез наблюдение на еволюцията във времето или на колективните спинови заселености или на средното фонноно число.

9.5 Измерване на осцилиращи сили с голяма честотна разлика спрямо модата на център на масите

Нека разгледаме режим, при който честотната разлика δ_α на осцилиращата сила е много по-голяма от параметъра на спин-фононото взаимодействие g_α ($|\delta_\alpha| \gg g_\alpha$). В този случай модите на център на масата са само виртуално възбудени, като по този начин те могат да бъдат адиабатно елиминирани от динамиката. Това може да се извърши чрез прилагане на каноничната трансформация $\hat{U} = e^{\hat{S}}$ към хамилтониана (214), така че $\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U}$, където анти-ермитовия оператор \hat{S} е

$$\hat{S} = \frac{2g_x}{\delta_x \sqrt{N}} \hat{J}_x (\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger) + \frac{2g_y}{\delta_y \sqrt{N}} \hat{J}_y (\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger) \quad (219)$$

$$+ \sqrt{N} \frac{F_x}{\delta_x} (\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger) + \sqrt{N} \frac{F_y}{\delta_y} (\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger). \quad (220)$$

Ефективният хамилтониан на системата е

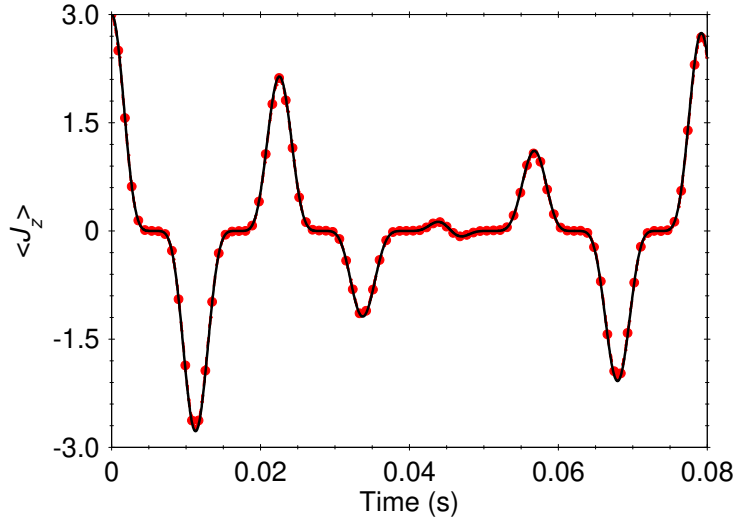
$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_{\text{spin}} + \hat{H}_{\text{res}} + \hat{H}', \quad (221)$$

$$\hat{H}_{\text{spin}} = \hbar \Delta \hat{J}_z - \frac{4\hbar g_x^2}{N \delta_x} \hat{J}_x^2 - \frac{4\hbar g_y^2}{N \delta_y} \hat{J}_y^2 - \frac{4g_x F_x}{\delta_x} \hat{J}_x - \frac{4g_y F_y}{\delta_y} \hat{J}_y, \quad (222)$$

$$\hat{H}_{\text{res}} = \hat{H}_b + \frac{2i\hbar g_x g_y}{N \delta_x \delta_y} \hat{J}_z \{ (\delta_x + \delta_y) (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y - \text{h.c.}) \} \quad (223)$$

$$- (\delta_x - \delta_y) (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger - \text{h.c.}) \}, \quad (224)$$

Резултатът показва, че фононната степен на свобода индуцира ефективно спин-спин взаимодействие, описано от нелинейните квадратични колективни спин оператори в \hat{H}_{spin} . Ефектът от силата \hat{H}_F е да предизвика преход между отделните спинови състояния, които са описват от последните два линейни колективни спин оператора в \hat{H}_{spin} . Изразът \hat{H}_{res} е остатъчното спин-фононно взаимодействие, което описва процеси, при които се създават фононни възбуждания и съответно се реабсорбират от същия спин. Забележете, че докато квантовите осцилатори са в основните си състояния, изразът \hat{H}_{res} не влияе на колективната спин динамика и следователно може да бъде пренебрегнат. И накрая, изразът $\hat{H}' = \frac{1}{3} [[\hat{H}_{\text{JT}} + \hat{H}_F, \hat{S}], \hat{S}] + \dots$ съдържа членове от висок порядък в спин-фонон взаимодействието, което може да се пренебрегне, ако е изпълнено условието $|\delta_\alpha| \gg g_\alpha$.



Фигура 24: Еволюция във времето на средната стойност на оператора \hat{J}_z за система от $N = 6$ спина. Приемаме първоначално топлинно вибрационно състояние със средно фононно число $\bar{n} = 0.6$. Сравнено е численото решение с хамилтониан (214) (плътни линии) с решението, използвайки ефективен хамилтониан (226) (червени кръгове). Параметрите са $g_x = 5$ kHz, $\delta_x = 60$ kHz, $r_{0,x} = 14,5$ nm, $f_{d,x} = 1,5$ yN.

Следователно в режим на слабо свързване моделът (214) се преобразува в обобщения хамилтониан на Липкин-Мешков-Глик (LMG) [44]. Както може да се види от ур. (224) знакът на свързване на нелинейните спин членове зависи от знака на честотните разлики δ_α , така че може да се постигне феромагнитно взаимодействие $\delta_\alpha > 0$ или съответно антиферомагнитно взаимодействие $\delta_\alpha < 0$. Важно е да се отбележи, че нашия ефективен хамилтониан (224) в антиферомагнитния режим притежава суперсиметрична структура в специалната точка $\Delta = \chi_x \chi_y$, където дефинираме $\chi_\alpha^2 = 4g_\alpha^2 / (N|\delta_\alpha|)$. Наистина, лесно е да се покаже, че хамилтонианът (224) приема формата

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hbar(\chi_x \hat{J}_x + i\chi_y \hat{J}_y + \gamma)(\chi_x \hat{J}_x - i\chi_y \hat{J}_y + \gamma^*) - \hbar|\gamma|^2, \quad (225)$$

където $\gamma = \mu_x \chi_x + i\mu_y \chi_y$ и $\mu_\alpha = F_\alpha N / 2g_\alpha$.

Нека сега да се съсредоточим върху сензорния протокол, способен да открие само един от компонентите на силата, а именно $f_{d,x}$. Нека $\Delta = 0$, $g_y = 0$ така, че квантовата система е представена от хамилтониана

на Дике, описващ взаимодействие между ансамбъла от N атоми с една вибрационна мода. В границата $|\delta_x| \gg g_x$ ефективният хамилтониан се свежда до

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -\hbar\chi^2\hat{J}_x^2 - \hbar\Omega_f\hat{J}_x, \quad (226)$$

където сме дефинирали $\chi = \chi_x$ и $\Omega_f = 2g_x r_{0,x} f_{d,x} / \hbar \delta_x$. Целта ни е да определим амплитудата на силата $f_{d,x}$ чрез измерване на средните стойности на колективния спин оператор \hat{J}_z . За тази цел нека приемем, че системата е подготвена в състояние $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_{\text{spin}} \otimes \hat{\rho}_{\text{osc}}$ където $\hat{\rho}_{\text{osc}}$ е операторът на плътност за квантовия осцилатор и $\hat{\rho}_{\text{spin}} = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$ с $|\Psi(0)\rangle = \sum_{m=-j}^j d_m |j, m\rangle_x$ е първоначалното състояние на спина където d_m е

$$d_m = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} [\cos(\theta/2)]^{j+m} [\sin(\theta/2)]^{j-m}. \quad (227)$$

Тогава средната стойност на \hat{J}_z като функция на времето е

$$\langle\hat{J}_z(t)\rangle = j \sin(\theta) (1 - \sin^2(\theta) \sin^2(\xi))^{2j-1} \cos[\varphi_f + (2j-1)\kappa], \quad (228)$$

където $\xi = \chi^2 t$, $\varphi_f = \Omega_f t$ и $\kappa = \tan^{-1}(\tan(\xi) \cos(\theta))$ [45]. Следователно, за да се определи амплитудата на силата $f_{d,x}$, трябва да се измери фазата φ_f . На Фиг. (24) е показано сигнала като функция на времето, приемайки първоначално топлинно фононно състояние. Забележително е, че поради изчезването на остатъчното спин-фононно взаимодействие, $\hat{H}' = 0$, протоколът не зависи от първоначалното вибрационно състояние на линейния йонен кристал. В резултат на това измереният сигнал е естествено устойчив по отношение на термично индуцираното дефазирание на спина.

Неопределеността при определяне на Ω_f от измерения сигнал $\langle\hat{J}_z(t)\rangle$ е

$$\delta\Omega_f = \frac{\langle\Delta^2\hat{J}_z\rangle^{1/2}}{\frac{\partial\langle\hat{J}_z\rangle}{\partial\Omega_f}\sqrt{\nu}}, \quad (229)$$

където

$$\langle\Delta^2\hat{J}_z\rangle = \frac{j}{2} + \frac{j(2j-1)}{4} + \frac{j(2j-1)}{4} \cos^{2(j-1)}(2\xi) \cos(2\varphi_f) \quad (230)$$

$$-j^2 \cos^{2(2j-1)}(\xi) \cos^2(\varphi_f), \quad (231)$$

така че получаваме $\delta\Omega_f = 1/\sqrt{TtN}$. Нека сега приемем, че началното състояние на ансамбъла от спинове е сплетено състояние $|\Psi(0)\rangle = (|j, j\rangle_x + |j, -j\rangle_x)/\sqrt{2}$. Тогава получаваме

$$f_{d,x}\sqrt{T} = \frac{\hbar\delta_x}{2Ng_x r_{0,x}\sqrt{t}}, \quad (232)$$

което е Хайзенбергова граница на прецизност. Да приемем например сплетено състояние с шест йона [46, 47], $\delta_x = 100$ kHz, $g_x = 5$ kHz, $r_{0,x} = 15$ nm и време $t = 10$ ms и използвайки уравнение (232) получаваме чувствителност към сила от порядък на 0.1 yN Hz^{-1/2}.

9.6 Заключение

В тази глава бяха разгледани методи за измерване на слаби сили с един йон и система от йони в капан на Паул. Техниките използват спин-бозонното взаимодействие като посредник. Информацията за силата се проектира върху спин състоянията на йона или на ансамбъла от йони. По този начин определянето на силата се осъществява чрез наблюдение на времевите осцилации на спин системата. Важно преимущество на предложените методи е прилагането на декуплиращи полета, които редуцират ефекта от спин дефазиране.

10 Квантова метрология със системи показващи дисипативен фазов преход

10.1 Мотивация

Квантовата метрология е една от най-обещаващите приложения на квантовите технологии. Обикновено задачата на квантовата метрология включва оценка на един параметър. Свръх-прецизна еднопараметрична оценка може да бъде постигната чрез използване на квантови критични системи, които показват квантов фазов преход. Всъщност, както е показано в [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54], чувствителността на еднопараметричната оценка (измерване с минимална статистическа неопределеност) може да бъде значително подобрена в околност квантовата критична точка, където системата търпи квантов фазов преход. Наскоро високо прецизно измервания на контролния параметър в близост до критичната точка беше демонстрирано с Бозе-Айнщайн кондензат [55, 56]. Въпреки това, като цяло физическите процеси могат да включват едновременна оценка на множество параметри, което води до възникването на многопараметрична квантова метрология. Голям клас проблеми на квантовата метрология включва едновременното оценяване на повече от един параметър [57, 58, 59]. Аналогично с свръх-прецизната еднопараметрична квантова метрология възниква естествена задача за определяне на чувствителността на многопараметричната оценка в близост до квантовата критична точка.

В тази глава ще бъде обсъдено оптималното едновременно измерване на два самоспрегнати параметъра, а именно големината и фазата на оператора на отместване във фазовото пространство, използвайки квантова система, показваща дисипативен фазов преход. Такъв нов клас фазови преходи се появява поради взаимодействието между квантовата система с околната среда. Дисипативните фазови преходи се характеризират с неаналитична промяна в стационарното състояние [60] и могат да се използват като потенциална платформа за високопрецизна квантова метрология.

Нашата дисипативна квантова система се състои от едномерна решетъчна система, където на всеки възел атом с две нива (формиращ ефективна спин система) взаимодейства с бозонна мода. Свързването между бозоните в различните възли на решетката се осигурява чрез процеси

на тунелиране. Взаимодействието между кохерентната динамика и дисипативните процеси, които причиняват загуби на бозонни възбуждения, води до неравновесен режим, при който информацията за двата параметъра е кодирана в *стационарните* елементи на матрицата на плътност.

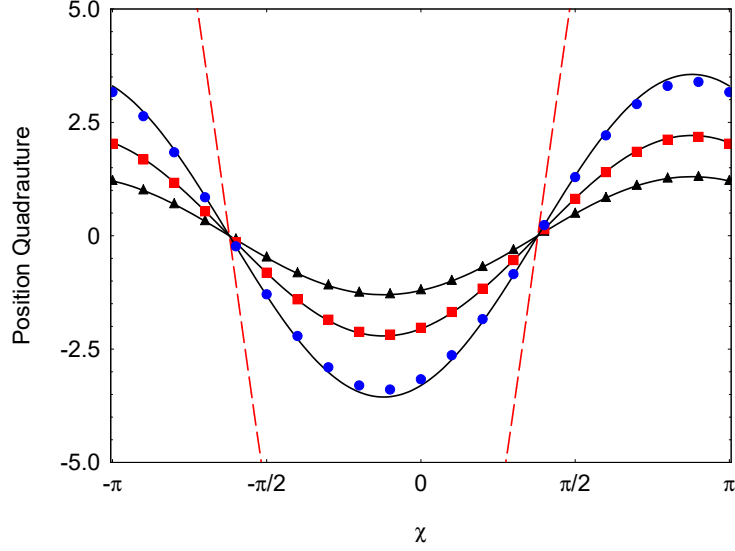
В граница, при която спиновите възбуждания са силно потиснати, нашата система се доближава до бозонно гаусово стационарно състояние. Ефектът от оператора на отместване във фазовото пространство е да наруши симетрията на четност на решетъчния модел, което води до ненулеви средни стойности на квадратурите. Критична точка разделя нормалната фаза и свръх-радиантната фаза с дисипативен фазов преход. В близост до критичната точка средните квадратури се увеличават и по същество дивергират, приближавайки се до дисипативния фазов преход, което може да се използва за подобряване на чувствителността при еднопараметрично измерване [61]. Благодарение на спин-бозонното взаимодействие, статистическата неопределеност при определянето на двата параметъра може да бъде подобрена около критичната точка, където чувствителността на един от спрегнатите параметъра или големината, или фазата на отместването може да бъде значително повишена.

10.2 Мултипараметрична Квантова Метрология

За да се извърши квантово многопараметрично измерване на p неизвестни параметри $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ се приема, че системата е подготвена в начално състояние с матрица на плътност $\hat{\rho}_0$. Под действието на еволюцията във времето системата еволюира в състояние $\hat{\rho}_\theta$, където информацията за параметрите е кодирана в елементите на матрицата на плътност. Чувствителността при определянето на параметрите се дава от ковариантната матрица, чиито елементи са $\text{Var}(\theta)_{ij} = \langle \theta_i \theta_j \rangle - \langle \theta_i \rangle \langle \theta_j \rangle$, където диагоналните елементи определят статистическата неопределеност на отделните параметри, докато недиагоналните елементи показват възможна корелация между различните параметри. Крайната прецизност в многопараметричната оценка се определя количествено от квантовата граница на Крамер-Рао [62, 63]

$$\text{Var}(\theta) \geq (\nu \mathcal{F}_Q(\hat{\rho}_\theta))^{-1}, \quad (233)$$

където $\mathcal{F}_Q(\hat{\rho}_\theta)_{kl}$ е матрицата на квантовата Фишер информация (КФИ).



Фигура 25: Стационарната средна стойност на $\langle \hat{x} \rangle$ като функция на χ . Сравняваме точното решение, получено с хамилтониан (241) с $\lambda = 0.85$ (черен триъгълник), $\lambda = 0.95$ (червени квадратчета), $\lambda = 1.0$ (сини кръгове) и стационарното решение $\langle \hat{x} \rangle = 2\alpha \cos(\delta)$ (плътна линия). Пунктираната червена линия е решението за $\lambda \rightarrow \lambda_c$. Другите параметри са $\lambda_c = 1.077$ и $\tilde{F} = 0.53$

За да пресметнем матрицата на КФИ, дефинираме набор от ермитови оператори "symmetric logarithmic derivative operators" $\hat{\mathcal{L}}_{\theta_k}$, които удовлетворяват операторното уравнение [23]

$$2\partial_{\theta_k}\hat{\rho}_\theta = \hat{\mathcal{L}}_{\theta_k}\hat{\rho}_\theta + \hat{\rho}_\theta\hat{\mathcal{L}}_{\theta_k}. \quad (234)$$

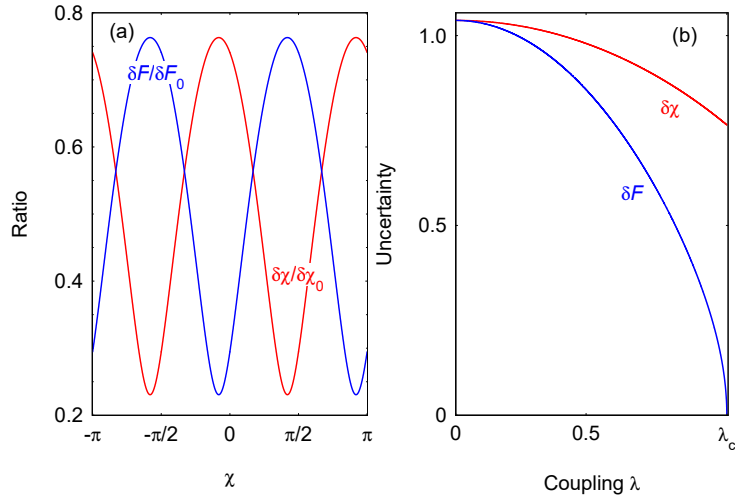
За матрица на плътност със спектрално представяне $\hat{\rho}_\theta = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ ние имаме

$$\hat{\mathcal{L}}_{\theta_k} = 2 \sum_{n,m} \frac{\langle\psi_n|\partial_{\theta_k}\hat{\rho}_\theta|\psi_m\rangle}{p_n + p_m} |\psi_n\rangle\langle\psi_m|, \quad (235)$$

с $p_n + p_m \neq 0$. Тогава елементите на матрицата на КФИ се дават чрез:

$$(\mathcal{F}_Q(\hat{\rho}_\theta))_{km} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{\rho}_\theta \{ \hat{\mathcal{L}}_{\theta_k}, \hat{\mathcal{L}}_{\theta_m} \}). \quad (236)$$

КФИ може да се интерпретира като мярка за различимост на две квантови състояния, спрямо инфинитизимално изменение на параметрите θ .



Фигура 26: (а) Отношението $\delta F / \delta F_0$ и $\delta \chi / \delta \chi_0$ като функция на фаза χ . Параметрите са $\lambda_c = 1.04$ и $\lambda = 0.95\lambda_c$. (б) Статистическите неопределености δF в единици ω и $\delta \chi$ според уравнението. (255) като функция на λ . Чувствителността е подобрена за фаза χ , близка до оптималната, дадена от $\tan(2\chi_{\text{opt}}) = 2\tilde{\gamma}/(\lambda_c^2 - 2)$.

Тази връзка следва от това, че разстоянието (Bures distance) между две инфинитизимално близки квантови състояние е

$$ds_B^2 = \sum_{k,m} g_{km} d\theta_k d\theta_m, \quad (237)$$

където метричния тензор в параметричното пространство е [64]

$$g_{km} = \frac{1}{4} (\mathcal{F}_Q(\hat{\rho}_\theta))_{km} \quad (238)$$

Тази тясна връзка между разстоянието и матрицата на КФИ показва, че оценката на параметъра може да бъде значително подобрена близо до квантов фазовия преход, където безкрайно малка промяна на параметрите води до огромна промяна на разстоянието. Тъй като статистическата неопределеност е обратно пропорционална на КФИ следва, че критичната квантова динамика позволява значително подобряване на точността на измерване.

За еднопараметрична квантова метрология, оптималния измервателен базис, където статистическата неопределеност е минимална се дава

от собствените вектори на оператора $\hat{\mathcal{L}}_\theta$. За мултипараметрична квантова метрология различните $\hat{\mathcal{L}}_{\theta_k}$ в най-общия случай некомутират. Следователно за всеки отделен параметър се постига в различен измервателен базис, така че фундаменталната граница на Крамер-Рао не може да бъде достигната. Нека дефинираме

$$\hat{\mathcal{C}}_{\theta_k, \theta_m} = [\hat{\mathcal{L}}_{\theta_k}, \hat{\mathcal{L}}_{\theta_m}]. \quad (239)$$

Достатъчно условие за съществуването на измервателен базис, където границата на Крамер-Рао се достига е $\hat{\mathcal{C}}_{\theta_k, \theta_m} = 0$ за всяка двойка оператори $\hat{\mathcal{L}}_{\theta_k}$. Наското беше показано, че необходимото условие за достигане на оптималната граница на прецизност е $\text{Tr}(\hat{\rho}_\theta \hat{\mathcal{C}}_{\theta_k, \theta_m}) = 0$ [62, 65, 66].

10.3 Едновременно измерване на два самоспрегнати параметри, характеризиращи отместване във фазовото пространство

Нека разгледаме квантова система от N спинове, които взаимодействат с N бозонни моди. Бозоните в различни възли на решетката са свързани с процеси на тунелиране. Пълният хамилтониан се дава от

$$\hat{H} = \hbar \sum_{k=1}^N \left\{ \omega \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{\Omega}{2} \sigma_k^x + g(\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k) \sigma_k^y \right. \quad (240)$$

$$\left. + \frac{F}{2} (\hat{a}_k^\dagger e^{i\chi} + \hat{a}_k e^{-i\chi}) \right\} + \hbar \sum_{k>l}^N \kappa_{kl} (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l + \hat{a}_k \hat{a}_l^\dagger). \quad (241)$$

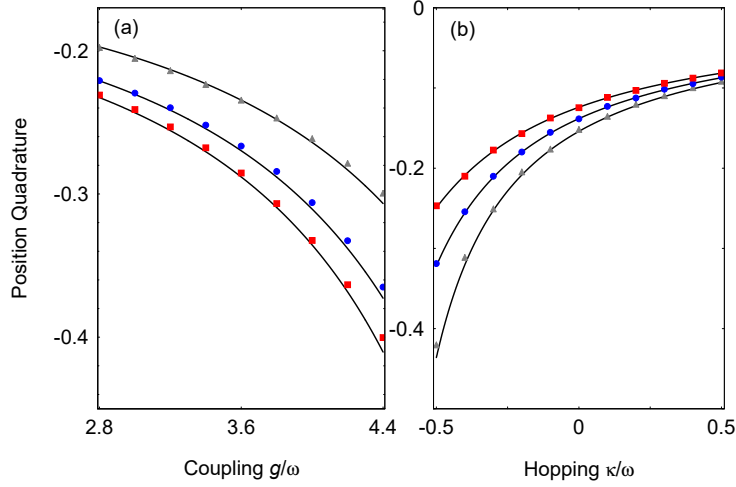
Двата параметъра, които искаме да оценим, са големината на отместването $\theta_1 = F$ и съответно неговата фаза $\theta_2 = \chi$. Ефектът от загуба на бозон от системата се описва чрез уравнението

$$\partial_t \hat{\rho}_\theta = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}_\theta] + \sum_{k=1}^N \gamma_k \hat{\mathcal{D}}[\hat{a}_k], \quad (242)$$

където

$$\hat{\mathcal{D}}[\hat{a}_k] = 2\hat{a}_k \hat{\rho}_\theta \hat{a}_k^\dagger - \{\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k, \hat{\rho}_\theta\}_+ \quad (243)$$

Взаимодействието между кохерентната и дисипативната част на (242) води до неравновесно стационарно състояние на системата, което може



Фигура 27: (а) Средна квадратура на $\langle \hat{x}_k \rangle$ като функция на връзката g/ω за различна амплитуда κ . Сравняваме точното решение с резултата получен от стационарно състояние (плътни линии). Параметрите са $\kappa/\omega = -0.4$ (червени квадратчета), $\kappa/\omega = -0.47$ (сини кръгове) и $\kappa/\omega = -0.5$ (сиви триъгълници). Другите параметри са $\epsilon = 4 \times 10^{-3}$, $F = 0.13$, $\tilde{\gamma} = 0.16$ и $\chi = \pi/7$. (б) Същото, но сега променяйте амплитудата за различни $g/\omega = 3.1$ (черни триъгълници), $g/\omega = 3.9$ (сини кръгове), $g/\omega = 4.5$ (червени квадратчета).

да проявява неаналитично поведение. Нашият протокол разчита на еволюцията във времето на системата към стационарно състояние, където се извършва измерването на двата параметъра. Тъй като динамиката е квадратична в бозонните оператори, стационарното състояние на системата е с гаусова форма и операторът на плътност може да бъде намерен чрез формулата

$$V_{kl}(\hat{\rho}_\theta, \hat{q}) = \frac{1}{2} \langle \hat{q}_k \hat{q}_l + \hat{q}_l \hat{q}_k \rangle - d_k d_l, \quad (244)$$

където $\hat{q} = \{\hat{x}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{x}_N, \hat{p}_N\}^T$ и вектор на отместване $d = \langle \hat{q} \rangle$ [67, 68]. Тук $\hat{x}_k = (\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k)$ и $\hat{p}_k = i(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k)$ са квадратурите на позицията и импулса за k -тия осцилатор.

Нека първо разгледаме неравновесната динамика за $\kappa_{kl} = 0$. В този случай стационарното състояние на системата се описва с матрица на

плътност в Гаусова форма:

$$\hat{\rho}_\theta = \hat{R}(\delta)\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)\hat{v}\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{R}^\dagger(\delta), \quad (245)$$

където

$$\alpha = \frac{\tilde{F}}{2(\lambda_c^2 - \lambda^2)} \sqrt{\lambda_c^2 - \lambda^2 \tilde{\gamma} \sin(2\chi) + \lambda^2(\lambda^2 - 2) \sin^2(\chi)}, \quad (246)$$

$$\tan(\delta) = \frac{(\lambda^2 - 1) \sin(\chi) - \tilde{\gamma} \cos(\chi)}{\tilde{\gamma} \sin(\chi) - \cos(\chi)} \quad (247)$$

и съответно

$$\tanh(2r) = \frac{\lambda^2}{\sqrt{4(\lambda_c^2 - \lambda^2) + \lambda^4}}, \quad \tan(2\phi + 2\delta) = \frac{2\tilde{\gamma}}{2 - \lambda^2}, \quad (248)$$

Тук $\lambda_c^2 = 1 + \tilde{\gamma}^2$ е критичния параметър, който разделя нормалната $\lambda \leq \lambda_c$ от свръх-радиантната фаза $\lambda > \lambda_c$, които са свързани с дисипативен фазов преход. На Фиг. (25) е показано сравнение между числения резултат и аналитичния резултат за квадратурата като функция на фазата. С увеличаване на λ квадратурата расте и дивергира в точката на дисипативния фазов преход.

Използвайки изразът за неравновесното стационарно състояние може да намерим операторите $\hat{\mathcal{L}}_{\theta_k}$. Получаваме

$$\hat{\mathcal{L}}_F = \frac{2\partial_F \alpha}{1 + 2N_{\text{th}}} \hat{R}(\delta)\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)(\beta\hat{a}^\dagger + \beta^*\hat{a})\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{R}^\dagger(\delta), \quad (249)$$

и съответно

$$\hat{\mathcal{L}}_\chi = \frac{2}{1 + 2N_{\text{th}}} \hat{R}(\delta)\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)(v\hat{a}^\dagger + v^*\hat{a})\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{R}^\dagger(\delta), \quad (250)$$

Обратната матрица на квантовата Фишер информация е

$$(\mathcal{F}_Q(\hat{\rho}_\theta)^{-1})_{km} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_F^{-1} & \mathcal{F}_{F\chi}^{-1} \\ \mathcal{F}_{\chi F}^{-1} & \mathcal{F}_\chi^{-1} \end{pmatrix}, \quad (251)$$

където диагоналните елементи описват максималната граница на чувствителността при дупараметричното измерване. Ние имаме

$$\mathcal{F}_F^{-1} = \frac{\omega^2}{4} \{4(\lambda_c^2 - \lambda^2) + \lambda^4 + \lambda^2((\lambda^2 - 2) \cos(2\chi) \quad (252)$$

$$+ 2\tilde{\gamma} \sin(2\chi))\}, \quad (253)$$

$$\mathcal{F}_\chi^{-1} = \frac{\omega^2}{4F^2} \{4(\lambda_c^2 - \lambda^2) + \lambda^4 - \lambda^2((\lambda^2 - 2) \cos(2\chi) \quad (254)$$

$$+ 2\tilde{\gamma} \sin(2\chi))\}, \quad (255)$$

Следователно максималната постижима прецизност е $\delta F^2 \geq \frac{1}{\nu} \mathcal{F}_F^{-1}$ и $\delta \chi^2 \geq \frac{1}{\nu} \mathcal{F}_\chi^{-1}$. Като сравнение нека първо обсъдим максималната прецизност в граница $g = 0$ и по този начин $\lambda = 0$. Това съответства на квантова система, състояща се от дисипативен хармоничен осцилатор, чувствителен към големината и фазата на неизвестно отместване. Използвайки уравнение (255) може да се покаже, че статистическата неопределеност на оценката на двата параметъра се дава от $\delta F_0 \geq \frac{\omega}{\sqrt{\nu}} \lambda_c$ и $\delta \chi_0 \geq \frac{\omega}{\sqrt{\nu} F} \lambda_c$. Ключов резултат е повишаване на чувствителността, която се постига чрез увеличаване на λ . На Фиг. 26(a) е показано съотношението $\delta F / \delta F_0$ и $\delta \chi / \delta \chi_0$ съгласно уравнение (255). Виждаме, че пределната чувствителност, която се постига чрез дисипативната спин-бозонна динамика, е по-голяма в сравнение със случая δF_0 и $\delta \chi_0$. По-специално, когато фазата χ е близо до оптималната фаза, дадена от $\tan(2\chi_{\text{opt}}) = 2\tilde{\gamma}/(\lambda_c^2 - 2)$ може да се постигне значително подобряване на чувствителността на един от параметрите. Наистина, близо до критичното свързване λ_c корелациите на двата параметъра изчезват $\mathcal{F}_{F\chi}^{-1} \approx 0$ и статистическата неопределеност се дава чрез

$$\delta F^2 \geq \frac{\omega^2}{4\nu} \{4(\lambda_c^2 - \lambda^2) + \lambda^4 - \lambda^2 \sqrt{4(\lambda_c^2 - \lambda^2) + \lambda^4}\}, \quad (256)$$

$$\delta \chi^2 \geq \frac{\omega^2}{4\nu F^2} \{4(\lambda_c^2 - \lambda^2) + \lambda^4 + \lambda^2 \sqrt{4(\lambda_c^2 - \lambda^2) + \lambda^4}\}. \quad (257)$$

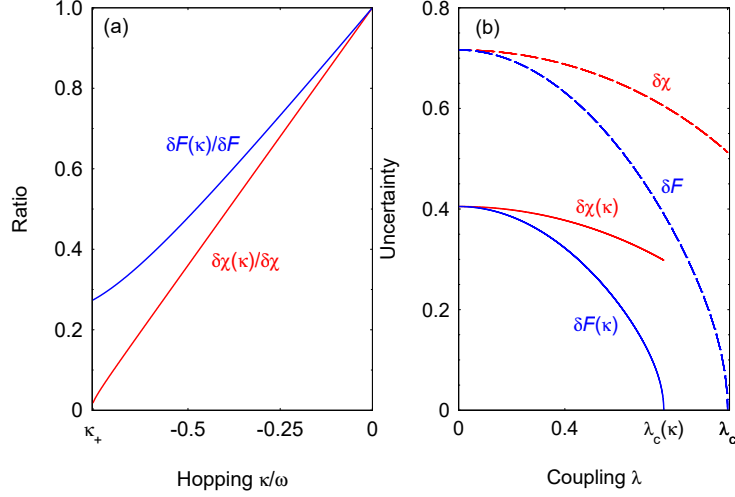
Близо до дисипативния фазов преход получаваме

$$\delta F \sim \frac{\omega}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\lambda_c - \lambda}, \quad \delta \chi \sim \frac{\omega}{\sqrt{2\nu} F} \lambda_c^2. \quad (258)$$

Следователно, системата става чувствителна към инфинитизимално малка сила близо до точката на преход, виж Фиг. 26(b). Също така, ако $\gamma < \omega$ имаме $\delta \chi < \delta \chi_0$ така, че фазовата чувствителност е подобрена в сравнение с $\delta \chi_0$. За фаза близка до $\chi = \chi_{\text{opt}} + \pi/2$ може да се покаже, че $\delta F \sim \frac{\omega}{\sqrt{2\nu}} \lambda_c^2$ и $\delta \chi \sim \frac{\omega}{\sqrt{\nu} F} \sqrt{\lambda_c - \lambda}$ и по този начин може да се подобри съответно фазовата чувствителност.

Нека оценим сумата от неопределеността на измерването на двата параметъра. За тази цел е удобно да се въведат безразмерни величини $q = \tilde{F} \cos(\chi)$ и $p = \tilde{F} \sin(\chi)$. Тогава е лесно да се покаже, че елементите на матрицата на КФИ не зависят от стойностите на двата параметъра, Ние получаваме

$$\delta q^2 + \delta p^2 \geq \frac{1}{2\nu} \{4(\lambda_c^2 - \lambda^2) + \lambda^4\}. \quad (259)$$



Фигура 28: (а) Отношението $\delta F(\kappa)/\delta F$ и $\delta\chi(\kappa)/\delta\chi$ като функция на κ съгласно ур. (263). Параметрите са $\tilde{\gamma} = 0.16$, $\lambda = 0.59$ и $\chi = \pi/3$. (b) Минимална измерваема сила и фаза като функция на λ (плътни линии) за $\tilde{\kappa} = -0,45$. Като сравнение са показани резултатите за $\kappa = 0$ (пунктирани линии).

Стандартната квантова граница изисква $\delta q^2 + \delta p^2 \geq \frac{2}{\nu}$ [69]. Последното има просто обяснение, а именно отговаря на пределната постижимата прецизност за квантова система с $\lambda = 0$ и $\lambda_c = 1$. От решаващо значение е ефектът от спин-бозонното взаимодействие $\lambda \neq 0$, което подобрява едновременно статистическата неопределеност на двупараметърната оценка. Действително, приближавайки дисипативния фазов преход, сумата от дисперсиите става $\delta q^2 + \delta p^2 \sim \frac{\lambda_c^4}{2\nu}$ и по този начин, докато $\gamma < \omega$ може да преодолее стандартната квантова граница.

Накрая, нека разгледаме $\kappa_{kl} \neq 0$. Това отговаря на решетъчен модел описващ дисипативно спин бозонно взаимодействие, където бозоните могат да тунелират между възлите на решетката. Дисипативната динамика кара системата да достигне до състояние, което се описва от стационарна матрица на плътност. На Фиг. 27 сравняваме точния резултат получен от численото интегриране на ур. (242) с аналитичния резултат, където наблюдаваме много добро съвпадение.

Матрицата на квантовата Фишер информация е

$$\mathcal{F}_Q(\hat{\rho}_\theta)_{km} = (\partial_{\theta_k} d^T) V(\hat{\rho}_\theta, \hat{q})^{-1} (\partial_{\theta_m} d) .. \quad (260)$$

Критичната точка, която разделя нормалната от свръх-радиантната фази е

$$\lambda_+(\kappa) = \frac{\sqrt{\tilde{\gamma}^2 + (1 + \tilde{\kappa})^2}}{\sqrt{1 + \tilde{\kappa}}}. \quad (261)$$

За статистическите неопределености намираме

$$\delta F^2(\kappa) \geq \frac{\omega^2}{8\nu} \{4(1 + \tilde{\kappa})(\lambda_+^2(\kappa) - \lambda^2) + \lambda^4 + \lambda^2 Q(\kappa)\}, \quad (262)$$

$$\delta \chi^2(\kappa) \geq \frac{\omega^2}{8\nu F^2} \{4(1 + \tilde{\kappa})(\lambda_+^2(\kappa) - \lambda^2) + \lambda^4 - \lambda^2 Q(\kappa)\}, \quad (263)$$

На Фиг. 28(a) е показано отношението между дисперсиите (263) и тези, получени за $\kappa = 0$, а именно $\delta F(\kappa)/\delta F$ и $\delta \chi(\kappa)/\delta \chi$. Както може да се види, $\kappa < 0$ подобрява едновременно статистическата неопределеност на двата параметъра. На Фиг. 28(b) е показано статистическата неопределеност на F и χ като функция на λ . Приближавайки се до критичната точка получаваме $\delta F(\kappa) \sim \frac{\omega}{\sqrt{2\nu}} \sqrt{\lambda_+(\kappa) - \lambda}$ и $\delta \chi(\kappa) \sim \frac{\omega}{2\sqrt{\nu F}} \lambda_+^2(\kappa)$ или съответно $\delta F(\kappa) \sim \frac{\omega}{2\sqrt{\nu}} \lambda_+^2(\kappa)$ и $\delta \chi(\kappa) \sim \frac{\omega}{\sqrt{2\nu F}} \sqrt{\lambda_+(\kappa) - \lambda}$ за фаза $\chi = \chi_{\text{opt}} + \pi/2$. Виждаме, че за дадена λ и тъй като $\lambda_+(\kappa) < \lambda_c$ може да се постигне по-добра чувствителност за F и χ в сравнение с чувствителността, която се постига чрез използване на две несвързани квантови системи с $\kappa = 0$.

10.4 Заключение

В тази глава беше, предложено използването на отворена квантова система, която показва дисипативен фазов преход, като квантов сензор за оценка на два параметъра характеризиращи фазово отместване. Нашият квантов модел се състои от решетъчна система от атоми с две нива и бозонни моди, които взаимодействат чрез диполярно свързване. Кохерентното спин-бозонно взаимодействие и дисипативната динамика водят до неравновесно стационарно състояние, което показва неаналитично поведение в критичната точка на преход. Показано е, че близо до дисипативния фазов преход може да се постигне значително подобрение на чувствителността на един от двата параметъра, а именно големината или фазата на фазовото отместване. Също така е показано, че пълната статистическа неопределеност може подобри стандартната квантова граница.

11 Квантов Термометър

В тази глава предлагаме адиабатен метод за оптимална оценка на фононната температура, използвайки йони в капан на Паул, който може да работи извън режима на Ламб-Дике. Техниката разчита на време зависим червен преход, описан от нелинейния модел на Джейнс-Къминг. Уникална характеристика на нашата техника за измерване на ниски температури е, че съответната информация за топлинните разпределения на фононите може да бъде прехвърлена към спин-колективната степен на свобода. Следователно, всяка от вероятностите за термално състояние е адиабатно прехвърлена върху съответната конфигурация на колективно спин-възбуждане и по този начин оценката на температурата се извършва чрез извършване на спин-зависимо лазерно измерване на флуоресценцията в края на адиабатния преход. Температурната статистическа неопределеност е характеризирана от гледна точка на квантовата информация на Фишер. Важно преимущество на метода е, че измерването на проекцията на състоянието насища фундаменталната квантова Крамер-Рао граница на прецизност, за квантов осцилатор при топлинно равновесие.

11.1 Мотивация

През последните няколко години свръх-прецизните техники за измерване на ниски температурата намират широк спектър от важни приложения, като например в медицината и биологията [70] както и за обработка на квантовата информация и квантова термодинамика [71, 72, 73]. Квантовият термометър обикновено се състои от система, наречена проба, която е в контакт със системата от интерес. Различни квантови оптични системи могат да се използват като квантови термометри, например квантови точки [74, 75, 76], цветни центрове в нанодиаменти [77, 78, 79], микромеханични резонатори и йони в капан на Паул [97, 83, 85, 84, 86].

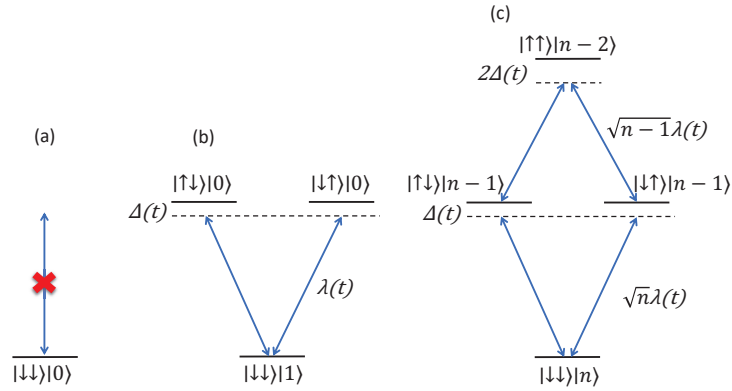
Оптималната стратегия за определяне на температурата се състои в измерване на заселеностите в енергетичния базис на квантовата проба [87, 88, 89, 90, 91]. Наистина, оказва се, че тази стратегия е *оптимална* с най-малка температурна статистическа неопределеност, която насища фундаменталната граница на Крамер-Рао за оценка на температурата на всяка равновесна система. Въпреки това, енергетичните измервания като цяло са експериментално трудни, както в случай на проба, състо-

яща се от квантов хармоничен осцилатор, където броят на основните състояния обикновено е голям при топлинно равновесие, което ограничава постижимата температурна прецизност. Алтернативният подход е да се използват допълнителни спомагателни кубити, за да се свържат последователно с пробата. След това информацията за температурата се прехвърля към състоянията на кубита, които могат да бъдат измерени с висока ефективност в края на взаимодействието [80, 81, 92]. Въпреки че тази стратегия е експериментално по-удобна, статистическата неопределеност при измерване на температурата обикновено е по-висока от оптималната, дадена от фундаменталната квантова граница на Крамер-Рао.

Нашата техника разчита на глобално лазерно поле, което свързва вътрешните спинови състояния на йоните с вибрационните моди, които се намират в топлинно равновесие. Това колективно взаимодействие се описва от нелинейния модел на Джейнс-Къминг. Температурата се определя чрез адиабатно прехвърляне на фононното термално разпределение върху колективните спин-възбуждания. Такъв време-зависим контрол на спин-фононното взаимодействие е подробно изследван при създаването на сплетени състояния [93, 94, 95, 96]. Чувствителността на оценката на температурата е характеризирана с класическата информация на Фишер. Проекционните измервания на колективната спин заселеност водят до *равенство* между класическата и квантовата информация на Фишър за квантов хармоничен осцилатор при топлинно равновесие. Следователно предложения квантов термометър е оптимален в смисъл, че статистическата неопределеност на оценката на температурата е ограничена от квантовото неравенство на Крамер-Рао.

11.2 Принцип на работа на квантовия термометър

Нека разгледаме квантова проба, която е представена от квантов хармоничен осцилатор с хамилтониан $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$, където \hat{a}^\dagger и \hat{a} са операторите за раждане и унищожение на бозонно възбуждане с честота ω . Приемаме, че хармоничният осцилатор е подготвен в топлинно равновесие и се описва от канонично състояние на Гибс с матрица на плътност $\hat{\rho}_T = e^{-\beta\hat{H}}/Z = \sum_{n=0}^{\infty} p_n|n\rangle\langle n|$. Тук $|n\rangle$ е n -тото Фок състояние на хармоничния осцилатор със собствена енергия $E_n = n\hbar\omega$, $p_n = Z^{-1}e^{-\beta E_n}$ са съответните вероятности за топлинно състояние, $Z = \text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}})$ е статистическата сума, $\beta = 1/k_B T$ с k_B е константата на Болцман и T е



Фигура 29: Модел на колективните състояния на нишка от два йона, взаимодействаща с лазерно поле с честота близка до първия червен преход. Спиновете са първоначално подготвени в тяхното електронно основно състояние и модата на вибрационния център на масата е в термално състояние. а) Състоянието $|\downarrow\downarrow\rangle|0\rangle$ не се влияе от колективните взаимодействия. б) и в) Състоянията $|\downarrow\downarrow\rangle|1\rangle$ и $|\downarrow\downarrow\rangle|n\rangle$ ($n > 1$) са свързани към набор от състояния със същия брой възбуждания.

температурата, параметърът, който искаме да оценим. Тъй като температурата не е пряка наблюдаема величина, нейната стойност може да бъде извлечена само чрез извършване на подходящи измервания на други експериментално достъпни наблюдаеми. За тази цел нека разгледаме дискретен набор от измервания, дефинирани чрез операторите $\{\hat{\Pi}_n\}$, с $\sum_n \hat{\Pi}_n = I$. Съответната класическа информация на Фишер е

$$F_C(T) = \sum_n \frac{(\partial_T P_n(T))^2}{P_n(T)}. \quad (264)$$

Статистическата неопределеност в оценката на температурата се дава от неравенството на Крамер-Рао

$$\delta T \geq \frac{1}{\sqrt{\nu F_C(T)}}. \quad (265)$$

Оптималната стратегия за измерване на стойността на температурата е свързана с привилегирована наблюдаема, която максимизира класическата Фишер информация и по този начин позволява да се определи температурата с максимална прецизност. Може да се покаже, че

$F_C(T) \leq F_Q(T)$, където $F_Q(T) = \text{Tr}(\hat{\rho}_T \hat{L}^2)$ е квантовата информация на Фишер. Тук \hat{L} е операторът за симетрична логаритмична производна, който удовлетворява операторното уравнение $\partial_T \hat{\rho}_T = (\hat{\rho}_T \hat{L} + \hat{L} \hat{\rho}_T)/2$. По този начин, крайната постижима прецизност на определянето на температурата, оптимизирана по всички възможни измервания, се определя чрез квантовата граница на Крамер-Рао

$$\delta T \geq \frac{1}{\sqrt{\nu F_Q(T)}}. \quad (266)$$

Собствените състояния на оператора \hat{L} определят оптималния базис на измерване, в която квантовата граница на Крамер-Рао може да бъде достигната. Лесно е да се покаже, че за състояние на Гибс с $\hat{\rho}_T$ операторът \hat{L} може да се запише като

$$\hat{L} = \sum_n \frac{(E_n - \langle \hat{H} \rangle)}{T^2} |n\rangle \langle n|, \quad (267)$$

където $\langle \hat{H} \rangle = \text{Tr}(\hat{H} \hat{\rho}_T)$ е средната енергия. Накрая, квантовата Фишер информация за хармоничен осцилатор в термално равновесие е

$$F_Q(T) = \frac{\hbar^2 \omega^2}{4k_B^2 T^4} \text{csch}^2 \left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T} \right). \quad (268)$$

11.3 Реализация на квантов термометър с йони в капан на Паул

Нека разгледаме линеен йонен кристал с свободен хамилтониан

$$\hat{H}_0 = \hbar \omega_0 \hat{S}_z + \hbar \sum_{k=1}^N \sum_{\chi=x,y,z} \omega_{\chi,k} \hat{a}_{\chi,k}^\dagger \hat{a}_{\chi,k}. \quad (269)$$

След Доплерово лазерно охлаждане на линейния йонен кристал всяка колективна вибрационна мода е в термално състояние на движение със средно фононно възбуждане $\bar{n}_{\chi,k}$. Тъй като трептенията на йоните и в трите посоки са разделени, може да се определи температурата на всеки вибрационна мода независимо [97]. За конкретност разглеждаме температурната оценка на колективната мода на центъра на масата по

напречно направление x . Тази мода има най-високата вибрационна честота $\omega_{x,1} = \omega_x$, при която йоните осцилират във фаза с еднаква амплитуда.

За да създадем връзка между колективните вибрации и йонните спиновни състояния, приемаме, че линейният йонен кристал е глобално адресиран от лазерно поле с лазерен вълнов вектор \vec{k} , насочен по посока на x ($|\vec{k}| = k_x$) и честотата на лазера $\omega_L(t) = \omega_0 - \omega_x + \Delta(t)$, настроена близо до модата на център на масите на червения преход с време зависима честотна разлика $\Delta(t)$ ($\omega_x \gg \Delta(t)$). Хамилтонианът на системата е

$$\hat{H}_{\text{LJC}}(t) = \hbar\Delta(t)\hat{S}_z + \hbar\lambda(t)(\hat{S}^+\hat{F}(\hat{n})\hat{a} + \hat{S}^-\hat{a}^\dagger\hat{F}(\hat{n})), \quad (270)$$

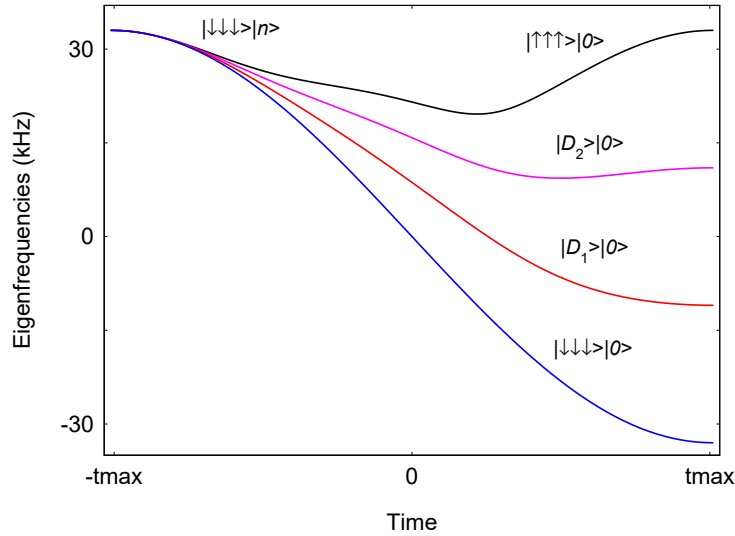
където

$$\hat{F}(\hat{n}) = e^{-\eta^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\eta^2)^n}{n!(n+1)!} \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^n. \quad (271)$$

Тъй като колективното спиново възбуждане може да бъде създадено (унищожено) чрез поглъщане (излъчване) на колективен фонон на центъра на масата, линейният, както и нелинейният Джейнс-Къминг хамилтониан комутира с оператора на пълния брой възбуждания, дефиниран с $\hat{N} = \hat{S}_z + \hat{a}^\dagger\hat{a}$. Следователно, Хилбертово пространство се разлага на подпространства с добре дефиниран общ брой възбуждания $N = n_s + n$, където $n_s = 0, 1, \dots, 2S$ е числото на спиновни възбуждания.

11.4 Протокол за температурно измерване

Схемата за оценка на температурата започва с подготовка на системата в начално състояние $\hat{\rho}_i = \hat{\rho}_{\text{spin}} \otimes \hat{\rho}_{\text{th}}$, където $\hat{\rho}_{\text{th}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |n\rangle \langle n|$ е операторът на плътност на топлинното състояние на модата на центъра на масата с $p_k = \frac{\bar{n}^k}{(1+\bar{n})^{k+1}}$ и $\bar{n} = (e^{\beta\hbar\omega_x} - 1)^{-1}$ са средният брой топлинни възбуждания. Приемаме, че спиновете първоначално са поляризирани по посока на z в чисто състояние с матрица на плътност $\hat{\rho}_{\text{spin}} = |D_0\rangle \langle D_0|$. Следователно първоначалният общ брой на възбужданията се определя от броя на фононите на центъра на масата n , а именно $N = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). След това системата еволюира спрямо време-зависимото взаимодействие на червения преход, така че съответната информация за температурата се разпределя и съхранява в колективните степени на свобода на спина. На фиг. 29 е показан моделът на свързване на колективните състояния на линеен кристал на два йона, където за конкретност приемаме линейно

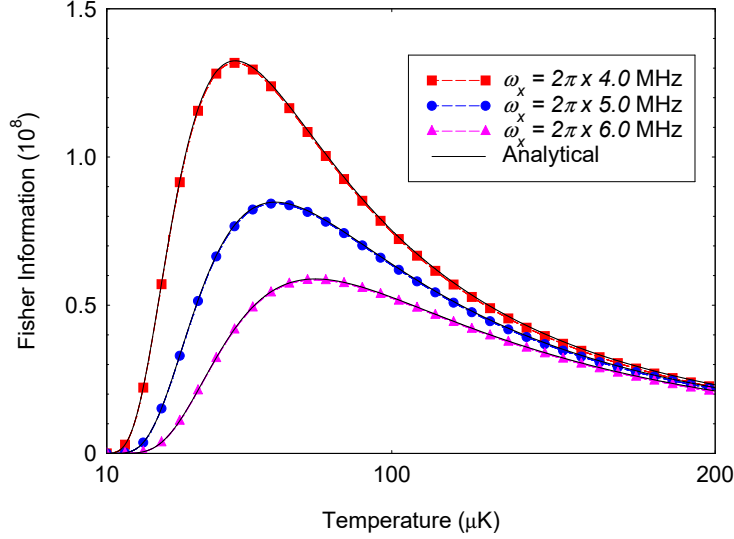


Фигура 30: Най-ниските собствени енергии на хамилтониан (202) за три спина и за различно фононно число n като функция от времето. В адиабатната граница всяко от началните състояния $|\psi_n(t_i)\rangle = |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, 3$) се трансформира в $|\psi_n(t_i)\rangle \rightarrow |D_n\rangle|0\rangle$.

взаимодействие. Както може да се види, колективно спиново възбуждане може да се създаде само чрез унищожение на фонон на центъра на масата и обратно. По този начин основното състояние на движение не се влияе от лазерното взаимодействие, докато състояния с $n > 0$ фонони са свързани към набор от състояния със същия брой възбуждания. Тъй като се занимаваме с топлинни вибрационни състояния, всеки от тези три независими прехода се реализира с вероятност p_n .

11.5 Адиабатен Преход

Нашата цел е да определим вероятностите p_n да наблюдаваме Фок състояние $|n\rangle$ чрез извършване на проекционни спин-зависими измервания. Нека първо подчертавам, че поради нерезонансните преходи приложението на π лазерен импулс не е в състояние да различи вероятностите p_n чрез измерване на спиновата заселеност [8, 12]. Поради тази причина ние разглеждаме адиабатна техника за определяне на p_n , която е по-бавна във времето, но по-стабилна по отношение на флуктуацията на параметрите.



Фигура 31: Класическа Фишър информация за наблюдаемите P_{s_1, \dots, s_N} при t_{\max} като функция от температурата за йонна верига с четири йона. Численият резултат за различни напречни честоти на улавяне ω_x се сравнява с квантовата Фишер информация (268) (плътни линии). Другите параметри $\lambda_0/2\pi = 5$ kHz, $\Delta_0/2\pi = 25$ kHz и $\gamma/2\pi = 5,5$ kHz.

На фиг. 30 са показани най-ниските собствени енергии на хамилтониан (202) за три спина и различни фононни числа ($n = 0, 1, 2, 3$). Да приемем, че в началния момент лазерната настройка е много по-голяма от спин-фононното свързване, $|\Delta(t_i)| \gg \lambda(t_i)$ и $\Delta(t_i) < 0$. Тогава векторите на състоянието $|\psi_n(t_i)\rangle = |D_0\rangle |n\rangle$ са собствени състояния на хамилтониан (202) така, че $\hat{H}_{\text{JC}}(t_i) |\psi_n(t_i)\rangle = -S\Delta(t_i) |\psi_n(t_i)\rangle$. Адиабатно променяйки честотната настройка $\Delta(t)$, така че в крайна сметка получаваме $\Delta(t_f) \gg \lambda(t_f)$ и $\Delta(t_f) > 0$. В адиабатната граница системата остава в едно и също собствено състояние на хамилтониана (202) през цялото време. Тъй като общият брой на възбуждания е запазен, първоначалното състояние $|\psi_n(t_i)\rangle$ се трансформира адиабатно в крайно състояние $|\psi_n(t_f)\rangle = |D_l\rangle |0\rangle$, където приемаме $n \leq 2S$ и $n = l$, като подчертаваме, че първоначалният брой фонони се прехвърля в колективните спинови възбуждения. Тъй като максималният брой спинови възбуждения е $n_s = 2S$, в който всички спинове са във възбудените нива, първоначалното състояние $|\psi_n(t_i)\rangle$ с $n > 2S$ адиабатично еволюира в $|\psi_n(t_f)\rangle = |D_{2S}\rangle |n - 2S\rangle$.

Следователно, за състояние с N спина и състояние на топлинно движение това предполага следния преход

$$\hat{\rho}_i \rightarrow \hat{\rho}_f = \sum_{l=0}^{2S} p_l |D_l\rangle\langle D_l| \otimes |0\rangle\langle 0| + \hat{\rho}_{\text{res}}. \quad (272)$$

Следователно, състоянието на максимално смесено термално движение се трансформира адиабатно в максимално смесено спиново състояние, в което може да се наблюдава състояние $|D_l\rangle$ с вероятност p_l . Накрая, матрицата на остатъчната плътност в (272) се дава от

$$\hat{\rho}_{\text{res}} = |D_{2S}\rangle\langle D_{2S}| \otimes \sum_{n=2S+1}^{\infty} p_n |n-2S\rangle\langle n-2S|. \quad (273)$$

На фиг. 31 е показан точния резултат за класическата Фишер информация (264) за спиновите вероятности P_{s_1, \dots, s_N} в сравнение с квантовата Фишер информация (268). Виждаме, че класическата Фишер информация, свързан с наблюдаемите P_{s_1, \dots, s_N} , е равна на квантовата Фишер информация за квантов хармоничен осцилатор в топлинно равновесие. Следователно, измерването на състоянието на всеки спин е оптимално за оценка на температурата в смисъл, че температурната статистическа неопределеност е ограничена от квантовата граница на Крамер-Рао (266).

Вероятността да се наблюдава колективно състояние с всички спинове във възбудени нива не е равна на p_{2S} , но други силно възбудени топлинни фононни състояния с вероятности p_n ($n > 2S$) също допринасят, което разваля оптималната оценка на температурата. Въпреки това, ефектът на остатъчния член може да бъде потиснат чрез увеличаване на броя на йоните. Наистина, за по-голям брой йони вероятността да се наблюдават всички спинове във възбудените състояния след адиабатния преход става пренебрежимо малка, така че ефектът на остатъчния член $\hat{\rho}_{\text{res}}$ може да бъде потиснат, което в крайна сметка подобрява температурната чувствителност.

Оптималната температурна оценка на другите вибрационни моди може да се извърши чрез индивидуално адресиране на всеки йон [98, 99]. Наистина, лазерното адресиране на другите вибрационни моди води до независимо от мястото свързване между йонните състояния и съответната фононна мода. Това ще повлияе на адиабатния преход, който разчита на колективната природа на спин-фононното взаимодействие. Въпреки

това, в зависимост от формата на модата, всеки йон може да бъде адресиран локално, така че чрез настройка на амплитуда на всеки отделен лазер е възможно да се създаде хамилтониан (202).

11.6 Заключение

В тази глава беше предложен оптимален метод за измерване вибрационната температура на йони в капан на Паул. Методът използва външно лазерно поле, което създава връзка между трептенията на кристала и колективните вътрешни състояния на йоните. Чрез адиабатен преход информацията за фононните състояния се пренася върху колективните спиновни възбуждания. Показано е, че проективното измерване на вътрешните йонни състояния води до равенство между класическата и квантовата Фишер информация. По този начин предложения квантов термометър е оптимален, в смисъл, че статистическата температурна неопределеност се дава от границата на Крамер-Рао.

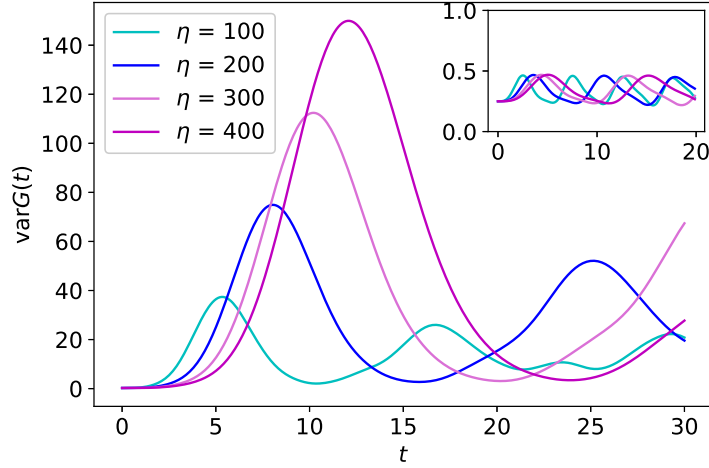
12 Квантов Хаос в Квантов Модел на Раби

В тази глава изследваме появата на хаос и преход към равновесие в квантовия модел на Раби, който показва квантов фазов преход, когато съотношението на атомната честотна настройка към бозонната честота нараства до безкрайност. Ще покажем, че неедновременната корелационна функция, получена от ехо сигнала на Лошмид, бързо се насища в нормалната фаза и показва експоненциално нарастване в свръх-радиантната фаза, което е свързано с наличието на квантов хаос. Също така ще покажем, че размерността на осреднената по време матрица на плътност на квантовата Раби система може да бъде голямо в сравнение с размера на спиновата система, което води до потискане на времевите флуктуации и преход към равновесие на спиновата система.

12.1 Мотивация

Квантовият модел на Раби е един от най-простите и фундаментални модели, описващи квантово взаимодействие *светлина-материя*. Състои се от една бозонно мода и ефективна спин система, които взаимодействат чрез диполярно свързване [100]. Изследвани са различни квантово-оптични режими на квантовия Раби модела, включително режими на свръхсилно спин-бозонно свързване както и дълбоко силно свързване, при които силата на свързване е сравнима по-голяма от честотата на бозонната мода [101, 102]. Наскоро беше показано, че квантовия Раби модел показва квантов фазов преход с краен размер, когато съотношението на атомната честота Δ към бозонната честота ω нараства до безкрайност $\eta = \Delta/\omega \rightarrow \infty$ [103]. Квантовият фазов преход от втори ред в квантови Раби модел се случва при критичен параметър $g = g_c$ между нормална $g < g_c$ и свръх-радиантна фаза $g > g_c$. Скорошната експериментална реализация на такъв квантов фазов преход в йонен капан отваря широки перспективи за изследване на критично поведение в квантови оптични системи с краен размер [105].

В тази глава ще разгледаме неедновременната корелационна функция "Out-of-time-order correlator" (ОТОС), която измерва разпределението на квантовата информация по степените на свобода на системата [106]. ОТОС е представен като индикатор за квантов хаос, като растежа му е свързан с класическата експонента на Ляпунов [107, 108, 109]. Ще покажем, че в нормалната фаза ОТОС бързо се насища до стойност, независима от



Фигура 32: Точната времева еволюция на ОТОС за квантовия Раби модел с хамилтониан (274). Параметрите са $g_c = 5$ и променяме η . В нормална фаза с $g = 4$ ОТОС осцилира с амплитуда, независима от η (вмъкване). В свръх-радиантната фаза с $g = 7$ ОТОС експоненциално нараства с квантова експонента на Ляпунов $\lambda_Q(g, \omega, \Delta)$ и време на насищане t^* . Първоначалното състояние е $|\psi_0\rangle = |+, 0\rangle$.

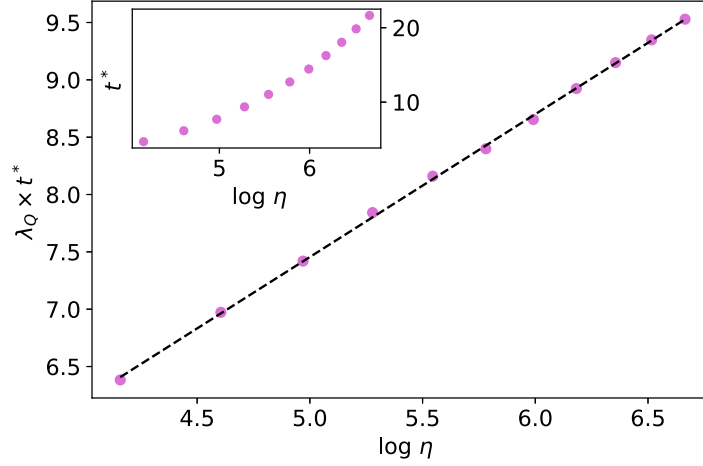
η . В свръх-радиантната фаза обаче той показва *експоненциален растеж*, който става по-голям с увеличаване на η и позволява числено намиране на експонентата на Ляпунов $\lambda_Q(g, \omega, \Delta)$ [110, 111, 112, 113]. Отношението $\lambda_Q t^* \sim \log \eta$, което е характерно за хаотичните системи с класическа граница $1/\eta \sim \omega \rightarrow 0$, важи за квантовия Раби модел, като $t^*(g, \omega, \Delta)$ е времето за насищане на ОТОС.

Накрая, ще изследваме режим, при който ефективната размерност на осреднения по време оператор на плътността е по-голяма от размерността на спиновата система, което кара спиновата система към равновесие.

12.2 Квантов Модел на Раби

Хамилтонианът на квантовия модел на Раби е

$$\hat{H}_{\text{QR}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\Delta}{2} \sigma_z + g \sigma_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (274)$$



Фигура 33: $\lambda_Q(g, \omega, \Delta)t^*$ като функция на η . Параметрите са $g = 6$, $g_c = 5$. Връзката е добре апроксимирана от логаритмична функция $\lambda_Q(g, \omega, \Delta)t^* \sim \log \eta$ (пунктирна линия).

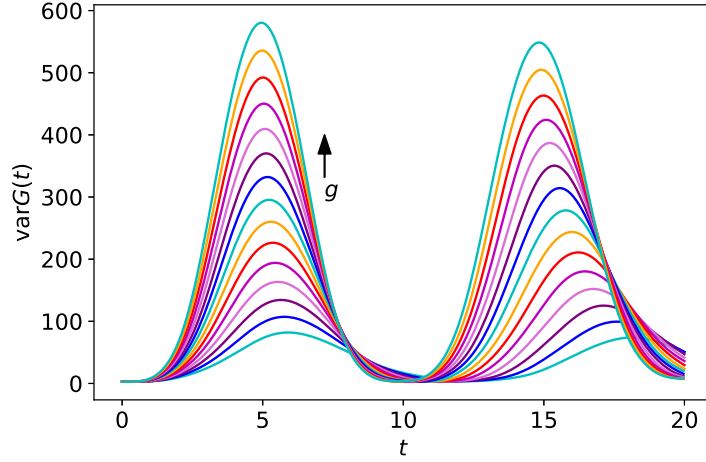
където Δ е честотната настройка на ефективната спин система и \hat{a}^\dagger , \hat{a} са съответно операторите за раждане и унищожение на бозонно възбуждане, съответстващо на осцилатор с честота ω . Параметърът g характеризира диполярното спин-бозонно взаимодействие. Квантовият модел на Раби показва квантов фазов преход с краен размер при критичен параметър $g_c = \sqrt{\Delta\omega}/2$ в ефективна термодинамична граница $\eta \rightarrow \infty$. Двете фази на системата са нормална фаза за $g < g_c$, характеризираща се с нулево средно поле на бозонни възбуждения и поляризиран спин по оста z , и свръх-радиантна фаза за $g > g_c$ с ненулева намагнитване по оста x и макроскопично възбудено бозонно състояние.

12.3 Мярка за квантов хаос

За изследване на квантов хаос в квантовия Раби модел, ние използваме корелационни функция (ОТОС)

$$F(t) = \langle \hat{W}^\dagger(t) \hat{V}^\dagger \hat{W}(t) \hat{V} \rangle, \quad (275)$$

където осредняваме по първоначалното състояние $|\psi_0\rangle$. ОТОС количествено определя степента на некомутативност във времето между два



Фигура 34: Времевата еволюция на ОТОС за квантовия Раби модел от първоначално състояние $|\psi_0\rangle = |+, 5\rangle$. Параметърът на взаимодействие варира от $g = 7$ до $g = 14$ на стъпки от 0,5, $\eta = 200$.

първоначално ($t = 0$) комутиращи оператора $[\hat{W}, \hat{V}] = 0$, чиято еволюция във времето се дава от хамилтониана на системата като $\hat{W}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{W}e^{-i\hat{H}t}$. Нещо повече, ОТОС може да се разглежда като естествено продължение на идеята за класическия хаос чрез съответствието между фазовите скоби на Поасон и комутатора в квантовата механика, тъй като $1 - \Re[F(t)] = \langle [\hat{V}^\dagger, \hat{W}^\dagger(t)][\hat{W}(t), \hat{V}] \rangle / 2 \sim e^{\lambda_Q t}$, където λ_Q е квантовата експонента на Ляпунов, свързан с настъпването на хаос в системата. Ще изберем $F(t)$ с условието, че първоначалното състояние $|\psi_0\rangle$ е собствено състояние на \hat{V} и $\hat{W}_G = e^{i\delta\phi\hat{G}}$ с ермитов оператор \hat{G} , където $\delta\phi$ е малка пертурбация. Избираме \hat{V} да бъде проектор в първоначалното състояние $\hat{V} = \hat{\rho}(0) = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, където $|\psi_0\rangle = |+, 0\rangle$ ($\sigma_x |+, 0\rangle = |+, 0\rangle$). Получаваме

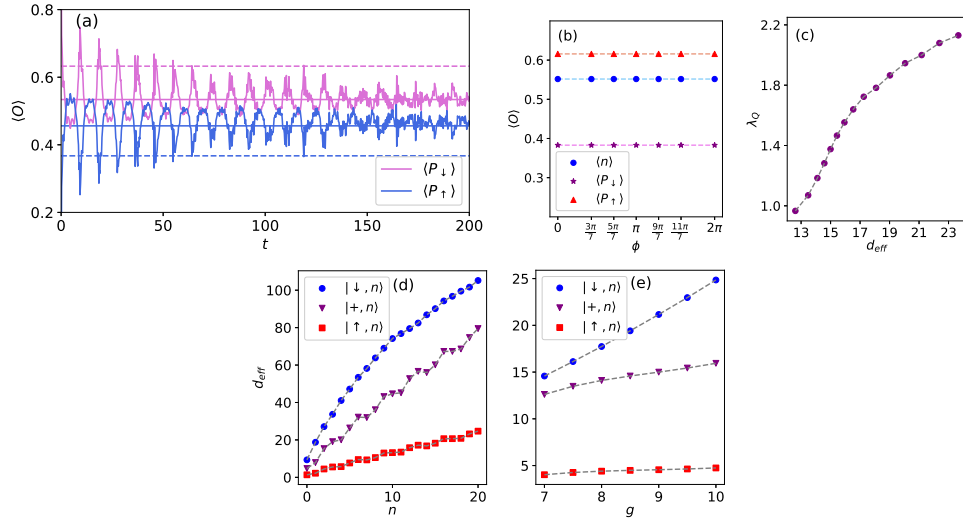
$$1 - F_G(t) = \delta\phi^2(\langle\hat{G}^2(t)\rangle - \langle\hat{G}(t)\rangle^2) = \delta\phi^2\text{var}\hat{G}(t). \quad (276)$$

На фиг. 32 е показано дисперсията на $\hat{G} = (\hat{a}^\dagger + \hat{a})/2$. Ясна разлика в поведението на ОТОС се наблюдава в двете квантови фази. В нормалната фаза ($g < g_c$) ОТОС осцилира с амплитуда, независима от η , вижте фиг. 32. В свръх-радиантната фаза ($g > g_c$) наблюдаваме експоненциален растеж на ОТОС в началото на еволюцията на времето, което се свързва с началото на квантовия хаос чрез отношението (276).

Експоненциалното нарастване се наблюдава след кратко време на бавна динамика без видимо нарастване на ОТОС. От тук можем да извлечем квантовата експонента на Ляпунов $(1 - F_G(t))/\delta\phi^2 \sim e^{\lambda_Q(g,\omega,\Delta)t}$. Забелязваме, че с увеличаването на η ОТОС нараства и достига максималната си стойност във времето дефинирано с t^* , след което всяка първоначална локална информация за системата се разпространява глобално сред нейните степени на свобода. След времето t^* ОТОС показва осцилиращо поведение, характеризиращо се с периодично възникване на максимално насищане. На фиг. 33 показваме точния резултат за времето t^* като функция на параметъра η . Откриваме, че t^* се държи като $t^* \sim a \log(\eta) + b \log^2(\eta)$, като a и b са подходящи параметри. Освен това намираме отношението $\lambda_Q(g, \omega, \Delta)t^* \sim \log \eta$, както е показано на фиг. 33. Накрая, отбелязваме, че ОТОС и експонентата на Ляпунов се увеличават с g , докато времето на насищане t^* остава почти постоянно, което прави квантовата Раби системата по-хаотична за по-силно спин-бозонно взаимодействие, виж фиг. 34.

12.4 Преход към равновесие

Накрая, нека изследваме условието за равновесие на спиновата система, което изисква ефективната размерност на осреднената по времето матрица на плътност, дефинирана с $d_{\text{eff}} = (\sum_k |c_k|^4)^{-1}$ да бъде много по-голямо от d_s^2 ($d_{\text{eff}} \gg d_s^2$), където $d_s = 2$ е размерността на спиновата система [114, 115]. Това условие гарантира, че първоначалното състояние е съставено от голям брой собствени състояния, така че бозонната степен на свобода действа като ефективна среда, свързана със спина. На фиг. 35(с) и 35(д) показваме d_{eff} за различни първоначални състояния на спина. Виждаме, че за всички начални състояния d_{eff} нараства с броя на бозоните n [116]. Това води до потискане на времевите флуктуации и следователно до преход към равновесие на спин системата, която остава близо до средната си по време стойност, както е показано на фиг. 35(а). Накрая отбелязваме, че за голяма ефективна размерност d_{eff} първоначалната локална информация се разпространява между голям брой собствени състояния, което увеличава $\lambda_Q(g, \omega, \Delta)$ и по този начин прави Раби системата е по-хаотична, вижте фиг. 35(с).



Фигура 35: (а) Еволюция във времето на спиновите заселености от начално състояние $|\psi_0\rangle = |\downarrow, 20\rangle$ за $\omega\Delta = 100$, $\eta = 200$, $g = 15$. (б) Средна стойност на спиновите заселености (червени триъгълници и лилави звезди) и средно число на бозона (сини точки) за различни начални състояния и $\eta = 100$, $g = 10$. (в) Квантовата експонента на Ляпунов като функция на d_{eff} чрез вариране на g , $\omega\Delta = 100$, $\eta = 200$, $|\psi_0\rangle = |+, 5\rangle$. (д) Ефективна размерност на осреднения по време оператор на плътност d_{eff} като функция на n за $\eta = 200$, $g = 15$. (е) Същото, но като функция на g за $n = 5$.

12.5 Заключение

В тази глава беше разгледана характеристика на хаос в квантовия модел на Раби, който показва квантов фазов преход от втори род в ефективна термодинамична граница. В свръх-радиантната фаза наблюдаваме появата на квантова експонента на Ляпунов и съответно на хаос в Раби модела. Показахме, че хаос и преход към равновесие са тясно свързани. Ефективната размерност на осреднената по времето матрица на плътност е по-голяма от размерността на спин системата. Следователно бозонната мода може да се разгледа като ефективна среда свързана със спина. Това води до намаляване на времевите осцилации на спин заселеностите и съответно на преход към равновесие.

13 Научни Приноси

В дисертацията са изследвани многочастични модели, които показват квантов фазов преход и могат да бъдат симулирани с йони в капан на Паул. Също така са изследвани критични системи за целите на квантовата метрология. Показано е, че системи, които търпят квантов фазов преход могат да бъдат използвани за свръх-прецизна квантова метрология. Разгледани са Ридбергови атоми в оптични резонатори, които могат да бъдат използвани за създаването на топологични фазови преходи. По-значимите резултати могат да се резюмират кратко, както следва (хронологично)

Симулиране на модел на взаимодействащи поларитони с йонен кристал. Поларитоните са квазичастици съставени от спиново и бозонно възбуждане. В йонен кристал спиновете са оформени от вътрешните състояния на йона, а бозонната степен на свобода е локалното трептене на йона около равновесното му положение. Ние предлагаме схема за симулиране на модела на Джейнс-Къминг-Хъбард с йони в капан на Паул, както и детайлно изследване на наблюдаемите величини, характеризиращи квантовия фазов преход. Първата експериментална работа на K. Toyoda et.al. Phys. Rev. Lett. 111, 160501 (2013), която демонстрира квантовия фазов преход на поларитони в йонен кристал следва нашата теоретична работа.

Аналитично изследване на фазовата диаграма на модела на Джейнс-Къминг-Хъбард. Моделът на Джейнс-Къминг-Хъбард е неинтегруем и намирането на точен резултат за критичната точка на квантов фазов преход между фаза на Мот изолатор и свръхфлуидна фаза е невъзможно. Ние предлагаме аналитичен подход, който апроксимира модела и позволява намиране на критичното отношение между параметъра на тунелиране и параметъра на спин-бозонно взаимодействие. Аналитичните резултати са сравнени с числени симулации, като показват много добро съвпадение.

Изследване на магнитни-структурни фазови преходи с йонен кристал. Ние предлагаме симулиране на взаимодействащи спинове и ансамбъл от бозони в йонен кристал. Изследвано е формирането на спин-бозонен кондензат и появата на квантов фазов преход, при който се преминава от линейна в зигзаг конфигурация на равновесните положения на йоните и съответно анти-ферромагнитна подредба на спиновете. За разлика от стандартния структурен фазов преход между линейна и

зигзаг йонна конфигурация, която е вследствие на отношението на честотите на капана, тук магнитния структурен фазов преход е причинен от квантови флуктуации при нулева температура. Квантовата фазова диаграма е изследвана с помощта на приближението на средното поле. Намерени са квантовите флуктуации и е показано, че спектъра се състои от три колективни моди. Ниско енергетичната мода съответства на Голдстонова мода, което е вследствие на нарушаването на $U(1)$ симетрия.

Изследване на спинови модели с йонен кристал. Спин-фононното взаимодействие може да създаде ефективно спин-спин сдвояване, където знака на взаимодействието може да се променя. Ние сме показали, че осцилиращо магнитно поле може да създаде взаимодействие между спинове с различна големина в йонен кристал. Разгледали сме конфигурацията от спин- $1/2$ и спин- 3 системи. Изследвали сме фазовата диаграма на различни спинови конфигурации. Предложили сме метод за измерването на различните фазови спин състояния.

Вмъкване на адиабатен магнитен поток и създаване на топологични Лафлин състояния на Ридбергови поларитони. Ние предлагаме метод за прехвърляне на орбитален момент от външно лазерно поле върху фотони в оптичен резонатор, чрез използване на атомна среда като посредник и стимулиран Раманов адиабатен преход. Предложена е схема за създаване на топологични състояния на Лафлин между Ридбергови поларитони, които са формирани от Ридбергови атоми и фотони.

Адиабатна квантова метрология със силно корелирани квантови системи. Изследвана е квантова метрология със системи, които показват квантов фазов преход. Като пример е разгледан квантовия модел на Дике, който показва квантов фазов преход от втори род между нормална фаза и свръх-радиантна фаза. Показано е, че системата е чувствителна към пертурбации, които нарушават симетрията на модела. Предложен е метрологичен протокол, който се основава на адиабатен преход между двете квантови фази и може да бъде използван за измерване на честоти с Хайзенбергова прецизност.

Измерване на слаби сили с йон в капан на Паул. Показали сме, че йон в капан на Паул, може да бъде използван като свръх-прецизен квантов сензор за измерване на осцилиращи сили от порядък на 10^{-24} N. Техниката използва спин-фононно взаимодействие, което се създава чрез външно лазерно поле. Адиабатен преход създава състояние на котката на Шрьодингер с амплитуди пропорционални на приложената сила. Из-

мерването на силата става чрез измерването на спиновите заселености. Важно преимущество е подобряването на чувствителността чрез увеличаване на параметъра на спин-фононото взаимодействие. Също така са предложени методи за потискане на дефазиращи процеси на загуба на спин кохерентност чрез използването на декуплиращи полета, които водят до увеличаване на кохерентното време и следователно до увеличаване на чувствителността на измерването.

Квантова метрология с отворени квантови системи. Обикновено физичните системи са отворени, тоест има взаимодействие между системата и средата. Ние сме показали, че загубата на бозонно възбуждане и кохерентната динамика в решетъчния модел на Раби водят то стационарно състояние, което може да има неаналитично поведение в точката на дисипативен фазов преход. Показали сме, че дисипативния фазов преход може да бъде използван за подобряване на чувствителността на измерването на един или два параметъра.

Квантов термометър. Предложили сме нов метод за оптимално измерване на температурата на йонен кристал. Методът използва колективно спин-фононно взаимодействие за прехвърлянето на информацията за топлинното фононно разпределение върху атомните възбуждания. Спин-фононото взаимодействие се създава от лазерно поле с лазерна честота близка до червения преход на колективната мода на център на масите. Чрез измерване на атомните заселености температурата се определя с минимална статистическа неопределеност.

Квантов хаос в квантовия модел на Раби. Изследвали сме поведението на "out-of-time-order correlator" (ОТОС) в квантовия модел на Раби, който показва квантов фазов преход в ефективна термодинамична граница. В свръх-радиантната фаза е показано, че ОТОС нараства експоненциално, от където може да се определи квантовата експонента на Ляпунов. Ние сме показали, че експоненциалното нарастване на ОТОС води до преход към равновесие на спин системата.

Литература

- [1] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, Rev. Mod. Phys. **75**, 281 (2003).

- [2] K. Singer, U. Poschinger, M. Murphy, P. Ivanov, F. Ziesel, T. Calarco, and F. Schmidt-Kaler, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2609 (2010).
- [3] D. F. V. James, *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **66**, 181 (1998).
- [4] C. Marquet, F. Schmidt-Kaler, and D. F. V. James, *App. Phys. B* **76**, 199 (2003).
- [5] D. Porras and J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 263602 (2004).
- [6] X. L. Deng, D. Porras, and J. I. Cirac, *Phys. Rev. A* **77**, 033403 (2008).
- [7] R. Blatt and D. Wineland, *Nature* **453**, 1008 (2008).
- [8] D. J. Wineland *et al.*, *J. Res. Natl. Inst. Technol.* **103**, 259 (1998).
- [9] H. Häfner, C. F. Roos, and R. Blatt, *Phys. Rep.* **469**, 155 (2008).
- [10] P. J. Lee, K.-A. Brickman, L. Deslauriers, P. C. Haljan, L.-M. Duan, and C. Monroe, *J. Opt. B* **7**, 371 (2005).
- [11] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, and D. J. Wineland, *Science* **272**, 1131 (1996).
- [12] C. Schneider, D. Porras, and T. Schaetz, *Rep. Prog. Phys.* **75**, 024401 (2012).
- [13] J. Koch and K. Le Hur, *Phys. Rev. A* **80**, 023811 (2009).
- [14] P. Pippan, H. G. Evertz, and M. Hohenadler, *Phys. Rev. A* **80**, 033612 (2009).
- [15] S. Schmidt and G. Blatter, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 086403 (2009).
- [16] D. Rossini and R. Fazio, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 186401 (2007).
- [17] A. D. Greentree *et al.*, *Nat. Phys.* **2**, 856 (2006).
- [18] C. Emary and T. Brandes, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 044101 (2003); C. Emary and T. Brandes, *Phys. Rev. E* **67**, 066203 (2003).
- [19] N. Schine, A. Ryou, A. Gromov, A. Sommer and J. Simon, *Nature* **534**, 671 (2016).

- [20] A. Sommer and J. Simon, *New J. Phys.* **18**, 035008 (2016).
- [21] M. F. Andersen, C. Ryu, Pierre Clade, Vasant Natarajan, A. Vaziri, K. Helmerson, and W. D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 170406 (2006).
- [22] D. Safranek, *Phys. Rev. A* **95**, 052320 (2017).
- [23] M. G. A. Paris, *Int. J. Quantum. Inf.* **7**, 125 (2009).
- [24] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
- [25] B. Garraway, *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **369**, 1137 (2011).
- [26] P. A. Ivanov, D. Porras, S. S. Ivanov, and F. Schmidt-Kaler, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **46**, 104003 (2013).
- [27] K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke, and T. Esslinger, *Nature* **464**, 1301 (2010).
- [28] K. Baumann, R. Mottl, F. Brennecke, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 140402 (2011).
- [29] K. Hepp and E. H. Lieb, *Phys. Rev. A* **8**, 2517 (1973).
- [30] C. Emary and T. Brandes, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 044101 (2003).
- [31] H. J. Mamin and D. Rugar, *Appl. Phys. Lett.* **79**, 3358 (2001).
- [32] R. Maiwald, D. Leibfried, J. Britton, J. C. Bergquist, G. Leuchs, and D. J. Wineland, *Nat. Phys.* **5**, 551 (2009).
- [33] W. J. Munro, K. Nemoto, G. J. Milburn, and S. L. Braunstein, *Phys. Rev. A* **66**, 023819 (2002).
- [34] J. Anandan and Y. Aharonov, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1697 (1990).
- [35] M. J. Biercuk, H. Uys, J. W. Britton, A. P. VanDevender and J. J. Bollinger, *Nat. Nanotechnol.* **5**, 646 (2010).
- [36] R. Maiwald, D. Leibfried, J. Britton, J. C. Bergquist, G. Leuchs and D. J. Wineland, *Nat. Phys.* **5**, 551 (2009).
- [37] L. Viola, E. Knill, and S. Lloyd, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2417 (1999).

- [38] W. Yang, Z.-Y. Wang, and R.-B. Liu, *Front. Phys.* **6**, 1 (2010).
- [39] Shi-Biao Zheng, *Phys. Rev. A* **66**, 060303(R) (2002).
- [40] E. Solano, G. S. Agarwal, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 027903 (2003).
- [41] N. Timoney, I. Baumgart, M. Johanning, A. F. Varon. M. B. Plenio, A. Retzker, and Ch. Wunderlich, *Nature* **476**, 185 (2011).
- [42] S. C. Webster, S. Weidt, K. Lake, J. J. McLoughlin, and W. K. Hensinger, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 140501 (2013).
- [43] S. F. Huelga, C. Macchiavello, T. Pellizzari, A. K. Ekert, M. B. Plenio, J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3865 (1997).
- [44] H. J. Lipkin, N. Meshkov, and A. Glick, *Nucl. Phys.* **62**, 188 (1965).
- [45] S. Boixo, A. Datta, S. T. Flammia, A. Shaji, E. Bagan, and C. M. Caves, *Phys. Rev. A* **77**, 012317 (2008).
- [46] D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R. B. Blakestad, J. Chiaverini, D. B. Hume, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle, and D. J. Wineland, *Nature* **438**, 639 (2005).
- [47] T. Monz, P. Schindler, J. T. Barreiro, M. Chwalla, D. Nigg, W. A. Coish, M. Harlander, W. Hänsel, M. Hennrich, and R. Blatt, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 130506 (2011).
- [48] P. Zanardi, M. G. A. Paris, and L. C. Venuti, *Phys. Rev. A* **78**, 042105 (2008).
- [49] P. A. Ivanov and D. Porras, *Phys. Rev. A* **88**, 023803 (2013).
- [50] G. Salvatori, A. Mandarino, and M. G. A. Paris, *Phys. Rev. A* **90**, 022111 (2014).
- [51] K. Macieszczak, M. Guta, I. Lesanovsky, and J. P. Garrahan, *Phys. Rev. A* **93**, 022103 (2016).
- [52] M. M. Rams, P. Sierant, O. Dutta, P. Horodecki, and J. Zakrzewski, *Phys. Rev. X* **8**, 021022 (2018).

- [53] D. Braun, G. Adesso, F. Benatti, R. Floreanini, U. Marzolino, M. W. Mitchell, and S. Pirandola, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 035006 (2018).
- [54] L. Garbe, M. Bina, A. Keller, M. G. A. Paris, and S. Felicetti, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 120504 (2020).
- [55] L. Rezze, A. Trenkwalder, and M. Fattori, arXiv:1906.01447.
- [56] S. S. Mirkhalaf, E. Witkowska, and L. Lepori, *Phys. Rev. A* **101**, 043609 (2020).
- [57] P. C. Humphreys, M. Barbieri, A. Datta, and I. A. Walmsley, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 070403 (2013).
- [58] M. Gessner, L. Pezze, and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 130503 (2018).
- [59] L. Pezze, *et.al.*, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 130504 (2017).
- [60] F. Minganti, A. Biella, N. Bartolo, and C. Ciuti, *Phys. Rev. A* **98**, 042118 (2018).
- [61] P. A. Ivanov, *Phys. Scr.* **95**, 025103 (2020).
- [62] M. Szczykulska, T. Baumgratz, and A. Datta, *Adv. Phys. X* **1**, 621 (2016).
- [63] F. Albarelli, M. Barbieri, M. G. Genoni, and I. Gianani, *Phys. Lett. A*, 126311 (2020).
- [64] S. Braunstein, and C. M. Caves, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3439 (1994).
- [65] K. Matsumoto, *J. Phys. A* **35**, 3111 (2002).
- [66] S. Ragy, M. Jarzyna, and R. Demkowicz-Dobrzanski, *Phys. Rev. A* **94**, 052108 (2016).
- [67] C. Weedbrook, S. Pirandola, R. Garcia-Patron, N. J. Cerf, J. H. Shapiro, and S. Lloyd, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 621 (2012).
- [68] O. Pinel, P. Jian, N. Treps, C. Fabre, and D. Braun, *Phys. Rev. A* **88**, 040102(R) (2013).

- [69] M. G. Genoni, M. G. A. Paris, G. Adesso, H. Nha, P. L. Knight, and M. S. Kim, *Phys. Rev. A* **87**, 012107 (2013).
- [70] B. Kinkert, and F. Narberhaus, *Cell. Mol. Life Sci.* **66**, 2661 (2009).
- [71] M. Mehboudi, A. Sanpera, and L. A. Correa, *J. Phys. A* **52**, 303001 (2019).
- [72] A. De Pasquale, D. Rossini, R. Fazio, and V. Giovannetti, *Nat. Comm.* **7**, 12782 (2016).
- [73] J. Gemmer, M. Michel, and G. Mahler, *Quantum Thermodynamics* (Springer, Berlin/Heidelberg, 2009).
- [74] F. Seilmeier, M. Hauck, E. Schubert, G. J. Schinner, S. E. Beavan, and A. Högele, *Phys. Rev. Applied* **2**, 024002 (2014).
- [75] F. Haupt, A. Imamoglu, and M. Kroner, *Phys. Rev. Applied* **2**, 024001 (2014).
- [76] C. Sabin, A. White, L. Hackermuller, and I. Fuentes, *Sci. Rep.* **4**, 6436 (2014).
- [77] P. Neumann, *et al.*, *Nano Lett.* **13**, 2738 (2013).
- [78] G. Kucsko, *et al.*, *Nature (London)* **500**, 54 (2013).
- [79] D. M. Toyli, *et al.*, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **110**, 8417 (2013).
- [80] M. Brunelli, S. Olivares, and M. G. A. Paris, *Phys. Rev. A* **84**, 032105 (2011).
- [81] M. Brunelli, S. Olivares, M. Paternostro, and M. G. A. Paris, *Phys. Rev. A* **86**, 012125 (2012).
- [82] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796 (1996).
- [83] J. Roßnagel, K. N. Tolazzi, F. Schmidt-Kaler, and K. Singer, *New J. Phys.* **17**, 045004 (2015).
- [84] Y. Wan, F. Gebert, F. Wolf, and P. O. Schmidt, *Phys. Rev. A* **91**, 043425 (2015).

- [85] F. Gebert, Y. Wan, F. Wolf, J. C. Heip, and P. O. Schmidt, *New J. Phys.* **18**, 013037 (2016).
- [86] A. Levy, M. Göb, Bo Deng, K. Singer, E. Torrontegui, and D. Wang, *New J. Phys.* **22**, 093020 (2020).
- [87] M. G. A. Paris, *J. Phys. A* **03LT02** (2016).
- [88] U. Marzolino and D. Braun, *Phys. Rev. A* **88**, 063609 (2013).
- [89] L. A. Correa, M. Mehboudi, G. Adesso, and A. Sanpera, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 220405 (2015).
- [90] S. Campbell, M. Mehboudi, G. De Chiara, and M. Paternostro, *New J. Phys.* **19**, 103003 (2017).
- [91] S. Campbell, M. G. Genoni, S. Daffner, *Quantum Sci. Technol.* **3**, 025002 (2018).
- [92] P. A. Ivanov, *Opt. Commun.* **436**, 101 (2019).
- [93] I. E. Linington and N. V. Vitanov, Robust creation of arbitrary-sized Dicke states of trapped ions by global addressing, *Phys. Rev. A* **77**, 010302(R) (2008).
- [94] I. E. Linington, P. A. Ivanov, N. V. Vitanov, and M. B. Plenio, *Phys. Rev. A* **77**, 063837 (2008).
- [95] D. B. Hume, C. W. Chou, T. Rosenband, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. A* **80**, 052302 (2009).
- [96] K. Toyoda, T. Watanabe, T. Kimura, S. Nomura, S. Haza, and S. Urabe, *Phys. Rev. A* **83**, 022315 (2011).
- [97] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796 (1996).
- [98] S. Korenblit *et al.*, Quantum simulation of spin models on an arbitrary lattice with trapped ions, *New J. Phys.* **14**, 095024 (2012).
- [99] T. Olsacher, L. Postler, P. Schindler, T. Monz, P. Zoller, and L. M. Sieberer, Scalable and Parallel Tweezer Gates for Quantum Computing with Long Ion Strings, *PRX Quantum* **1**, 020316 (2020).

- [100] Q. Xie, H. Zhong, M. T. Batchelor, and C. Lee, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 113001 (2017).
- [101] J. S. Pedernales, I. Lizuain, S. Felicetti, G. Romero, L. Lamata, and E. Solano, *Sci. Rep.* **5**, 15472 (2015).
- [102] D. Lv, S. An, Z. Liu, J.-N. Zhang, J. S. Pedernales, L. Lamata, E. Solano, and K. Kim, *Phys. Rev. X* **8**, 021027 (2018).
- [103] M. Hwang, R. Puebla, M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 180404 (2015).
- [104] L. Bakemeier, A. Alvermann, H. Fehske, *Phys. Rev. A* **85**, 043821 (2012).
- [105] M.-L. Cai *et al.*, *Nature Commun.* **12**, 1126 (2021).
- [106] B. Swingle, *Nature Phys.* **14**, 988 (2018).
- [107] S. H. Shenker, D. Stanford, *J. High Energ. Phys.* **2014**, 67 (2014).
- [108] A. Bohrdt, C. B. Mendl, M. Endres, and M. Knap, *New J. Phys.* **19**, 063001 (2017).
- [109] H. Shen, P. Zhang, R. Fan, and H. Zhai, *Phys. Rev. B* **96**, 054503 (2017).
- [110] J. Maldacena, S. Shenker, D. Stanford, *J. High Energ. Phys.* **2016**, 106 (2016).
- [111] A. Bohrdt, C. B. Mendl, M. Endres, M. Knap, *New J. Phys.* **19**, 063001 (2017).
- [112] J. C.-Carlos *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 024101 (2019).
- [113] A. Keselman, L. Nie, E. Berg, *Phys. Rev. B* **103**, 121111 (2021).
- [114] N. Linden, S. Popescu, A. J. Short, and A. Winter, *Phys. Rev. E* **79**, 061103 (2009).
- [115] C. Gogolin, M. P. Müller, and J. Eisert, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 040401 (2011).

- [116] G. Clos, D. Porras, U. Warring, and T. Schaetz, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 170401 (2016).

14 Публикации, използвани в дисертацията

Общ брой статии на доц. д-р Петър Александров Иванов са 42, от които 23 статии са включени в дисертационният труд.

Индекс на Хирш 12

Брой на цитиранията 448 (без автоцитирания)

Тази дисертация се основава на 23 публикации в рецензирани международни списания, както следва:

N	Публикации включени в дисертационният труд за придобиване на научна степен "Доктор на науките"	Съществен принос	Група
1	K. Singer, U. Poschinger, M. Murphy, P. Ivanov , F. Ziesel, T. Calarco, and F. Schmidt-Kaler, " <i>Colloquium: Trapped Ions as quantum bits: Essential numerical tools</i> ", Rev. Mod. Phys. 82 , 2609 (2010).	НЕ	I(Q1)
2	P. A. Ivanov , S. S. Ivanov, N. V. Vitanov, A. Mering, M. Fleischhauer, and K. Singer, " <i>Simulation of a quantum phase transition of polaritons with trapped ions</i> ", Phys. Rev. A 80 , 060301(R) (2009).	ДА	I(Q1)
3	A. Mering, M. Fleischhauer, P. A. Ivanov , and K. Singer, " <i>Analytical approximations to the phase diagram of the Jaynes-Cummings-Hubbard model</i> ", Phys. Rev. A 80 , 053821 (2009).	ДА	I(Q1)
4	P. A. Ivanov , N. I. Karchev, N. V. Vitanov, and D. G. Angelakis, " <i>Quantum simulation of superexchange magnetism in linear ion crystals</i> ", Phys. Rev. A 90 , 012325 (2014).	ДА	I(Q1)
5	P. A. Ivanov , D. Porras, S. S. Ivanov, and F. Schmidt-Kaler, " <i>Simulation of the Jahn-Teller-Dicke magnetic structural phase transition with trapped ions</i> ", J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 46 , 104003 (2013).	ДА	I(Q2)

6	D. Porras, P. A. Ivanov , and F. Schmidt-Kaler, " <i>Quantum Simulation of the Cooperative Jahn-Teller Transition in 1d Ion Crystals</i> ", Phys. Rev. Lett. 108 , 235701 (2012).	ДА	I(Q1)
7	P. A. Ivanov , " <i>Collective Modes in the Cooperative Jahn-Teller Model: Path Integral Approach</i> ", J. Low Temp. Phys. 179 , 375 (2015).	ДА	I(Q2)
8	P. A. Ivanov and F. Schmidt-Kaler, " <i>Simulation of quantum magnetism in mixed-spin systems with impurity-doped ion crystals</i> ", New Journal of Physics 13 , 125008 (2011).	ДА	I(Q1)
9	T. G. Tenev, P. A. Ivanov and N. V. Vitanov, " <i>Proposal for trapped-ion emulation of the electric dipole moment of neutral relativistic particles</i> ", Phys. Rev. A 87 , 022103 (2013).	HE	I(Q1)
10	P. A. Ivanov , F. Letscher, J. Simon, and M. Fleischhauer " <i>Adiabatic flux insertion and growing of Laughlin states of cavity Rydberg polaritons</i> ", Phys. Rev. A 98 , 013847 (2018).	ДА	I(Q1)
11	L. S. Simeonov, N. V. Vitanov, and P. A. Ivanov " <i>Compensation of the trap-induced quadrupole interaction in trapped Rydberg ions</i> ", Scientific Reports 9 , 7340 (2019).	ДА	I(Q1)
12	P. A. Ivanov and D. Porras " <i>Adiabatic quantum metrology with strongly correlated quantum optical systems</i> ", Phys. Rev. A 88 , 023803 (2013).	ДА	I(Q1)
13	P. A. Ivanov , K. Singer, N. V. Vitanov, and D. Porras " <i>Quantum Sensors Assisted by Spontaneous Symmetry Breaking for Detecting Very Small Forces</i> ", Phys. Rev. Applied 4 , 054007 (2015).	ДА	I(Q1)
14	P. A. Ivanov , " <i>Enhanced Parameter Estimation with Periodically Driven Quantum Probe</i> ", Entropy 23 , 1333 (2021).	ДА	I(Q2)

15	P. A. Ivanov , " <i>Efficient approach for quantum sensing field gradients with trapped ions</i> ", Optics Commun. 405 , 355 (2017).	ДА	I(Q2)
16	P. A. Ivanov , N. V. Vitanov, and K. Singer " <i>High-precision force sensing using a single trapped ion</i> ", Scientific Reports 6 , 28078 (2016).	ДА	I(Q1)
17	P. A. Ivanov , " <i>Force sensors with precision beyond the standard quantum limit</i> ", Phys. Rev. A 94 , 022330 (2016).	ДА	I(Q1)
18	P. A. Ivanov and N. V. Vitanov, " <i>Quantum sensing of the phase-space-displacement parameters using a single trapped ion</i> ", Phys. Rev. A 97 , 032308 (2018).	ДА	I(Q1)
19	P. A. Ivanov , " <i>Steady-State Force Sensing with Single Trapped Ion</i> ", Phys. Scr. 95 , 025103 (2020).	ДА	I(Q2)
20	P. A. Ivanov , " <i>Enhanced two-parameter phase-space-displacement close to a dissipative phase transition</i> ", Phys. Rev A 102 , 052611 (2020).	ДА	I(Q1)
21	P. A. Ivanov , " <i>Quantum thermometry with trapped ions</i> ", Optics Communications 436 , 101 (2019).	ДА	I(Q2)
22	A. V. Kirkova, W. Li, and P. A. Ivanov , " <i>Adiabatic sensing technique for optimal temperature estimation using trapped ions</i> ", Phys. Rev. Research 3 , 013244 (2021)	ДА	I(Q1)
23	A. V. Kirkova, D. Porrás, and P. A. Ivanov , " <i>Out-of-time-order correlator in the quantum Rabi model</i> ", Phys. Rev. A 105 , 032444 (2022)	ДА	I(Q1)

N	Публикации използвани в дисертация за придобиване на образователна и научна степен "Доктор"	Съществен принос	Група
---	---	------------------	-------

1	P. A. Ivanov , N. V. Vitanov, and K. Bergmann, " <i>Effect of dephasing on stimulated Raman adiabatic passage</i> Phys. Rev. A 70 , 063409 (2004)	ДА	I(Q1)
2	P. A. Ivanov , N. V. Vitanov, and K. Bergmann, " <i>Spontaneous emission in stimulated Raman adiabatic passage</i> Phys. Rev. A 72 , 053412 (2005)	ДА	I(Q1)
3	P. A. Ivanov and N. V. Vitanov, " <i>State reconstruction of a qutrit by a minimal set of discrete measurements</i> Optics Communications 264 , 368 (2006)	ДА	I(Q2)
4	P. A. Ivanov and N. V. Vitanov, " <i>Adiabatic evolution amidst dephasing</i> Phys. Rev. A 71 , 063407 (2005)	ДА	I(Q1)
5	P. A. Ivanov , E. S. Kyoseva, and N. V. Vitanov, " <i>Engineering of arbitrary $U(N)$ transformations by quantum Householder reflections</i> Phys. Rev. A 74 , 022323 (2006)	ДА	I(Q1)
6	P. A. Ivanov , B. T. Torosov, and N. V. Vitanov " <i>Navigation between quantum states by quantum mirrors</i> Phys. Rev. A 75 , 012323 (2007)	ДА	I(Q1)
7	P. A. Ivanov and N. V. Vitanov " <i>Synthesis of arbitrary unitary transformations of collective states of trapped ions by quantum Householder reflections</i> Phys. Rev. A 77 , 012335 (2008)	ДА	I(Q1)
8	P. A. Ivanov N. V. Vitanov, M. B. Plenio " <i>Creation of cluster states of trapped ions by collective addressing</i> Phys. Rev. A 78 , 012323 (2008)	ДА	I(Q1)
9	I. E. Linington, P. A. Ivanov , N. V. Vitanov, and M. B. Plenio, " <i>Robust control of quantized motional states of a chain of trapped ions by collective adiabatic passage</i> Phys. Rev. A 77 , 063837 (2008)	ДА	I(Q1)